

Сформулируем правило запоминания формулы (22.1): производная степенно-показательной функции равна сумме производной показательной функции, при условии $u = \text{const}$, и производной степенной функции, при условии $v = \text{const}$.

Пример 22.2. Найти производную функции $y = (\sin 2x)^{x^2+1}$.

○ Решение: Пользуясь формулой (22.1), получаем:

$$y' = (\sin 2x)^{x^2+1} \cdot \ln \sin 2x \cdot 2x + (x^2 + 1)(\sin 2x)^{x^2} \cdot \cos 2x \cdot 2. \quad \bullet$$

Отметим, что запоминать формулу (22.1) необязательно, легче запомнить суть логарифмического дифференцирования.

§ 23. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

23.1. Производные высших порядков явно заданной функции

Производная $y' = f'(x)$ функции $y = f(x)$ есть также функция от x и называется *производной первого порядка*.

Если функция $f'(x)$ дифференцируема, то ее производная называется *производной второго порядка* и обозначается y'' (или $f''(x)$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$, $\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)$, $\frac{dy'}{dx}$). Итак, $y'' = (y')'$.

Производная от производной второго порядка, если она существует, называется *производной третьего порядка* и обозначается y''' (или $f'''(x)$, $\frac{d^3 y}{dx^3}$, $\dots$). Итак, $y''' = (y'')'$.

Производной n -го порядка (или n -й производной) называется производная от производной $(n-1)$ порядка:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'.$$

Производные порядка выше первого называются *производными высших порядков*.

Начиная с производной четвертого порядка, производные обозначают римскими цифрами или числами в скобках (y^V или $y^{(5)}$ — производная пятого порядка).

Пример 23.1. Найти производную 13-го порядка функции $y = \sin x$.

○ Решение:

$$\begin{aligned}
 y' &= (\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \\
 y'' &= (y')' = (\cos x)' = -\sin x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 2\right), \\
 y''' &= (-\sin x)' = -\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 3\right), \\
 y^{IV} &= (-\cos x)' = \sin x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 4\right), \\
 &\dots\dots\dots \\
 y^{(13)} &= \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 13\right).
 \end{aligned}$$

23.2. Механический смысл производной второго порядка

Пусть материальная точка M движется прямолинейно по закону $S = f(t)$. Как уже известно, производная S'_t равна скорости точки в данный момент времени: $S'_t = V$.

Покажем, что *вторая производная от пути по времени есть величина ускорения прямолинейного движения точки*, т. е. $S''_t = a$.

Пусть в момент времени t скорость точки равна V , а в момент $t + \Delta t$ — скорость равна $V + \Delta V$, т. е. за промежуток времени Δt скорость изменилась на величину ΔV .

Отношение $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ выражает среднее ускорение движения точки за время Δt . Предел этого отношения при $\Delta t \rightarrow 0$ называется ускорением точки M в данный момент t и обозначается буквой a : $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = a$, т. е. $V' = a$.

Но $V = S'_t$. Поэтому $a = (S'_t)'$, т. е. $a = S''_t$

23.3. Производные высших порядков неявно заданной функции

Пусть функция $y = f(x)$ задана неявно в виде уравнения $F(x; y) = 0$.

Продифференцировав это уравнение по x и разрешив полученное уравнение относительно y' , найдем производную первого порядка (первую производную). Продифференцировав по x первую производную, получим вторую производную от неявной функции. В нее войдут x, y и

y' . Подставляя уже найденное значение y' в выражение второй производной, выразим y'' через x и y .

Аналогично поступаем для нахождения производной третьего (и дальше) порядка.

Пример 23.2. Найти y''' , если $x^2 + y^2 = 1$.

○ Решение: Дифференцируем уравнение $x^2 + y^2 - 1 = 0$ по x : $2x + 2y \cdot y' = 0$. Отсюда $y' = -\frac{x}{y}$. Далее имеем: $y'' = -\frac{1 \cdot y - x \cdot y'}{y^2}$, т. е.

$$y'' = -\frac{y - x \cdot \left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3} = -\frac{1}{y^3} \quad (\text{так как } x^2 + y^2 = 1), \text{ следовательно, } y''' = -\frac{-1 \cdot 3y^2 \cdot y'}{y^6} = \frac{3}{y^4} \cdot \left(-\frac{x}{y}\right) = -\frac{3x}{y^5}.$$

23.4. Производные высших порядков от функций, заданных параметрически

Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

Как известно, первая производная y'_x находится по формуле

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \quad (23.1)$$

Найдем вторую производную от функции заданной параметрически.

Из определения второй производной и равенства (23.1) следует, что

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = (y'_x)'_t \cdot t'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t},$$

т. е.

$$\boxed{y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}}. \quad (23.2)$$

Аналогично получаем

$$y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}, \quad y^{IV}_{xxxx} = \frac{(y'''_{xxx})'_t}{x'_t}, \quad \dots$$

Пример 23.3. Найти вторую производную функции $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$

○ Решение: По формуле (23.1)

$$y'_x = \frac{(\sin t)'_t}{(\cos t)'_t} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\operatorname{ctg} t.$$

Тогда по формуле (23.2)

$$y''_{xx} = \frac{(-\operatorname{ctg} t)'_t}{(\cos t)'_t} = \frac{\frac{1}{\sin^2 t}}{-\sin t} = -\frac{1}{\sin^3 t}.$$

Заметим, что найти y''_{xx} можно по преобразованной формуле (23.2):

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(\frac{y'_t}{x'_t})'_t}{x'_t} = \frac{y''_t \cdot x'_t - x''_t \cdot y'_t}{(x'_t)^3},$$

запоминать которую вряд ли стоит.

§ 24. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

24.1. Понятие дифференциала функции

Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке x отличную от нуля производную $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$. Тогда, по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции, можно записать $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$, или $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

Таким образом, приращение функции Δy представляет собой сумму двух слагаемых $f'(x) \cdot \Delta x$ и $\alpha \cdot \Delta x$, являющихся бесконечно малыми при $\Delta x \rightarrow 0$. При этом первое слагаемое есть бесконечно малая функция одного порядка с Δx , так как $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$, а второе слагаемое есть бесконечно малая функция более высокого порядка, чем Δx :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 0.$$

Поэтому первое слагаемое $f'(x) \cdot \Delta x$ называют **главной частью приращения** функции Δy .

⇒ **Дифференциалом функции** $y = f(x)$ в точке x называется главная часть ее приращения, равная произведению производной функции на приращение аргумента, и обозначается dy (или $df(x)$):

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x. \quad (24.1)$$

Дифференциал dy называют также **дифференциалом первого порядка**. Найдем дифференциал независимой переменной x , т. е. дифференциал функции $y = x$.

Так как $y' = x' = 1$, то, согласно формуле (24.1), имеем $dy = dx = \Delta x$, т. е. дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной: $dx = \Delta x$.

Поэтому формулу (24.1) можно записать так:

$$\boxed{dy = f'(x)dx}, \quad (24.2)$$

иными словами, **дифференциал функции равен произведению производной этой функции на дифференциал независимой переменной.**

Из формулы (24.2) следует равенство $\frac{dy}{dx} = f'(x)$. Теперь обозначение производной $\frac{dy}{dx}$ можно рассматривать как отношение дифференциалов dy и dx .

Пример 24.1. Найти дифференциал функции

$$f(x) = 3x^2 - \sin(1 + 2x).$$

○ Решение: По формуле $dy = f'(x) dx$ находим

$$dy = (3x^2 - \sin(1 + 2x))' dx = (6x - 2 \cos(1 + 2x)) dx.$$

Пример 24.2. Найти дифференциал функции

$$y = \ln(1 + e^{10x}) + \sqrt{x^2 + 1}.$$

Вычислить dy при $x = 0$, $dx = 0,1$.

○ Решение:

$$dy = (\ln(1 + e^{10x}) + \sqrt{x^2 + 1})' dx = \left(\frac{10e^{10x}}{1 + e^{10x}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) dx.$$

Подставив $x = 0$ и $dx = 0,1$, получим

$$dy \Big|_{\substack{x=0, \\ dx=0,1}} = \left(\frac{10}{2} + 0 \right) 0,1 = 0,5.$$

24.2. Геометрический смысл дифференциала функции

Выясним геометрический смысл дифференциала.

Для этого проведем к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x; y)$ касательную MT и рассмотрим ординату этой касательной для точки $x + \Delta x$ (см. рис. 138). На рисунке $|AM| = \Delta x$, $|AM_1| = \Delta y$. Из прямоугольного треугольника MA_1B имеем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|AB|}{\Delta x}, \text{ т. е. } |AB| = \operatorname{tg} \alpha \cdot \Delta x.$$

Но, согласно геометрическому смыслу производной, $\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$. Поэтому $AB = f'(x) \cdot \Delta x$.

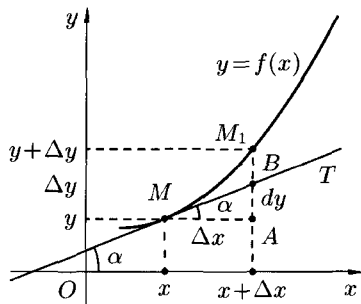


Рис. 138

☉ Сравнивая полученный результат с формулой (24.1), получаем $dy = AB$, т. е. *дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке, когда x получит приращение Δx .*

В этом и состоит геометрический смысл дифференциала.

24.3. Основные теоремы о дифференциалах

Основные теоремы о дифференциалах легко получить, используя связь дифференциала и производной функции ($dy = f'(x) dx$) и соответствующие теоремы о производных.

Например, так как производная функции $y = c$ равна нулю, то дифференциал постоянной величины равен нулю: $dy = c' dx = 0 \cdot dx = 0$.

Теорема 24.1. Дифференциал суммы, произведения и частного двух дифференцируемых функций определяются следующими формулами

$$\begin{aligned}d(u + v) &= du + dv, \\d(uv) &= v \cdot du + u \cdot dv, \\d\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{v du - u dv}{v^2} \quad (v \neq 0).\end{aligned}$$

□ Докажем, например, вторую формулу. По определению дифференциала имеем:

$$d(uv) = (uv)' dx = (u'v + uv') dx = v \cdot u' dx + u \cdot v' dx = v du + u dv. \quad \blacksquare$$

Теорема 24.2. Дифференциал сложной функции равен произведению производной этой функции по промежуточному аргументу на дифференциал этого промежуточного аргумента.

□ Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ две дифференцируемые функции, образующие сложную функцию $y = f(\varphi(x))$. По теореме о производной сложной функции можно написать

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Умножив обе части этого равенства на dx , получаем $y'_x dx = y'_u u'_x dx$. Но $y'_x dx = dy$ и $u'_x dx = du$. Следовательно, последнее равенство можно переписать так:

$$dy = y'_u \cdot du. \quad \blacksquare$$

Сравнивая формулы $dy = y'_x \cdot dx$ и $dy = y'_u \cdot du$, видим, что первый дифференциал функции $y = f(x)$ определяется одной и той же формулой независимо от того, является ли ее аргумент независимой переменной или является функцией другого аргумента.

 Это свойство дифференциала называют **инвариантностью (неизменностью) формы первого дифференциала**.

Формула $dy = y'_x \cdot dx$ по внешнему виду совпадает с формулой $dy = y'_u \cdot du$, но между ними есть принципиальное отличие: в первой формуле x — независимая переменная, следовательно, $dx = \Delta x$, во второй формуле u есть функция от x , поэтому, вообще говоря, $du \neq \Delta u$.

С помощью определения дифференциала и основных теорем о дифференциалах легко преобразовать таблицу производных в таблицу дифференциалов.

Например, $d(\cos u) = (\cos u)'_u \cdot du = -\sin u \cdot du$.

24.4. Таблица дифференциалов

1. $d(u \pm v) = du \pm dv$;
2. $d(u \cdot v) = v du + u dv$, в частности, $d(cu) = c \cdot du$;
3. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$, в частности, $d\left(\frac{c}{v}\right) = -\frac{c dv}{v^2}$;
4. $dy = y'_x dx$, если $y = f(x)$;
5. $dy = y'_u \cdot du$, если $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$;
6. $dc = 0$;
7. $d(u^\alpha) = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot du$;
8. $d(a^u) = a^u \cdot \ln a \cdot du$, в частности, $d(e^u) = e^u \cdot du$;
9. $d(\log_a u) = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot du$, в частности, $d(\ln u) = \frac{1}{u} \cdot du$;
10. $d(\sin u) = \cos u du$;
11. $d(\cos u) = -\sin u du$;
12. $d(\operatorname{tg} u) = \frac{1}{\cos^2 u} du$;
13. $d(\operatorname{ctg} u) = -\frac{1}{\sin^2 u} du$;
14. $d(\arcsin u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$;
15. $d(\arccos u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$;
16. $d(\operatorname{arctg} u) = \frac{1}{1+u^2} du$;
17. $d(\operatorname{arcctg} u) = -\frac{1}{1+u^2} du$;
18. $d(\operatorname{sh} u) = \operatorname{ch} u du$;
19. $d(\operatorname{ch} u) = \operatorname{sh} u du$;
20. $d(\operatorname{th} u) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} du$;
21. $d(\operatorname{cth} u) = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} du$.

24.5. Применение дифференциала к приближенным вычислениям

Как уже известно, приращение Δy функции $y = f(x)$ в точке x можно представить в виде $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$, где $\alpha \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$, или $\Delta y = dy + \alpha \cdot \Delta x$. Отбрасывая бесконечно малую $\alpha \cdot \Delta x$ более высокого порядка, чем Δx , получаем приближенное равенство

$$\Delta y \approx dy, \quad (24.3)$$

причем это равенство тем точнее, чем меньше Δx .

☞ Это равенство позволяет с большой точностью вычислять приближенно приращение любой дифференцируемой функции.

Дифференциал обычно находится значительно проще, чем приращение функции, поэтому формула (24.3) широко применяется в вычислительной практике.

Пример 24.3. Найти приближенное значение приращения функции $y = x^3 - 2x + 1$ при $x = 2$ и $\Delta x = 0,001$.

○ Решение: Применяем формулу (24.3): $\Delta y \approx dy = (x^3 - 2x + 1)' \cdot \Delta x = (3x^2 - 2) \cdot \Delta x$.

$$dy \Big|_{\substack{x=2 \\ \Delta x=0,001}} = (3 \cdot 4 - 2) \cdot 0,001 = 10 \cdot 0,001 = 0,01.$$

Итак, $\Delta y \approx 0,01$.

Посмотрим, какую погрешность допустили, вычислив дифференциал функции вместо ее приращения. Для этого найдем Δy :

$$\begin{aligned} \Delta y &= ((x + \Delta x)^3 - 2(x + \Delta x) + 1) - (x^3 - 2x + 1) = \\ &= x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 2x - 2 \cdot \Delta x + 1 - x^3 + 2x - 1 = \\ &= \Delta x(3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - 2); \end{aligned}$$

$$\Delta y \Big|_{\substack{x=2 \\ \Delta x=0,001}} = 0,001(3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \cdot 0,001 + 0,001^2 - 2) = 0,010006.$$

Абсолютная погрешность приближения равна

$$|\Delta y - dy| = |0,010006 - 0,01| = 0,000006. \quad \bullet$$

Подставляя в равенство (24.3) значения Δy и dy , получим

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \cdot \Delta x$$

или

$$\boxed{f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x.} \quad (24.4)$$

Формула (24.4) используется для вычислений приближенных значений функций.

Пример 24.4. Вычислить приближенно $\operatorname{arctg} 1,05$.

○ Решение: Рассмотрим функцию $f(x) = \operatorname{arctg} x$. По формуле (24.4) имеем:

$$\operatorname{arctg}(x + \Delta x) \approx \operatorname{arctg} x + (\operatorname{arctg} x)' \cdot \Delta x,$$

т. е.

$$\operatorname{arctg}(x + \Delta x) \approx \operatorname{arctg} x + \frac{\Delta x}{1 + x^2}.$$

Так как $x + \Delta x = 1,05$, то при $x = 1$ и $\Delta x = 0,05$ получаем:

$$\operatorname{arctg} 1,05 \approx \operatorname{arctg} 1 + \frac{0,05}{1 + 1} = \frac{\pi}{4} + 0,025 \approx 0,810. \quad \bullet$$

Можно показать, что абсолютная погрешность формулы (24.4) не превышает величины $M \cdot (\Delta x)^2$, где M — наибольшее значение $|f''(x)|$ на сегменте $[x; x + \Delta x]$ (см. с. 196).

Пример 24.5. Какой путь пройдет тело при свободном падении на Луне за 10,04 с от начала падения. Уравнение свободного падения тела $H = \frac{g_{\text{л}} \cdot t^2}{2}$, $g_{\text{л}} = 1,6 \text{ м/с}^2$.

○ Решение: Требуется найти $H(10,04)$. Воспользуемся приближенной формулой ($\Delta H \approx dH$)

$$H(t + \Delta t) \approx H(t) + H'(t) \cdot \Delta t.$$

При $t = 10 \text{ с}$ и $\Delta t = dt = 0,04 \text{ с}$, $H'(t) = g_{\text{л}} t$, находим

$$H(10,04) \approx \frac{1,6 \cdot 100}{2} + 1,6 \cdot 10 \cdot 0,04 = 80 + 0,64 = 80,64 \text{ (м)}. \quad \bullet$$

Задача (для самостоятельного решения). Тело массой $m = 20 \text{ кг}$ движется со скоростью $v = 10,02 \text{ м/с}$. Вычислить приближенно кинетическую энергию тела ($E_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2}$; $E_{\text{к}}(10,02) \approx 1004 \text{ (Дж)}$).

24.6. Дифференциалы высших порядков

Пусть $y = f(x)$ дифференцируемая функция, а ее аргумент x — независимая переменная. Тогда ее первый дифференциал $dy = f'(x) dx$ есть также функция x ; можно найти дифференциал этой функции.

Дифференциал от дифференциала функции $y = f(x)$ называется ее вторым дифференциалом (или дифференциалом второго порядка) и обозначается $d^2 y$ или $d^2 f(x)$.

Итак, по определению $d^2 y = d(dy)$. Найдем выражение второго дифференциала функции $y = f(x)$.

Так как $dx = \Delta x$ не зависит от x , то при дифференцировании считаем dx постоянным:

$$d^2 y = d(dy) = d(f'(x) dx) = (f'(x) dx)' \cdot dx = f''(x) dx \cdot dx = f''(x)(dx)^2,$$

т. е.

$$d^2y = f''(x) dx^2. \quad (24.5)$$

Здесь dx^2 обозначает $(dx)^2$.

Аналогично определяется и находится дифференциал третьего порядка:

$$d^3y = d(d^2y) = d(f''(x) dx^2) = f'''(x)(dx)^3.$$

И, вообще, дифференциал n -го порядка есть дифференциал от дифференциала $(n-1)$ -го порядка: $d^n y = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x)(dx)^n$.

Отсюда находим, что $f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$. В частности, при $n = 1, 2, 3$ соответственно получаем:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}, \quad f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3},$$

т. е. производную функции можно рассматривать как отношение ее дифференциала соответствующего порядка к соответствующей степени дифференциала независимой переменной.

☉ Отметим, что все приведенные выше формулы справедливы только, если x — независимая переменная. Если же функцию $y = f(x)$, где x — **функция от какой-то другой независимой переменной**, то дифференциалы второго и выше порядков не обладают свойством инвариантности формы и вычисляются по другим формулам. Покажем это на примере дифференциала второго порядка.

Используя формулу дифференциала произведения $(d(u \cdot v) = v du + u dv)$, получаем:

$$d^2y = d(f'(x) dx) = d(f'(x)) dx + f'(x) \cdot d(dx) = f''(x) dx \cdot dx + f'(x) \cdot d^2x,$$

т. е.

$$d^2y = f''(x) dx^2 + f'(x) \cdot d^2x. \quad (24.6)$$

Сравнивая формулы (24.5) и (24.6), убеждаемся, что в случае сложной функции формула дифференциала второго порядка изменяется: появляется второе слагаемое $f'(x) \cdot d^2x$.

Ясно, что если x — независимая переменная, то

$$d^2x = d(dx) = d(1 \cdot dx) = dx \cdot d(1) = dx \cdot 0 = 0$$

и формула (24.6) переходит в формулу (24.5).

Пример 24.6. Найти d^2y , если $y = e^{3x}$ и x — независимая переменная.

○ Решение: Так как $y' = 3e^{3x}$, $y'' = 9e^{3x}$, то по формуле (24.5) имеем $d^2y = 9e^{3x} dx^2$. ●

Пример 24.7. Найти d^2y , если $y = x^2$ и $x = t^3 + 1$ и t — независимая переменная.

○ Решение: Используем формулу (24.6): так как

$$y' = 2x, \quad y'' = 2, \quad dx = 3t^2 dt, \quad d^2x = 6t dt^2,$$

то

$$\begin{aligned} d^2y &= 2dx^2 + 2x \cdot 6t dt^2 = 2(3t^2 dt)^2 + 2(t^3 + 1)6t dt^2 = \\ &= 18t^4 dt^2 + 12t^4 dt^2 + 12t dt^2 = (30t^4 + 12t) dt^2. \end{aligned}$$

Другое решение: $y = x^2$, $x = t^3 + 1$. Следовательно, $y = (t^3 + 1)^2$. Тогда по формуле (24.5)

$$d^2y = y'' \cdot dt^2,$$

т. е.

$$d^2y = (30t^4 + 12t) dt^2. \quad \bullet$$

§ 25. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ПРИ ПОМОЩИ ПРОИЗВОДНЫХ

25.1. Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях

Рассмотрим ряд теорем, имеющих большое теоретическое и прикладное значение.

Теорема 25.1 (Ролль). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале $(a; b)$ и на концах отрезка принимает одинаковые значения $f(a) = f(b)$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a; b)$, в которой производная $f'(x)$ обращается в нуль, т. е. $f'(c) = 0$

□ Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений (по теореме 19.4), соответственно, M и m . Если $M = m$, то функция $f(x)$ постоянна на $[a; b]$ и, следовательно, ее производная $f'(x) = 0$ в любой точке отрезка $[a; b]$.

Если $M \neq m$, то функция достигает хотя бы одно из значений M или m во *внутренней* точке c интервала $(a; b)$, так как $f(a) = f(b)$.

Пусть, например, функция принимает значение M в точке $x = c \in (a; b)$, т. е. $f(c) = M$. Тогда для всех $x \in (a; b)$ выполняется соотношение

$$f(c) \geq f(x). \quad (25.1)$$

Найдем производную $f'(x)$ в точке $x = c$:

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}.$$