Определение 7.3. Числовая функция двух аргументов – закон или правило, по которому каждой паре векторов $\vec{x}, \vec{y} \in E_n$ ставится в соответствие число из R.

Определение 7.4. Числовая функция $b(\vec{x}, \vec{y})$, аргументами которой являются всевозможные векторы $\vec{x}, \vec{y} \in E_n$, называется **билинейной формой**, если $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in E_n$ и $\forall \alpha \in R$ выполняются соотношения:

а) $b(\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = b(\vec{x}, \vec{z}) + b(\vec{y}, \vec{z})$;

б) $b(\vec{x}, \vec{y} + \vec{z}) = b(\vec{x}, \vec{y}) + b(\vec{x}, \vec{z})$;

в) $b(\alpha\vec{x}, \vec{y}) = \alpha b(\vec{x}, \vec{y})$;

г) $b(\vec{x}, \alpha\vec{y}) = \alpha b(\vec{x}, \vec{y})$;

т.е. функция является линейной по каждому из аргументов, где условия а), в) означают линейность по первому аргументу; условия б), г) – по второму.

Выберем какой-либо базис $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ в E_n. Тогда

$$\vec{x} = \sum_i x_i \vec{e}_i, \quad \vec{y} = \sum_j y_j \vec{e}_j,$$

и значение билинейной формы может быть вычислено следующим образом:

$$b(\vec{x}, \vec{y}) = b\left(\sum_i x_i \vec{e}_i, \sum_j y_j \vec{e}_j\right) = \sum_i x_i b\left(\vec{e}_i, \sum_j y_j \vec{e}_j\right) = \sum_{i,j} x_i y_j b(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$$

или

$$b(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i,j} x_i y_j \beta_{ij} = \sum_{i,j} \beta_{ij} x_i y_j, \qquad (7.1)$$

где $\beta_{ij} = b(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$ ($i, j = 1, 2, ..., n$) – значения билинейной формы на всевозможных парах базисных векторов, которые называются **коэффициентами билинейной** формы в базисе *e*.

Коэффициенты β_{ij} образуют квадратную матрицу порядка n

$$B_e = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdots & \beta_{nn} \end{pmatrix},$$

которая называется **матрицей билинейной формы** в данном базисе *e*. Как легко проверить, в матричном виде равенство (7.1) имеет вид

$$b(\vec{x}, \vec{y}) = X^{\top} B_e Y. \tag{7.2}$$

Теорема 7.1. Любая квадратная матрица $B = (\beta_{ij})$ в некотором базисе является матрицей билинейной формы.

Доказательство. Определим $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E_n$ с базисом e с помощью матрицы $B = (\beta_{ij})$ числовую функцию $b(\vec{x}, \vec{y})$ по правилу

$$b(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i,j} \beta_{ij} x_i y_j .$$

Легко проверяются свойства (7.1). Но тогда элементы β_{ij} равны $b(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$, где $\vec{e}_i = (0, ..., 0, \underset{i}{1}, 0, ..., 0)$, $\vec{e}_j = (0, ..., 0, \underset{j}{1}, 0, ..., 0)$, и записанная формула есть определение билинейной формы (7.2).

Согласно теореме 7.1, естественно называть представление (7.2.) общим видом билинейной формы в n-мерном линейном евклидовом пространстве E_n.

Определение 7.5. Билинейная форма $b(\vec{x}, \vec{y})$ называется **симметричной (кососимметричной)**, если $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E_n$ выполняются равенства

$$b(\vec{x}, \vec{y}) = b(\vec{y}, \vec{x}), \qquad (b(\vec{x}, \vec{y}) = -b(\vec{y}, \vec{x})).$$

Теорема 7.2. Билинейная форма является симметричной (кососимметричной) тогда и только тогда, когда её матрица симметрическая, т.е.

$\beta_{ij} = \beta_{ji}$ или $B_e = B_e^{\mathsf{T}}$ (кососимметрическая, т.е. $\beta_{ij} = -\beta_{ji}$ или $B_e^{\mathsf{T}} = -B_e$).

Доказательство. $(\Rightarrow)$ Так как форма симметрична, то $\forall \vec{x},\, \vec{y} \in E_n$:

$$b(\vec{x},\, \vec{y}) = b(\vec{y},\, \vec{x}).$$

В частности, для базисных векторов $\beta_{ij} = b(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = b(\vec{e}_j, \vec{e}_i) = \beta_{ji}$, следовательно, $B_e = B_e^{\mathsf{T}}$. Аналогично для кососимметричной формы.

$(\Leftarrow)$ Пусть матрица билинейной формы симметрическая, т.е. $B_e = B_e^{\mathsf{T}}$. Тогда, так как матрица размеров 1×1 не меняется при транспонировании:

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E_n: \quad b(\vec{x}, \vec{y}) \overset{(7.2)}{=} X^{\mathsf{T}} B_e Y = \left(X^{\mathsf{T}} B_e Y\right)^{\mathsf{T}} = Y^{\mathsf{T}} B_e^{\mathsf{T}} X = Y^{\mathsf{T}} B_e X \overset{(7.2)}{=} b(\vec{y}, \vec{x}).$$

Теорема 7.3. Матрицы B_e и B_f билинейной формы $b(\vec{x}, \vec{y})$ в базисах *e* и $f = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, ..., \vec{f}_n)$ связаны соотношением

$$B_f = T^{\mathsf{T}} B_e T, \tag{7.3}$$

где T – матрица перехода от базиса *e* к базису *f*.

Доказательство. Так как T – матрица перехода от *e* к *f*, то $f = eT$, $X_e = TX_f$, где X_e, X_f – координатные столбцы вектора $\vec{x}$ в базисах *e* и *f* соответственно, $Y_e = TY_f$, то по формуле (7.2) получаем $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E_n$:

$$b(\vec{x}, \vec{y}) = X_e^{\mathsf{T}} B_e Y_e = \left(TX_f\right)^{\mathsf{T}} B_e \left(TY_f\right) = X_f^{\mathsf{T}} T^{\mathsf{T}} B_e T Y_f;$$

с другой стороны $b(\vec{x}, \vec{y}) = X_f^{\mathsf{T}} B_f Y_f$, следовательно

$$X_f^{\mathsf{T}} \left(T^{\mathsf{T}} B_e T - B_f\right) Y_f = 0.$$

Так как $\vec{x}, \vec{y}$ – произвольные, то выражение, стоящее в скобках, должно быть равно нулю, следовательно

$$B_f = T^{\mathsf{T}} B_e T \;.$$

Следствие. Ранг матрицы B_f равен рангу матрицы B_e. Это сразу вытекает из равенства (7.3) и из того, что ранг матрицы не изменяется при умножении на невырожденную матрицу.

Это позволяет ввести понятие ранга билинейной формы.

Определение 7.6. **Рангом билинейной формы** называется ранг матрицы этой формы в произвольном базисе.

Определение 7.7. Билинейная форма $b(\vec{x}, \vec{y})$, заданная в E_n, называется **невырожденной (вырожденной)**, если её ранг равен (меньше) размерности пространства E_n, т.е.

$$\operatorname{rang} b(\vec{x}, \vec{y}) = \dim E_n \quad \Leftrightarrow \quad \text{форма невырожденная;}$$

$$\operatorname{rang} b(\vec{x}, \vec{y}) < \dim E_n \quad \Leftrightarrow \quad \text{форма вырожденная.}$$

7.2. Квадратичные формы

Пусть $b(\vec{x}, \vec{y})$ симметричная билинейная форма, заданная на линейном пространстве E_n.

Определение. **Квадратичной формой** называется числовая функция $k(\vec{x})$ одного аргумента $\vec{x}$, значения которой совпадают со значениями билинейной формы $b(\vec{x}, \vec{y})$ при $\vec{x} = \vec{y}$.

При этом симметричная билинейная форма $b(\vec{x}, \vec{y})$ называется полярной к квадратичной форме $k(\vec{x})$.

Пусть в E_n задана симметричная билинейная форма $b(\vec{x}, \vec{y})$ в базисе $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$. По формуле (7.1) $b(\vec{x}, \vec{y}) = \sum\limits_{i,j} \beta_{ij} x_i y_j$, при этом в силу симметрии $\beta_{ij} = \beta_{ji}$. Полагая в этом равенстве $x_j = y_j$, получаем представление квадратичной формы $k(\vec{x})$ в заданном базисе *e*:

$$k(\vec{x}) = \sum_{i,j} k_{ij} x_i x_j . \tag{7.4}$$

Матрицу из коэффициентов k_{ij} обозначим K_e и назовем **матрицей квадратичной формы** в базисе *e*.

Матрица квадратичной формы при переходе к новому базису преобразуется по формуле (7.3), т.е.

$$K_f = T^{\mathrm{T}} K_e T, \tag{7.5}$$

где T – матрица перехода к новому базису.

Так как матрица перехода всегда невырожденная, то ранг матрицы квадратичной формы не изменяется при переходе к новому базису.

Определение 7.9. Ранг матрицы квадратичной формы в произвольном базисе называется **рангом квадратичной формы.**

Если ранг квадратичной формы равен размерности пространства, то квадратичная форма называется **невырожденной,** в противном случае **вырожденной.**

Рассмотрим вопрос о приведении квадратичной формы к сумме квадратов, к так называемому **каноническому виду**, т.е. о выборе такого базиса $f = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, ..., \vec{f}_n)$ в E_n, в котором квадратичная форма представляется в виде

$$k(\vec{x}) = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + ... + \lambda_n x_n'^2, \tag{7.6}$$

где $x_1', x_2', ..., x_n'$ – координаты вектора $\vec{x}$ в базисе f.

Коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ называются **каноническими коэффициентами** квадратичной формы, а базис $f = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, ..., \vec{f}_n)$ – **каноническим базисом**.

Метод Якоби

Пусть $e = \left(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\right)$ – какой-либо базис в E_n, $f = \left(\vec{f}_1, ..., \vec{f}_n\right)$ – базис, в котором квадратичная форма $k(\vec{x})$ имеет канонический вид (канонический базис).

Рассмотрим преобразование вида

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = \vec{e}_1 \\ \vec{f}_2 = t_{12}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{f}_3 = t_{13}\vec{e}_1 + t_{23}\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \ldots \\ \vec{f}_n = t_{1n}\vec{e}_1 + t_{2n}\vec{e}_2 + \ldots + t_{n-1n}\vec{e}_{n-1} + \vec{e}_n \end{cases}, \qquad (7.7)$$

которое называется треугольным, так как $f = eT$, где T – верхняя треугольная матрица

$$T = \begin{pmatrix} 1 & t_{12} & t_{13} & \ldots & t_{1n} \\ 0 & 1 & t_{23} & \ldots & t_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Так как определитель матрицы треугольного преобразования (7.7) отличен от нуля ($\det T = 1$), то векторы $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$ образуют базис.

Введем в рассмотрение главные миноры матрицы K_e квадратичной формы $k(\vec{x})$ в базисе e, обозначив их символами $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$:

$$\Delta_1 = |k_{11}|, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{vmatrix}, \quad \ldots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} k_{11} & \ldots & k_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ k_{n1} & \ldots & k_{nn} \end{vmatrix} = \det K_e, \quad \text{где } K_e = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \ldots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \ldots & k_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_{n1} & k_{n2} & k_{n3} & \ldots & k_{nn} \end{pmatrix}.$$

Теорема 7.4. Пусть $\forall j=\overline{1,n}:\ \Delta_j \neq 0$, тогда существует единственное треугольное преобразование базиса e, с помощью которого квадратичную форму $k(\vec{x})$ можно привести к каноническому виду.

Доказательство. Коэффициенты квадратичной формы $\hat{k}_{ij}$ в базисе $f=\left(\vec{f}_1,\ldots,\vec{f}_n\right)$ вычисляются по формуле $\hat{k}_{ij}=b\left(\vec{f}_i,\vec{f}_j\right)$, где $b(\vec{x},\vec{y})$ – полярная билинейная форма.

Если квадратичная форма $k(\vec{x})=b(\vec{x},\vec{x})$ в базисе $\vec{f}_1,\ldots,\vec{f}_n$ имеет канонический вид, то $\forall i,j;\ i\neq j:\ \hat{k}_{ij}=0$, поэтому для доказательства теоремы достаточно с помощью треугольного преобразования базиса e построить базис $\vec{f}_1,\ldots,\vec{f}_n$, в котором будут выполняться соотношения:

$$\forall i,j;\ i\neq j:\ \ \hat{k}_{ij}=b\left(\vec{f}_i,\vec{f}_j\right)=0,$$

(или что то же при $\forall i,j;\ i<j$, так как $b(\vec{x},\vec{y})$ – симметричная).

Ввиду линейности билинейной формы $b(\vec{x},\vec{y})$ по каждому из аргументов, эти равенства будут выполняться, если будут выполнены равенства:

$$b\left(\vec{e}_i,\vec{f}_j\right)=0 \quad (i=\overline{1,j-1};\quad j=\overline{2,n}) \tag{*}$$

Действительно, используя линейность по первому аргументу, можем записать $b\left(\vec{f}_k,\vec{f}_j\right)=b\left(\sum_{i=1}^{k}t_{ik}\vec{e}_i,\vec{f}_j\right)=\sum_{i=1}^{k}t_{ik}b\left(\vec{e}_i,\vec{f}_j\right)$, следовательно, если (*) справедливо, то $b\left(\vec{f}_k,\vec{f}_j\right)=0$ $(k=\overline{1,j-1})$.

Используя линейность по второму аргументу, находим

$$b\left(\vec{e}_i,\vec{f}_j\right)=b\left(\vec{e}_i,\sum_{k=1}^{j}t_{kj}\vec{e}_k\right)=\sum_{k=1}^{j}t_{kj}\underbrace{b\left(\vec{e}_i,\vec{e}_k\right)}_{\beta_{ik}}=\sum_{\kappa=1}^{j}\beta_{ik}t_{kj}=$$

$$=\sum_{k=1}^{j}k_{ik}t_{kj}=0 \quad (i=\overline{1,j-1},\ j=\overline{2,n})\ .$$

Для каждого j запишем эти равенства и получим систему линейных уравнений относительно t_{ij} $(i<j)$.

$$\begin{array}{ll} i=1 & \left\{\begin{array}{l} k_{11}t_{1j}+k_{12}t_{2j}+\ldots+k_{1,j-1}t_{j-1,j}+k_{1j}=0 \\ k_{21}t_{1j}+k_{22}t_{2j}+\ldots+k_{2,j-1}t_{j-1,j}+k_{2j}=0 \\ \ldots \\ k_{j-1,1}t_{1j}+k_{j-1,2}t_{2j}+\ldots+k_{j-1,j-1}t_{j-1,j}+k_{j-1,j}=0 \end{array}\right. \\ i=2 & \\ \ldots & \\ i=j-1 & \end{array} . \quad (**)$$

Неизвестных коэффициентов здесь $(j-1)$ штук t_{kj} $(k=\overline{1,\, j-1})$ и столько же уравнений, причём определитель матрицы этой системы есть $\Delta_{j-1}\neq 0$ (по условию теоремы). Следовательно, каждая система (при $j=2,3,\ldots,n$) имеет единственное решение (теорема Крамера), т.е. t_{kj} определяются однозначно.

Здесь можно в явном виде получить элементы t_{kj} матрицы T и канонические коэффициенты λ_j.

Обозначим $\Delta_{j-1,k}$ минор матрицы K_e, расположенный на пересечении строк с номерами $1,2,\ldots,j-1$ и столбцов с номерами 1, 2…, $k-1,k+1,\ldots,j$, тогда, решая систему (**) по формулам Крамера, найдём

$$t_{kj}=\frac{(-1)^{j+k}\Delta_{j-1,k}}{\Delta_{j-1}} \quad (k=\overline{1,\, j-1},\quad j=\overline{2,\, n}). \qquad (7.8)$$

Найдём λ_j:

$$\lambda_j=\hat{k}_{jj}=\hat{\beta}_{jj}=b\left(\vec{f}_j,\vec{f}_j\right)=b\left(\sum_{k=1}^{j}t_{kj}\vec{e}_k,\vec{f}_j\right)=\sum_{k=1}^{j}t_{kj}\underbrace{b\left(\vec{e}_k,\vec{f}_j\right)}_{\substack{=0\ \forall k<j \\ \text{по построению}}}=$$

$$=b\left(\vec{e}_j,\vec{f}_j\right)=b\left(\vec{e}_j,\sum_{k=1}^{j}t_{kj}\vec{e}_k\right)=\sum_{k=1}^{j}t_{kj}\underbrace{b\left(\vec{e}_j,\vec{e}_k\right)}_{=k_{jk}=k_{kj}}=\sum_{k=1}^{j}t_{kj}k_{jk}=\sum_{k=1}^{j}k_{jk}t_{kj}\overset{(7.8)}{=}$$

$$= \sum_{k=1}^{j} k_{jk} \frac{(-1)^{j+k} \Delta_{j-1,k}}{\Delta_{j-1}} = \left| \begin{array}{c} \text{так как } (-1)^{j+k} \Delta_{j-1,k} = A_{jk}; \\ \sum\limits_{k=1}^{j} k_{jk} A_{jk} \text{ - разложение } \Delta_j \\ \text{по } j\text{-й строке} \end{array} \right| = \frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}},$$

Таким образом,

$$\lambda_j = \frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}} \ (j = \overline{2, n}); \quad \lambda_1 = b(\vec{f}_1, \vec{f}_1) = b(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = k_{11} = \Delta_1. \qquad (7.9)$$

Теорема 7.5. (Лагранжа) Любая квадратичная форма $k(\vec{x})$, заданная в n – мерном евклидовом пространстве E_n, с помощью невырожденного линейного преобразования координат (базиса) может быть приведена к каноническому виду.

Доказательство (метод Лагранжа). Основная идея: дополнение многочлена до полного квадрата по каждому из аргументов.

Пусть в базисе $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$

$$k(\vec{x}) = \sum_{i,j} k_{ij} x_i x_j \quad \text{и} \quad \exists \vec{x} \in E_n \text{ такой, что } k(\vec{x}) \neq 0.$$

С помощью невырожденного преобразования правую часть равенства можно преобразовать так, что коэффициент при квадрате первой координаты k_{11} вектора $\vec{x}$ будет отличен от нуля.

1) Если в данном базисе этот коэффициент отличен от нуля, то нужное преобразование является тождественным.

2) Если $k_{11} = 0$, но:

а) отличен от нуля коэффициент при квадрате какой-либо другой координаты, например, $k_{ss} \neq 0$, тогда с помощью перенумерации базисных векторов $\vec{e}_1 \leftrightarrow \vec{e}_s$ можно добиться требуемого результата. Перенумерация является невырожденным преобразованием, так как матрица перехода от одного базиса к другому имеет вид

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e' = eT,$$

здесь $\det T = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+2s} \det E_{n-2} = -1 \neq 0$;

б) все $k_{ss} = 0$, но тогда $\exists k_{pq} \neq 0$ (все нули быть не могут, так как в этом случае $k(\vec{x}) \equiv 0$, что противоречит условию теоремы). Тогда нужное преобразование будет иметь вид

$$\begin{cases} x_p = x'_p - x'_q \\ x_q = x'_p + x'_q \\ x_i = x'_i \quad \forall i, i \neq p, q \end{cases},$$

матрица этого преобразования также невырожденная $X = TX'$, где

$$\begin{array}{r c}
 & \\
p \rightarrow & \\
T = & \\
q \rightarrow & \\
 &
\end{array}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \dots 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \dots 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & \uparrow & & \uparrow & & & \\ & & & p & & q & & & \end{array}$$

По теореме Лапласа (разложение по p-й и q-й строкам)

$$\det T = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2p+2q} \det E_{n-2} = 1 + 1 = 2 \neq 0,$$

при этом

$$2k_{pq}x_p x_q = 2k_{pq}(x'_p - x'_q)(x'_p + x'_q) = 2k_{pq}x'^2_p - 2k_{pq}x'^2_q$$

и далее см. а).

Итак, не ограничивая общности, можно сказать, что $k_{11} \neq 0$.

Выделим группу слагаемых, содержащих x_1, т.е. представим форму в виде $k(\vec{x}) = k_{11}x_1^2 + 2k_{12}x_1x_2 + \ldots + 2k_{1n}x_1x_n + \sum\limits_{i,j=2}^{n} k_{ij}x_ix_j$

и дополним ее до полного квадрата, используя формулу

$$(a_1 + \ldots + a_n)^2 = \sum_i a_i^2 + 2\sum_{\substack{i,j \\ i<j}} a_i a_j .$$

$$k_{11}x_1^2 + 2k_{12}x_1x_2 + \ldots + 2k_{1n}x_1x_n = k_{11}\left(x_1^2 + 2x_1\left(\frac{k_{12}}{k_{11}}x_2\right) + \ldots + 2x_1\left(\frac{k_{1n}}{k_{11}}x_n\right)\right) =$$

$$= k_{11}\left(x_1 + \frac{k_{12}}{k_{11}}x_2 + \ldots + \frac{k_{1n}}{k_{11}}x_n \right)^2 - \sum_{j=2}^{n}\frac{k_{1j}^2}{k_{11}}x_j^2 - \sum_{i,j=2}^{n}\frac{k_{1i}k_{1j}}{k_{11}}x_ix_j \quad .$$

Обозначая $x'_1 = x_1 + \dfrac{k_{12}}{k_{11}}x_2 + \ldots + \dfrac{k_{1n}}{k_{11}}x_n$,

получим $k(\vec{x}) = k_{11}x'^2_1 + k'(\vec{x})$, где $k'(\vec{x}) = \sum\limits_{i,j=2}^{n} k'_{ij}x_ix_j$ квадратичная форма, не содержащая координаты x_1, и коэффициенты этой квадратичной формы вычисляются по формулам:

$$k'_{ij} = k_{ij} - \frac{k_{1i}k_{1j}}{k_{11}} \qquad (i, j = \overline{2,n}).$$

Данное преобразование также является невырожденным

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + \dfrac{k_{12}}{k_{11}} x_2 + \ldots + \dfrac{k_{1n}}{k_{11}} x_n \\ \quad x_i' = x_i, \quad i = \overline{2, n} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad X' = T^{-1} X,$$

где $$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{k_{12}}{k_{11}} & \ldots & \ldots & \dfrac{k_{1n}}{k_{11}} \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ поэтому } \det T^{-1} = 1$$

(разложить по первому столбцу).

К квадратичной форме $k'(\vec{x})$ можно применить тот же процесс и так далее, в результате на шаге с номером $m \le n-1$ получим канонический вид квадратичной формы. При этом матрица перехода к каноническому базису будет равна $T = T_m T_{m-1} \ldots T_1$ – произведению невырожденных матриц и, следовательно, сама будет невырожденной.

7.3. Классификация квадратичных форм

Рассмотрим квадратичную форму

$$k(\vec{x}) = \sum_{i,j} k_{ij} x_i x_j . \qquad (7.10)$$

Определение 7.10. Квадратичная форма $k(\vec{x})$ называется:

1) **положительно** (**отрицательно**) определённой, если $\forall \vec{x} \in E_n$, $\vec{x} \ne 0$ выполняется неравенство $k(\vec{x}) > 0$, ($k(\vec{x}) < 0$) (**знакоопределённые** формы);

2) **неопределённой**, если $\exists \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in E_n$, для которых выполняются неравенства $k(\vec{x}_1) > 0$, $k(\vec{x}_2) < 0$ (**знакопеременные** формы);

3) **полуопределённой**, если $\forall \vec{x} \in E_n \;\; k(\vec{x}) \geq 0$, $(k(\vec{x}) \leq 0)$ и $\exists \vec{x} \neq \vec{0}$ для которого выполняется равенство $k(\vec{x}) = 0$.

Выявим условия, при которых имеет место каждая из этих ситуаций.

Замечание 1. Канонический базис определён неоднозначно (перенумеровывая базисные векторы, будем получать различные канонические виды или см. метод Якоби).

Замечание 2. Если форма приведена к каноническому виду, то, вообще говоря, не все коэффициенты λ_j должны быть отличны от нуля. Оставим лишь ненулевые λ_j и, перенумеровывая переменные (базисные векторы), заново запишем

$$k(\vec{x}) = \lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \lambda_2 \tilde{x}_2^2 + \ldots + \lambda_m \tilde{x}_m^2 \,. \tag{7.11}$$

Очевидно, что $m \leq n$, так как ранг квадратичной формы по определению равен рангу её матрицы в произвольном базисе, то из (7.11) и условия $\forall j = \overline{1, m}$: $\lambda_j \neq 0$ следует, что ранг квадратичной формы равен m (числу ненулевых канонических коэффициентов): $\operatorname{rang} k(\vec{x}) = m$, т.к. $\operatorname{rang} K_f = m$.

Таким образом, число отличных от нуля канонических коэффициентов равно рангу квадратичной формы.

Из этого замечания следует, что число отличных от нуля канонических коэффициентов не зависит от выбора невырожденного преобразования, с помощью которого она приводится к каноническому виду.

Более того, при любом способе приведения к каноническому виду сохраняется число положительных и отрицательных канонических коэффициентов (закон инерции квадратичных форм).

Пусть с помощью какого-либо невырожденного преобразования квадратичная форма (7.10) приведена к виду (7.11), причём отличные от нуля коэффициенты занумерованы так, что первые k из них положительны, а остальные $m-k$ отрицательны, т.е.

$$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0, \quad ..., \quad \lambda_k > 0, \quad \lambda_{k+1} < 0, \quad ..., \quad \lambda_m < 0.$$

Рассмотрим ещё одно невырожденное преобразование координат (базиса) вида

$$\tilde{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\hat{x}_1,\ \tilde{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\hat{x}_2, \ldots, \tilde{x}_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\hat{x}_k,\ \tilde{x}_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{k+1}}}\hat{x}_{k+1}, \ldots,$$

$\tilde{x}_m = \dfrac{1}{\sqrt{-\lambda_m}}\hat{x}_m,\quad \tilde{x}_{m+1} = \hat{x}_{m+1}, \ldots,\quad \tilde{x}_n = \hat{x}_n,$ что равносильно записи

$$\tilde{X} = T\hat{X}, \text{ где } \quad T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & \ddots & ... & ... & .... & ... \\ 0 & ... & \frac{1}{\sqrt{-\lambda_m}} & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & \ddots & ... \\ 0 & ... & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

(легко видеть, что определитель этой матрицы отличен от нуля).

В результате этого преобразования квадратичная форма (7.10) примет вид

$$k(\vec{x}) = \hat{x}_1^2 + ... + \hat{x}_k^2 - \hat{x}_{k+1}^2 - ... - \hat{x}_m^2, \tag{7.12}$$

который называется **нормальным каноническим видом** квадратичной формы.

Теорема 7.6 (Закон инерции квадратичных форм).

Число слагаемых с положительными (отрицательными) коэффициентами в нормальном каноническом виде квадратичной формы не зависит от способа приведения квадратичной формы к этому виду.

Доказательство. Пусть квадратичная форма $k(\vec{x})$ ранга m двумя способами приведена к нормальному виду, и число положительных и отрицательных слагаемых в них различно, т.е.

$$k(\vec{x}) = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - y_{k+2}^2 - \ldots - y_m^2 = \\ = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_l^2 - z_{l+1}^2 - z_{l+2}^2 - \ldots + z_m^2 \qquad (!)$$

причём $k \neq l$, а Y, Z – координатные столбцы вектора $\vec{x}$ в канонических базисах $\vec{f}$, $\vec{g}$.

Так как переход от переменных $x_1, \ldots, x_n$ к переменным $y_1, \ldots, y_n$ был невырожденным линейным преобразованием, то и $y_1, \ldots, y_n$ будут выражаться через $x_1, \ldots, x_n$ с помощью невырожденного линейного преобразования, т.е. $X = T_{e \to f} Y$, $Y = T_{e \to f}^{-1} X$ $\det\left(T_{e \to f}^{-1}\right) \neq 0$ и, следовательно,

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(-1)} x_j, \qquad (*)$$

где $a_{ij}^{(-1)}$ – элементы обратной матрицы $T_{e \to f}^{-1}$.

Аналогично: $X = T_{e \to g} Z$, $Z = T_{e \to g}^{-1} X$ и $\det\left(T_{e \to g}^{-1}\right) \neq 0$)

$$z_s = \sum_{t=1}^{n} b_{st}^{(-1)} x_t, \qquad (**)$$

где $b_{st}^{(-1)}$ – элементы обратной матрицы $T_{e \to g}^{-1}$.

Пусть для определённости $k < l$ (случай, когда $k > l$, рассматривается аналогично). Запишем систему равенств

$$y_1 = 0, \quad \ldots, \quad y_k = 0; \quad z_{l+1} = 0, \quad \ldots, \quad z_n = 0 \qquad (***)$$

Если левые части этих равенств будут заменены их выражениями (*) и (**) через x_i, то мы получим систему $k + n - l = n - (l - k) = n + \underbrace{k - l}_{<0}$ линейных однородных уравнений с n неизвестными $x_1, \ldots, x_n$.

Число уравнений в этой системе меньше числа неизвестных (так как $(l - k) > 0$), поэтому система имеет нетривиальное решение (см. системы линейных уравнений) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$: $\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2 \neq 0$.

Заменим теперь в равенстве (!) все y_i, z_j их выражениями из (*) и (**), тогда получим: $y_1^2(\vec{\alpha})+y_2^2(\vec{\alpha})+...+y_k^2(\vec{\alpha})-y_{k+1}^2(\vec{\alpha})-...-y_m^2(\vec{\alpha})=$

$$=z_1^2(\vec{\alpha})+...+z_l^2(\vec{\alpha})-z_{l+1}^2(\vec{\alpha})-...-z_m^2(\vec{\alpha}) \text{ или}$$

$$-y_{k+1}^2(\vec{\alpha})-...-y_m^2(\vec{\alpha})=z_1^2(\vec{\alpha})+...+z_l^2(\vec{\alpha}),$$

где $y_i(\vec{\alpha})$ и $z_j(\vec{\alpha})$ обозначены значения неизвестных y_i, z_j, получающиеся при подстановке в (*), (**) вместо $x_1, ..., x_n$ решения $\alpha_1, ..., \alpha_n$.

Из последнего равенства следует, что $y_{k+1}(\vec{\alpha})=...=y_m(\vec{\alpha})=0$, $z_1(\vec{\alpha})=...=z_l(\vec{\alpha})=0$, так как левая часть меньше либо равна 0, а правая часть больше либо равна 0.

С другой стороны, по самому выбору $\vec{\alpha}$ (см. (***))

$$z_{l+1}(\vec{\alpha})=...=z_n(\vec{\alpha})=0, \quad y_1(\vec{\alpha})=...=y_k(\vec{\alpha})=0.$$

Таким образом, система n линейных однородных уравнений $z_j=0$, ($j=\overline{1, n}$) $\Leftrightarrow$ $Z=T_{e\to g}^{-1}X=O_n$ с n неизвестными $x_1, x_2, ..., x_n$ имеет нетривиальное решение $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$: $\alpha_1^2+\alpha_2^2+...+\alpha_n^2\neq 0$, следовательно, определитель матрицы системы равен 0 (см. системы линейных уравнений) $\det\left(T_{e\to g}^{-1}\right)=0$, а это противоречит тому, что преобразование (**) невырожденное, т.е. $k<l$ быть не может.

К такому же противоречию мы придём и при $k>l$.

Отсюда следует, что $k=l$. Теорема доказана.

Числа k и $m-k$ называются **положительным и отрицательным индексами инерции** квадратичной формы.

Пусть отрицательный индекс инерции равен l, т.е.

$$k+l=m=\operatorname{rang} k(\vec{x}).$$

Теорема 7.7. (Необходимое и достаточное условие знакоопределённости квадратичной формы).

Квадратичная форма $k(\vec{x})$ является знакоопределённой тогда и только тогда, когда либо $k = n$, либо $l = n$.

При этом, если $k = n$, то форма положительно определённая, если $l = n$, то форма отрицательно определённая.

Доказательство. Так как случаи положительно и отрицательно определённой формы рассматриваются аналогично, то доказательство проведём для положительно определённых форм.

1) $(\Rightarrow)$ Пусть $k(\vec{x})$ – положительно определённая квадратичная форма, тогда формула (7.12) принимает вид

$$k(\vec{x}) = \hat{x}_1^2 + \ldots + \hat{x}_k^2$$

(иначе $\exists \vec{\hat{x}} \neq \vec{0}$ такой, что $\hat{x}_1 = \ldots = \hat{x}_k = 0$ и $k(\vec{x}) = 0$).

Если при этом $k < n$, то отсюда следует, что для ненулевого вектора $\vec{x}'$ с координатами $x_1' = x_2' = \ldots = x_k' = 0$, $x_{k+1}' \neq 0, \ldots, x_n' \neq 0$ значение формы $k(\vec{x}')$ обращается в 0, а это противоречит определению положительно определённой квадратичной формы, следовательно $k = n$.

2) $(\Leftarrow)$ Пусть $k = n$, тогда (7.12) имеет вид

$$k(\vec{x}) = \hat{x}_1^2 + \ldots + \hat{x}_n^2.$$

Ясно, что $\forall \vec{x}:\ k(\vec{x}) \geq 0$, причём, если $k(\vec{x}) = 0$, то

$$x_1' = x_2' = \ldots = x_n' = 0, \quad \text{т.е. } \vec{x}' = \vec{0},$$

следовательно, форма положительно определённая.

Теорема 7.8. (Необходимое и достаточное условие неопределённости квадратичной формы).

Квадратичная форма $k(\vec{x})$ является знакопеременной тогда и только тогда, когда $(k \neq 0) \wedge (l \neq 0)$.

Доказательство.

1) $(\Rightarrow)$ Так как знакопеременная форма принимает как положительные, так и отрицательные значения, то её представление (7.12) в нормальном виде должно содержать как положительные, так и отрицательные сла-

гаемые (в противном случае эта форма принимала бы либо неотрицательные, либо неположительные значения). Следовательно, как положительный, так и отрицательный индексы инерции отличны от 0.

2) $(\Leftarrow)$ Пусть $k \neq 0$, $l \neq 0$. Тогда для вектора $\vec{x}'$ с координатами $x_1' \neq 0, ..., x_k' \neq 0$, $x_{k+1}' = 0, ..., x_n' = 0$ имеем $k(\vec{x}') > 0$, а для вектора $\vec{x}''$ с координатами $x_1'' = ... = x_k'' = 0$, $x_{k+1}'' \neq 0, ..., x_n'' \neq 0$ имеем $k(\vec{x}'') < 0$, следовательно форма знакопеременная (см. определение).

Теорема 7.9. (Необходимое и достаточное условие полуопределённости квадратичных форм).

Квадратичная форма $k(\vec{x})$ является полуопределённой тогда и только тогда, когда либо $k < n$, $l = 0$, либо $k = 0$, $l < n$.

Доказательство.

1) $(\Rightarrow)$ Пусть $k(\vec{x})$ положительно полуопределённая квадратичная форма. Тогда, очевидно, $l = 0$ и $k < n$ (иначе, если $k = n$ форма является положительно определённой).

2) $(\Leftarrow)$ Если $k < n$, $l = 0$, то $k(\vec{x}) \geq 0$ и $\exists \vec{x}' \neq \vec{0}$ с координатами $x_1' = ... = x_k' = 0$, $x_{k+1}' \neq 0, ..., x_n' \neq 0$ такой, что $k(\vec{x}') = 0$, следовательно, $k(\vec{x})$ положительно полуопределённая квадратичная форма.

Замечание. При применении этих признаков квадратичную форму необходимо привести к каноническому виду, что не всегда удобно и достаточно долго. Поэтому необходимо иметь критерий, с помощью которого можно классифицировать форму не приводя её к каноническому виду.

Теорема 7.10 (Критерий Сильвестра).

Квадратичная форма $k(\vec{x})$ является положительно определённой тогда и только тогда, когда $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, ..., \Delta_n > 0$.

Квадратичная форма $k(\vec{x})$ является отрицательно определённой тогда и только тогда, когда $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, ...,$ т.е.

$$\Delta_1 < 0, \quad \Delta_{j-1}\Delta_j < 0, \ (j = \overline{2, n}).$$

Доказательство.

1) $(\Rightarrow)$ Докажем сначала, что из условия знакоопределённости квадратичных форм следует, что $\Delta_j \neq 0$ ($j = 1, 2, ..., n$).

Доказательство проведем от противного.

Пусть, например, $\Delta_l = 0$ $(1 \le l \le n)$. Рассмотрим следующую однородную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} k_{11}x_1 + k_{12}x_2 + ... + k_{1l}x_l = 0 \\ k_{21}x_1 + k_{22}x_2 + ... + k_{2l}x_l = 0 \\ ... \\ k_{l1}x_1 + k_{l2}x_2 + ... + k_{ll}x_l = 0 \end{cases}.$$

Так как Δ_l – определитель этой системы и $\Delta_l = 0$, то система имеет нетривиальное решение $x_1, x_2, ..., x_l$ ($x_1^2 + x_2^2 + ... + x_l^2 \neq 0$). Умножим первое уравнение на x_1, второе на x_2, … , последнее на x_l и сложим полученные равенства. В результате получим равенство

$$\sum_{i,j=1}^{l} k_{ij}x_i x_j = 0,$$

левая часть которого представляет собой значение квадратичной формы $k(\vec{x})$ на ненулевом векторе $\vec{x}$ с координатами $(x_1, x_2, ..., x_l, 0, ..., 0)$ и это значение равно 0, что противоречит знакоопределённости формы.

Итак, мы убедились, что $\Delta_j \neq 0$ ($j = \overline{1, n}$). Поэтому можно применить метод Якоби приведения формы $k(\vec{x})$ к каноническому виду и воспользоваться формулами (7.6) для канонических коэффициентов $\lambda_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}}$. Если $k(\vec{x})$ – положительно определённая, то из теоремы 7.7 следует, что $\lambda_j > 0$, следовательно $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, ..., \Delta_n > 0$, так как $\Delta_1 = \lambda_1 > 0$, $\Delta_2 = \lambda_2\Delta_1 > 0$, $\Delta_3 = \lambda_3\Delta_2 > 0$, …, $\Delta_n = \lambda_n\Delta_{n-1} > 0$.

Если $k(\vec{x})$ – отрицательно определённая квадратичная форма, то все канонические коэффициенты отрицательны (теорема 7.7), следовательно, $\Delta_1 = \lambda_1 < 0$, $\Delta_2 = \lambda_2\Delta_1 > 0$, $\Delta_3 = \lambda_3\Delta_2 < 0$, …, и знаки главных угловых миноров чередуются

$$\frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta_j\Delta_{j-1} < 0.$$

2) $(\Leftarrow)$ Достаточность. Пусть выполнены условия, наложенные на главные угловые миноры Δ_j в формулировке теоремы. Так как $\Delta_j \neq 0$ ($j = \overline{1, n}$), то форму $k(\vec{x})$ можно привести к каноническому виду методом Якоби, причём по формулам (7.6) $\lambda_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}}$ и если $\forall j = \overline{1, n}$: $\Delta_j > 0$, то и $\forall j = \overline{1, n}$: $\lambda_j > 0$, т.е. форма положительно определенная (теорема 7.7).

Если же знаки Δ_j чередуются и $\Delta_1 < 0$, то из соотношений (7.6) следует, что $\lambda_j < 0$ и форма отрицательно определена (теорема 7.7). Теорема доказана полностью.