

Так, например, функция $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, в силу теоремы 19.1, есть функция непрерывная для всех значений x , кроме тех, для которых $\cos x = 0$, т. е. кроме значений $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Функции $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$, $\arccos x$, $\operatorname{arccotg} x$, в силу теоремы 19.3, непрерывны при всех значениях x , при которых эти функции определены.

☉ Можно доказать, что *все основные элементарные функции непрерывны при всех значениях x , для которых они определены.*

⇒ Как известно, *элементарной* называется такая функция, которую можно задать одной формулой, содержащей конечное число арифметических действий и суперпозиций (операции взятия функции от функции) основных элементарных функций. Поэтому из приведенных выше теорем вытекает: *всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.*

Этот важный результат позволяет, в частности, легко находить пределы элементарных функций в точках, где они определены.

Пример 19.4. Найти $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} 2^{\operatorname{ctg} x}$.

○ Решение: Функция $2^{\operatorname{ctg} x}$ непрерывна в точке $x = \frac{\pi}{4}$, поэтому

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} 2^{\operatorname{ctg} x} = 2^{\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}} = 2^1 = 2. \quad \bullet$$

19.5. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Непрерывные на отрезке функции имеют ряд важных свойств. Сформулируем их в виде теорем, не приводя доказательств.

Теорема 19.4 (Вейерштрасса). Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений.

Изображенная на рисунке 123 функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, принимает свое наибольшее значение M в точке x_1 , а наименьшее m — в точке x_2 . Для любого $x \in [a; b]$ имеет место неравенство $m \leq f(x) \leq M$.

Следствие 19.1. Если функция непрерывна на отрезке, то она ограничена на этом отрезке.

Поэтому уравнение нормали имеет вид $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$ (если $f'(x_0) \neq 0$).

20.3. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции

Теорема 20.1. Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в ней

□ Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x . Следовательно, существует предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$

Отсюда, по теореме 17.5 о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции, имеем $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$, то есть $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$

Переходя к пределу, при $\Delta x \rightarrow 0$, получаем $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$. А это и означает, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x . ■

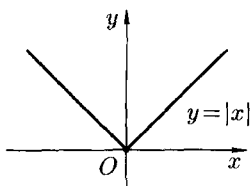


Рис 131

Обратная теорема неверна. непрерывная функция может не иметь производной. Примером такой функции является функция

$$y = |x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Изображенная на рисунке 131 функция непрерывна в точке $x = 0$, но не дифференцируема в ней.

Действительно, в точке $x = 0$ имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta x > 0, \\ -1, & \text{если } \Delta x < 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ не существует, т. е. функция $y = |x|$ не имеет производной в точке $x = 0$, график функции не имеет касательной в точке $O(0; 0)$.

☼ **Замечания:** 1. Существуют односторонние пределы функции $y = |x|$ в точке $x = 0$: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$. В таких случаях говорят, что функция имеет **односторонние производные** (или «производные слева и справа»), и обозначают соответственно $f'_-(x)$ и $f'_+(x)$.

Если $f'_+(x) \neq f'_-(x)$, то производная в точке не существует. Не существует производной и в точках разрыва функции.

2. Производная $y' = f'(x)$ непрерывной функции $y = f(x)$ сама не обязательно является непрерывной.

☉ Если функция $y = f(x)$ имеет непрерывную производную $y' = f'(x)$ в некотором интервале (a, b) , то функция называется **гладкой**.

20.4. Производная суммы, разности, произведения и частного функций

Нахождение производной функции непосредственно по определению часто связано с определенными трудностями. На практике функции дифференцируют с помощью ряда правил и формул.

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — две дифференцируемые в некотором интервале $(a; b)$ функции.

Теорема 20.2. Производная суммы (разности) двух функций равна сумме (разности) производных этих функций $(u \pm v)' = u' \pm v'$

□ Обозначим $y = u \pm v$. По определению производной и основным теоремам о пределах получаем:

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u(x + \Delta x) \pm v(x + \Delta x)) - (u(x) \pm v(x))}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \pm \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' \pm v', \end{aligned}$$

т. е. $(u \pm v)' = u' \pm v'$. ■

Теорема справедлива для любого конечного числа слагаемых.

Теорема 20.3. Производная произведения двух функций равна произведению производной первого сомножителя на второй плюс произведение первого сомножителя на производную второго: $(u \cdot v)' = u'v + v'u$

□ Пусть $y = uv$. Тогда

$$\begin{aligned}
 y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u(x) + \Delta u) \cdot (v(x) + \Delta v) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x) \cdot u(x) + u(x) \cdot \Delta v + v(x) \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(v(x) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x) \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = \\
 &= v(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \\
 &= u' \cdot v + u \cdot v' + 0 \cdot u' = u' \cdot v + u \cdot v',
 \end{aligned}$$

т. е. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$. ■

При доказательстве теоремы использовалась теорема о связи непрерывности и дифференцируемости: так как функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы, то они и непрерывны, поэтому $\Delta v \rightarrow 0$ и $\Delta u \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$.

Можно показать, что:

- а) $(c \cdot u)' = c \cdot u'$, где $c = \text{const}$;
- б) $(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$.

Теорема 20.4. Производная частного двух функций $\frac{u(x)}{v(x)}$, если $v(x) \neq 0$ равна дроби, числитель которой есть разность произведений знаменателя дроби на производную числителя и числителя дроби на производную знаменателя, а знаменатель есть квадрат прежнего знаменателя. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$, $v \neq 0$.

□ Пусть $y = \frac{u}{v}$. Тогда

$$\begin{aligned}
 y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x) + \Delta u}{v(x) + \Delta v} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x) \cdot v(x) + v(x) \cdot \Delta u - u(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot \Delta v}{\Delta x \cdot (v(x) + \Delta v)v(x)} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v \cdot \Delta u - u \cdot \Delta v}{\Delta x \cdot (v^2 + v \cdot \Delta v)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v \cdot \Delta v} = \\
 &= \frac{v \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v} = \frac{u'v - uv'}{v^2},
 \end{aligned}$$

т. е. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. ■

Следствие 20.1. $\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{1}{c} \cdot u'$

Следствие 20.2. $\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{c \cdot v'}{v^2}$, где $c = \text{const}$

20.5. Производная сложной и обратной функций

Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, тогда $y = f(\varphi(x))$ — сложная функция с промежуточным аргументом u и независимым аргументом x .

Теорема 20.5. Если функция $u = \varphi(x)$ имеет производную u'_x в точке x , а функция $y = f(u)$ имеет производную y'_u в соответствующей точке $u = \varphi(x)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ имеет производную y'_x в точке x , которая находится по формуле $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

□ По условию $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u$. Отсюда, по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции, имеем $\frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u + \alpha$ или

$$\Delta y = y'_u \cdot \Delta u + \alpha \cdot \Delta u, \quad (20.6)$$

где $\alpha \rightarrow 0$ при $\Delta u \rightarrow 0$.

Функция $u = \varphi(x)$ имеет производную в точке x : $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x$, поэтому

$$\Delta u = u'_x \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta x, \text{ где } \beta \rightarrow 0 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0.$$

Подставив значение Δu в равенство (20.6), получим

$$\Delta y = y'_u(u'_x \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta x) + \alpha(u'_x \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta x),$$

т. е.

$$\Delta y = y'_u \cdot u'_x \cdot \Delta x + y'_u \cdot \beta \cdot \Delta x + u'_x \cdot \alpha \cdot \Delta x + \alpha \cdot \beta \cdot \Delta x.$$

Разделив полученное равенство на Δx и перейдя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим $y'_x = y'_u \cdot u'_x$. ■

Итак, для нахождения производной сложной функции надо *производную данной функции по промежуточному аргументу умножить на производную промежуточного аргумента по независимому аргументу*.

Это правило остается в силе, если промежуточных аргументов несколько. Так, если $y = f(u)$, $u = \varphi(v)$, $v = g(x)$, то $y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$. Пусть $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ — взаимно обратные функции.

Теорема 20.6. Если функция $y = f(x)$ строго монотонна на интервале $(a; b)$ и имеет неравную нулю производную $f'(x)$ в произвольной точке этого интервала, то обратная ей функция $x = \varphi(y)$ также имеет производную $\varphi'(y)$ в соответствующей точке, определяемую равенством $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ или $x'_y = \frac{1}{y'_x}$.

Рассмотрим обратную функцию $x = \varphi(y)$. Дадим аргументу y приращение $\Delta y \neq 0$. Ему соответствует приращение Δx обратной функции, причем $\Delta x \neq 0$ в силу строгой монотонности функции $y = f(x)$. Поэтому можно записать

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}. \quad (20.7)$$

Если $\Delta y \rightarrow 0$, то в силу непрерывности обратной функции приращение $\Delta x \rightarrow 0$. И так как $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$, то из (20.7) следуют равенства $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}$, т. е. $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$. ■

Таким образом, *производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции*.

Правило дифференцирования обратной функции записывают так:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

Пример 20.3. Найти производную функции $y = \log_2^3 \operatorname{tg} x^4$.

Решение. Данная функция является сложной. Ее можно представить в виде цепочки «простых» функций: $y = u^3$, где $u = \log_2 z$, где $z = \operatorname{tg} q$, где $q = x^4$. По правилу дифференцирования сложной функции ($y'_x = y'_u \cdot u'_z \cdot z'_q \cdot q'_x$) получаем:

$$y'_x = 3 \cdot \log_2^2 \operatorname{tg} x^4 \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x^4 \cdot \ln 2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x^4} \cdot 4x^3.$$

Пример 20.4. Пользуясь правилом дифференцирования обратной функции, найти производную y'_x для функции $y = \sqrt[3]{x-1}$.

○ Решение: Обратная функция $x = y^3 + 1$ имеет производную $x'_y = 3y^2$. Следовательно,

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2}}.$$

20.6. Производные основных элементарных функций

Степенная функция $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$

Дадим аргументу x приращение Δx . Функция $y = x^n$ получит приращение $\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n$. По формуле бинома Ньютона имеем

$$\begin{aligned} \Delta y &= \left(x^n + n \cdot x^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} \cdot \Delta x^2 + \dots + (\Delta x)^n \right) - x^n = \\ &= n \cdot x^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} \Delta x^2 + \dots + (\Delta x)^n. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{n \cdot x^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} \Delta x^2 + \dots + (\Delta x)^n}{\Delta x} = \\ &= n \cdot x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot x^{n-2} \cdot \Delta x + \dots + (\Delta x)^{n-1}. \end{aligned}$$

Находим предел составленного отношения при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(n \cdot x^{n-1} + \frac{1}{2} n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} \Delta x + \dots + (\Delta x)^{n-1} \right) = n \cdot x^{n-1}.$$

Таким образом,

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}.$$

Например, $(x^3)' = 3x^2$, $(x^2)' = 2x$, $x' = 1$.

Ниже (см. замечание на с. 175) будет показано, что формула производной степенной функции справедлива при любом $n \in \mathbb{R}$ (а не только натуральном).

Показательная функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$

Найдем сначала производную функции $y = e^x$. Придав аргументу x приращение Δx , находим приращение функции Δy : $\Delta y = e^{x+\Delta x} - e^x = e^x(e^{\Delta x} - 1)$. Стало быть, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$ и

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} e^x \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = e^x \cdot 1 = e^x.$$

При вычислении предела воспользовались эквивалентностью $e^x - 1 \sim x$ при $x \rightarrow 0$.

Итак, $y' = e^x$, т. е.

$$(e^x)' = e^x.$$

Теперь рассмотрим функцию $y = a^x$, $x \in \mathbb{R}$. Так как $a^x = e^{x \ln a}$, то по формуле производной сложной функции находим:

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \cdot (x \cdot \ln a)' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a.$$

Таким образом, $(a^x)' = a^x \ln a$.

Пример 20.5. Найти производную функции $y = 7^{x^2-4x}$.

○ Решение: Используя формулу производной сложной функции и формулу производной показательной функции, находим

$$y' = (7^{x^2-4x})' = 7^{x^2-4x} \cdot \ln 7 \cdot (x^2 - 4x)' = 7^{x^2-4x} \cdot \ln 7 \cdot (2x - 4). \quad \bullet$$

Логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$

Найдем сначала производную функции $y = \ln x$.

Для нее

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \frac{\ln\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$ и воспользовавшись эквивалентностью $\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \sim \frac{\Delta x}{x}$ при $\Delta x \rightarrow 0$, получаем:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x},$$

т. е. $y' = \frac{1}{x}$ или $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Теперь рассмотрим функцию $y = \log_a x$.

Так как $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$, то

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}.$$

Таким образом, $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$.

Пример 20.6. Найти производную функции $y = \ln(x^4 - 2x^2 + 6)$.

○ Решение: $y' = \frac{1}{x^4 - 2x^2 + 6} \cdot (x^4 - 2x^2 + 6)' = \frac{4x^3 - 4x}{x^4 - 2x^2 + 6}.$ ●

Производную логарифмической функции $y = \log_a x$ можно найти иначе. Так как обратной для нее функцией является $x = a^y$, то по формуле производной обратной функции имеем:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \cdot \ln a} = \frac{1}{x \cdot \ln a}.$$

Тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$

Для функции $y = \sin x$ имеем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos(x + \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$ и воспользовавшись первым замечательным пределом $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$, получаем

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \cos x,$$

т. е. $y' = \cos x$ или $(\sin x)' = \cos x$.

Найдем производную функции $y = \cos x$, воспользовавшись формулой производной сложной функции:

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1) = -\sin x,$$

т. е. $(\cos x)' = -\sin x$.

Для нахождения производных функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ воспользуемся формулой производной частного:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

т. е. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Проделав аналогичные операции, получим формулу

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Этот результат можно получить иначе:

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \frac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{2} - x)} \cdot (-1) = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Пример 20.7. Найти производную функции $y = \cos 2x$.

○ Решение: $(\cos 2x)' = -\sin 2x \cdot (2x)' = -2 \sin 2x$. ●

Обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arccotg} x$

Пусть $y = \arcsin x$. Обратная ей функция имеет вид $x = \sin y$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. На интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ верно равенство $x' = \cos y \neq 0$.

По правилу дифференцирования обратных функций

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

где перед корнем взят знак плюс, так как $\cos y > 0$ при $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Итак, $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Аналогично получаем, что $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Эту формулу можно получить проще: так как $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$, т. е. $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$, то $(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Найдем производную функции $y = \operatorname{arctg} x$.

Она является обратной к функции $x = \operatorname{tg} y$, где $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Поэтому, по правилу дифференцирования обратных функций, получаем, что

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Итак, $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

Функции $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcctg} x$ связаны отношением

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad \text{т. е.} \quad \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x.$$

Дифференцируя это равенство, находим

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)' = -(\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2},$$

т. е. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Пример 20.8. Найти производные функций: 1) $y = \arccos x^2$; 2) $y = x \cdot \operatorname{arctg} x$; 3) $y = (1 + 5x - 3x^3)^4$; 4) $y = \arccos \sqrt{x}$; 5) $y = \log_2^3(3 + 2^{-x})$.

○ Решение: 1) $(\arccos x^2)' = -\frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \cdot (x^2)' = -\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$;

2) $(x \cdot \operatorname{arctg} x)' = x' \cdot \operatorname{arctg} x + x \cdot (\operatorname{arctg} x)' = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}$;

3) $((1 + 5x - 3x^3)^4)' = 4(1 + 5x - 3x^3)^3 \cdot (5 - 9x^2)$;

4) $(\arccos \sqrt{x})' = -\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

5) $(\log_2^3(3 + 2^{-x}))' = 3 \log_2^2(3 + 2^{-x}) \cdot \frac{1}{(3 + 2^{-x}) \ln 3} \cdot 2^{-x} \cdot \ln 2 \cdot (-1)$. ●

Замечание: Найдем производную степенной функции $y = x^\alpha$ с любым показателем $\alpha \in \mathbb{R}$. В этом случае функция рассматривается для $x > 0$.

Можно записать $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$. По правилу дифференцирования сложной функции находим

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \cdot (\alpha \cdot \ln x)' = \alpha \cdot e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{1}{x} = \alpha \cdot \frac{x^\alpha}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1},$$

т. е. $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$.

Формула остается справедливой и для $x < 0$, если функция $y = x^\alpha$ существует:

$$(x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

при всех $x \neq 0$.

Пример 20.9. Показать, что функция $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2} + C$ удовлетворяет уравнению $x^3 \cdot y' + 1 = x^4$.

○ Решение: Находим y' :

$$y' = \frac{1}{2} \cdot 2x + \frac{1}{2} \cdot (-2)x^{-3} + 0,$$

т. е. $y' = x - \frac{1}{x^3}$. Подставляем значение y' в данное уравнение:

$$x^3 \cdot \left(x - \frac{1}{x^3}\right) + 1 = x^4, \quad \text{т. е.} \quad x^4 - 1 + 1 = x^4, \quad 0 = 0.$$

Функция удовлетворяет данному уравнению. ●

20.7. Гиперболические функции и их производные

В математике, механике, электротехнике и некоторых других дисциплинах встречаются *гиперболические функции*, определяемые следующими формулами:

$$\Rightarrow \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ — гиперболический синус;}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ — гиперболический косинус («цепная линия»);}$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \text{ и } \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \text{ — гиперболический тангенс и котангенс, где } e \text{ — неперово число.}$$

На рисунках 132–135 показаны графики гиперболических функций.

Между гиперболическими функциями существуют следующие основные зависимости:

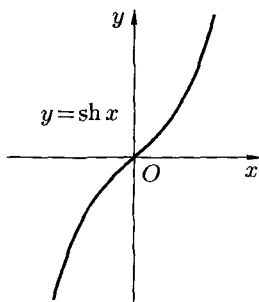


Рис 132

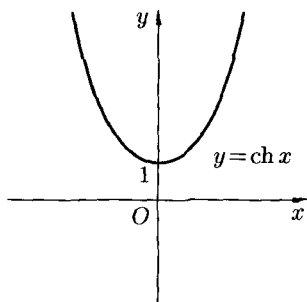


Рис 133

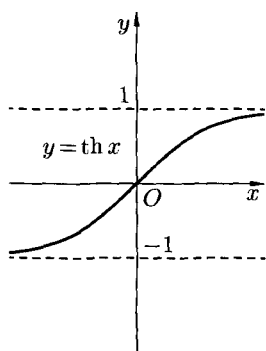


Рис 134

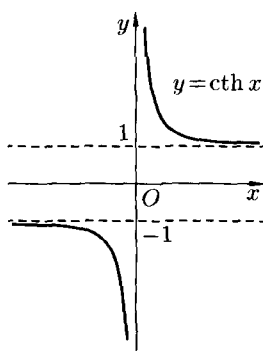


Рис 135

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1;$$

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y;$$

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y;$$

$$\operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \cdot \operatorname{th} y};$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x; \quad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x.$$

Все эти формулы вытекают из определения гиперболических функций.

Например,

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{4} (e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}) = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1. \end{aligned}$$

Геометрическая интерпретация гиперболических функций (см. рис. 137) аналогична интерпретации тригонометрических функций (см. рис. 136).

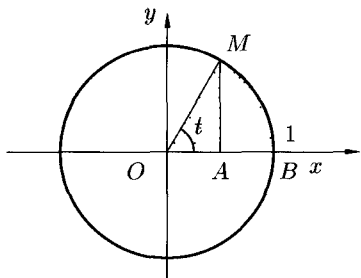


Рис 136 Параметрические уравнения $x = \cos t$ и $y = \sin t$ определяют окружность $x^2 + y^2 = 1$, причем $OA = \cos t$, $AM = \sin t$

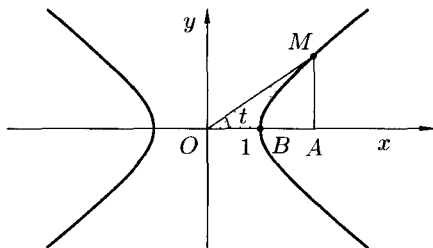


Рис 137 Параметрические уравнения $x = \operatorname{ch} t$ и $y = \operatorname{sh} t$ определяют гиперболу $x^2 - y^2 = 1$, причем $OA = \operatorname{ch} t$, $AM = \operatorname{sh} t$

Найдем производные гиперболических функций:

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x, \text{ т. е. } (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x;$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x, \text{ т. е. } (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;$$

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \right)' = \frac{(\operatorname{sh} x)' \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x (\operatorname{ch} x)'}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \text{ т. е. } (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$$

$$(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \right)' = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \text{ т. е. } (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

20.8. Таблица производных

Выведенные правила дифференцирования, формулы производных основных элементарных функций запишем в виде таблицы.

На практике чаще всего приходится находить производные от сложных функций. Поэтому в приведенной ниже таблице формул дифференцирования аргумент « x » заменен на промежуточный аргумент « u ».

Правила дифференцирования

$$1. (u \pm v)' = u' \pm v';$$

$$2. (u \cdot v)' = u'v + uv', \text{ в частности, } (cu)' = c \cdot u';$$

3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, в частности, $\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2}$;
4. $y'_x = y'_u \cdot u'_x$, если $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$;
5. $y'_x = \frac{1}{x'_y}$, если $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$.

Формулы дифференцирования

1. $(c)' = 0$;
2. $(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$, в частности, $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$;
3. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$, в частности, $(e^u)' = e^u \cdot u'$;
4. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$, в частности, $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$;
5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;
6. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;
7. $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$;
8. $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$;
9. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
10. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
11. $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$;
12. $(\operatorname{arctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$;
13. $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$;
14. $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$;
15. $(\operatorname{th} u)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'$;
16. $(\operatorname{cth} u)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'$.

Для вычисления производных надо знать лишь правила дифференцирования и формулы производных основных элементарных функций, строго соблюдать эти правила при выполнении упражнений.

Пример 20.10. Найти производную функции $y = x^4 - 3x^3 + 2x - 1$.

○ Решение:

$$\begin{aligned} y' &= (x^4 - 3x^3 + 2x - 1)' = (x^4)' - (3x^3)' + (2x)' - (1)' = \\ &= 4x^3 - 3(x^3)' + 2(x)' - 0 = 4x^3 - 9x^2 + 2. \end{aligned} \quad \bullet$$

Надо стараться обходиться без лишних записей.

Пример 20.11. Найти производную функции $y = \frac{2x^3}{\operatorname{tg} x}$.

○ Решение:

$$y' = \left(\frac{2x^3}{\operatorname{tg} x}\right)' = 2 \cdot \frac{(x^3)' \cdot \operatorname{tg} x - x^3 \cdot (\operatorname{tg} x)'}{(\operatorname{tg} x)^2} = 2 \cdot \frac{3x^2 \cdot \operatorname{tg} x - x^3 \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{(\operatorname{tg} x)^2}. \quad \bullet$$

Производная найдена. В процессе решения использованы правила 2, 3 и формулы 2, 7.

Пример 20.12. Найти производную функции $y = \cos(\ln^2 2x)$.