

4. ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ (ОПЕРАТОРЫ)

4.1. Определение линейного отображения

Рассмотрим два линейных пространства L_n, L_m размерностей n и m соответственно.

Определение 4.1. Отображением φ пространства L_n в пространство L_m называется закон, по которому каждому вектору $\vec{x} \in L_n$ ставится в соответствие единственный вектор $\vec{y} \in L_m$.

Обозначения: $\varphi : L_n \rightarrow L_m$ или $\vec{y} = \varphi(\vec{x})$.

Вектор $\vec{y} = \varphi(\vec{x})$ называется **образом** вектора $\vec{x}$, а вектор $\vec{x}$ – **прообразом** вектора $\vec{y}$ при отображении φ .

В дальнейшем рассматриваются лишь линейные отображения.

Определение 4.2. Отображение $\varphi : L_n \rightarrow L_m$ называется **линейным**, если $\forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in L_n, \forall \alpha \in R$ выполняются равенства:

$$1) \varphi(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \varphi(\vec{x}_1) + \varphi(\vec{x}_2); \quad 2) \varphi(\alpha \vec{x}_1) = \alpha \varphi(\vec{x}_1).$$

Из определения 4.2 сразу следует, что линейная комбинация векторов при линейном отображении φ переходит в линейную комбинацию образов с теми же коэффициентами, т.е. справедлива формула

$$\varphi(\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_k \vec{x}_k) = \alpha_1 \varphi(\vec{x}_1) + \alpha_2 \varphi(\vec{x}_2) + \dots + \alpha_k \varphi(\vec{x}_k) \quad (4.1)$$

(получить самостоятельно из свойств 1), 2) определения 4.2).

Если пространства L_m и L_n совпадают, т.е. $m = n$, то отображение называется **преобразованием** пространства L_n .

Теорема 4.1. При линейном отображении $\varphi : L_n \rightarrow L_m$ линейное подпространство $L' \subset L_n$ переходит в линейное подпространство $L'' = \varphi(L') \subset L_m$, причем размерность L'' не превосходит размерности L' , т.е. $\dim \varphi(L') \leq \dim L'$.

Доказательство. Пусть $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_k$ – базис в L' , тогда $\forall \vec{x} \in L'$ имеем

$$\vec{x} = x_1 \vec{f}_1 + x_2 \vec{f}_2 + \dots + x_k \vec{f}_k \quad (4.1) \quad \Rightarrow \quad \varphi(\vec{x}) = \sum_{i=1}^k x_i \varphi(\vec{f}_i),$$

следовательно, произвольный элемент множества $\varphi(L')$ – образов всех векторов из L' есть линейная комбинация векторов $\varphi(\vec{f}_1), \varphi(\vec{f}_2), \dots, \varphi(\vec{f}_k)$, т.е. $\varphi(L')$ – линейная оболочка этих векторов и значит, является линейным подпространством из пространства L_m (теорема 2.1). Размерность линейной оболочки, очевидно, не превосходит числа векторов этой оболочки (теорема 2.2), т.е. $\dim \varphi(L') \leq \dim L'$.

В частности, множество образов всевозможных векторов из пространства L_n является подпространством в пространстве L_m . Будем обозначать это подпространство $\varphi(L_n)$, которое называется **множеством значений отображения φ** , или **образом пространства L_n** при отображении φ .

$$\varphi(L_n) = \{ \vec{y} \in L_m \mid \vec{y} = \varphi(\vec{x}), \vec{x} \in L_n \}.$$

Определение 4.3. Размерность образа пространства L_n при отображении φ называется **рангом** этого отображения.

Обозначения: $\text{rang } \varphi, r_\varphi$. Таким образом, $\text{rang } \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \dim \varphi(L_n)$.

Теорема 4.2. Множество всех векторов из L_n , переходящих при отображении φ в нулевой вектор, является подпространством в L_n .

Доказательство. Если $\varphi(\vec{x}_1) = \vec{0}$, $\varphi(\vec{x}_2) = \vec{0}$, то по определению линейного отображения 4.2 можем записать:

- 1) $\varphi(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \varphi(\vec{x}_1) + \varphi(\vec{x}_2) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$;
- 2) $\forall \alpha \in R, \quad \varphi(\alpha \vec{x}_1) = \alpha \varphi(\vec{x}_1) = \alpha \vec{0} = \vec{0}$.

Эти равенства означают, что множество всех векторов из L_n , переходящих при отображении φ в нулевой вектор, является подпространством в L_n .

Определение 4.4. Подпространство векторов из пространства L_n , отображающихся в нулевой вектор, называется **ядром** отображения φ и обозначается $\ker \varphi$.

Таким образом, $\ker \varphi = \{\vec{x} \in L_n \mid \varphi(\vec{x}) = \vec{0}\}$.

Ядро линейного отображения не может быть пустым, так как содержит, по крайней мере, один вектор – нулевой.

Действительно, $\forall \vec{x} \in L_n : \varphi(\vec{0}) = \varphi(0\vec{x}) = 0\varphi(\vec{x}) = \vec{0}$, т.е. при линейном отображении нулевой вектор $\vec{0} \in L_n$ переходит в нулевой вектор $\vec{0} \in L_m$.

Определение 4.5. Размерность ядра называется **дефектом** линейного отображения.

Обозначение: $\text{def} \varphi$. Таким образом, $\text{def} \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \dim(\ker \varphi)$.

4.2. Координатное представление линейных отображений

Пусть $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ – базис в L_n , тогда образ произвольного вектора из пространства L_n : $\vec{x} = \sum_{j=1}^n x_j \vec{e}_j = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n$ можно представить в виде

$$\vec{y} = \varphi(\vec{x}) = x_1 \varphi(\vec{e}_1) + x_2 \varphi(\vec{e}_2) + \dots + x_n \varphi(\vec{e}_n). \quad (4.2)$$

Пусть $f = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_m)$ – базис L_m , тогда каждый из векторов $\varphi(\vec{e}_j)$ можно разложить по базису f

$$\varphi(\vec{e}_j) = a_{1j}\vec{f}_1 + a_{2j}\vec{f}_2 + \dots + a_{mj}\vec{f}_m = \sum_{i=1}^m a_{ij}\vec{f}_i \quad (j = \overline{1, n}).$$

Если $\vec{y} = \varphi(\vec{x}) = y_1\vec{f}_1 + y_2\vec{f}_2 + \dots + y_m\vec{f}_m$ то (4.2) можно переписать в виде (подставить $\varphi(\vec{e}_j)$ в (4.2)):

$$\begin{aligned} y_1\vec{f}_1 + y_2\vec{f}_2 + \dots + y_m\vec{f}_m &= x_1 \sum_{i=1}^m a_{i1}\vec{f}_i + x_2 \sum_{i=1}^m a_{i2}\vec{f}_i + \dots + x_n \sum_{i=1}^m a_{in}\vec{f}_i = \\ &= \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \right) \vec{f}_1 + \left(\sum_{j=1}^n a_{2j}x_j \right) \vec{f}_2 + \dots + \left(\sum_{j=1}^n a_{mj}x_j \right) \vec{f}_m, \end{aligned}$$

следовательно,

$$y_1 = \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j, \quad \dots, \quad y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j, \quad \dots, \quad y_m = \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j. \quad (4.3)$$

Коэффициенты a_{ij} – координаты векторов $\varphi(\vec{e}_j)$ в базисе f образуют

матрицу A_φ размеров $m \times n$ $A_\varphi = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, которая называ-

ется **матрицей линейного отображения** φ в паре базисов e и f .

Матрица A_φ составлена из координатных столбцов образов базисных векторов $\varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2), \dots, \varphi(\vec{e}_n)$ в базисе f .

Если $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ – координатные столбцы векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$

соответственно, то равенство (4.3) в матричной форме принимает вид

$$Y = A_\varphi X \quad (4.4)$$

При выбранных базисах e и f в пространствах L_n и L_m соответственно каждая матрица размеров $m \times n$ служит матрицей некоторого линейного отображения $\varphi: L_n \rightarrow L_m$, т.е. выбор базисов устанавливает взаимно однозначное соответствие между линейными отображениями $\varphi: L_n \rightarrow L_m$ и матрицами размеров $m \times n$.

Теорема 4.3. Ранг матрицы линейного отображения равен рангу этого отображения $\text{rang } A_\varphi = \text{rang } \varphi$.

Доказательство. Пусть $\text{rang } A_\varphi = r$ и $j_1, \dots, j_r$ – номера столбцов матрицы A_φ , в которых расположен базисный минор. Это значит, что векторы $\varphi(\vec{e}_{j_1}), \dots, \varphi(\vec{e}_{j_r})$ – линейно независимы и, следовательно, каждый вектор $\varphi(\vec{e}_j)$ ($j = \overline{1, n}$) есть их линейная комбинация (теорема о базисном миноре).

Следовательно, образ любого вектора $\varphi(\vec{x})$ можно выразить только через векторы $\varphi(\vec{e}_{j_1}), \dots, \varphi(\vec{e}_{j_r})$, т.е. эти векторы образуют базис в $\varphi(L_n)$ – множестве значений отображения φ , но их число равно размерности $\varphi(L_n)$, т.е. рангу отображения, следовательно, $\text{rang } \varphi = r$.

Теорема 4.4. Сумма ранга (размерности образа) и дефекта отображения (размерности его ядра) равна размерности отображаемого пространства

$$\dim \varphi(L_n) + \dim(\ker \varphi) = \dim L_n = n; \quad \dim \varphi(L_n) = \text{rang } \varphi.$$

Доказательство. Пусть $r = \text{rang } \varphi$, $\vec{x} \in \ker \varphi$, тогда по определению ядра линейного отображения $(\ker \varphi = \{\vec{x} \in L_n \mid \varphi(\vec{x}) = \vec{0}\})$ и формуле (4.4) получаем $A_\varphi X = O_m$ – однородную систему линейных уравнений с n неизвестными, здесь O_m – нулевой столбец высоты m .

В соответствии с теоремой 4.4 $\text{rang } A_\varphi = r$ – ранг отображения. Пусть размерность ядра равна d . Из свойств множества решений однородной систе-

мы уравнений вытекает, что $d = n - r$ (доказать самостоятельно, что множество решений системы $(*)$ – линейное подпространство размерности $n - r$).

Общее решение системы $(*)$ было представлено в виде $X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_{n-r} X_{n-r}$, где $X_1, X_2, \dots, X_{n-r}$ – фундаментальная система решений, следовательно, $\forall \vec{x} \in \ker \varphi$, $\vec{x}$ – линейная комбинация векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{n-r}$, т.е.

$$\vec{x} = c_1 \vec{x}_1 + c_2 \vec{x}_2 + \dots + c_{n-r} \vec{x}_{n-r},$$

координатные столбцы которых $X_1, X_2, \dots, X_{n-r}$ – линейно независимы, следовательно, эти векторы тоже линейно независимы и, значит, $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{n-r}$ – базис в $\ker \varphi$, т.е. $\dim(\ker \varphi) = d = n - r$.

Таким образом, $\dim \varphi(L_n) + \dim(\ker \varphi) = r + n - r = n = \dim L_n$.

4.3. Изменение матрицы линейного отображения при замене базисов

Рассмотрим линейный оператор $\varphi: L_n \rightarrow L_m$, если в пространствах L_n и L_m выбраны базисы $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$, $f = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_m)$ соответственно, то φ определяется матрицей A_φ . Пусть $e' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n)$ и $f' = (\vec{f}'_1, \vec{f}'_2, \dots, \vec{f}'_m)$ другая пара базисов в L_n и L_m соответственно, e', f' связаны с e, f матрицами переходов T и P , т.е. (см. раздел 1)

$$e' = eT, \quad f' = fP.$$

В базисах e', f' оператор φ имеет матрицу A'_φ . Как связаны матрицы A_φ и A'_φ ?

Пусть: $\vec{x} \in L_n$, $\vec{y} = \varphi(\vec{x})$ – образ вектора $\vec{x}$ при отображении φ , $\vec{y} \in L_m$; X, X' – координатные столбцы вектора $\vec{x}$ в базисах e, e' ; Y, Y' – координатные столбцы вектора $\vec{y}$ в базисах f, f' .

Из раздела 1 известно

$$X = TX', \quad Y = PY'.$$

Подставив X, Y в формулу (4.4), получим:

$$Y = A_\varphi X = A_\varphi(TX') \Rightarrow PY' = (A_\varphi T)X'.$$

Так как матрица перехода всегда является невырожденной, то $\exists P^{-1}$.

Умножим последнее равенство на матрицу P^{-1} слева, получим

$$Y' = (P^{-1}A_\varphi T)X', \text{ но } Y' = A'_\varphi X',$$

откуда получаем формулу преобразования матрицы линейного оператора при замене базисов

$$A'_\varphi = P^{-1}A_\varphi T. \quad (4.5)$$

4.4. Изоморфизм линейных пространств

Если $\text{rang } \varphi = m = \dim L_m$, т.е. $\varphi(L_n) \equiv L_m$, то каждый вектор из L_m является образом некоторого вектора из пространства L_n . Отображение, обладающее этим свойством, называется **сюрьективным** или **наложением** (говорят φ – отображение L_n на L_m). Здесь

$$\forall \vec{y} \in L_m, \exists \vec{x} \in L_n \text{ такой, что } \vec{y} = \varphi(\vec{x}).$$

Определение 4.6. Отображение, при котором разные векторы имеют разные образы, называется **инъективным** или **вложением**. Здесь

$$\forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in L_n \Rightarrow \vec{y}_1 = \varphi(\vec{x}_1) \neq \vec{y}_2 = \varphi(\vec{x}_2).$$

Теорема 4.5. Отображение $\varphi : L_n \rightarrow L_m$ является инъективным тогда и только тогда, когда его ядро есть нулевое подпространство

$$(\varphi \text{ – инъективно} \Leftrightarrow \ker \varphi = \{\vec{0}\}).$$

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть φ – инъективно и $\dim \ker \varphi \neq 0$, тогда в пространстве L_m существуют векторы, имеющие не один прообраз, а, по крайней мере, два. Таким является, например, нулевой вектор $\vec{0} \in L_m$ (см.

определение 4.2 и теорему 4.2). Но это противоречит условию теоремы.

($\Leftarrow$) Пусть $\dim \ker \varphi = 0$ и отображение не инъективно. Это значит, что существует вектор $\vec{y} \in L_m$, который имеет два разных прообраза, т.е. существуют векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in L_n$ такие, что $\varphi(\vec{x}_1) = \varphi(\vec{x}_2) = \vec{y}$ и $\vec{x}_1 \neq \vec{x}_2$. В этом случае ядро содержит, по крайней мере, один ненулевой вектор $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \neq \vec{0}$ (ядро – ненулевое подпространство), так как

$$\varphi(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = \varphi(\vec{x}_1) - \varphi(\vec{x}_2) = \vec{y} - \vec{y} = \vec{0},$$

следовательно, $\dim \ker \varphi \neq 0$, что, опять-таки, противоречит условию теоремы. Следовательно, φ – инъективно.

Из определения отображения φ : $\forall \vec{x} \in L_n, \exists! \vec{y} \in L_m$ ($\exists!$ – существует единственный) такой, что $\vec{y} = \varphi(\vec{x})$, если справедливо и обратное, т.е. каждый $\vec{y} \in L_m$ является образом только одного вектора $\vec{x} \in L_n$, то отображение φ называется **взаимно однозначным или биективным**.

Иначе, если $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in L_n, \vec{x}_1 \neq \vec{x}_2$, то $\varphi(\vec{x}_1) \neq \varphi(\vec{x}_2)$, или

$$\forall \vec{y} \in L_m, \exists! \vec{x} \in L_n \text{ такой, что } \vec{y} = \varphi(\vec{x}).$$

Теорема 4.6. Отображение $\varphi : L_n \rightarrow L_m$ – взаимно однозначно (биективно) тогда и только тогда, когда размерности пространств совпадают и равны рангу отображения φ ($n = m = \text{rang } \varphi$).

Доказательство. В этом случае отображение φ является и наложением, т.е. $\text{rang } \varphi = m$, и вложением, т.е. $\ker \varphi = \{\vec{0}\} \Rightarrow \text{rang } \varphi = n$ (на основании теоремы 4.4).

Определение 4.7. Взаимно однозначное отображение называется **изоморфизмом**. Если существует изоморфизм L_n на L_m , то L_n и L_m называются **изоморфными**.

Теорема 4.7. Два пространства изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности равны (см. теорему 4.4 и теорему 4.5).

Значение теоремы об изоморфизме состоит в том, что линейные пространства могут состоять из чего угодно: столбцов, многочленов, чисел, функций, матриц, направленных отрезков, дынь, арбузов, ... – природа их элементов роли не играет, когда изучаются только свойства, связанные с операциями сложения и умножения на число. Все эти свойства у двух изоморфных пространств совершенно одинаковы. С алгебраической точки зрения два изоморфных пространства тождественны. Если условимся не различать эти пространства, то в силу теоремы 4.7 для каждой размерности найдется только одно линейное пространство.

Пример 4.1. Определить ранг и дефект линейного преобразования, а также найти базисы образа и ядра L_3 при преобразовании φ .

$$\varphi(\vec{x}) = (x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 - x_3, x_1 + x_2).$$

Решение. Пусть в L_3 выбран базис $e = (\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \vec{e}_3)$, тогда в этом базисе матрица преобразования φ будет иметь вид:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

По определению 4.5 вектор $\vec{y}$ принадлежит образу L_3 при преобразовании φ в том и только том случае, когда найдется вектор $\vec{x} \in L_3$ такой, что $\vec{y} = \varphi(\vec{x})$, или в координатной записи по формуле (4.4):

$$Y = A_\varphi X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Это равенство означает, что образ L_3 совпадает с линейной оболочкой системы векторов $\vec{f}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{f}_2 = (2, 0, 1)$, $\vec{f}_3 = (1, -1, 0)$, так как $\vec{y} = x_1\vec{f}_1 + x_2\vec{f}_2 + x_3\vec{f}_3$. Следовательно, ранг оператора φ , который совпадает с рангом его матрицы, равен двум. В качестве базиса можно взять любой базис линейной оболочки векторов $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$, например, $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ — они линейно независимы.

Аналогично, вектор $\vec{x}$ принадлежит ядру тогда и только тогда, когда $\varphi(\vec{x}) = \vec{0}$, или, в координатной записи:

$$A_\varphi X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Это однородная система линейных уравнений, ранг которой равен двум, значит, она эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0, \end{cases}$$

полагая в которой, например, $x_3 = 1$, получаем $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, т.е. базис ядра состоит из одного вектора $\vec{p} = (1, -1, 1)$.

При этом по теореме 4.5 размерность ядра равна:

$$\dim(\ker \varphi) = \dim L_3 - \dim \varphi(L_3) = 3 - 2 = 1.$$

5. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Определение 5.1. Если линейное отображение отображает пространство само в себя, то оно называется линейным **преобразованием**, т.е. здесь

$$L_n \equiv L_m \quad (n = m).$$

Все утверждения и теоремы раздела 4 справедливы и для преобразований линейного пространства, но в общем случае при определении матрицы линейного отображения $\varphi: L_n \rightarrow L_m$ выбирались разные базисы в пространствах L_n и L_m . Если же L_n и L_m совпадают, то логично пользоваться одним и тем же базисом и для образов, и для прообразов, следовательно, некоторые определения и формулы изменятся.

Определение 5.2. Матрицей линейного преобразования $\varphi: L_n \rightarrow L_n$ в базисе $e = (\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \dots \ \vec{e}_n)$ называется матрица, столбцы которой есть координаты векторов $\varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2), \dots, \varphi(\vec{e}_n)$ в базисе e (координаты образов базисных векторов в том же базисе).

Матрица линейного преобразования – квадратная порядка n .

При переходе от базиса e к базису f матрица преобразования φ будет иметь вид

$$A'_\varphi = T^{-1} A_\varphi T \quad (5.1)$$

(см. формулу (4.5): $A'_\varphi = P^{-1} A_\varphi T$, где теперь $P = T \Rightarrow P^{-1} = T^{-1}$).

Линейные преобразования обладают рядом специфических свойств, которые для отображений общего вида, вообще говоря, не справедливы. Это связано с тем, что образы и прообразы векторов лежат в одном пространстве, и мы получаем возможность говорить об их взаимном расположении.

Определение 5.3. Ненулевой вектор $\vec{x} \in L_n$ называется **собственным вектором** преобразования φ , если $\varphi(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$, при этом число λ называется **собственным значением (собственным числом)** соответствующим собственному вектору $\vec{x}$.

Если в L_n выбран базис, то

$$\varphi(\vec{x}) = \lambda \vec{x} \Leftrightarrow A_\varphi X = \lambda X.$$

Пусть E – единичная матрица порядка n , тогда последнее равенство можно записать в виде $A_\varphi X - \lambda EX = O_n$ или

$$(A_\varphi - \lambda E)X = O_n. \quad (5.2)$$

В координатах это равенство выглядит так:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases}$$

– однородная система линейных уравнений порядка n .

Если $\det(A_\varphi - \lambda E) \neq 0$, то система имеет единственное решение

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0,$$

но собственным вектором мы называли ненулевой вектор, следовательно, для существования такого вектора необходимо потребовать, чтобы

$$\det(A_\varphi - \lambda E) = 0. \quad (5.3)$$

Это уравнение называется **характеристическим уравнением**.

Левая часть равенства (5.3) – многочлен порядка n , который называется **характеристическим многочленом** преобразования φ :

$$\det(A_\varphi - \lambda E) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_0 = P_n(\lambda),$$

где $\alpha_{n-1} = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \dots + \alpha_{nn}$ – след матрицы A_φ , $\alpha_0 = \det A_\varphi$.

Теорема 5.1. Если A_φ и A'_φ – матрицы преобразования φ в разных базисах, то характеристические многочлены этих матриц совпадают (собственные числа преобразования φ в разных базисах одинаковы, т.е. не зависят от выбора базиса!).

Доказательство.

Если e и f – два базиса в L_n и T – матрица перехода от e к f , то по формуле (5.1)

$$\begin{aligned}\det(A'_\varphi - \lambda E) &= \det(T^{-1}A_\varphi T - T^{-1}(\lambda E)T) = \det(T^{-1}(A_\varphi - \lambda E)T) = \\ &= \det T^{-1} \det(A_\varphi - \lambda E) \det T = \frac{\det T}{\det T} \det(A_\varphi - \lambda E) = \det(A_\varphi - \lambda E)\end{aligned}$$

т.е. характеристические многочлены матриц A_φ и A'_φ совпадают, следовательно, собственные числа одинаковы.

Теорема 5.2. Если собственные векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$ преобразования φ соответствуют различным собственным значениям, то они линейно независимы.

Доказательство.

1) $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ – два собственных вектора, соответствующих собственным числам $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 \neq \lambda_2$.

Составим линейную комбинацию этих векторов и приравняем её к $\vec{0}$

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 = \vec{0}. \quad (*)$$

Применим преобразование φ к обеим частям этого равенства.

Получим

$$\varphi(\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2) = \varphi(\vec{0}), \quad \alpha_1 \varphi(\vec{x}_1) + \alpha_2 \varphi(\vec{x}_2) = \vec{0}, \quad \alpha_1 \lambda_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \vec{x}_2 = \vec{0}.$$

$$\text{Умножим } (*) \text{ на } \lambda_2: \quad \alpha_1 \lambda_2 \vec{x}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \vec{x}_2 = \vec{0}.$$

Вычитая из одного равенства другое, получим $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_2)\vec{x}_1 = \vec{0}$. Так как $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ по условию, а $\vec{x}_1 \neq \vec{0}$ по определению, то $\alpha_1 = 0$.

Подставляем в $(*)$ $\alpha_1 = 0$, получаем $\alpha_2 \vec{x}_2 = \vec{0}$, так как по определению $\vec{x}_2 \neq \vec{0}$, следовательно $\alpha_2 = 0$, т.е. линейная комбинация должна быть тривиальной, значит, $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ – линейно независимы.

2) Пусть утверждение справедливо для $k - 1$ векторов, покажем, что тогда оно справедливо и для k векторов.

Пусть система векторов $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ удовлетворяет условию теоремы. Рассмотрим равную нулю линейную комбинацию этих векторов

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \dots + \alpha_k \vec{x}_k = \vec{0}. \quad (**)$$

Поддействуем преобразованием φ на это равенство, получим

$$\alpha_1 \lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \alpha_k \lambda_k \vec{x}_k = \vec{0}.$$

Умножим $(**)$ на λ_k : $\alpha_1 \lambda_k \vec{x}_1 + \dots + \alpha_k \lambda_k \vec{x}_k = \vec{0}$.

Вычитая эти два равенства, находим

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_k) \vec{x}_1 + \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_k) \vec{x}_2 + \dots + \alpha_{k-1} (\lambda_{k-1} - \lambda_k) \vec{x}_{k-1} = \vec{0},$$

так как $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{k-1}$ — линейно независимы, это значит, что в левой части равенства записана тривиальная линейная комбинация, т.е.

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_k) = \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_k) = \dots = \alpha_{k-1} (\lambda_{k-1} - \lambda_k) = \vec{0},$$

по условию теоремы $\lambda_1 - \lambda_k \neq 0$, $\lambda_2 - \lambda_k \neq 0$, ..., $\lambda_{k-1} - \lambda_k \neq 0$, следовательно, $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{k-1} = 0$.

Подставим $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ в $(**)$, получим $\alpha_k \vec{x}_k = \vec{0}$, следовательно, $\alpha_k = 0$, так как по определению 5.3 $\vec{x}_k \neq \vec{0}$.

Таким образом, векторы $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ — линейно независимы.

Следствие 5.1. Если преобразование φ имеет n попарно различных собственных значений, то существует базис из собственных векторов этого преобразования!

Теорема 5.3. Матрица линейного преобразования $\varphi: L_n \rightarrow L_n$ в базисе e имеет диагональный вид тогда и только тогда, когда все векторы базиса являются собственными векторами преобразования φ .

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть матрица линейного преобразования $\varphi: L_n \rightarrow L_n$ в базисе e имеет диагональный вид

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

тогда $\forall j = \overline{1, n}: \varphi(\vec{e}_j) = \lambda_j \vec{e}_j$, следовательно, $\vec{e}_j$ – собственные векторы.

($\Leftarrow$) Пусть $\vec{e}_j$ ($j = \overline{1, n}$) – собственные векторы преобразования $\varphi: L_n \rightarrow L_n$, тогда $\forall j = \overline{1, n}: \varphi(\vec{e}_j) = \lambda_j \vec{e}_j$, т.е.

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Другая формулировка следствия 5.1. Если все корни характеристического многочлена матрицы A различны, то существует невырожденная матрица T ($\det T \neq 0$) такая, что матрица $T^{-1}AT$ – диагональная (T – матрица перехода к базису из собственных векторов).

6. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Все результаты, приведенные в предыдущих разделах, остаются в силе и для преобразований евклидовых пространств, но здесь есть скалярное произведение, что позволяет выделить некоторые очень важные классы преобразований.

6.1. Сопряженные и самосопряженные преобразования

Определение 6.1. Линейное преобразование ψ евклидова пространства E_n называется **сопряженным** данному линейному преобразованию φ , если $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E_n$ имеет место равенство

$$(\varphi(\vec{x}), \vec{y}) = (\vec{x}, \psi(\vec{y})). \quad (6.1)$$

В более полных курсах доказывается, что любое преобразование имеет единственное сопряженное преобразование.

Предположим, что данное преобразование φ имеет сопряженное ψ . Выясним, как связаны их матрицы A_φ и A_ψ в некотором базисе e . Используя равенство (3.2), перепишем (6.1) в матричной форме

$$(A_\varphi X)^\top \Gamma_e Y = X^\top \Gamma_e (A_\psi Y),$$

где X, Y – координатные столбцы произвольных векторов $\vec{x}, \vec{y}$; Γ_e – матрица Грама базиса e , отсюда

$$X^\top A_\varphi^\top \Gamma_e Y - X^\top \Gamma_e A_\psi Y = 0 \quad \text{или} \quad X^\top (A_\varphi^\top \Gamma_e - \Gamma_e A_\psi) Y = 0,$$

так как $\vec{x}, \vec{y}$ произвольные, следовательно, должно выполняться равенство

$$A_\varphi^\top \Gamma_e - \Gamma_e A_\psi = O \quad \text{или} \quad A_\varphi^\top \Gamma_e = \Gamma_e A_\psi,$$

так как Γ_e – невырожденная матрица, у нее существует обратная и значит последнее равенство равносильно тому, что

$$A_\psi = \Gamma_e^{-1} A_\varphi^\top \Gamma_e. \quad (6.2)$$

Часто сопряженное преобразование обозначается φ^* , т.е. $\psi \equiv \varphi^*$, тогда матрица этого преобразования обозначается A_φ^* .

В частности, если базис e ортонормированный, то $\Gamma_e = \Gamma_e^{-1} = E$ и

$$A_\psi = A_\varphi^\top \quad (6.3)$$

Определение 6.2. Линейное преобразование φ евклидова пространства E_n называется **самосопряженным**, если $\varphi = \psi$, т.е.

$$\forall \vec{x} \in E_n : \varphi(\vec{x}) = \psi(\vec{x}) \Leftrightarrow A_\varphi = A_\psi,$$

или из (6.1)

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E_n : (\varphi(\vec{x}), \vec{y}) = (\vec{x}, \varphi(\vec{y})).$$

Из формулы (6.3) получаем, что $A_\varphi = A_\varphi^T$ преобразование является самосопряженным тогда и только тогда, когда его матрица симметрическая (в любом базисе удовлетворяет условию $A_\varphi = A_\varphi^T$).

В силу сказанного, часто самосопряженные преобразования называются **симметрическими**.

Теорема 6.1. Если φ – самосопряженное преобразование евклидова пространства E_n , то все его собственные числа действительные.

Доказательство. Рассмотрим частный случай ($n = 2$). Найдём собственные числа, т.е. решим уравнение

$$|A_\varphi - \lambda E| = 0. \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = \\ &= (-1)^2 \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \end{aligned}$$

тогда (*) – квадратное уравнение. Пусть D – дискриминант этого квадратного уравнения.

$$\begin{aligned} D &= (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = a_{11}^2 + 2a_{11}a_{22} + a_{22}^2 - \\ &\quad - 4a_{11}a_{22} + 4a_{12}a_{21} = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0, \end{aligned}$$

так как φ – самосопряжённое преобразование $a_{12} = a_{21}$, $(a_{11} - a_{22})^2 \geq 0$ и

$a_{12}^2 \geq 0$, следовательно, $\forall a_{11}, a_{22}, a_{12}: D \geq 0$, из чего заключаем, что корни действительные.

Теорема 6.2. Если φ – самосопряженное преобразование евклидова пространства E_n , то собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям этого преобразования, ортогональны.

Доказательство. Пусть λ_i, λ_j – собственные числа самосопряжённого преобразования φ , $\lambda_i \neq \lambda_j$, а $\vec{x}_i$ и $\vec{x}_j$ – соответствующие им собственные векторы, т.е. $\varphi(\vec{x}_i) = \lambda_i \vec{x}_i$, $\varphi(\vec{x}_j) = \lambda_j \vec{x}_j$, тогда

$$\begin{aligned} (\varphi(\vec{x}_i), \vec{x}_j) &= (\lambda_i \vec{x}_i, \vec{x}_j) = \lambda_i (\vec{x}_i, \vec{x}_j), \\ (\varphi(\vec{x}_i), \vec{x}_j) &= (\vec{x}_i, \varphi(\vec{x}_j)) = (\vec{x}_i, \lambda_j \vec{x}_j) = \lambda_j (\vec{x}_i, \vec{x}_j). \end{aligned}$$

Вычитая одно равенство из другого, получаем $0 = (\lambda_i - \lambda_j)(\vec{x}_i, \vec{x}_j)$, где $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$ по условию, следовательно, $(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = 0$, что означает, по определению скалярного произведения $\vec{x}_i \perp \vec{x}_j$.

Теорема 6.3. Если φ – самосопряженное преобразование евклидова пространства E_n , то в E_n существует ортонормированный базис из собственных векторов преобразования φ .

Эта теорема допускает матричную формулировку.

Теорема 6.4. Если A – симметрическая матрица, то существует ортогональная матрица U такая, что $U^{-1}AU$ – диагональная матрица.

Здесь U – матрица перехода к ортонормированному базису из собственных векторов.

6.2. Ортогональные преобразования

Второй вид преобразований, которые следует рассмотреть, – это ортогональные преобразования.

Определение 6.3. Преобразование φ евклидова пространства E_n называется **ортогональным**, если оно сохраняет скалярное произведение, т.е.

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E_n : (\varphi(\vec{x}), \varphi(\vec{y})) = (\vec{x}, \vec{y}). \quad (6.4)$$

Условие (6.4) очень сильное. Из него, в частности, следует, что φ – линейное преобразование.

Действительно, рассмотрим произвольный вектор $\vec{x} \in E_n$ и произвольное число $\alpha \in R$, тогда, используя свойства скалярного произведения, получаем:

$$\begin{aligned} |\varphi(\alpha\vec{x}) - \alpha\varphi(\vec{x})|^2 &= (\varphi(\alpha\vec{x}) - \alpha\varphi(\vec{x}), \varphi(\alpha\vec{x}) - \alpha\varphi(\vec{x})) = \\ &= (\varphi(\alpha\vec{x}), \varphi(\alpha\vec{x})) - 2\alpha(\varphi(\alpha\vec{x}), \varphi(\vec{x})) + \alpha^2(\varphi(\vec{x}), \varphi(\vec{x})) = \\ &= (\alpha\vec{x}, \alpha\vec{x}) - 2\alpha(\alpha\vec{x}, \vec{x}) + \alpha^2(\vec{x}, \vec{x}) = \alpha^2(\vec{x}, \vec{x}) - 2\alpha^2(\vec{x}, \vec{x}) + \alpha^2(\vec{x}, \vec{x}) = 0, \end{aligned}$$

следовательно, $\varphi(\alpha\vec{x}) - \alpha\varphi(\vec{x}) = \vec{0}$, $\varphi(\alpha\vec{x}) = \alpha\varphi(\vec{x})$ и свойство 1) в определении линейного преобразования 4.2 установлено.

Аналогично, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E_n$:

$$\begin{aligned} |\varphi(\vec{x} + \vec{y}) - (\varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y}))|^2 &= (\varphi(\vec{x} + \vec{y}), \varphi(\vec{x} + \vec{y})) + (\varphi(\vec{x}), \varphi(\vec{x})) + \\ &+ (\varphi(\vec{y}), \varphi(\vec{y})) - 2(\varphi(\vec{x} + \vec{y}), \varphi(\vec{x})) - 2(\varphi(\vec{x} + \vec{y}), \varphi(\vec{y})) + 2(\varphi(\vec{x}), \varphi(\vec{y})) = \\ &= (\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) + (\vec{x}, \vec{x}) + (\vec{y}, \vec{y}) - 2(\vec{x} + \vec{y}, \vec{x}) - 2(\vec{x} + \vec{y}, \vec{y}) + 2(\vec{x}, \vec{y}) = \\ &= (\vec{x}, \vec{x}) + 2(\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{y}) + (\vec{x}, \vec{x}) + (\vec{y}, \vec{y}) - 2(\vec{x}, \vec{x}) - 2(\vec{x}, \vec{y}) - 2(\vec{x}, \vec{y}) - \\ &- 2(\vec{y}, \vec{y}) + 2(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \Rightarrow \varphi(\vec{x} + \vec{y}) - \varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{y}) = \vec{0}, \end{aligned}$$

т.е. $\varphi(\vec{x} + \vec{y}) = \varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y})$ и свойство 2) в определении линейного преобразования 4.2 также установлено, т.е. преобразование φ – линейное!

Теорема 6.5. В евклидовом пространстве E_n в ортонормированном базисе ортогональное преобразование имеет ортогональную матрицу, т.е.

$$A_\varphi^\top A_\varphi = E \quad (A_\varphi^{-1} = A_\varphi^\top).$$

Доказательство. По формуле вычисления скалярного произведения в ортонормированном базисе $(\vec{u}, \vec{v}) = U^T V$, из формулы (6.4) получаем $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E_n: (\varphi(\vec{x}), \varphi(\vec{y})) = (A_\varphi X)^T (A_\varphi Y) = (\vec{x}, \vec{y}) = X^T Y$, $X^T A_\varphi^T A_\varphi Y = X^T Y$, $X^T (A_\varphi^T A_\varphi - E) Y = 0$, так как $\vec{x}, \vec{y}$ – произвольные векторы, то $A_\varphi^T A_\varphi = E$, следовательно, по определению A_φ – ортогональная матрица и $A_\varphi^{-1} = A_\varphi^T$.

Пример 6.1. Пусть линейный оператор φ , действующий в евклидовом пространстве E_n , имеет в ортонормированном базисе матрицу A_φ . Построить в этом пространстве базис из собственных векторов оператора φ и найти матрицу оператора φ в этом базисе.

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{pmatrix}.$$

Решение. 1) Найдем собственные числа оператора φ , для чего составим и решим характеристическое уравнение (4.3):

$$\det(A_\varphi - \lambda E) = \begin{vmatrix} 17 - \lambda & -2 & -2 \\ -2 & 14 - \lambda & -4 \\ -2 & -4 & 14 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{aligned} \det(A_\varphi - \lambda E) &= (17 - \lambda)(14 - \lambda)^2 - 16 - 16 - 4(14 - \lambda) - 16(17 - \lambda) - \\ &- 4(14 - \lambda) = (17 - \lambda)((14 - \lambda)^2 - 16) - 8(18 - \lambda) = \\ &= (17 - \lambda)(\lambda^2 - 28\lambda + 180) + 8(\lambda - 18) = (17 - \lambda)(\lambda - 10)(\lambda - 18) + \\ &+ 8(\lambda - 18) = (\lambda - 18)((17 - \lambda)(\lambda - 10) + 8) = -(\lambda - 18)(\lambda^2 - 27\lambda + 162). \end{aligned}$$

Приравняв к нулю, находим: $\lambda_1 = 9, \lambda_{2,3} = 18$.

2) Находим собственные векторы, соответствующие найденным собственным значениям, для чего при каждом λ составляем и решаем систему (5.2):

а) при $\lambda = \lambda_1 = 9$, получаем

$$(A_\varphi - 9E)X = \begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

что равносильно системе (здесь $\text{rang}(A_\varphi - 9E) = 2$)

$$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases},$$

полагая в которой, например, $x_1 = 1$, находим $x_2 = x_3 = 2$, таким образом, собственный вектор, соответствующий собственному значению 9, есть $\vec{f}_1 = (1, 2, 2)$.

б) при $\lambda = \lambda_{2,3} = 18$, получаем

$$(A_\varphi - 18E)X = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -4 & -4 \\ -2 & -4 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

что равносильно уравнению (здесь $\text{rang}(A_\varphi - 18E) = 1$)

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0,$$

полагая в котором сначала, $x_2 = 1, x_3 = 0$, а затем, $x_2 = 0, x_3 = 1$ получаем еще два линейно независимых собственных вектора:

$$\vec{f}_2 = (-2, 1, 0); \quad \vec{f}_3 = (-2, 0, 1).$$

3) Находим матрицу перехода к базису из собственных векторов и обратную к ней (столбцами матрицы перехода являются координатные столбцы векторов $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ (см. раздел 1)):

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det T = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 + 4 = 9.$$

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, & A_{12} &= (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2, & A_{13} &= (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2, \\
 A_{21} &= (-1)^3 \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, & A_{22} &= (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5, & A_{23} &= (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4, \\
 A_{31} &= (-1)^4 \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2, & A_{32} &= (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4, & A_{33} &= (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5.
 \end{aligned}$$

4) Теперь по формуле (5.1) находим A'_φ – матрицу линейного оператора в базисе из собственных векторов

$$\begin{aligned}
 A'_\varphi &= T^{-1} A_\varphi T = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -36 & -36 \\ 18 & 18 & 0 \\ 18 & 0 & 18 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 162 & 0 \\ 0 & 0 & 162 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, матрица линейного оператора в базисе из собственных векторов диагональная!

7. БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

7.1. Билинейные формы

Определение 7.1. Отображение $\varphi: E_n \rightarrow R_1 \equiv R$ называется **числовой функцией**, т.е. числовая функция – закон или правило, по которому каждому вектору $\vec{x} \in E_n$ (каждой паре векторов $\vec{x}, \vec{y} \in E_n$) ставится в соответствие число из R .

Определение 7.2. Числовая функция φ называется **линейной формой**, если $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E_n$ и $\forall \alpha \in R$ справедливо:

$$\text{а) } \varphi(\vec{x} + \vec{y}) = \varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y}); \quad \text{б) } \varphi(\alpha \vec{x}) = \alpha \varphi(\vec{x}).$$