

ТЕМА 14

Евклидовы пространства

14.1. Основные определения

Определение 14.1. Линейное вещественное пространство V называется *евклидовым*, если задано отображение $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, ставящее каждой паре векторов $x, y \in V$ число $(x, y) \in \mathbb{R}$, называемое *скалярным произведением*, обладающее следующими свойствами:

1. $(x, y) = (y, x)$,
2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$,
3. $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$,
4. $x \neq 0 \Rightarrow (x, x) > 0$

для любых x, y, z из V и α из $\mathbb{R}$. Свойства 1)–4) называются *аксиомами евклидова пространства*.

Утверждение 14.2. Скалярное произведение в евклидовом пространстве есть положительно определенная симметричная билинейная функция. И наоборот, любую положительно определенную симметричную функцию можно выбрать в качестве скалярного произведения.

Доказательство. Аксиомы 2, 3 означают линейность по первому аргументу. Далее,

$$\begin{aligned}(x, y + z) &= (y + z, x) && \text{(по аксиоме 1)} \\ &= (y, x) + (z, x) && \text{(по аксиоме 2)} \\ &= (x, y) + (x, z) && \text{(по аксиоме 1)}\end{aligned}$$

для любых x, y, z из V . Аналогично можно показать, что

$$(x, \alpha y) = \alpha(x, y)$$

для любых x, y , из V и α из $\mathbb{R}$. Итак скалярное произведение (x, y) является билинейной функцией. По аксиоме 1 эта функция симметричная и по аксиоме 4 — положительно определенная.

Вторая часть утверждения очевидна. ■

Пример 14.3. Следующие билинейные функции являются симметричными положительно определенными и, следовательно, их можно выбрать в качестве скалярного произведения:

1. скалярное произведение $(x, y) = |x||y| \cos \varphi$ в пространствах $\mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$;
2. в пространстве $\mathbb{R}^n$:

$$(x, y) = \sum_{j=1}^n x_j y_j, \quad \text{где} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix};$$

3. в пространстве $\mathbb{R}(a, b)$ непрерывных функций, заданных на отрезке $[a, b]$

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t) dt.$$

Приведенные функции будем называть *стандартными скалярными произведениями* в соответствующих пространствах.

14.2. Матрица Грама

Определение 14.4. Матрицей Грама, построенной по системе векторов $a_1, \dots, a_k$ называется матрица

$$\Gamma(a_1, \dots, a_k) = \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \dots & (a_1, a_k) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & \dots & (a_2, a_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_k, a_1) & (a_k, a_2) & \dots & (a_k, a_k) \end{pmatrix}.$$

Замечание 14.5. Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$. Рассмотрим столбцы $a_1, \dots, a_k$ матрицы A как систему векторов арифметического пространства $\mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением. Легко видеть, что

$$\Gamma(a_1, \dots, a_k) = A^T A.$$

Если $\mathbf{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$ — базис пространства, то $\Gamma_{\mathbf{e}} = \Gamma(e_1, \dots, e_n)$ — матрица билинейной функции $f(x, y) = (x, y)$, записанная в этом базисе. Поэтому справедливо

Утверждение 14.6. (Выражение скалярного произведения через координаты векторов.)

$$(x, y) = [x]_{\mathbf{e}}^T \Gamma_{\mathbf{e}} [y]_{\mathbf{e}}.$$

Утверждение 14.7 (Свойство определителя Грама).

- 1) Если система векторов $a_1, \dots, a_k$ линейно независима, то матрица $\Gamma(a_1, \dots, a_k)$ положительно определена. В частности,

$$\det \Gamma(a_1, \dots, a_k) > 0.$$

- 2) Если система векторов $a_1, \dots, a_k$ линейно зависима, то матрица $\Gamma(a_1, \dots, a_k)$ положительно полуопределена. В частности,

$$\det \Gamma(a_1, \dots, a_k) = 0.$$

Доказательство. 1) Дополним линейно независимую систему векторов $a_1, \dots, a_k$ до базиса пространства V . По критерию Сильвестра каждый главный минор матрицы билинейной функции $f(x, y) = (x, y)$ в этом базисе положителен. В частности, k -й угловой минор $\Delta_k = \det \Gamma(a_1, \dots, a_k) > 0$.

2) Предположим теперь, что система $a_1, \dots, a_k$ линейно зависима, тогда найдутся вещественные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, не равные нулю одновременно, такие, что

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j a_j = 0. \quad (14.1)$$

Домножая скалярно справа обе части равенства (14.1) на a_i ($i = 1, \dots, k$), получаем

[illegible]

Рассмотрим равенства (14.2) как систему линейных уравнений относительно неизвестных $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Система квадратная, однородная и имеет ненулевое решение, следовательно, ее определитель $\det \Gamma(a_1, \dots, a_k)$ равен нулю. ■

Из замечания 14.5 и утверждения 14.7 получаем

Следствие 14.8. Матрица $A^T A$ неотрицательно определена, причем $A^T A$ положительно определена тогда и только тогда, когда столбцы матрицы A линейно независимы.

Определение 14.9. Величина $|x| = \sqrt{(x, x)}$ называется *длиной* или *нормой* вектора x .

Часто для норм векторов используют обозначение $\|x\|$. Из 4-й аксиомы евклидова пространства следует, что $|x| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.

Утверждение 14.10 (Неравенство Коши–Буняковского). Для любых векторов a, b евклидова пространства V выполнено неравенство

$$|(a, b)| \leq |a| \cdot |b|,$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда векторы a и b линейно зависимы.

Доказательство. По свойству определителя Грама (утверждение 14.7) для системы векторов a, b

$$0 \leq \Gamma(a, b) = \begin{vmatrix} (a, a) & (a, b) \\ (b, a) & (b, b) \end{vmatrix} = (a, a)(b, b) - (a, b)(b, a) = |a|^2|b|^2 - (a, b)^2,$$

откуда $(a, b)^2 \leq |a|^2 |b|^2$. Извлекая квадратный корень из обеих частей неравенства, приходим к неравенству $|(a, b)| \leq |a| \cdot |b|$, причем равенство получаем тогда и только тогда, когда a, b линейно зависимы. ■

Пример 14.11. Рассмотрим неравенство Коши–Буняковского в пространствах $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_3$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}(a, b)$, с введенными в них стандартными скалярными произведениями:

1. $|(a, b)| \leq |a||b|$ в пространствах $\mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$ следует также из определения $(a, b) = |a||b| \cos \varphi$;
2. в пространстве $\mathbb{R}^n$:

$$\left(\sum_{j=1}^n x_j y_j \right)^2 \leq \sum_{j=1}^n x_j^2 \sum_{j=1}^n y_j^2;$$

3. в пространстве $\mathbb{R}(a, b)$:

$$\left(\int_a^b f(t)g(t) dt \right)^2 \leq \int_a^b f^2(t) dt \int_a^b g^2(t) dt.$$

Упражнение 14.12. Пусть x, y — два неотрицательных вещественных числа. Применив к векторам $a = (\sqrt{x}, \sqrt{y})$ и $b = (\sqrt{y}, \sqrt{x})$ неравенство Коши–Буняковского, получить *неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим*.

Упражнение 14.13. Из неравенства Коши–Буняковского вывести *неравенство между средним арифметическим и средним квадратичным*:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}.$$

Указание: Положить $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)^\top$, $b = (1, 1, \dots, 1)^\top$.

Неравенство Коши–Буняковского позволяет ввести следующее

Определение 14.14. Углом между векторами a, b называется вещественное число

$$\varphi = \arccos \frac{(a, b)}{|a||b|}.$$

Данное определение согласуется с понятием угла в геометрических пространствах $\mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$.

Утверждение 14.15 (Неравенство треугольника). *Для любых векторов a, b евклидова пространства V выполнено неравенство*

$$|a + b| \leq |a| + |b|. \quad (14.3)$$

Доказательство. Требуемое неравенство следует из цепочки соотношений:

$$\begin{aligned} |a + b|^2 &= (a + b, a + b) \\ &= (a, a) + 2(a, b) + (b, b) \\ &\leq |a|^2 + 2|(a, b)| + |b|^2, \quad \text{так как } (a, b) \leq |(a, b)| \\ &\leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2, \quad \text{так как } |(a, b)| \leq |a||b| \\ &= (|a| + |b|)^2. \end{aligned}$$

■

Упражнение 14.16. Дайте геометрическую интерпретацию неравенству треугольника в пространствах $\mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$.

Упражнение 14.17. Докажите, что (14.3) выполняется как равенство тогда и только тогда, когда $a = \alpha b$ или $b = \alpha a$ для некоторого $\alpha \geq 0$ (в геометрических пространствах $\mathbf{V}_2$ и $\mathbf{V}_3$ векторы a и b коллинеарны и сонаправлены).

Упражнение 14.18. Докажите следующие свойства нормы вектора. Пусть a, b — произвольные векторы евклидова пространства V , α — произвольное вещественное число, тогда

- 1) $|\alpha a| = |\alpha| \cdot |a|$;
- 2) $||a| - |b|| \leq |a - b|$;
- 3) $|a + b|^2 + |a - b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$ (*равенство параллелограмма* — дайте геометрическую интерпретацию).

14.3. Ортогональность

Определение 14.19. Векторы a, b называются *ортогональными* (в пространствах $\mathbf{V}_2$ и $\mathbf{V}_3$ — *перпендикулярными*), если $(a, b) = 0$. Обозначение: $a \perp b$.

Определение 14.20. Система векторов $a_1, \dots, a_k$ называется *ортогональной*, если $a_i \perp a_j$ при $i \neq j, i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, k$.

Система векторов $a_1, \dots, a_k$ называется *ортонормированной*, если

$$(a_i, a_j) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j \quad (\text{т. е. } a_i \perp a_j), \\ 1 & \text{при } i = j \quad (\text{т. е. } |a_i| = 1). \end{cases}$$

Утверждение 14.21 (Теорема Пифагора). *Если $a \perp b$, то*

$$|a + b|^2 = |a|^2 + |b|^2.$$

Доказательство. Требуемое равенство следует из соотношений:

$$|a + b|^2 = (a + b, a + b) = (a, a) + \underbrace{(a, b)}_0 + \underbrace{(b, a)}_0 + (b, b) = |a|^2 + |b|^2.$$

■

Упражнение 14.22. [Теорема, обратная к теореме Пифагора] Докажите, что если $|a + b|^2 = |a|^2 + |b|^2$, то $a \perp b$.

Упражнение 14.23. [Обобщение теоремы Пифагора] Докажите, что если система $a_1, \dots, a_k$ ортогональна, то

$$|a_1 + \dots + a_k|^2 = |a_1|^2 + \dots + |a_k|^2.$$

Утверждение 14.24. *Ортогональная система ненулевых векторов линейно независима. Ортонормированная система линейно независима.*

Доказательство. Очевидно, матрица Грама ортогональной системы ненулевых векторов — диагональная с ненулевыми диагональными элементами. Матрица Грама ортонормированной системы единичная. По свойству определителя Грама (утверждение 14.7) в обоих случаях системы линейно независимы. ■