Свойство непрерывности позволяет установить взаимно-однозначное соответствие между множеством всех действительных чисел и множеством всех точек прямой. Это означает, что каждому числу $x \in \mathbb{R}$ соответствует определенная (единственная) точка числовой оси и, наоборот, каждой точке оси соответствует определенное (единственное) действительное число. Поэтому вместо слова «число» часто говорят «точка».

13.3. Числовые промежутки. Окрестность точки

Пусть a и b — действительные числа, причем $a < b$.

Числовыми промежутками (интервалами) называют подмножества всех действительных чисел, имеющих следующий вид:

$[a; b] = \{x : \ a \leqslant x \leqslant b\}$ — отрезок (сегмент, замкнутый промежуток);

$(a; b) = \{x : \ a < x < b\}$ — интервал (открытый промежуток);

$[a; b) = \{x : \ a \leqslant x < b\}$;

$(a; b] = \{x : \ a < x \leqslant b\}$ — полуоткрытые интервалы (или полуоткрытые отрезки);

$(-\infty; b] = \{x : \ x \leqslant b\}$; $\quad [a, +\infty) = \{x : \ x \geqslant a\}$;

$(-\infty; b) = \{x : \ x < b\}$; $\quad (a, +\infty) = \{x : \ x > a\}$;

$(-\infty, \infty) = \{x : \ -\infty < x < +\infty\} = \mathbb{R}$ бесконечные интервалы (промежутки).

Числа a и b называются соответственно левым и правым *концами* этих промежутков. Символы $-\infty$ и $+\infty$ не числа, это символическое обозначение процесса неограниченного удаления точек числовой оси от начала 0 влево и вправо.

Пусть x_0 — любое действительное число (точка на числовой прямой). ***Окрестностью*** точки x_0 называется любой интервал $(a; b)$, содержащий точку x_0. В частности, интервал $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, называется ε***-окрестностью*** точки x_0. Число x_0 называется ***центром***, а число ε — *радиусом*.

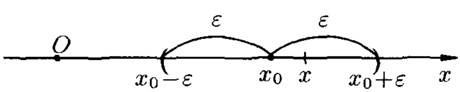

Рис. 97

Если $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$, то выполняется неравенство $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$, или, что то же, $|x - x_0| < \varepsilon$. Выполнение последнего неравенства означает попадание точки x в ε-окрестность точки x_0 (см. рис. 97).

§ 14. ФУНКЦИЯ

14.1. Понятие функции

Одним из основных математических понятий является понятие функции. Понятие функции связано с установлением зависимости (связи) между элементами двух множеств.

Пусть даны два непустых множества X и Y. Соответствие f, которое каждому элементу $x \in X$ сопоставляет один и только один элемент $y \in Y$, называется ***функцией*** и записывается $y = f(x)$, $x \in X$ или $f : X \to Y$. Говорят еще, что функция f ***отображает*** множество X на множество Y.

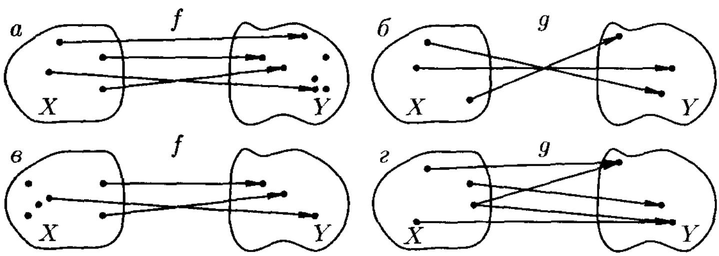

Рис. 98

Например, соответствия f и g, изображенные на рисунке 98 *а* и *б*, являются функциями, а на рисунке 98 *в* и *г* — нет. В случае *в* — не каждому элементу $x \in X$ соответствует элемент $y \in Y$. В случае *г* не соблюдается условие однозначности.

Множество X называется *областью определения* функции f и обозначается $D(f)$. Множество всех $y \in Y$ называется *множеством значений* функции f и обозначается $E(f)$.

14.2. Числовые функции. График функции. Способы задания функций

Пусть задана функция $f : X \to Y$.

Если элементами множеств X и Y являются действительные числа (т. е. $X \subset \mathbb{R}$ и $Y \subset \mathbb{R}$), то функцию f называют ***числовой функцией***. В дальнейшем будем изучать (как правило) числовые функции, для краткости будем именовать их просто функциями и записывать $y = f(x)$.

Переменная x называется при этом *аргументом* или независимой переменной, а y — *функцией* или *зависимой переменной* (от x). Относительно самих величин x и y говорят, что они находятся в *функциональной зависимости*. Иногда функциональную зависимость y от x пишут в виде $y = y(x)$, не вводя новой буквы (f) для обозначения зависимости.

Частное значение функции $f(x)$ при $x = a$ записывают так: $f(a)$. Например, если $f(x) = 2x^2 - 3$, то $f(0) = -3$, $f(2) = 5$.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество всех точек плоскости Oxy, для каждой из которых x является значением аргумента, а y — соответствующим значением функции.

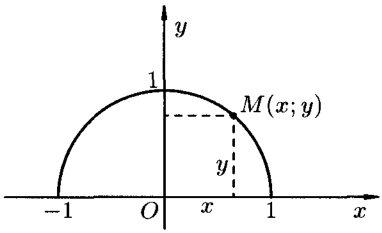

Рис 99

Например, графиком функции $y = \sqrt{1 - x^2}$ является верхняя полуокружность радиуса $R = 1$ с центром в $O(0;0)$ (см. рис. 99).

Чтобы задать функцию $y = f(x)$, необходимо указать правило, позволяющее, зная x, находить соответствующее значение y.

Наиболее часто встречаются три способа задания функции: аналитический, табличный, графический.

Аналитический способ: функция задается в виде одной или нескольких формул или уравнений.

Например:

$$1)\ S = \pi R^2; \quad 2)\ y = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{при } x < 2, \\ x - 4 & \text{при } x \geqslant 2; \end{cases} \quad 3)\ y^2 - 4x = 0.$$

Если область определения функции $y = f(x)$ не указана, то предполагается, что она совпадает с множеством всех значений аргумента, при которых соответствующая формула имеет смысл. Так, областью определения функции $y = \sqrt{1 - x^2}$ является отрезок $[-1; 1]$.

Аналитический способ задания функции является наиболее совершенным, так как к нему приложены методы математического анализа, позволяющие полностью исследовать функцию $y = f(x)$.

Графический способ: задается график функции.

Часто графики вычерчиваются автоматически самопишущими приборами или изображаются на экране дисплея. Значения функции y, соответствующие тем или иным значениям аргумента x, непосредственно находятся из этого графика.

Преимуществом графического задания является его наглядность, недостатком — его неточность.

Табличный способ: функция задается таблицей ряда значений аргумента и соответствующих значений функции. Например, известные таблицы значений тригонометрических функций, логарифмические таблицы.

На практике часто приходится пользоваться таблицами значений функций, полученных опытным путем или в результате наблюдений.

14.3. Основные характеристики функции

1. Функция $y = f(x)$, определенная на множестве D, называется ***четной***, если $\forall x \in D$ выполняются условия $-x \in D$ и $f(-x) = f(x)$; ***нечетной***, если $\forall x \in D$ выполняются условия $-x \in D$ и $f(-x) = -f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси Oy, а нечетной — относительно начала координат.

Например, $y = x^2$, $y = \sqrt{1+x^2}$, $y = \ln|x|$ — четные функции; а $y = \sin x$, $y = x^3$ – нечетные функции; $y = x - 1$, $y = \sqrt{x}$ — функции общего вида, т. е. не четные и не нечетные.

2. Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве D и пусть $D_1 \subset D$. Если для любых значений $x_1, x_2 \in D_1$ аргументов из неравенства $x_1 < x_2$ вытекает неравенство: $f(x_1) < f(x_2)$, то функция называется ***возрастающей*** на множестве D_1; $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, то функция называется ***неубывающей*** на множестве D_1; $f(x_1) > f(x_2)$, то функция называется ***убывающей*** на множестве D_1; $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, то функция называется ***невозрастающей*** на множестве D_1.

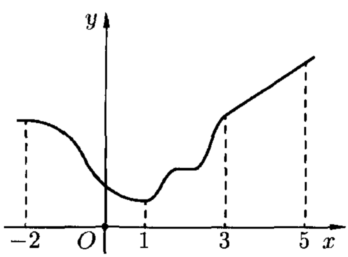

Рис. 100

Например, функция, заданная графиком (см. рис. 100), убывает на интервале $(-2; 1)$, не убывает на интервале $(1; 5)$, возрастает на интервале $(3; 5)$.

Возрастающие, невозрастающие, убывающие и неубывающие функции на множестве D_1 называются ***монотонными*** на этом множестве, а возрастающие и убывающие — ***строго монотонными***. Интервалы, в которых функция монотонна, называются ***интервалами монотонности***. На рисунке (выше) функция строго монотонна на $(-2; 1)$ и $(3; 5)$; монотонна на $(1; 3)$.

3. Функцию $y = f(x)$, определенную на множестве D, называют ***ограниченной*** на этом множестве, если существует такое число $M > 0$, что для всех $x \in D$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant M$ (короткая запись: $y = f(x)$, $x \in D$, называется ограниченной на D, если $\exists M > 0 : \forall x \in D \implies |f(x)| \leqslant M$). Отсюда следует, что график ограниченной функции лежит между прямыми $y = -M$ и $y = M$ (см. рис. 101).

4. Функция $y = f(x)$, определенная на множестве D, называется ***периодической*** на этом множестве, если существует такое число $T > 0$, что при каждом $x \in D$ значение $(x+T) \in D$ и $f(x+T) = f(x)$. При этом число T называется ***периодом*** функции. Если T — период функции, то ее периодами будут также числа $m \cdot T$, где $m = \pm 1; \pm 2, \ldots$ Так, для $y = \sin x$ периодами будут числа $\pm 2\pi; \pm 4\pi; \pm 6\pi, \ldots$ Основной период (наименьший положительный) — это период $T = 2\pi$. Вообще обычно за основной период берут наименьшее положительное число T, удовлетворяющее равенству $f(x+T) = f(x)$.

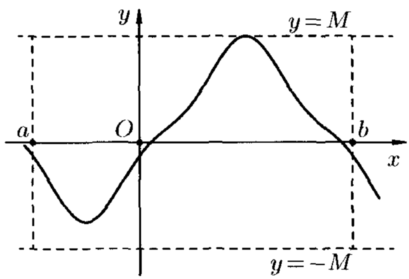

Рис 101

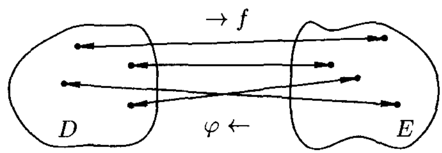

Рис 102

14.4. Обратная функция

Пусть задана функция $y = f(x)$ с областью определения D и множеством значений E. Если каждому значению $y \in E$ соответствует единственное значение $x \in D$, то определена функция $x = \varphi(y)$ с областью определения E и множеством значений D (см. рис. 102). Такая функция $\varphi(y)$ называется ***обратной*** к функции $f(x)$ и записывается в следующем виде: $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$. Про функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ говорят, что они являются взаимно обратными. Чтобы найти функцию $x = \varphi(y)$, обратную к функции $y = f(x)$, достаточно решить уравнение $f(x) = y$ относительно x (если это возможно).

Примеры:

1. Для функции $y = 2x$ обратной функцией является функция $x = \frac{1}{2}y$;

2. Для функции $y = x^2$, $x \in [0; 1]$, обратной функцией является $x = \sqrt{y}$; заметим, что для функции $y = x^2$, заданной на отрезке $[-1; 1]$, обратной не существует, т. к. одному значению y соответствует два значения x (так, если $y = \frac{1}{4}$, то $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$).

Из определения обратной функции вытекает, что функция $y = f(x)$ имеет обратную тогда и только тогда, когда функция $f(x)$ задает взаимно однозначное соответствие между множествами D и E. Отсюда следует, что любая ***строго монотонная функция имеет обратную***. При этом если функция возрастает (убывает), то обратная функция также возрастает (убывает).

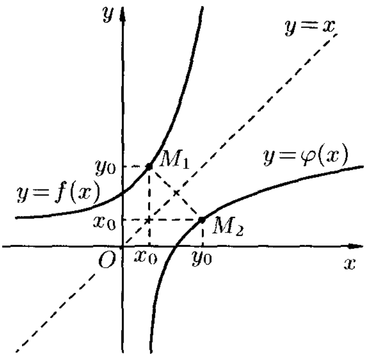

Рис. 103

Заметим, что функция $y = f(x)$ и обратная ей $x = \varphi(y)$ изображаются одной и той же кривой, т. е. графики их совпадают. Если же условиться, что, как обычно, независимую переменную (т. е. аргумент) обозначить через x, а зависимую переменную через y, то функция обратная функции $y = f(x)$ запишется в виде $y = \varphi(x)$.

Это означает, что точка $M_1(x_0; y_0)$ кривой $y = f(x)$ становится точкой $M_2(y_0; x_0)$ кривой $y = \varphi(x)$. Но точки M_1 и M_2 симметричны относительно прямой $y = x$ (см. рис. 103). Поэтому ***графики взаимно обратных функций*** $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ ***симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов***.

14.5. Сложная функция

Пусть функция $y = f(u)$ определена на множестве D, а функция $u = \varphi(x)$ на множестве D_1, причем для $\forall x \in D_1$ соответствующее значение $u = \varphi(x) \in D$. Тогда на множестве D_1 определена функция $u = f(\varphi(x))$, которая называется ***сложной функцией*** от x (или ***суперпозицией*** заданных функций, или ***функцией от функции***).

Переменную $u = \varphi(x)$ называют *промежуточным аргументом* сложной функции.

Например, функция $y = \sin 2x$ есть суперпозиция двух функций $y = \sin u$ и $u = 2x$. Сложная функция может иметь несколько промежуточных аргументов.

14.6. Основные элементарные функции и их графики

Основными элементарными функциями называют следующие функции.

1) *Показательная* функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$. На рис. 104 показаны графики показательных функций, соответствующие различным основаниям степени.

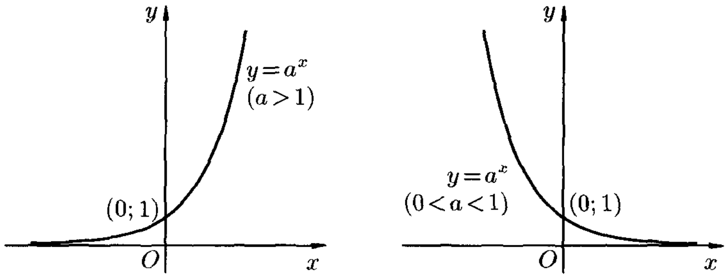

Рис. 104

2) *Степенная* функция $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Примеры графиков степенных функций, соответствующих различным показателям степени, предоставлены на рис. 105.

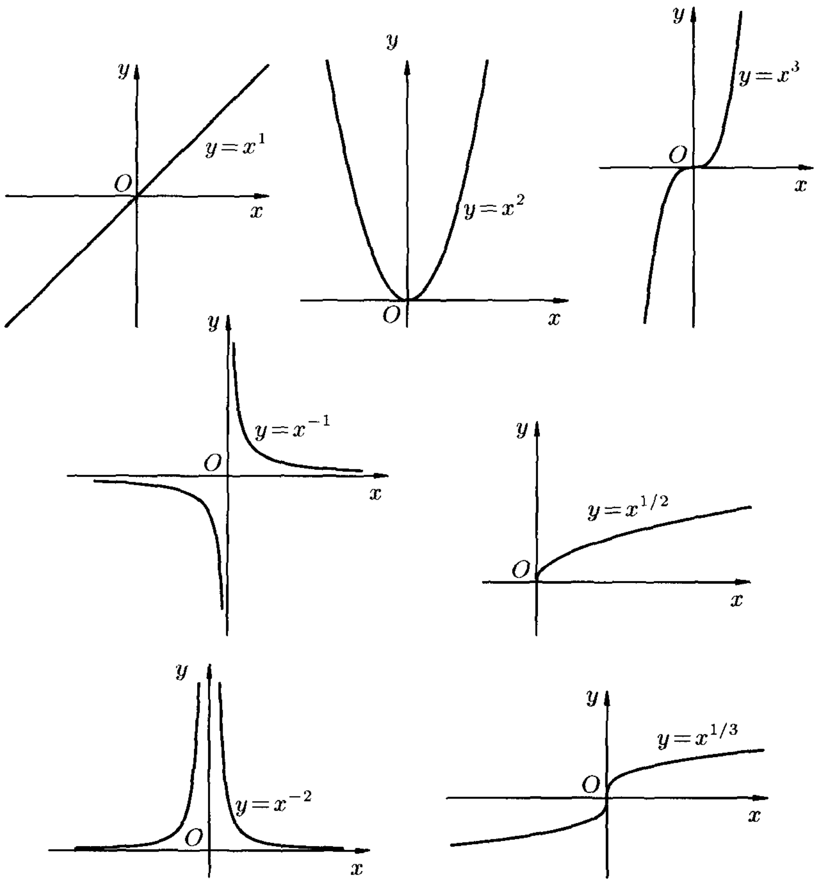

Рис. 105

3) *Логарифмическая* функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$; Графики логарифмических функций, соответствующие различным основаниям, показаны на рис. 106.

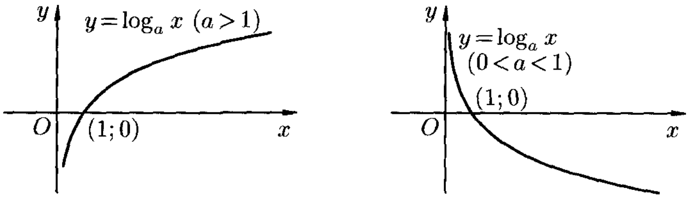

Рис. 106

4) *Тригонометрические* функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$; Графики тригонометрических функций имеют вид, показанный на рис. 107.

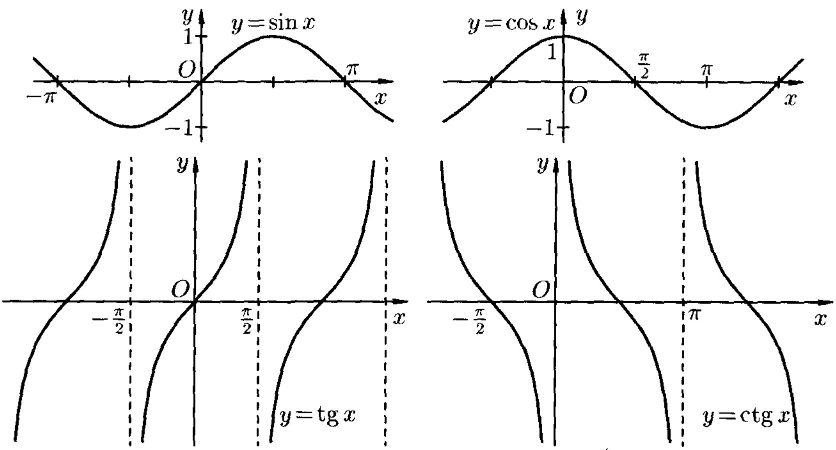

Рис. 107

5) *Обратные тригонометрические* функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$. На рис. 108 показаны графики обратных тригонометрических функций.

Функция, задаваемая одной формулой, составленной из основных элементарных функций и постоянных с помощью конечного числа арифметических операций (сложения, вычитания, умножения, деления) и операций взятия функции от функции, называется ***элементарной функцией***. Примерами элементарных функций могут служить функции

$$y = 3^{\cos\sqrt{x}}; \quad y = \arcsin\frac{1}{x} - \frac{\operatorname{tg} x}{8x^2+3}; \quad y = \lg(2+x^3).$$

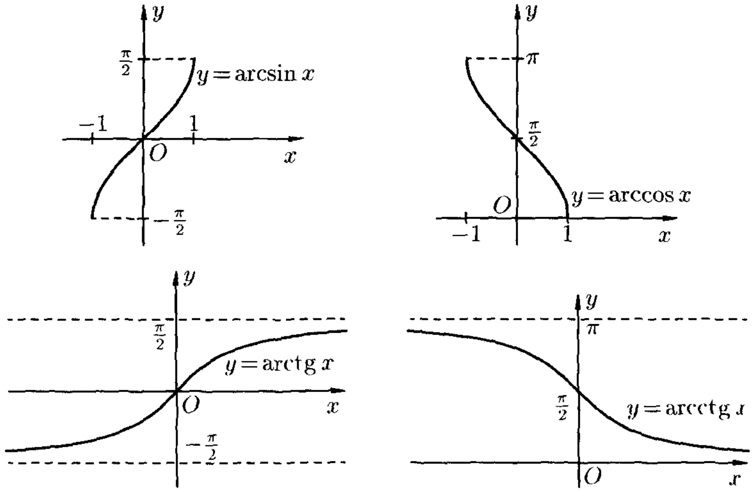

Рис. 108

Примерами *неэлементарных* функций могут служить функции

$$y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0; \end{cases} \qquad y = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{если } x \leqslant 0, \\ x, & \text{если } x > 0; \end{cases}$$

$$y = 1 - \frac{x^3}{3! \cdot 3} + \frac{x^5}{5! \cdot 5} - \frac{x^7}{7! \cdot 7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)! \cdot (2n+1)} + \dots$$

§ 15. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

15.1. Числовая последовательность

Под ***числовой последовательностью*** $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ понимается функция

$$\boxed{x_n = f(n),} \tag{15.1}$$

заданная на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел. Кратко последовательность обозначается в виде $\{x_n\}$ или x_n, $n \in \mathbb{N}$. Число x_1 называется первым членом (элементом) последовательности, x_2 — вторым,..., x_n — ***общим*** или ***n-м членом последовательности***.

Чаще всего последовательность задается формулой его общего члена. Формула (15.1) позволяет вычислить любой член последовательности по номеру n, по ней можно сразу вычислить любой член последовательности. Так, равенства

$$v_n = n^2 + 1, \quad z_n = (-1)^n \cdot n, \quad y_n = \frac{1}{n}, \quad u_n = \frac{n-1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

задают соответственно последовательности

$$v_n = \{2, 5, 10, \dots, n^2+1, \dots\}; \qquad z_n = \{-1, 2, -3, 4, \dots, (-1)^n \cdot n, \dots\};$$

$$y_n = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}; \qquad u_n = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots\right\}.$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется ***ограниченной***, если существует такое число $M > 0$, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$|x_n| \leqslant M.$$

В противном случае последовательность называется неограниченной. Легко видеть, что последовательности y_n и u_n ограничены, а v_n и z_n – неограничены.

Последовательность $\{x_n\}$ называется ***возрастающей*** (***неубывающей***), если для любого n выполняется неравенство $a_{n+1} > a_n$ ($a_{n+1} \geqslant a_n$). Аналогично определяется убывающая (невозрастающая) последовательность.

Все эти последовательности называются ***монотонными*** последовательностями. Последовательности v_n, y_n и u_n монотонные, а z_n не монотонная.

Если все элементы последовательности $\{x_n\}$ равны одному и тому же числу c, то ее называют *постоянной*.

Другой способ задания числовых последовательностей *рекуррентный способ*. В нем задается начальный элемент x_1 (первый член последовательности) и правило определения n-го элемента по $(n-1)$-му:

$$x_n = f(x_{n-1}).$$

Таким образом, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$ и т. д. При таком способе задания последовательности для определения 100-го члена надо сначала посчитать все 99 предыдущих.

15.2. Предел числовой последовательности

Можно заметить, что члены последовательности u_n неограниченно приближаются к числу 1. В этом случае говорят, что последовательность u_n, $n \in \mathbb{N}$ стремится к пределу 1.

Число a называется ***пределом последовательности*** $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется такое натуральное число N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon. \tag{15.2}$$

В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim x_n = a$ или $x_n \to a$ и говорят, что последовательность $\{x_n\}$ (или переменная x_n, пробегающая последовательность $x_1, x_2, x_3, \dots$) имеет предел, равный числу a (или x_n стремится к a). Говорят также, что последовательность $\{x_n\}$ *сходится к* a.

Коротко определение предела можно записать так:

$$\boxed{(\forall\varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n > N \Longrightarrow |x_n - a| < \varepsilon) \iff \lim_{n\to\infty} x_n = a.}$$

Пример 15.1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$.

○ Решение: По определению, число 1 будет пределом последовательности $x_n = \frac{n-1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, если $\forall\varepsilon > 0$ ***найдется*** натуральное число N, такое, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $\left|\frac{n-1}{n} - 1\right| < \varepsilon$, т. е. $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Оно справедливо для всех $n > \frac{1}{\varepsilon}$, т. е. для всех $n > N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, где $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ - целая часть числа $\frac{1}{\varepsilon}$ (целая часть числа x, обозначаемая $[x]$, есть наибольшее целое число, не превосходящее x; так $[3] = 3$, $[5{,}2] = 5$).

Если $\varepsilon > 1$, то в качестве N можно взять $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

Итак, $\forall\varepsilon > 0$ указано соответствующее значение N. Это и доказывает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$. ●

Заметим, что число N зависит от ε. Так, если $\varepsilon = \frac{3}{26}$, то

$$N = \left[\frac{1}{\frac{3}{26}}\right] = \left[\frac{26}{3}\right] = \left[8\frac{2}{3}\right] = 8;$$

если $\varepsilon = 0{,}01$, то

$$N = \left[\frac{1}{\frac{1}{100}}\right] = [100] = 100.$$

Поэтому иногда записывают $N = N(\varepsilon)$.

Выясним геометрический смысл определения предела последовательности.

Неравенство (15.2) равносильно неравенствам $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ или $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, которые показывают, что элемент x_n находится в ε-окрестности точки a.

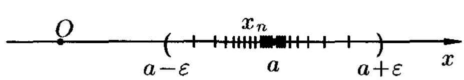

Рис. 109

Поэтому определение предела последовательности геометрически можно сформулировать так: число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любой ε-окрестности точки a найдется натуральное число N, что все значения x_n, для которых $n > N$, попадут в ε-окрестность точки a (см. рис. 109).

Ясно, что чем меньше ε, тем больше число N, но в любом случае внутри ε-окрестности точки a находится бесконечное число членов последовательности, а вне ее может быть лишь конечное их число.

Отсюда следует, что ***сходящаяся последовательность имеет только один предел***. Последовательность, не имеющая предела, называется ***расходящейся***. Таковой является, например, последовательность v_n (см. с. 128).

Постоянная последовательность $x_n = c$, $n \in \mathbb{N}$ имеет предел, равный числу c, т. е. $\lim c = c$. Действительно, для $\forall \varepsilon > 0$ при всех натуральных n выполняется неравенство (15.2). Имеем $|x_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$.

15.3. Предельный переход в неравенствах

Рассмотрим последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$.

Теорема 15.1. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ и, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство $x_n \leqslant y_n$, то $a \leqslant b$.

Допустим, что $a > b$. Из равенств $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число $N(\varepsilon)$, что при всех $n > N(\varepsilon)$ будут выполняться неравенства $|x_n - a| < \varepsilon$ и $|y_n - b| < \varepsilon$, т. е. $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ и $b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon$. Возьмем $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$. Тогда: $x_n > a - \varepsilon = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$, т. е. $x_n > \frac{a+b}{2}$ и $y_n < b + \varepsilon = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$, т. е. $y_n < \frac{a+b}{2}$. Отсюда следует, что $x_n > y_n$. Это противоречит условию $x_n \leqslant y_n$. Следовательно, $a \leqslant b$. ■

Теорема 15.2. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ и справедливо неравенство $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$ (начиная с некоторого номера), то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

(Примем без доказательства.)

15.4. Предел монотонной ограниченной последовательности. Число e. Натуральные логарифмы

Не всякая последовательность имеет предел. Сформулируем без доказательства признак существования предела последовательности.

Теорема 15.3 (Вейерштрасс). Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

В качестве примера на применение этого признака рассмотрим последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

По формуле бинома Ньютона

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} \cdot b^n.$$

Полагая $a = 1$, $b = \frac{1}{n}$, получим

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} \cdot \frac{1}{n^n} =$$
$$= 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

или

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \quad (15.3)$$

Из равенства (15.3) следует, что с увеличением n число положительных слагаемых в правой части увеличивается. Кроме того, при увеличении n число $\frac{1}{n}$ убывает, поэтому величины $\left(1-\frac{1}{n}\right)$, $\left(1-\frac{2}{n}\right)$, $\ldots$ возрастают. Поэтому последовательность $\{x_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ — *возрастающая*, при этом

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 2. \quad (15.4)$$

Покажем, что она ограничена. Заменим каждую скобку в правой части равенства (15.3) на единицу; правая часть увеличится, получим неравенство

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}.$$

Усилим полученное неравенство, заменив числа 3, 4, 5, ..., стоящие в знаменателях дробей, числом 2:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

Сумму в скобке найдем по формуле суммы членов геометрической прогрессии:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1\cdot(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right) < 2.$$

Поэтому

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+2 = 3. \tag{15.5}$$

Итак, последовательность *ограничена*, при этом для $\forall n \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства (15.4) и (15.5):

$$2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Следовательно, на основании теоремы Вейерштрасса последовательность $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, имеет предел, обозначаемый обычно буквой e:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{15.6}$$

Число e называют ***неперовым*** числом. Число e иррациональное, его приближенное значение равно 2,72 ($e = 2{,}7182818284590 45\ldots$). Число e принято за основание натуральных логарифмов: логарифм по основанию e называется натуральным логарифмом и обозначается $\ln x$, т. е. $\ln x = \log_e x$.

Найдем связь между натуральным и десятичным логарифмами. По определению логарифма имеем $x = e^{\ln x}$. Прологарифмируем обе части равенства по основанию 10:

$$\lg x = \lg(e^{\ln x}), \quad \text{т. е. } \lg x = \ln x \cdot \lg e.$$

Пользуясь десятичными логарифмами, находим $\lg e \approx 0{,}4343$. Значит, $\lg x \approx 0{,}4343 \cdot \ln x$. Из этой формулы следует, что $\ln x \approx \frac{1}{0{,}4343}\lg x$, т. е. $\ln x \approx 2{,}3026 \lg x$. Полученные формулы дают связь между натуральными и десятичными логарифмами.

§ 16. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

16.1. Предел функции в точке

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0.