

§ 4. Связь между координатами вектора в различных базисах

Координаты вектора определены в данном базисе единственным образом. Но в другом базисе вектор будет иметь другие координаты. Связь между координатами вектора в различных базисах дает следующая теорема.

Теорема 4.1. Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ и $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ – два базиса линейного пространства L . Причем имеют место равенства:

$$\begin{aligned} e'_1 &= t_{11}e_1 + t_{21}e_2 + \dots + t_{n1}e_n, \\ e'_2 &= t_{12}e_1 + t_{22}e_2 + \dots + t_{n2}e_n, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ e'_n &= t_{1n}e_1 + t_{2n}e_2 + \dots + t_{nn}e_n. \end{aligned}$$

Если вектор a имеет в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ координаты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, а в базисе $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ – координаты $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, то справедливо равенство

$$\mathbf{A} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{B}, \text{ где}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

Составленную таким образом матрицу $\mathbf{T}$ называют **матрицей перехода** от базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ к базису $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$.

Доказательство.

По условию $a = \beta_1 e'_1 + \beta_2 e'_2 + \dots + \beta_n e'_n$. Тогда раскладывая векторы $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ по базису $e_1, e_2, \dots, e_n$, получим

$$\begin{aligned} a &= \beta_1(t_{11}e_1 + t_{21}e_2 + \dots + t_{n1}e_n) + \beta_2(t_{12}e_1 + t_{22}e_2 + \dots + t_{n2}e_n) + \dots + \\ &\quad + \beta_n(t_{1n}e_1 + t_{2n}e_2 + \dots + t_{nn}e_n). \end{aligned}$$

Раскроем скобки и перегруппируем слагаемые:

$$\begin{aligned} a &= (\beta_1 t_{11} + \beta_2 t_{12} + \dots + \beta_n t_{1n})e_1 + \\ &\quad + (\beta_1 t_{21} + \beta_2 t_{22} + \dots + \beta_n t_{2n})e_2 + \\ &\quad \quad \quad + \dots + \\ &\quad + (\beta_1 t_{n1} + \beta_2 t_{n2} + \dots + \beta_n t_{nn})e_n. \end{aligned}$$

Но по условию $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$, следовательно,

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \beta_1 t_{11} + \beta_2 t_{12} + \dots + \beta_n t_{1n}, \\ \alpha_2 &= \beta_1 t_{21} + \beta_2 t_{22} + \dots + \beta_n t_{2n}, \\ &\dots \\ \alpha_n &= \beta_1 t_{n1} + \beta_2 t_{n2} + \dots + \beta_n t_{nn},\end{aligned}$$

или в матричном виде $\mathbf{A} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{B}$.

Теорема доказана.

Замечания. 1) Столбцы матрицы $\mathbf{T}$ – это координаты векторов $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$. Но $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ – это базис, то есть линейно независимая система. Таким образом, столбцы матрицы $\mathbf{T}$ – линейно независимы. Тогда согласно критерию равенства нулю определителя, $|\mathbf{T}| \neq 0$.

2) Найдём теперь матрицу перехода от базиса $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ к базису $e_1, e_2, \dots, e_n$. Имеем $\mathbf{A} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{B}$. Тогда $\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B}$, то есть $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A}$. Таким образом, если $\mathbf{T}$ – это матрица перехода от базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ к базису $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$, то $\mathbf{T}^{-1}$ – это матрица перехода от базиса $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ к базису $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Рассмотрим в качестве примера следующую задачу.

Пример 4.1. Вектор x в стандартном базисе линейного пространства $\mathbb{R}^2$ имеет координаты 2, 3. Найти его координаты в базисе $c_1 = (4, 3)$, $c_2 = (5, 4)$.

Стандартный базис линейного пространства $\mathbb{R}^2$ образуют векторы $e_1 = (1, 0)$ и $e_2 = (0, 1)$.

Найдём матрицу перехода от базиса e_1, e_2 к базису c_1, c_2 :

$$\begin{aligned}c_1 &= 4e_1 + 3e_2 \\ c_2 &= 5e_1 + 4e_2\end{aligned} \Rightarrow \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Можно найти, что $\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, тогда

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Координатами вектора x в базисе c_1, c_2 будут -7 и 6 , то есть $x = -7c_1 + 6c_2$.