

Усилим полученное неравенство, заменив числа 3, 4, 5, ..., стоящие в знаменателях дробей, числом 2:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

Сумму в скобке найдем по формуле суммы членов геометрической прогрессии:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 \cdot (1 - (\frac{1}{2})^n)}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 2.$$

Поэтому

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 2 = 3. \quad (15.5)$$

Итак, последовательность *ограничена*, при этом для $\forall n \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства (15.4) и (15.5):

$$2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Следовательно, на основании теоремы Вейерштрасса последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, имеет предел, обозначаемый обычно буквой e :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \quad (15.6)$$

Число e называют *неперовым* числом. Число e иррациональное, его приближенное значение равно 2,72 ($e = 2,718281828459045 \dots$). Число e принято за основание натуральных логарифмов: логарифм по основанию e называется натуральным логарифмом и обозначается $\ln x$, т. е. $\ln x = \log_e x$.

Найдем связь между натуральным и десятичным логарифмами. По определению логарифма имеем $x = e^{\ln x}$. Прологарифмируем обе части равенства по основанию 10:

$$\lg x = \lg(e^{\ln x}), \quad \text{т. е. } \lg x = \ln x \cdot \lg e.$$

Пользуясь десятичными логарифмами, находим $\lg e \approx 0,4343$. Значит, $\lg x \approx 0,4343 \cdot \ln x$. Из этой формулы следует, что $\ln x \approx \frac{1}{0,4343} \lg x$, т. е. $\ln x \approx 2,3026 \lg x$. Полученные формулы дают связь между натуральными и десятичными логарифмами.

§ 16. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

16.1. Предел функции в точке

Пусть функция $y^* = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 , кроме, быть может, самой точки x_0 .

Сформулируем два, эквивалентных между собой, определения предела функции в точке.

⇒ Определение 1 (на «языке последовательностей», или по Гейне). Число A называется **пределом функции** $y = f(x)$ в точке x_0 (или при $x \rightarrow x_0$), если для любой последовательности допустимых значений аргумента $x_n, n \in \mathbb{N}$ ($x_n \neq x_0$), сходящейся к x_0 (т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$), последовательность соответствующих значений функции $f(x_n), n \in \mathbb{N}$, сходится к числу A (т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$).

В этом случае пишут $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ или $f(x) \rightarrow A$ при $x \rightarrow x_0$. Геометрический смысл предела функции: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ означает, что для всех точек x , достаточно близких к точке x_0 , соответствующие значения функции как угодно мало отличаются от числа A .

⇒ Определение 2 (на «языке ε - δ », или по Коши). Число A называется **пределом функции в точке** x_0 (или при $x \rightarrow x_0$), если для любого положительного ε найдется такое положительное число δ , что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Записывают $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$. Это определение коротко можно записать так:

$$\left(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x : \underbrace{|x - x_0| < \delta, x \neq x_0}_{\text{или } 0 < |x - x_0| < \delta} \implies |f(x) - A| < \varepsilon \right) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

Геометрический смысл предела функции: $A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, если для любой ε -окрестности точки A найдется такая δ -окрестность точки x_0 , что для всех $x \neq x_0$ из этой δ -окрестности соответствующие значения функции $f(x)$ лежат в ε -окрестности точки A . Иными словами, точки графика функции $y = f(x)$ лежат внутри полосы шириной 2ε , ограниченной прямыми $y = A + \varepsilon, y = A - \varepsilon$ (см. рис. 110). Очевидно, что величина δ зависит от выбора ε , поэтому пишут $\delta = \delta(\varepsilon)$.

Пример 16.1. Доказать, что $\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 1) = 5$.

○ Решение: Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$, найдем $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x , удовлетворяющих неравенству $|x - 3| < \delta$, выполняется неравенство $|(2x - 1) - 5| < \varepsilon$, т. е. $|x - 3| < \frac{\varepsilon}{2}$. Взяв $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, видим, что для всех x , удовлетворяющих неравенству $|x - 3| < \delta \left(= \frac{\varepsilon}{2} \right)$, выполняется неравенство $|(2x - 1) - 5| < \varepsilon$. Следовательно, $\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 1) = 5$. ●

Пример 16.2. Доказать, что, если $f(x) = c$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$.

○ Решение: Для $\forall \varepsilon > 0$ можно взять $\forall \delta > 0$. Тогда при $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$ имеем $|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$. Следовательно, $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$. ●

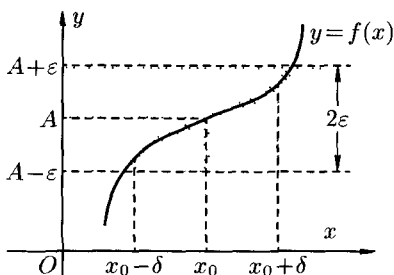


Рис. 110

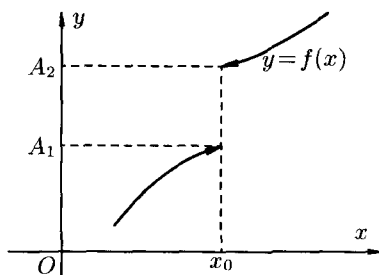


Рис. 111

16.2. Односторонние пределы

В определении предела функции $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ считается, что x стремится к x_0 любым способом: оставаясь меньшим, чем x_0 (слева от x_0), большим, чем x_0 (справа от x_0), или колеблясь около точки x_0 .

Бывают случаи, когда способ приближения аргумента x к x_0 существенно влияет на значение предела функции. Поэтому вводят понятия односторонних пределов.

☞ Число A_1 называется **пределом функции** $y = f(x)$ **слева** в точке x_0 , если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $x \in (x_0 - \delta; x_0)$, выполняется неравенство $|f(x) - A_1| < \varepsilon$. Предел слева записывают так: $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A_1$ или коротко: $f(x_0 - 0) = A_1$ (обозначение Дирихле) (см. рис. 111).

Аналогично определяется **предел функции справа**, запишем его с помощью символов:

$$\begin{aligned} (\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \forall x \in (x_0; x_0 + \delta) \implies |f(x) - A_2| < \varepsilon) &\iff \\ &\iff \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A_2. \end{aligned}$$

Коротко предел справа обозначают $f(x_0 + 0) = A_2$.

☞ Пределы функции слева и справа называются **односторонними** пределами. Очевидно, если существует $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, то существуют и оба односторонних предела, причем $A = A_1 = A_2$.

Справедливо и обратное утверждение: если существуют оба предела $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$ и они равны, то существует предел $A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ и $A = f(x_0 - 0)$.

Если же $A_1 \neq A_2$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ не существует.

16.3. Предел функции при $x \rightarrow \infty$

☞ Пусть функция $y = f(x)$ определена в промежутке $(-\infty; \infty)$. Число A называется **пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow \infty$** , если для любого положительного числа ε существует такое число $M = M(\varepsilon) > 0$, что при всех x , удовлетворяющих неравенству $|x| > M$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Коротко это определение можно записать так:

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 \forall x: |x| > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon) \iff \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A.$$

Если $x \rightarrow +\infty$, то пишут $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, если $x \rightarrow -\infty$, то $-A = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Геометрический смысл этого определения таков: для $\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0$, что при $x \in (-\infty; -M)$ или $x \in (M; +\infty)$ соответствующие значения функции $f(x)$ попадают в ε -окрестность точки A , т. е. точки графика лежат в полосе шириной 2ε , ограниченной прямыми $y = A + \varepsilon$ и $y = A - \varepsilon$ (см. рис. 112).

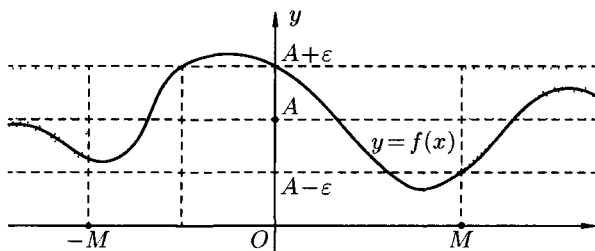


Рис. 112

16.4. Бесконечно большая функция (б.б.ф.)

☞ Функция $y = f(x)$ называется **бесконечно большой при $x \rightarrow x_0$** , если для любого числа $M > 0$ существует число $\delta = \delta(M) > 0$, что для всех x , удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется

неравенство $|f(x)| > M$. Записывают $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ или $f(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow x_0$. Коротко:

$$\left(\forall M > 0 \exists \delta > 0 \forall x : |x - x_0| < \delta, x \neq x_0 \implies |f(x)| > M \right) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty.$$

Например, функция $y = \frac{1}{x-2}$ есть б.б.ф. при $x \rightarrow 2$.

Если $f(x)$ стремится к бесконечности при $x \rightarrow x_0$ и принимает лишь положительные значения, то пишут $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$; если лишь отрицательные значения, то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

☞ Функция $y = f(x)$, заданная на всей числовой прямой, называется **бесконечно большой** при $x \rightarrow \infty$, если для любого числа $M > 0$ найдется такое число $N = N(M) > 0$, что при всех x , удовлетворяющих неравенству $|x| > N$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$. Коротко:

$$\left(\forall M > 0 \exists N > 0 \forall x : |x| > N \implies |f(x)| > M \right) \iff \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

Например, $y = 2^x$ есть б.б.ф. при $x \rightarrow \infty$.

Отметим, что если аргумент x , стремясь к бесконечности, принимает лишь натуральные значения, т. е. $x \in \mathbb{N}$, то соответствующая б.б.ф. становится бесконечно большой последовательностью. Например, последовательность $v_n = n^2 + 1$, $n \in \mathbb{N}$, является бесконечно большой последовательностью. Очевидно, *всякая б.б.ф. в окрестности точки x_0 является неограниченной* в этой окрестности. Обратное утверждение неверно: неограниченная функция может и не быть б.б.ф. (Например, $y = x \sin x$.)

Однако, если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, где A — конечное число, то функция $f(x)$ ограничена в окрестности точки x_0 .

Действительно, из определения предела функции следует, что при $x \rightarrow x_0$ выполняется условие $|f(x) - A| < \varepsilon$. Следовательно, $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$ при $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$, а это и означает, что функция $f(x)$ ограничена.

§ 17. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ФУНКЦИИ (Б.М.Ф.)

17.1. Определения и основные теоремы

☞ Функция $y = f(x)$ называется **бесконечно малой** при $x \rightarrow x_0$, если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0. \quad (17.1)$$

По определению предела функции равенство (17.1) означает: для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что для всех x , удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| < \varepsilon$.

Аналогично определяется б.м.ф. при $x \rightarrow x_0 + 0$, $x \rightarrow x_0 - 0$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$: во всех этих случаях $f(x) \rightarrow 0$.

Бесконечно малые функции часто называют бесконечно малыми величинами или бесконечно малыми; обозначают обычно греческими буквами α , β и т. д.

Примерами б.м.ф. служат функции $y \approx x^2$ при $x \rightarrow 0$; $y = x - 2$ при $x \rightarrow 2$; $y = \sin x$ при $x \rightarrow \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Другой пример: $x_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, — бесконечно малая последовательность.

Теорема 17.1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция

□ Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — две б.м. функции при $x \rightarrow x_0$. Это значит, что $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$, т. е. для *любого* $\varepsilon > 0$, а значит, и $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ найдется число $\delta_1 > 0$ такое, что для всех x , удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta_1$, выполняется неравенство

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (17.2)$$

и $\lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0$, т. е.

$$\left(\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists \delta_2 > 0 \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta_2 \right) \implies |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (17.3)$$

Пусть δ — наименьшее из чисел δ_1 и δ_2 . Тогда для всех x , удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняются оба неравенства (17.2) и (17.3). Следовательно, имеет место соотношение

$$|\alpha(x) + \beta(x)| \leq |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \implies |\alpha(x) + \beta(x)| < \varepsilon.$$

Это значит, что $\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha(x) + \beta(x)) = 0$, т. е. $\alpha(x) + \beta(x)$ — б.м.ф. при $x \rightarrow x_0$. ■

Аналогично проводится доказательство для любого конечного числа б.м. функций.

Теорема 17.2. Произведение ограниченной функции на бесконечно малую функцию есть функция бесконечно малая.

□ Пусть функция $f(x)$ ограничена при $x \rightarrow x_0$. Тогда существует такое число $M > 0$, что

$$|f(x)| \leq M \quad (17.4)$$

для всех x из δ_1 -окрестности точки x_0 . И пусть $\alpha(x)$ — б.м.ф. при $x \rightarrow x_0$. Тогда для *любого* $\varepsilon > 0$, а значит, и $\frac{\varepsilon}{M} > 0$ найдется такое число $\delta_2 > 0$, что при всех x , удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta_2$, выполняется неравенство

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}. \quad (17.5)$$

Обозначим через δ наименьшее из чисел δ_1 и δ_2 . Тогда для всех x , удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняются оба неравенства (17.4) и (17.5). Следовательно, $|f(x) \cdot \alpha(x)| = |f(x)| \cdot |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$. А это означает, что произведение $f(x) \cdot \alpha(x)$ при $x \rightarrow x_0$ есть бесконечно малая функция. ■

Следствие 17.1. Так как всякая б.м.ф. ограничена, то из теоремы (17.2) вытекает: произведение двух б.м.ф. есть функция бесконечно малая.

Следствие 17.2. Произведение б.м.ф. на число есть функция бесконечно малая.

Теорема 17.3. Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, имеющую отличный от нуля предел, есть функция бесконечно малая.

□ Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$, а $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \neq 0$. Функция $\frac{\alpha(x)}{f(x)}$ может быть представлена в виде произведения б.м.ф. $\alpha(x)$ на ограниченную функцию $\frac{1}{f(x)}$. Но тогда из теоремы (17.2) вытекает, что частное $\frac{\alpha(x)}{f(x)} = \alpha(x) \cdot \frac{1}{f(x)}$ есть функция бесконечно малая.

Покажем, что функция $\frac{1}{f(x)}$ ограниченная. Возьмем $\varepsilon < |a|$. Тогда, на основании определения предела, найдется $\delta > 0$, что для всех x , удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$. А так как $\varepsilon > |f(x) - a| = |a - f(x)| \geq |a| - |f(x)|$,

то $|a| - |f(x)| < \varepsilon$, т. е. $|f(x)| > |a| - \varepsilon > 0$. Следовательно,

$$\left| \frac{1}{f(x)} \right| = \frac{1}{|f(x)|} < \frac{1}{|a| - \varepsilon} = M,$$

т. е. функция $\frac{1}{f(x)}$ — ограниченная. ■

Теорема 17.4. Если функция $\alpha(x)$ — бесконечно малая ($\alpha \neq 0$), то функция $\frac{1}{\alpha(x)}$ есть бесконечно большая функция и наоборот. если функция $f(x)$ — бесконечно большая, то $\frac{1}{f(x)}$ — бесконечно малая

□ Пусть $\alpha(x)$ есть б.м.ф. при $x \rightarrow x_0$, т. е. $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$. Тогда

$$\left(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x: \quad 0 < |x - x_0| < \delta \right) \implies |\alpha(x)| < \varepsilon,$$

т. е. $\left| \frac{1}{\alpha(x)} \right| > \frac{1}{\varepsilon}$, т. е. $\left| \frac{1}{\alpha(x)} \right| > M$, где $M = \frac{1}{\varepsilon}$. А это означает, что функция $\frac{1}{\alpha(x)}$ есть бесконечно большая. Аналогично доказывается обратное утверждение. ■

Замечание: Доказательства теорем приводились для случая, когда $x \rightarrow x_0$, но они справедливы и для случая, когда $x \rightarrow \infty$.

Пример 17.1. Показать, что функция

$$f(x) = (x - 1)^2 \cdot \sin^3 \frac{1}{x - 1}$$

при $x \rightarrow 1$ является бесконечно малой.

○ Решение: Так как $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)^2 = 0$, то функция $\varphi(x) = (x - 1)^2$ есть бесконечно малая при $x \rightarrow 1$. Функция $g(x) = \sin^3 \frac{1}{x - 1}$, $x \neq 1$, ограничена $\left| \sin^3 \frac{1}{x - 1} \right| \leq 1$.

Функция $f(x) = (x - 1)^2 \cdot \sin^3 \frac{1}{x - 1}$ представляет собой произведение ограниченной функции ($g(x)$) на бесконечно малую ($\varphi(x)$). Значит, $f(x)$ — бесконечно малая при $x \rightarrow 1$. ●

17.2. Связь между функцией, ее пределом и бесконечно малой функцией

Теорема 17.5. Если функция $f(x)$ имеет предел, равный A , то ее можно представить как сумму числа A и бесконечно малой функции $\alpha(x)$, т. е. если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, то $f(x) = A + \alpha(x)$

□ Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$. Следовательно,

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x: 0 < |x - x_0| < \delta) \implies |f(x) - A| < \varepsilon,$$

т. е. $|f(x) - A - 0| < \varepsilon$. Это означает, что функция $f(x) - A$ имеет предел, равный нулю, т. е. является б.м.ф., которую обозначим через $\alpha(x)$: $f(x) - A = \alpha(x)$. Отсюда $f(x) = A + \alpha(x)$. ■

Теорема 17.6 (обратная). Если функцию $f(x)$ можно представить в виде суммы числа A и бесконечно малой функции $\alpha(x)$, то число A является пределом функции $f(x)$, т. е. если $f(x) = A + \alpha(x)$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

□ Пусть $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — б.м.ф. при $x \rightarrow x_0$, т. е. $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$. Тогда

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x: 0 < |x - x_0| < \delta) \implies |\alpha(x)| < \varepsilon.$$

А так как по условию $f(x) = A + \alpha(x)$, то $\alpha(x) = f(x) - A$. Получаем

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x: 0 < |x - x_0| < \delta) \implies |f(x) - A| < \varepsilon.$$

А это и означает, что $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$. ■

Пример 17.2. Доказать, что $\lim_{x \rightarrow 2} (5 + x) = 7$.

○ Решение: Функцию $5 + x$ можно представить в виде суммы числа 7 и б.м.ф. $x - 2$ (при $x \rightarrow 2$), т. е. выполнено равенство $5 + x = 7 + (x - 2)$. Следовательно, по теореме 17.6 получаем $\lim_{x \rightarrow 2} (5 + x) = 7$. ●

17.3. Основные теоремы о пределах

Рассмотрим теоремы, которые облегчают нахождение пределов функции. Формулировка и доказательство теорем для случаев, когда $x \rightarrow x_0$ и $x \rightarrow \infty$, аналогичны. В приводимых теоремах будем считать, что пределы $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$ существуют.

Теорема 17.7. Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x).$$

□ Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = B$. Тогда по теореме 17.5 о связи функции, ее предела и б.м.ф. можно записать $f(x) = A + \alpha(x)$ и $\varphi(x) = B + \beta(x)$. Следовательно, $f(x) + \varphi(x) = A + B + (\alpha(x) + \beta(x))$. Здесь $\alpha(x) + \beta(x)$ б.м.ф. как сумма б.м.ф. По теореме 17.6 о связи функции, ее предела и б.м.ф. можно записать $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + \varphi(x)) = A + B$, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x). \quad \blacksquare$$

В случае разности функций доказательство аналогично.

Теорема справедлива для алгебраической суммы любого конечного числа функций.

Следствие 17.3. Функция может иметь только один предел при $x \rightarrow x_0$.

□ Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = B$. По теореме 17.7 имеем:

$$0 = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A - B.$$

Отсюда $A - B = 0$, т. е. $A = B$. ■

Теорема 17.8. Предел произведения двух функций равен произведению их пределов:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x).$$

□ Доказательство аналогично предыдущему, проведем его без особых пояснений. Так как $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = B$, то

$$f(x) = A + \alpha(x), \quad \varphi(x) = B + \beta(x),$$

где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — б.м.ф. Следовательно,

$$f(x) \cdot \varphi(x) = (A + \alpha(x)) \cdot (B + \beta(x)),$$

т. е.

$$f(x) \cdot \varphi(x) = AB + (A \cdot \beta(x) + B \cdot \alpha(x) + \alpha(x)\beta(x)).$$

Выражение в скобках есть б.м.ф. Поэтому

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \varphi(x) = A \cdot B,$$

т. е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)\varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x). \quad \blacksquare$$

Отметим, что теорема справедлива для произведения любого конечного числа функций.

Следствие 17.4. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

$$\square \lim_{x \rightarrow x_0} (c \cdot f(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x). \quad \blacksquare$$

Следствие 17.5. Предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела: $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^n$. В частности,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$\square \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = \lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{(f(x) \cdot f(x) \cdot \dots \cdot f(x))}_{n \text{ сомножителей}} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \dots \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^n. \quad \blacksquare$$

Теорема 17.9. Предел дроби равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)} \quad \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) \neq 0 \right).$$

□ Доказательство аналогично предыдущему. Из равенств

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = B \neq 0$$

следуют соотношения $f(x) = A + \alpha(x)$ и $\varphi(x) = B + \beta(x)$. Тогда

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A + \alpha(x)}{B + \beta(x)} = \frac{A}{B} + \left(\frac{A + \alpha(x)}{B + \beta(x)} - \frac{A}{B} \right) = \frac{A}{B} + \frac{B \cdot \alpha(x) - A \cdot \beta(x)}{B^2 + B \cdot \beta(x)}.$$

Второе слагаемое есть б.м.ф. как частное от деления б.м.ф. на функцию, имеющую отличный от нуля предел.

$$\text{Поэтому } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, \text{ т. е. } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)}. \quad \blacksquare$$

Рассмотрим *пример*.

Пример 17.3. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 2x + 7)$.

○ Решение:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 2x + 7) &= \lim_{x \rightarrow 1} 3x^2 - \lim_{x \rightarrow 1} 2x + \lim_{x \rightarrow 1} 7 = \\ &= 3 \left(\lim_{x \rightarrow 1} x \right)^2 - 2 \lim_{x \rightarrow 1} x + 7 = 3 \cdot 1 - 2 + 7 = 8. \quad \bullet \end{aligned}$$

Пример 17.4. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8}$.

○ Решение: Здесь применить теорему о пределе дроби нельзя, т. к. предел знаменателя, при $x \rightarrow 2$, равен 0. Кроме того, предел числителя равен 0. В таких случаях говорят, что имеем *неопределенность вида* $\frac{0}{0}$. Для ее раскрытия разложим числитель и знаменатель дроби на множители, затем сократим дробь на $x - 2 \neq 0$ ($x \rightarrow 2$, но $x \neq 2$):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 16)}{(x - 2)(x - 4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 16}{x - 4} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x + 16)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x - 4)} = \frac{2 + 16}{2 - 4} = -9. \quad \bullet \end{aligned}$$

Пример 17.5. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x + 1}{4x^2 + 2x + 5}$.

○ Решение: Здесь мы имеем дело с *неопределенностью вида* $\frac{\infty}{\infty}$. Для нахождения предела данной дроби разделим числитель и знаменатель

на x^2 :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x + 1}{4x^2 + 2x + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{4 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2})}{\lim_{x \rightarrow \infty} (4 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2})} = \frac{1}{2}.$$

Функция $2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}$ есть сумма числа 2 и б.м.ф., поэтому

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = 2; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(4 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2} \right) = 4. \quad \bullet$$

17.4. Признаки существования пределов

Не всякая функция, даже ограниченная, имеет предел. Например, функция $y = \sin x$ при $x \rightarrow \infty$ предела не имеет. Во многих вопросах анализа бывает достаточно только убедиться в существовании предела функции. В таких случаях пользуются признаками существования предела.

Теорема 17.10 (о пределе промежуточной функции). Если функция $f(x)$ заключена между двумя функциями $\varphi(x)$ и $g(x)$, стремящимися к одному и тому же пределу, то она также стремится к этому пределу, т. е. если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A, \quad (17.6)$$

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x), \quad (17.7)$$

то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

□ Из равенств (17.6) вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют две окрестности δ_1 и δ_2 точки x_0 , в одной из которых выполняется неравенство $|\varphi(x) - A| < \varepsilon$, т. е.

$$-\varepsilon < \varphi(x) - A < \varepsilon, \quad (17.8)$$

а в другой $|g(x) - A| < \varepsilon$, т. е.

$$-\varepsilon < g(x) - A < \varepsilon. \quad (17.9)$$

Пусть δ — меньшее из чисел δ_1 и δ_2 . Тогда в δ -окрестности точки x_0 выполняются оба неравенства (17.8) и (17.9).

Из неравенств (17.7) находим, что

$$\varphi(x) - A \leq f(x) - A \leq g(x) - A. \quad (17.10)$$

С учетом неравенств (17.8) и (17.9) из неравенства (17.10) следуют неравенства $-\varepsilon < f(x) - A < \varepsilon$ или $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Мы доказали, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x: \quad 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon,$$

то есть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$. ■

Теорему 17.10 иногда шутливо называют «принципом двух милиционеров». Роль «милиционеров» играют функции $\varphi(x)$ и $g(x)$, функция $f(x)$ «следует за милиционерами».

Теорема 17.11 (о пределе монотонной функции). Если функция $f(x)$ монотонна и ограничена при $x < x_0$ или при $x > x_0$, то существует соответственно ее левый предел $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$ или ее правый предел $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$.

Доказательство этой теоремы не приводим.

Следствие 17.6. Ограниченная монотонная последовательность x_n , $n \in \mathbb{N}$, имеет предел.

17.5. Первый замечательный предел

При вычислении пределов выражений, содержащих тригонометрические функции, часто используют предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \tag{17.11}$$

☞ называемый *первым замечательным пределом*. Читается: предел отношения синуса к его аргументу равен единице, когда аргумент стремится к нулю. Докажем равенство (17.11).

□ Возьмем круг радиуса 1, обозначим радианную меру угла MOB через x (см. рис. 113). Пусть $0 < x < \frac{\pi}{2}$. На рисунке $|AM| = \sin x$, дуга MB численно равна центральному углу x , $|BC| = \operatorname{tg} x$. Очевидно, имеем $S_{\triangle MOB} < S_{\text{сектора } MOB} < S_{\triangle COB}$. На основании соответствующих формул геометрии получаем $\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$. Разделим неравенства на $\frac{1}{2} \sin x > 0$, получим $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ или $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$.

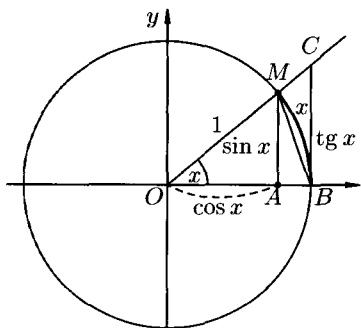


Рис 113

Так как $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ и $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$, то по признаку (о пределе промежуточной функции) существования пределов

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (x > 0)}} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (17.12)$$

Пусть теперь $x < 0$. Имеем $\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x)}{-x}$, где $-x > 0$. Поэтому

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (x < 0)}} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (17.13)$$

Из равенств (17.12) и (17.13) вытекает равенство (17.11). ■

Пример 17.6. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x}$.

○ Решение: Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Теорема о пределе дроби неприменима. Обозначим $3x = t$; тогда при $x \rightarrow 0$ и $t \rightarrow 0$, поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{2 \cdot \frac{t}{3}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3}{2} \cdot \frac{\sin t}{t} = \frac{3}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}. \quad \bullet$$

Пример 17.7. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

○ Решение: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 1}{\lim_{x \rightarrow 0} \cos x} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1. \quad \bullet$

17.6. Второй замечательный предел

Как известно, предел числовой последовательности $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, имеет предел, равный e (см. (15.6)):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \quad (17.14)$$

Докажем, что к числу e стремится и функция $x_n = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ при $x \rightarrow \infty$ ($x \in \mathbb{R}$):

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.} \quad (17.15)$$

1. Пусть $x \rightarrow +\infty$. Каждое значение x заключено между двумя положительными целыми числами: $n \leq x < n+1$, где $n = [x]$ — это целая часть x . Отсюда следует $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$, $1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{n}$, поэтому

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Если $x \rightarrow +\infty$, то $n \rightarrow \infty$. Поэтому, согласно (17.14), имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e. \end{aligned}$$

По признаку (о пределе промежуточной функции) существования пределов

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad (17.16)$$

2. Пусть $x \rightarrow -\infty$. Сделаем подстановку $-x = t$, тогда

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{t-1}\right)^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^t = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^{t-1} \cdot \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^1 = e \cdot 1 = e. \end{aligned} \quad (17.17)$$

Из равенств (17.16) и (17.17) вытекает равенство (17.15).

Если в равенстве (17.15) положить $\frac{1}{x} = \alpha$ ($\alpha \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$), оно запишется в виде

$$\boxed{\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.} \quad (17.18)$$

⇒ Равенства (17.15) и (17.18) называются **вторым замечательным пределом**. Они широко используются при вычислении пределов. В приложениях анализа большую роль играет показательная функция с основанием e . Функция $y = e^x$ называется **экспоненциальной**, употребляется также обозначение $e^x = \exp(x)$.

Пример 17.8. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$.

○ Решение: Обозначим $x = 2t$, очевидно, $t \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$. Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e \cdot e = e^2. \end{aligned} \quad \bullet$$

§ 18. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ФУНКЦИИ

18.1. Сравнение бесконечно малых функций

Как известно, сумма, разность и произведение двух б.м.ф. есть функция бесконечно малая. Отношение же двух б.м.ф. может вести себя различным образом: быть конечным числом, быть бесконечно большой функцией, бесконечно малой или вообще не стремиться ни к какому пределу.

Две б.м.ф. сравниваются между собой с помощью их отношения.

Пусть $\alpha = \alpha(x)$ и $\beta = \beta(x)$ есть б.м.ф. при $x \rightarrow x_0$, т. е. $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0$.

1. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} = A \neq 0$ ($A \in \mathbb{R}$), то α и β называются *бесконечно малыми одного порядка*.
2. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} = 0$, то α называется *бесконечно малой более высокого порядка*, чем β .
3. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \infty$, то α называется *бесконечно малой более низкого порядка*, чем β .
4. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta}$ не существует, то α и β называются *несравнимыми бесконечно малыми*.

Отметим, что таковы же правила сравнения б.м.ф. при $x \rightarrow \pm\infty$, $x \rightarrow x_0 \pm 0$.

Пример 18.1. Сравнить порядок функций $\alpha = 3x^2$ и $\beta = 14x^2$ при $x \rightarrow \infty$.

○ Решение: При $x \rightarrow 0$ это б.м.ф. одного порядка, так как

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{14x^2} = \frac{3}{14} \neq 0.$$

Говорят, что б.м.ф. α и β одного порядка стремятся к нулю с примерно одинаковой скоростью. ●

Пример 18.2. Являются ли функции $\alpha = 3x^4$ и $\beta = 7x$ б.м.ф. одного порядка при $x \rightarrow 0$?

○ Решение: При $x \rightarrow 0$ функция α есть б.м.ф. более высокого порядка, чем β , так как $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^4}{7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3}{7} = 0$. В этом случае б.м.ф. α стремится к нулю быстрее, чем β . ●

Пример 18.3. Сравнить порядок функций $\alpha = \operatorname{tg} x$ и $\beta = x^2$ при $x \rightarrow 0$.

○ Решение: Так как

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{x} = \infty,$$

то α есть б.м.ф. более низкого порядка, чем β . ●

Пример 18.4. Можно ли сравнить функции $\alpha = x \cdot \sin \frac{1}{x}$ и $\beta = x$ при $x \rightarrow 0$?

○ Решение: Функции $\alpha = x \cdot \sin \frac{1}{x}$ и $\beta = x$ при $x \rightarrow 0$ являются не-сравнимыми б.м.ф., так как предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ не существует. ●

18.2. Эквивалентные бесконечно малые и основные теоремы о них

Среди бесконечно малых функций одного порядка особую роль играют так называемые эквивалентные бесконечно малые.

⇒ Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} = 1$, то α и β называются **эквивалентными бесконечно малыми** (при $x \rightarrow x_0$); это обозначается так: $\alpha \sim \beta$.

Например, $\sin x \sim x$ при $x \rightarrow 0$, т. к. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; $\operatorname{tg} x \sim x$ при $x \rightarrow 0$, т. к. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$.

Теорема 18.1. Предел отношения двух бесконечно малых функций не изменится, если каждую или одну из них заменить эквивалентной ей бесконечно малой.

□ Пусть $\alpha \sim \alpha'$ и $\beta \sim \beta'$ при $x \rightarrow x_0$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{\alpha}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\beta'} \cdot \frac{\beta'}{\beta} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\alpha'} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta'}{\beta} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha'}{\beta'} = 1 \cdot 1 \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha'}{\beta'},$$

т. е. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha'}{\beta'}$.

Очевидно также, что $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha'}{\beta'} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta'}$. ■

Теорема 18.2. Разность двух эквивалентных бесконечно малых функций есть бесконечно малая более высокого порядка, чем каждая из них

□ Пусть $\alpha \sim \beta$ при $x \rightarrow x_0$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha - \beta}{\alpha} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) = 1 - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta}{\alpha} = 1 - 1 = 0,$$

аналогично $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha - \beta}{\beta} = 0$. ■

Справедливо и обратное утверждение: если разность б.м.ф. α и β есть бесконечно малая высшего порядка, чем α или β , то α и β эквивалентны бесконечно малые.

Действительно, так как $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha - \beta}{\alpha} = 0$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) = 0$, т. е. $1 - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta}{\alpha} = 0$. Отсюда $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta}{\alpha} = 1$, т. е. $\alpha \sim \beta$. Аналогично, если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha - \beta}{\beta} = 0$, то $\alpha \sim \beta$.

Теорема 18.3. Сумма конечного числа бесконечно малых функций разных порядков эквивалентна слагаемому низшего порядка.

□ Докажем теорему для двух функций. Пусть $\alpha \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$, причем α — б.м.ф. высшего порядка, чем β , т. е. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} = 0$.

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha + \beta}{\beta} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{\alpha}{\beta} + 1\right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} + 1 = 0 + 1 = 1.$$

Следовательно, $\alpha + \beta \sim \beta$ при $x \rightarrow x_0$. ■

Слагаемое, эквивалентное сумме бесконечно малых, называется *главной частью этой суммы*.

Замена суммы б.м.ф. ее главной частью называется *отбрасыванием бесконечно малых высшего порядка*.

Пример 18.5. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + 7x^2}{\sin 2x}$.

○ Решение: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + 7x^2}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$, поскольку $3x + 7x^2 \sim 3x$ и $\sin 2x \sim 2x$ при $x \rightarrow 0$. ●

18.3. Применение эквивалентных бесконечно малых функций

Вычисление пределов

Для раскрытия неопределённостей вида $\frac{0}{0}$ часто бывают полезным применять принцип замены бесконечно малых эквивалентными и другие свойства эквивалентных бесконечно малых функций. Как известно, $\sin x \sim x$ при $x \rightarrow 0$, $\operatorname{tg} x \sim x$ при $x \rightarrow 0$. Приведем еще примеры эквивалентных б.м.ф.

Пример 18.6. Покажем, что $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ при $x \rightarrow 0$.

○ Решение: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (\frac{x}{2} \rightarrow 0)}} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1 \cdot 1 = 1$. ●

Пример 18.7. Найдём $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$.

○ Решение: Обозначим $\arcsin x = t$. Тогда $x = \sin t$ и $t \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$. Поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin t}{t}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Следовательно, $\arcsin x \sim x$ при $x \rightarrow 0$. ●

Пример 18.8. Покажем, что $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{x}{2}$ при $x \rightarrow 0$.

○ Решение: Так как

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\frac{x}{2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1+x} + 1)}{\frac{x}{2} \cdot (\sqrt{1+x} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\frac{x}{2}(\sqrt{1+x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{2}{2} = 1, \end{aligned}$$

то $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{x}{2}$ при $x \rightarrow 0$. ●

Ниже приведены *важнейшие эквивалентности*, которые используются при вычислении пределов:

- | | |
|---|---|
| 1. $\sin x \sim x$ при $x \rightarrow 0$; | 6. $e^x - 1 \sim x$ ($x \rightarrow 0$); |
| 2. $\operatorname{tg} x \sim x$ ($x \rightarrow 0$); | 7. $a^x - 1 \sim x \cdot \ln a$ ($x \rightarrow 0$); |
| 3. $\arcsin x \sim x$ ($x \rightarrow 0$); | 8. $\ln(1+x) \sim x$ ($x \rightarrow 0$); |
| 4. $\operatorname{arctg} x \sim x$ ($x \rightarrow 0$); | 9. $\log_a(1+x) \sim x \cdot \log_a e$ ($x \rightarrow 0$); |
| 5. $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ ($x \rightarrow 0$); | 10. $(1+x)^k - 1 \sim k \cdot x$, $k > 0$ ($x \rightarrow 0$); |
| в частности, $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{x}{2}$. | |

Пример 18.9. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x}$.

○ Решение: Так как $\operatorname{tg} 2x \sim 2x$, $\sin 3x \sim 3x$ при $x \rightarrow 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}.$$

Пример 18.10. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{1/x} - 1)$.

○ Решение: Обозначим $\frac{1}{x} = t$, из $x \rightarrow \infty$ следует $t \rightarrow 0$. Поэтому

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{1/x} - 1) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(e^t - 1) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \cdot t = \lim_{t \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Пример 18.11. Найти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arcsin(x-1)}{x^2 - 5x + 4}$.

○ Решение: Так как $\arcsin(x-1) \sim (x-1)$ при $x \rightarrow 1$, то

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arcsin(x-1)}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{(x-1)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-4} = -\frac{1}{3}.$$

Приближенные вычисления

Если $\alpha \sim \beta$, то, отбрасывая в равенстве $\alpha = \beta + (\alpha - \beta)$ бесконечно малую более высокого порядка, т. е. $\alpha - \beta$, получим приближенное равенство $\alpha \approx \beta$.

Оно позволяет выражать одни бесконечно малые через другие. Приведенные выше важнейшие эквивалентности служат источником ряда приближенных формул.

Приведенные формулы справедливы при малых x , и они тем точнее, чем меньше x .

Например, графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = x$ в окрестности точки 0 практически не различимы (см. рис. 114), а кривая $y = \sin x$ в окрестности точки 0

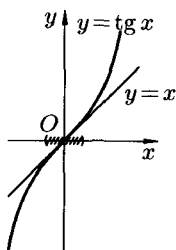


Рис. 114.
 $\operatorname{tg} x \approx x$ ($x \rightarrow 0$)

сливается с прямой $y = x$ (рис. 115). На рисунках 116–118 проиллюстрированы некоторые из важнейших эквивалентностей, о которых говорилось выше.

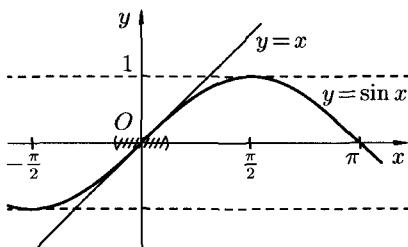


Рис. 115. $\sin x \approx x$ ($x \rightarrow 0$)

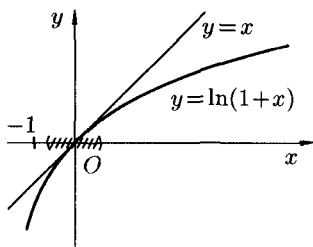


Рис. 116. $\ln(1+x) \approx x$ ($x \rightarrow 0$)

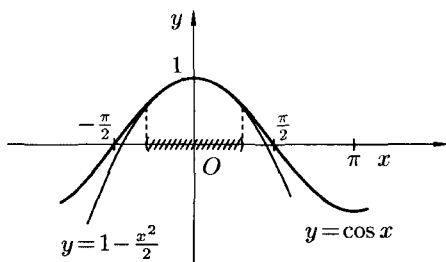


Рис. 117. $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ ($x \rightarrow 0$)

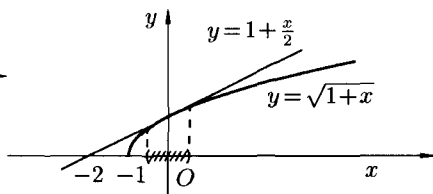


Рис. 118. $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ ($x \rightarrow 0$)

Пример 18.12. Найти приближенное значение для $\ln 1,032$.

○ Решение: $\ln 1,032 = \ln(1 + 0,032) \approx 0,032$ Для сравнения результата по таблице логарифмов находим, что $\ln 1,032 = 0,031498 \dots$ ●

§ 19. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

19.1. Непрерывность функции в точке

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой окрестности этой точки. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке x_0* , если существует предел функции в этой точке и он равен значению функции в этой точке, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (19.1)$$