

ТЕМА 15. Ортогональный и ортонормированный базисы

Определение 14.25. Базис $\mathbf{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$ называется *ортогональным* (*ортонормированным*), если он представляет собой ортогональную (соответственно ортонормированную) систему.

Замечание 14.26. В ортогональном базисе матрица Грама диагональная:

$$\Gamma_{\mathbf{e}} = \text{diag}(d_1, \dots, d_n),$$

поэтому, если $[x]_{\mathbf{e}} = (x_1, \dots, x_n)^\top$, $[y]_{\mathbf{e}} = (y_1, \dots, y_n)^\top$, то

$$(x, y) = [x]_{\mathbf{e}}^\top \Gamma_{\mathbf{e}} [y]_{\mathbf{e}} = d_1 x_1 y_1 + \dots + d_n x_n y_n.$$

В ортонормированном базисе матрица Грама единичная, поэтому

$$(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Замечание 14.27. Из теоремы Лагранжа получаем, что в любом евклидовом пространстве существует ортогональный и, следовательно, ортонормированный базисы. Ниже мы опишем другой способ нахождения ортонормированного базиса любого подпространства евклидова пространства.

Утверждение 14.28. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — ортогональный базис и $a = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$, тогда

$$\alpha_j = \frac{(a, e_j)}{(e_j, e_j)}. \quad (14.4)$$

Доказательство. Домножая скалярно справа равенство

$$a = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$$

на e_j ($j = 1, \dots, n$), получаем $(a, e_j) = \alpha_1 (e_1, e_j) + \dots + \alpha_n (e_n, e_j)$. Так как базис ортогональный, то в правой части этого равенства останется только одно ненулевое слагаемое (e_j, e_j) , откуда и следуют доказываемые формулы. ■

Аналогично доказывается

Утверждение 14.29. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — ортонормированный базис и $a = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$, тогда $\alpha_j = (a, e_j)$.

Пример 14.30. В пространствах $\mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$ со стандартным скалярным произведением j -ая координата вектора в ортонормированном базисе $e_1, \dots, e_n$ ($n = 2, 3$ соответственно) равна $(x, e_j) = |x| \cos \varphi$, где φ — угол между вектором x и e_j .

Пример 14.31. В трехмерном линейном вещественном пространстве V определим скалярное произведение так, чтобы система векторов $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, заданных своими координатными столбцами в базисе $\mathbf{e} = \{e_1, e_2, e_3\}$:

$$[a_1]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad [a_2]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad [a_3]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

стала ортонормированной.

Так как система $\mathbf{a}$ линейно независима, то она образует базис трехмерного пространства V . Скалярное произведение однозначно определяется матрицей Грама в некотором базисе. Например, в базисе $\mathbf{a}$ матрица Грама $\Gamma_{\mathbf{a}}$ — это единичная матрица. Таким образом, решение задачи существует и единственно. Чтобы найти матрицу Грама в исходном базисе $\mathbf{e}$ воспользуемся соотношением $\Gamma_{\mathbf{a}} = A^T \Gamma_{\mathbf{e}} A$, где

$$A = [\mathbf{a}]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\Gamma_{\mathbf{e}} = (A \cdot A^T)^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 14.32. Докажите, что любую ортогональную систему ненулевых векторов евклидова пространства можно дополнить до ортогонального базиса.

Пример 14.33. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^4$ введено стандартное скалярное произведение. Очевидно, что векторы $a_1 = (1, 1, 1, 1)^\top$, $a_2 = (1, -1, 1, -1)^\top$ ортогональны. Дополним систему a_1, a_2 до ортогонального базиса пространства $\mathbb{R}^4$. Вектор $a_3 = (x_1, x_2, x_3, x_4)^\top$ определим из условий $(a_1, a_3) = 0$, $(a_2, a_3) = 0$. Приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

В качестве a_3 возьмем любое ненулевое частное решение этой системы, например, $a_3 = (1, 1, -1, -1)^\top$. Вектор $a_4 = (x_1, x_2, x_3, x_4)^\top$ определим из условий $(a_1, a_4) = 0$, $(a_2, a_4) = 0$, $(a_3, a_4) = 0$. Приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

В качестве a_4 возьмем любое ненулевое частное решение этой системы, например, $a_4 = (1, -1, -1, 1)^\top$. Построенная система a_1, a_2, a_3, a_4 образует ортогональный базис пространства $\mathbb{R}^4$.

Упражнение 14.34. Систему векторов

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^\top, \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^\top$$

дополнить до ортонормированного базиса пространства $\mathbb{R}^3$. Найти все способы, какими это можно сделать. Скалярное произведение стандартное.

14.5. Изоморфизм евклидовых пространств

Пусть V, V' — два линейных пространства над полем F . Напомним, что *изоморфизмом линейных пространств* называется взаимно однозначное отображение $\varphi : V \rightarrow V'$, ставящее в соответствие каждому вектору $x \in V$ вектор $\varphi x \in V'$, такое, что для любых векторов x, y из V и любого скаляра α из F выполняются равенства

1. $\varphi(x + y) = \varphi x + \varphi y$,
2. $\varphi(\alpha x) = \alpha(\varphi x)$.

Линейные пространства V и V' называются *изоморфными*, если существует изоморфизм $\varphi : V \rightarrow V'$.

Упражнение 14.35. Доказать, что отношение изоморфности линейных пространств рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Упражнение 14.36. Доказать, что линейные пространства V и V' , заданные над произвольным полем F , изоморфны тогда и только тогда, когда $\dim V = \dim V'$.

Определение 14.37. Пусть V и V' — евклидовы пространства. Взаимно однозначное отображение $\varphi : V \rightarrow V'$ называется *изоморфизмом евклидовых пространств*, если для любых векторов x, y из V и любого вещественного числа α выполняются равенства

1. $\varphi(x + y) = \varphi x + \varphi y$,
2. $\varphi(\alpha x) = \alpha(\varphi x)$,
3. $(\varphi x, \varphi y) = (x, y)$.

Евклидовы пространства V и V' называются *изоморфными*, если существует изоморфизм $\varphi : V \rightarrow V'$.

Упражнение 14.38. Доказать, что отношение изоморфности евклидовых пространств рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Теорема 14.39. *Евклидовы пространства V и V' изоморфны тогда и только тогда, когда $\dim V = \dim V'$.*

Доказательство. Необходимость следует из свойств отношения изоморфности линейных пространств. Для доказательства достаточности покажем, что произвольное евклидово пространство V изоморфно арифметическому пространству $\mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением, далее необходимо воспользоваться транзитивностью отношения изоморфности. Выберем в V произвольный ортонормированный базис $e_1, \dots, e_n$ и определим изоморфизм φ по правилу: $\varphi x = [x]_{\mathbf{e}}$. Тогда

$$(\varphi x, \varphi y) = \sum_{j=1}^n x_j y_j = (x, y).$$

Таким образом, свойство 3) из определения изоморфизма евклидовых пространств также выполнено. ■

14.6. Ортогональные матрицы

Определение 14.40. Матрица $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ называется *ортогональной*, если $A^T = A^{-1}$, т.е. $AA^T = A^T A = E$.

Упражнение 14.41. Докажите, что строки (столбцы) ортогональной матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, рассматриваемые как векторы арифметического пространства $\mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением, образуют ортонормированную систему.

Упражнение 14.42. Докажите, что определитель ортогональной матрицы по модулю равен 1.

Утверждение 14.43. Пусть $\mathbf{e} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ — ортонормированный базис евклидова пространства V . Для того чтобы система векторов $\mathbf{e}' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$ также образовывала ортонормированный базис необходимо и достаточно, чтобы матрица перехода $[\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}$ была бы ортогональной.

Доказательство. Так как базис $\mathbf{e}$ — ортонормированный, то $(e'_i, e'_j) = [e'_i]_{\mathbf{e}}^T [e'_j]_{\mathbf{e}}$. Поэтому базис $\mathbf{e}'$ — ортонормированный тогда и только тогда, когда

$$[e'_i]_{\mathbf{e}}^T [e'_j]_{\mathbf{e}} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases} \quad (14.5)$$

Условие (14.5) эквивалентно ортогональности матрицы $[\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}$. ■

14.7. Ортогональные суммы и ортогональные дополнения

Определение 14.44. Множества S и T векторов евклидова пространства V называются *ортогональными*, если $(a, b) = 0$ для любых $a \in S, b \in T$. Обозначение: $S \perp T$.

Условие $\{a\} \perp T$ будем записывать $a \perp T$.

Утверждение 14.45. Для того, чтобы $a \perp L(a_1, \dots, a_k)$, необходимо и достаточно выполнения условий $a \perp a_i$ для любого $i \in \{1, \dots, k\}$.

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть x — произвольный вектор из $L(a_1, \dots, a_k)$. Рассмотрим его разложение по векторам $a_1, \dots, a_k$:

$$x = x_1 a_1 + \dots + x_k a_k,$$

откуда получаем

$$(x, a) = x_1 \underbrace{(a_1, a)}_0 + \dots + x_k \underbrace{(a_k, a)}_0 = 0,$$

следовательно, $x \perp a$. ■

Определение 14.46. Сумму попарно ортогональных подпространств W_i ($i = 1, \dots, k$) назовем *ортогональной* ($k \geq 2$).

Напомним, что сумма подпространств $W_1 + W_2 + \dots + W_k$ называется *прямой суммой*, если для любого вектора $a \in V$ векторы $a_1, \dots, a_k$, такие, что

$$a = a_1 + \dots + a_k, \tag{14.6}$$

$a_i \in W_i$ ($i = 1, \dots, k$), определяются единственным образом.

Утверждение 14.47. Ортогональная сумма подпространств является прямой суммой.

Доказательство. Единственность разложения (14.6) достаточно доказать для нулевого вектора. Пусть

$$0 = a_1 + \dots + a_k, \tag{14.7}$$

$a_i \in W_i$ ($i = 1, \dots, k$), $W_i \perp W_j$ ($i \neq j$). Последовательно скалярно домножая равенство (14.7) на векторы a_i ($i = 1, \dots, k$) получаем $0 = (a_i, a_i)$, откуда $a_i = 0$. Таким образом, векторы a_i ($i = 1, \dots, k$) в (14.7) определяются единственным образом, следовательно, рассматриваемая сумма — прямая. ■

Определение 14.48. Ортогональным дополнением подпространства $W \subseteq V$ называется множество $W^\perp$ всех векторов из V , ортогональных с каждым вектором из W :

$$W^\perp = \{x \in V : x \perp W\}.$$

Теорема 14.49. [Теорема о разложении пространства на прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения] Для любого подпространства W евклидова пространства V ортогональное дополнение $W^\perp$ является подпространством и $V = W + W^\perp$.

Доказательство. Если $W = \{0\}$, то утверждение очевидно. Предположим теперь, что подпространство W ненулевое. Выберем в V произвольный ортонормированный базис $e_1, \dots, e_n$, а в W произвольный базис $a_1, \dots, a_k$, тогда условия ортогональности произвольного вектора $x \in V$ подпространству W примут вид $(a_i, x) = 0$ ($i = 1, \dots, k$). Записанные в координатной форме эти условия представляют собой систему линейных однородных уравнений. Матрица этой системы составлена из координат базисных векторов $a_1, \dots, a_k$ и поэтому имеет ранг k , откуда $\dim W^\perp = n - k$, и, так как сумма $W + W^\perp$ — прямая, то $\dim(W + W^\perp) = \dim W + \dim W^\perp = k + (n - k) = n$, откуда $W + W^\perp = V$. ■

Следствие 14.50. Пусть W — подпространство евклидова пространства V , тогда $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$.

Следствие 14.51. Пусть W — произвольное подпространство евклидова пространства V . Любой вектор a из V однозначно можно представить в виде

$$a = b + c, \quad \text{где } b \in W, \quad c \in W^\perp. \quad (14.8)$$

Определение 14.52. Вектор b в (14.8) называется *ортогональной проекцией* вектора a на подпространство W , вектор c называется *перпендикуляром*, или *ортогональной составляющей*, вектора a на подпространство W . Обозначения: $b = \operatorname{pr}_W a$, $c = \operatorname{ort}_W a$.

Замечание 14.53. Из определения следует, что

$$\operatorname{ort}_W a = \operatorname{pr}_{W^\perp} a, \quad \operatorname{pr}_W a = \operatorname{ort}_{W^\perp} a.$$

По теореме Пифагора имеем $|\operatorname{pr}_W a|^2 + |\operatorname{ort}_W a|^2 = |a|^2$, откуда получаем

Следствие 14.54 (О длине проекции).

$$|\operatorname{pr}_W a| \leq |a|, \quad |\operatorname{ort}_W a| \leq |a|.$$

Утверждение 14.55. Пусть W — подпространство евклидова пространства V . Тогда

$$(W^\perp)^\perp = W.$$

Доказательство. Сначала докажем, что $W \subseteq (W^\perp)^\perp$. Для этого рассмотрим произвольный вектор $a \in W$. Тогда для любого $b \in W^\perp$ имеем $(a, b) = 0$, т. е. $a \in (W^\perp)^\perp$.

Теперь докажем противоположное включение $(W^\perp)^\perp \subseteq W$. Так как $W \subseteq (W^\perp)^\perp$, то по теореме 14.49 подпространство $(W^\perp)^\perp$ раскладывается в прямую сумму $(W^\perp)^\perp = W + U$, где U — ортогональное дополнение к W в пространстве $(W^\perp)^\perp$. Рассмотрим произвольный вектор $a \in (W^\perp)^\perp$. Тогда найдутся $b \in W$ и $c \in U \subseteq W^\perp$, такие, что $a = b + c$. Умножая обе части данного равенства скалярно на c , получаем $(a, c) = (b, c) + (c, c)$, но $(a, c) = (b, c) = 0$, поэтому $(c, c) = 0$, откуда $c = o$. Таким образом, $a = b \in W$. ■

Упражнение 14.56. Пусть W, W_1, W_2 — подпространства евклидова пространства V . Доказать утверждения

1. $V^\perp = \{o\}$,
2. $W_1 \subseteq W_2 \Leftrightarrow W_2^\perp \subseteq W_1^\perp$,
3. $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$,
4. $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$.

14.11. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта

Опишем процедуру нахождения ортогонального базиса $b_1, \dots, b_k$ подпространства W по заданному произвольно заданному базису $a_1, \dots, a_k$. Положим

$$W_i = L(a_1, \dots, a_i) \quad (i = 1, \dots, k)$$

и построим векторы

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1, \\ b_i &= \text{ort}_{W_{i-1}} a_i, \quad (i = 2, \dots, k). \end{aligned} \quad (14.23)$$

Имеем $W_i = L(b_1, \dots, b_i)$ и поэтому, учитывая замечание 14.63, $b_i = \text{ort}_{W_{i-1}} a_i$ можно вычислять по формуле

$$b_i = a_i - \frac{(a, a_1)}{(a_1, a_1)} a_1 - \frac{(a, a_2)}{(a_2, a_2)} a_2 - \dots - \frac{(a, a_{i-1})}{(a_{i-1}, a_{i-1})} a_{i-1}. \quad (14.24)$$

Построение ортогонального базиса подпространства W по формулам (14.24) называется *процессом ортогонализации Грама–Шмидта*. Чтобы найти ортонормированный базис достаточно каждый вектор ортогонального базиса нормировать, т. е. поделить на его длину.

Замечание 14.64. Из теоремы Пифагора следует, что $|b_i| \leq |a_i|$ ($i = 1, \dots, k$).

Замечание 14.65. Описанная процедура годится и для случая, когда $W = L(a_1, \dots, a_k)$, но векторы $a_1, \dots, a_k$ не обязательно являются линейно независимыми. По замечанию 14.61, b_i в (14.24) равен нулю тогда и только тогда, когда $a_i \in W_i$.

Пример 14.66. Найдем какой-либо ортонормированный базис линейной оболочки L системы векторов $(97, 60, 29, -29)$, $(36, 36, -17, 17)^\top$, $(-48, -11, 20, -20)^\top$ пространства $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением.

Прежде чем применять процесс ортогонализации найдем эквивалентную систему векторов «попроще». Для удобства запишем компоненты векторов в матрицу (по строкам):

$$\begin{pmatrix} 97 & 60 & 29 & -29 \\ 36 & 36 & -17 & 17 \\ -48 & -11 & 20 & -20 \end{pmatrix},$$

с которой будем осуществлять элементарные преобразования строк. Прибавим к 3-й строке 1-ю и разделим 3-ю на 49. Получим:

$$\begin{pmatrix} 97 & 60 & 29 & -29 \\ 36 & 36 & -17 & 17 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ко 2-й строке прибавим 3-ю, умноженную на 17, и разделим 2-ю строку на 53:

$$\begin{pmatrix} 97 & 60 & 29 & -29 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Из 1-й строки вычтем 2-ю, умноженную на 31, и 3-ю, умноженную на 29. Разделим 1-ю строку на 37:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Полученная система векторов $a_1 = (1, 0, 0, 0)^\top$, $a_2 = (1, 1, 0, 0)^\top$, $a_3 = (1, 1, 1, -1)^\top$ эквивалентна исходной системе. Применяя к векторам a_1, a_2, a_3 процесс ортогонализации, по формулам (14.24) получим

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 = (1, 0, 0, 0)^\top, \\ b_2 &= a_2 - \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} \cdot b_1 = (0, 1, 0, 0)^\top, \\ b_3 &= a_3 - \frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} \cdot b_1 - \frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} \cdot b_2 = (0, 0, 1, -1)^\top. \end{aligned}$$

Векторы b_1, b_2, b_3 составляют ортогональный базис подпространства L . Для нахождения ортонормированного базиса нормируем эти векторы:

$$(1, 0, 0, 0)^\top, \quad (0, 1, 0, 0)^\top, \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (0, 0, 1, -1)^\top.$$

Пример 14.67. [Многочлены Лежандра] Пусть в пространстве многочленов скалярное произведение задано формулой:

$$(x, y) = \int_{-1}^1 x(t)y(t)dt \quad (14.25)$$

Можно показать, что следующие многочлены, известные под названием *многочленов Лежандра*:

$$L_0(t) = 1, \quad L_k(t) = \frac{1}{2^k k!} \cdot \frac{d^k}{dt^k} (t^2 - 1)^k \quad (k = 1, 2, \dots),$$

— образуют ортогональную систему в этом пространстве. Оказывается, что многочлены, полученные из системы $1, t, t^2, t^3 \dots$ с помощью процесса ортогонализации только постоянными множителями отличаются от многочленов Лежандра.

Применим процесс ортогонализации к системе многочленов

$$a_1(t) = 1, \quad a_2(t) = t, \quad a_3(t) = t^2, \quad a_4(t) = t^3.$$

По формуле (14.24) имеем:

$$\begin{aligned} b_1(t) &= 1; \\ b_2(t) &= t - \frac{\int_{-1}^1 t \cdot 1 \, dt}{\int_{-1}^1 1 \cdot 1 \, dt} \cdot 1 = t; \\ b_3(t) &= t^2 - \frac{\int_{-1}^1 t^2 \cdot 1 \, dt}{\int_{-1}^1 1 \cdot 1 \, dt} \cdot 1 - \frac{\int_{-1}^1 t^2 \cdot t \, dt}{\int_{-1}^1 t \cdot t \, dt} \cdot t = t^2 - \frac{1}{3}; \\ b_4(t) &= t^3 - \frac{\int_{-1}^1 t^3 \cdot 1 \, dt}{\int_{-1}^1 1 \cdot 1 \, dt} \cdot 1 - \frac{\int_{-1}^1 t^3 \cdot t \, dt}{\int_{-1}^1 t \cdot t \, dt} \cdot t - \frac{\int_{-1}^1 t^3 \cdot (t^2 - 1/3) \, dt}{\int_{-1}^1 (t^2 - 1/3)^2 \, dt} \cdot (t^2 - 1/3). \end{aligned}$$

Итак, мы нашли следующие многочлены:

$$b_1(t) = 1, \quad b_2(t) = t, \quad b_3(t) = t^2 - \frac{1}{3}, \quad b_4(t) = t^3 - \frac{3}{5}t \quad (14.26)$$

(Ср. с упражнением ??).

Пример 14.68. Пусть в пространстве многочленов $\mathbb{R}[t]$ скалярное произведение задано формулой (14.25). Найдем проекцию многочлена $x(t) = t^5$ на подпространство W многочленов степени не выше 3. Воспользуемся тем, что нам известен ортогональный базис (14.26) данного подпространства. По формуле (14.20) получаем:

$$\begin{aligned} \operatorname{pr}_W x &= \frac{\int_{-1}^1 t^5 \cdot 1 \, dt}{\int_{-1}^1 1 \cdot 1 \, dt} \cdot 1 + \frac{\int_{-1}^1 t^5 \cdot t \, dt}{\int_{-1}^1 t \cdot t \, dt} \cdot t + \frac{\int_{-1}^1 t^5 \cdot (t^2 - 1/3) \, dt}{\int_{-1}^1 (t^2 - 1/3)^2 \, dt} \cdot (t^2 - 1/3) \\ &\quad + \frac{\int_{-1}^1 t^5 \cdot (t^3 - 3/5 t) \, dt}{\int_{-1}^1 (t^3 - 3/5 t)^2 \, dt} \cdot (t^3 - 3/5 t) = \frac{10}{9} t^3 - \frac{5}{21} t. \end{aligned}$$

Упражнение 14.69. Решить задачу из предыдущего примера другим способом, взяв за базис подпространства W многочлены $1, t, t^2, t^3$ и воспользовавшись методом решения системы нормальных уравнений (14.18). Постройте график многочлена t^5 и найденной проекции. Объясните, почему для $t \in [-1, 1]$ проекция хорошо приближает многочлен t^5 .

Упражнение 14.70. [Многочлены Чебышёва] Пусть в пространстве многочленов скалярное произведение задано формулой:

$$(x, y) = \int_{-1}^1 \frac{x(t) \cdot y(t)}{\sqrt{1-t^2}} \, dt.$$

Можно показать, что многочлены, известные под названием *многочленов Чебышёва*:

$$T_k(t) = \cos(k \arccos t) \quad (k = 1, 2, \dots),$$

— образуют ортогональную систему в этом пространстве. Оказывается, что многочлены, полученные из системы $1, t, t^2, t^3 \dots$ с помощью процесса ортогонализации отличаются от многочленов Чебышёва только постоянными множителями. Постройте первые 4 многочлена.

Упражнение 14.71. [qR - и QR -разложения] Докажите, что для любой матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ существуют матрица $Q \in \mathbb{R}^{n \times k}$ с ортонормированными (относительно стандартного скалярного произведения в $\mathbb{R}^n$) столбцами и верхнетреугольная матрица $R \in \mathbb{R}^{k \times k}$ с положительными диагональными элементами, для которых

$$A = QR. \quad (14.27)$$

Представление матрицы A в виде (14.27) называется ее qR -разложением.

Указание: к столбцам матрицы A применить процесс ортогонализации.

Докажите, что для любой матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ существуют ортогональная матрица $\tilde{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и верхнетреугольная матрица $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{k \times k}$, для которых

$$A = \tilde{Q} \tilde{R}. \quad (14.28)$$

Представление матрицы A в виде (14.28) называется ее QR -разложением.

Докажите, что если матрица A — квадратная и невырожденная, то ее qR - и QR -разложения единственны.