

Изменение координат вектора при замене базиса

Пусть $\mathbf{e} = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ и $\mathbf{e}' = \langle e'_1, \dots, e'_n \rangle$ — два базиса пространства V . Каждый вектор второго («нового») базиса разложим по первому («старому») базису:

$$e'_j = \alpha_{1j}e_1 + \dots + \alpha_{nj}e_n \quad \text{т. е.} \quad [e'_j]_e = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{nj} \end{pmatrix} \quad (j = 1, \dots, n). \quad (9.11)$$

Найдем связь координат произвольного вектора x в этих базисах. Пусть

$$x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n = x'_1e'_1 + \dots + x'_ne'_n,$$

т. е.

$$[x]_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad [x]_{e'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$x = \sum_{j=1}^n x'_j e'_j = \sum_{j=1}^n x'_j \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} e_i = \sum_{i=1}^n \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x'_j \right)}_{x_i} e_i.$$

Так как координаты вектора в любом фиксированном базисе определяются единственным образом, то

$$x_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x'_j \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (9.12)$$

(формула, связывающая координаты одного и того же вектора в разных базисах).

Матрица $[e]_{e'} = (\alpha_{ij})$ называется *матрицей перехода* от базиса $e_1, \dots, e_n$ к базису $e'_1, \dots, e'_n$. Столбцы этой матрицы суть столбцы координат векторов нового базиса в старом базисе. Теперь формулы (9.12) можно записать в матричном виде:

$$[x]_e = [e']_e [x]_{e'}. \quad (9.13)$$

Утверждение 9.64. Пусть $Q \in F^{n \times n}$ причем для любого вектора $x \in V$

$$[x]_e = Q[x]_{e'}, \quad (9.14)$$

тогда $Q = [e']_e$.

Доказательство. В (9.14) положим $x = e'_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$). Все компоненты столбца $[e'_j]_{e'}$ равны 0, а j -я равна 1, поэтому $Q[e'_j]_{e'}$ есть j -й столбец матрицы Q . Ввиду (9.14) этот столбец равен $[e'_j]_e$. Следовательно, по определению Q есть матрица перехода $[e']_e$. ■

Утверждение 9.65. Матрица $[e']_e$ невырождена.

Доказательство. Столбцы матрицы $[e']_e$ суть координатные столбцы векторов $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ в базисе e . Так как векторы $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ линейно независимы, то линейно независимы и их координатные столбцы, следовательно, $\text{rank}[e']_e = n$ и матрица $[e']_e$ невырождена. ■

Утверждение 9.66. Матрица перехода от «нового» базиса к «старому» обратна к матрице перехода от «старого» базиса к «новому», т. е.

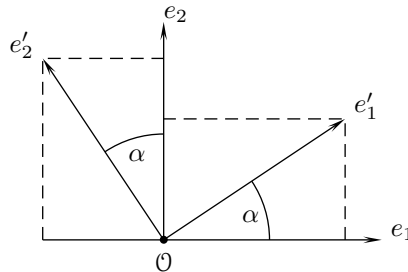
$$[e]_{e'} = [e']_e^{-1}.$$

Доказательство. Домножая обе части равенства (9.13) слева на $[e']_e^{-1}$, получаем

$$[x]_{e'} = [e']_e^{-1} [x]_e.$$

Теперь требуемое вытекает из утверждения 9.64. ■

Пример 9.67. Пусть в V_2 выбрано два правых ортонормированных базиса: $e = \langle e_1, e_2 \rangle$ и $e' = \langle e'_1, e'_2 \rangle$, причем векторы e'_1 и e'_2 получены из e_1, e_2 соответственно поворотом вокруг полюса на угол α . Найдём матрицу перехода.



$$e'_1 = \cos \alpha \cdot e_1 + \sin \alpha \cdot e_2, \quad e'_2 = -\sin \alpha \cdot e_1 + \cos \alpha \cdot e_2,$$

поэтому

$$[e']_e = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Связь координат одного и того же вектора в разных базисах задается равенствами

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 \cos \alpha - x'_2 \sin \alpha, \\ x_2 = x'_1 \sin \alpha + x'_2 \cos \alpha. \end{cases}$$

Заметим, что

$$[\mathbf{e}]_{\mathbf{e}'} = [\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

поэтому

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha, \\ x'_2 = -x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha. \end{cases}$$

Системы координат

В этом разделе векторы любых линейных пространств иногда будут называться точками. Такое изменение в названии апеллирует к геометрическим представлениям: как уже отмечалось, вектор пространства $\mathbf{V}_3$, закрепленный в полюсе, можно ассоциировать с точкой, являющейся его концом.

Системой координат линейного пространства V назовем совокупность точки $\mathcal{O}$ из V и базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ этого пространства. *Координатами точки* $\mathcal{A} \in V$ в этой системе координат назовем координаты вектора $\mathcal{A} - \mathcal{O}$ в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$. Столбец координат точки $\mathcal{A}$ обозначим $[\mathcal{A}]_{\mathcal{O}, e}$, т. е. по определению

$$[\mathcal{A}]_{\mathcal{O}, e} = [\mathcal{A} - \mathcal{O}]_e.$$

Исследуем как меняются координаты точки при изменении системы координат.

Пусть «старая» система координат $\mathcal{O}, e_1, \dots, e_n$ заменена на «новую» $\mathcal{O}', e'_1, \dots, e'_n$, причем справедливы формулы (9.11) и

$$\mathcal{O}' - \mathcal{O} = \sum_{j=1}^n \gamma_j e_j, \quad \text{т. е.} \quad [\mathcal{O}']_{\mathcal{O}, e} = [\mathcal{O}' - \mathcal{O}]_e = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}.$$

Пусть $\mathcal{A}$ — произвольная точка пространства V , причем

$$\mathcal{A} - \mathcal{O}' = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = x'_1 e'_1 + \dots + x'_n e'_n,$$

т. е.

$$[\mathcal{A}]_{\mathcal{O}, e} = [\mathcal{A} - \mathcal{O}]_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad [\mathcal{A}]_{\mathcal{O}', e'} = [\mathcal{A} - \mathcal{O}']_{e'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Так как $\mathcal{A} - \mathcal{O} = (\mathcal{O}' - \mathcal{O}) + (\mathcal{A} - \mathcal{O}')$, то

$$[\mathcal{A}]_{\mathcal{O}, e} = [\mathcal{A} - \mathcal{O}]_e = [\mathcal{O}' - \mathcal{O}]_e + [\mathcal{A} - \mathcal{O}']_e = [\mathcal{O}']_{\mathcal{O}, e} + [\mathcal{A} - \mathcal{O}']_e = [\mathcal{O}']_{\mathcal{O}, e} + [\mathbf{e}']_e [\mathcal{A} - \mathcal{O}']_{e'}.$$

Итак,

$$[\mathcal{A}]_{\mathcal{O}, \mathbf{e}} = [\mathcal{O}']_{\mathcal{O}, \mathbf{e}} + [\mathbf{e}']_{\mathbf{e}} [\mathcal{A}]_{\mathcal{O}', \mathbf{e}'}, \quad (9.15)$$

или, в координатах,

$$x_i = \gamma_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x'_j \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

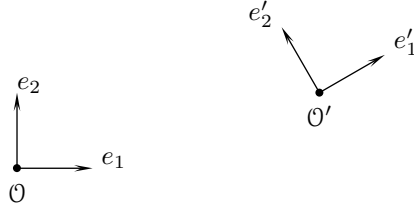
(формула, связывающая координаты одной и той же точки в разных системах координат).

Заметим, что домножая обе части равенства (9.15) слева на $[\mathbf{e}]_{\mathbf{e}'} = [\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}^{-1}$, можно получить

$$[\mathcal{A}]_{\mathcal{O}', \mathbf{e}'} = -[\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}^{-1} [\mathcal{O}']_{\mathcal{O}, \mathbf{e}} + [\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}^{-1} [\mathcal{A}]_{\mathcal{O}, \mathbf{e}}. \quad (9.16)$$

Очевидно, что $[\mathcal{O}]_{\mathcal{O}', \mathbf{e}'} = -[\mathbf{e}']_{\mathbf{e}}^{-1} [\mathcal{O}']_{\mathcal{O}, \mathbf{e}}$ — столбец координат начала «старой» системы координат в «новой» системе.

Пример 9.68. Пусть $\mathcal{O}, e_1, e_2$ и $\mathcal{O}', e'_1, e'_2$ — две системы координат в пространстве $\mathbf{V}_2$. Координаты точки $\mathcal{O}'$ в старой системе координат — $(4, 1)^\top$. Векторы e'_1, e'_2 получены из e_1, e_2 соответственно поворотом на угол $\pi/6$.



Найдем связь координат точки в этих системах координат:

$$\begin{cases} x_1 = \gamma_1 + x'_1 \cos \alpha - x'_2 \sin \alpha = 4 + \frac{\sqrt{3}}{2} x'_1 - \frac{1}{2} x'_2, \\ x_2 = \gamma_2 + x'_1 \sin \alpha + x'_2 \cos \alpha = 1 + \frac{1}{2} x'_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} x'_2. \end{cases}$$

Согласно (9.16) имеем

$$\begin{cases} x'_1 = -\frac{4\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2, \\ x'_2 = -\frac{\sqrt{3}-4}{2} - \frac{1}{2} x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} x_2. \end{cases}$$