

ТЕМА 11.1

Базис линейного пространства

Система векторов $a_1, \dots, a_n$ линейного пространства V называется *полной*, если $V = L(a_1, \dots, a_n)$. Линейное пространство, в котором существует полная система, называется *конечномерным*. В противном случае пространство называется *бесконечномерным*.

Замечание 9.29. В настоящих лекциях мы будем изучать конечномерные пространства. Поэтому везде, где не оговорено противное, под линейным пространством понимается конечномерное линейное пространство.

Базисом пространства V называется полная линейно независимая система.

Утверждение 9.30. *В любом ненулевом конечномерном пространстве V существует базис.*

Доказательство. Пространство V конечномерное, поэтому $V = L(a_1, \dots, a_n)$ для некоторых $a_1, \dots, a_n$. В качестве базиса пространства возьмем базу системы $a_1, \dots, a_n$.

Утверждение 9.31. *Для любого пространства число векторов в любом базисе одинаково.*

Доказательство. Пусть $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m$ — два базиса пространства V . Системы $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m$ эквивалентны и линейно независимы, поэтому $n = m$. ■

Число векторов в базисе конечномерного пространства V называется *размерностью пространства V* и обозначается $\dim V$. Размерность нулевого пространства считается равной нулю. ■

Утверждение 9.32. *Для того, чтобы линейно независимая система была базисом, необходимо и достаточно, чтобы любая система из большего числа векторов этого пространства была линейно зависимой.*

Доказательство. Необходимость. Пусть система $a_1, \dots, a_n$ является базисом. Система векторов $b_1, \dots, b_m$ выражается через линейно независимую систему $a_1, \dots, a_n$ и если $m > n$, то по теореме о замене $b_1, \dots, b_m$ линейно зависима.

Достаточность. Пусть b — произвольный вектор из V . Рассмотрим систему $a_1, \dots, a_n, b$. По условию она линейно зависима. Теперь из усиленного критерия линейной зависимости следует, что $b \in L(a_1, \dots, a_n)$, т. е. система $a_1, \dots, a_n$ — полная. ■

Замечание 9.33. Утверждение 9.32 позволяет дать следующее определение базиса, эквивалентное исходному: базис — это наибольшая (по мощности) линейно независимая система. Заметим, что такое определение не означает, что базис пространства определен единственным образом.

Утверждение 9.34. Для того, чтобы полная система $a_1, \dots, a_n$ была базисом, необходимо и достаточно, чтобы либо $n = 1$ и $a_1 \neq 0$, либо любая система из меньшего числа векторов не была бы полной.

Доказательство. Необходимость. Пусть система $b_1, \dots, b_m$ полная, тогда линейно независимая система $a_1, \dots, a_n$ выражается через $b_1, \dots, b_m$, откуда из теоремы о замене $m \geq n$.

Достаточность. Ни для какого $j = \{1, \dots, n\}$ система $a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n$ не является базисом, поэтому $a_j \notin L(a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n)$. Линейная независимость системы векторов $a_1, \dots, a_n$ следует теперь из критерия линейной независимости. ■

Замечание 9.35. Утверждение 9.34 позволяет дать следующее определение базиса, эквивалентное исходному: базис — это любая наименьшая (по мощности) полная система векторов. Заметим, что такое определение не означает, что базис пространства определен единственным образом.

Утверждение 9.36. Пусть $\dim V = n$ и система $a_1, \dots, a_n$ — линейно независима, тогда она полна и, следовательно, является базисом.

Доказательство. Так как $\dim V = n$, то любая система из большего числа векторов вектора линейно зависима. Поэтому $a_1, \dots, a_n$ полная по утверждению 9.32. ■

Утверждение 9.37. Пусть $\dim V = n$ и система $a_1, \dots, a_n$ — полная, тогда она линейно независима и, следовательно, является базисом.

Доказательство. Так как $\dim V = n$, то любая система из меньшего числа векторов не является полной. Поэтому система $a_1, \dots, a_n$ линейно независима по утверждению 9.34. ■

Размерность и базис арифметического пространства. Рассмотрим систему векторов арифметического пространства F^n :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (9.2)$$

где j -я компонента вектора e_j равна 1, а все остальные компоненты вектора e_j равны 0 ($j = 1, 2, \dots, n$). Покажем, что система $e_1, e_2, \dots, e_n$ образует базис пространства F^n и, следовательно, $\dim F^n = n$.

Действительно, система (9.2) линейно независима, так как, приравнивая все компоненты в левой и правой части равенства

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = 0, \quad (9.3)$$

получаем $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, т.е. нулевая комбинация (9.3) — тривиальная.

Система (9.2) — полная, так как для произвольного вектора

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in F^n$$

имеем

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n. \quad (9.4)$$

Систему (9.2) будем называть *стандартным базисом арифметического n -мерного пространства*. Равенство (9.4) показывает, что в стандартном базисе *координаты* вектора из F^n совпадают с его *компонентами*.

Размерность и базис пространства геометрических векторов.

Утверждение 9.38.

1. $\dim \mathbf{V}_1 = 1$. Система из одного вектора пространства $\mathbf{V}_1$ образует базис этого пространства тогда и только тогда, когда вектор ненулевой.
2. $\dim \mathbf{V}_2 = 2$. Система из двух векторов пространства $\mathbf{V}_2$ образует базис этого пространства тогда и только тогда, когда векторы неколлинеарны.
3. $\dim \mathbf{V}_3 = 3$. Система из трех векторов пространства $\mathbf{V}_3$ образует базис этого пространства тогда и только тогда, когда векторы некомпланарны.

Доказательство.

1. Утверждение очевидно.

2. Уже было показано, что любые два вектора пространства $\mathbf{V}_2$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны. Покажем, что любые два неколлинеарных вектора a, b образуют полную систему в пространстве $\mathbf{V}_2$ и, следовательно, образуют базис этого пространства. Пусть c — произвольный вектор пространства $\mathbf{V}_2$. Как обычно, все векторы отложены из полюса O . Проведем через конец вектора c прямую, параллельную вектору b . Эта прямая пересечет прямую, на которой лежит вектор a в некоторой точке A . Затем проведем через конец вектора c прямую, параллельную вектору a . Эта прямая пересечет прямую, на которой лежит вектор b в некоторой точке B . Будем иметь $c = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA} = \alpha a$, $\overrightarrow{OB} = \beta b$ для некоторых α и β , откуда откуда $c = \alpha a + \beta b$. Итак, любой вектор пространства $\mathbf{V}_2$ может быть выражен в виде линейной комбинации векторов a, b , и, следовательно, a, b — полная система.

3. Доказывается аналогично. ■

Размерность пространства многочленов. Покажем, что пространство $F[x]$ не является конечномерным. Действительно, предположим, что $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ — некоторая полная система в пространстве $F[x]$, а m — максимум степеней многочленов из этой системы. Очевидно, что никакая их линейная комбинация не дает ни одного многочлена степени выше m . Таким образом, система $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ полной не является.

Рассмотрим пространство многочленов степени не выше n . Очевидно, что система $1, x, x^2, \dots, x^n$ образует базис этого пространства, называемый стандартным. Таким образом, пространство многочленов степени не выше n имеет конечную размерность, равную $n + 1$.

Координаты векторов

Пусть $e_1, \dots, e_n$ — базис пространства V над полем F . Тогда для произвольного вектора a из V найдутся такие числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ из F , что $a = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$. Коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ разложения вектора по базису называются *координатами вектора*.

Утверждение 9.39. В произвольном базисе координаты вектора определены единственным образом.

Доказательство. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — базис пространства V . Предположим, что для вектора a нашлось два разложения по базису

$$a = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n.$$

Откуда получаем

$$(\alpha_1 - \beta_1)e_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)e_n = o.$$

Так как система $e_1, \dots, e_n$ — линейно независимая, то все коэффициенты в полученной линейной комбинации равны 0, откуда $\alpha_j = \beta_j$ ($j = 1, \dots, n$). ■

Замечание 9.40. Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ — стандартный базис пространства F^n . В этом базисе

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n,$$

т. е. координаты вектора совпадают с его компонентами.

Координаты удобно записывать в столбец, который мы будем называть *координатным столбцом* и обозначать $[a]_e$. Таким образом, если $a = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$, то

$$[a]_e = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Координатный столбец можно рассматривать как вектор арифметического пространства F^n . Имея в виду эту интерпретацию, получаем

Утверждение 9.41. Для произвольных векторов a, b из V и произвольного α из F справедливо

$$\begin{aligned}[a + b]_e &= [a]_e + [b]_e, \\ [\alpha a]_e &= \alpha[a]_e.\end{aligned}$$

Таким образом, при сложении векторов соответствующие координаты складываются, при умножении на число умножаются на это число.

Доказательство. Пусть

$$\begin{aligned}a &= \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n, \\ b &= \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n.\end{aligned}$$

Тогда

$$a + b = (\alpha_1 + \beta_1)e_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n)e_n,$$

т. е. $[a + b]_e = [a]_e + [b]_e$. Второе равенство доказывается аналогично. ■

Изоморфизм линейных пространств

Пусть пространства V и V' заданы над одним и тем же полем F . Биекция $\varphi : V \rightarrow V'$ называется *изоморфизмом*, если для любых векторов a, b из V и любого α из F справедливо

1. $\varphi(a + b) = \varphi a + \varphi b$,
2. $\varphi(\alpha a) = \alpha(\varphi a)$.

Замечание 9.42. Пусть $\dim V = n$. Из утверждения 9.41 следует, что отображение $\varphi : V \rightarrow F^n$, ставящее в соответствие вектору из V столбец его координат в некотором фиксированном базисе, является изоморфизмом.

Свойство 9.43. Отображение, обратное к изоморфизму, является изоморфизмом.

Доказательство. Отображение $\varphi^{-1} : V' \rightarrow V$, обратное к изоморфизму $\varphi : V \rightarrow V'$, является биекцией. Осталось показать выполнение свойств 1, 2 для отображения φ^{-1} . Пусть a', b' — произвольные векторы из V' , тогда $\varphi^{-1}a' \in V$ и $\varphi^{-1}b' \in V$. Из определения изоморфизма φ имеем

$$\begin{aligned}\varphi(\varphi^{-1}a' + \varphi^{-1}b') &= \varphi\varphi^{-1}a' + \varphi\varphi^{-1}b', \\ \varphi(\varphi^{-1}a' + \varphi^{-1}b') &= a' + b'.\end{aligned}$$

Применяя к обеим частям последнего равенства отображение φ^{-1} , получаем

$$\varphi^{-1}a' + \varphi^{-1}b' = \varphi^{-1}a' + \varphi^{-1}b'.$$

Равенство $\varphi^{-1}(\alpha a) = \alpha(\varphi^{-1}a)$ доказывается аналогично. ■

Свойство 9.44. Образом нулевого вектора пространства V при изоморфизме φ является нулевой вектор пространства V' , т. е.³ $\varphi o = o$.

³Заметим, что в следующем равенстве o в левой части — вектор пространства V , тогда как o в правой части — вектор пространства V' .

Доказательство. Из определения изоморфизма

$$\varphi o = \varphi(0a) = 0\varphi a = o.$$

■

Свойство 9.45. При изоморфизме линейно зависящая система отображается в линейно зависящую систему.

Доказательство. Пусть система $a_1, \dots, a_n$ линейно зависящая, тогда найдутся такие числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, что

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n = o, \quad (9.5)$$

причем $\alpha_j \neq 0$ для некоторого $j \in \{1, \dots, n\}$. Применим отображение φ к обеим частям равенства (9.5). Из определения изоморфизма получаем

$$\alpha_1(\varphi a_1) + \dots + \alpha_n(\varphi a_n) = o.$$

Нами получена нетривиальная нулевая комбинация векторов $\varphi a_1, \dots, \varphi a_n$, значит векторы линейно зависимые.

■

Свойство 9.46. При изоморфизме линейно независимая система отображается в линейно независимую систему.

Доказательство. Утверждение является следствием свойств 9.43, 9.45.

■

Свойство 9.47. При изоморфизме $\varphi : V \rightarrow V'$ базис пространства V отображается в базис пространства V' .

Доказательство. По свойству 9.45 базис отображается в линейно независимую систему. При этом по свойству 9.46 любая линейно зависящая система отображается в линейно зависящую. Таким образом, базис отображается в наибольшую линейно независимую систему, т. е. в базис.

■

Пространства V и V' называются *изоморфными*, если существует изоморфизм $\varphi : V \rightarrow V'$. Если V и V' изоморфны, то пишут $V \cong V'$.

Пример 9.48. Пусть $\dim V = n$, тогда, как следует из предыдущего примера, $V \cong F^n$.

Утверждение 9.49. Отношение изоморфности пространств является отношением эквивалентности.

Доказательство. Рефлексивность. Очевидно, что тождественное преобразование $\varepsilon : V \rightarrow V'$, определяемое формулой $\varepsilon a = a$ является изоморфизмом. Таким образом, $V \cong V$.

Симметричность. Если $V \cong V'$, то $V' \cong V$ по свойству 1.

Транзитивность. Докажем, что если $V \cong V'$ и $V' \cong V''$, то $V \cong V''$. Действительно, если φ и φ' — изоморфизмы из V в V' и из V' в V'' , то произведение изоморфизмов $\psi = \varphi\varphi'$, определяемой формулой $\psi a = \varphi(\varphi' a)$ есть изоморфизм V в V'' .

■

Теорема 9.50 (Критерий изоморфности пространств). Для того, чтобы пространства V и V' , заданные над одним и тем же полем F , были изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы $\dim V = \dim V'$.

Доказательство. Необходимость Необходимость следует из свойства 5.

Достаточность Так как $V \cong F^n$ и $V' \cong F^n$, то, в силу симметричности и транзитивности отношения эквивалентности, имеем $V \cong V'$.

■

Размерность подпространства

Утверждение 9.51. Любое подпространство V_1 конечномерного линейного пространства V является конечномерным.

Доказательство. Если $V_1 = \{0\}$, то утверждение доказано. Пусть a_1 — некоторый ненулевой вектор из V_1 . Система, состоящая из одного вектора a_1 , линейно независима. Поэтому, если $V_1 = L(a_1)$, то система образует базис пространства V_1 . В противном случае в V_1 найдется вектор $a_2 \notin L(a_1)$. По усиленному критерию линейной зависимости система a_1, a_2 — независимая. Поэтому, если $V_1 = L(a_1, a_2)$, то система образует базис пространства V_1 . В противном случае в V_1 найдется вектор $a_3 \notin L(a_1, a_2)$ и т.д. Описанный процесс оборвется по крайней мере через n шагов, где $n = \dim V$, так как любая система из $n + 1$ вектора линейно зависима. ■

Утверждение 9.52. Пусть V_1, V_2 — конечномерные подпространства, причем $V_1 \subseteq V_2$, тогда $\dim V_1 \leq \dim V_2$.

Доказательство. Пусть $a_1, \dots, a_l, b_1, \dots, b_m$ — базисы подпространств V_1 и V_2 соответственно. Так как $V_1 \subseteq V_2$, то первая система линейно выражается через вторую и поэтому по лемме о замене $l \leq m$. ■

Утверждение 9.53. Пусть V_1, V_2 — конечномерные подпространства, причем $V_1 \subseteq V_2$ и $\dim V_1 = \dim V_2$, тогда $V_1 = V_2$.

Доказательство. Базис $a_1, \dots, a_l$ подпространства V_1 является линейно независимой системой векторов из V_2 . Так как $l = \dim V_1 = \dim V_2$, то $a_1, \dots, a_l$ является базисом подпространства V_2 и, следовательно, $V_1 = L(a_1, \dots, a_l) = V_2$. ■

Сумма и пересечение подпространств

Суммой подпространств V_1 и V_2 пространства V называется множество

$$V_1 + V_2 = \{x = y + z : y \in V_1, z \in V_2\}.$$

Пересечение подпространств понимается в обычном смысле:

$$V_1 \cap V_2 = \{x : x \in V_1, x \in V_2\}.$$

Утверждение 9.54. Сумма подпространств одного и того же пространства является подпространством.

Доказательство. Так как $0 \in V_1, 0 \in V_2$, то $0 + 0 \in V_1 + V_2$ и $V_1 + V_2 \neq \emptyset$. Докажем замкнутость относительно сложения векторов и умножения их на числа. Пусть $x \in V_1 + V_2$ и $x' \in V_1 + V_2$, тогда найдутся такие векторы y, y' из V_1 и z, z' из V_2 , что $x = y + z, x' = y' + z'$. Так как $y + y' \in V_1$ и $z + z' \in V_2$, то $x + x' = (y + y') + (z + z') \in V_1 + V_2$. Так как $\alpha y \in V_1$ и $\alpha z \in V_2$, то $\alpha x = \alpha y + \alpha z \in V_1 + V_2$. ■

Утверждение 9.55. Пересечение подпространств одного и того же пространства является подпространством.

Доказательство. Так как $0 \in V_1, 0 \in V_2$, то $0 \in V_1 \cap V_2$ и $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. Докажем замкнутость относительно сложения векторов и умножения их на числа. Пусть $x \in V_1 \cap V_2$ и $x' \in V_1 \cap V_2$. Так как $x + x' \in V_1$ и $x + x' \in V_2$, то $x + x' \in V_1 \cap V_2$. Так как $\alpha x \in V_1$ и $\alpha x \in V_2$, то $\alpha x \in V_1 \cap V_2$. ■

Лемма 9.56. Любую линейно независимую систему векторов можно дополнить до базиса конечномерного пространства.

Доказательство. Утверждение доказывается аналогично доказательству утверждения 9.51. ■

Теорема 9.57 (Размерность суммы подпространств). Если V_1, V_2 — конечномерные подпространства пространства V , то

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$$

(формула Грассмана).

Доказательство. Пусть $a_1, \dots, a_k$ — базис подпространства $V_1 \cap V_2$. Векторами $b_1, \dots, b_l$ дополним систему $a_1, \dots, a_k$ до базиса пространства V_1 . Векторами $c_1, \dots, c_m$ дополним систему $a_1, \dots, a_m$ до базиса пространства V_2 . Для доказательства теоремы покажем, что система

$$a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l, c_1, \dots, c_m$$

образует базис пространства $V_1 + V_2$.

Легко проверить полноту системы. Для доказательства ее линейной независимости рассмотрим нулевую линейную комбинацию:

$$\underbrace{\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_l b_l}_{-c \in V_1} + \underbrace{\gamma_1 c_1 + \dots + \gamma_m c_m}_{c \in V_2} = 0. \quad (9.6)$$

Пусть

$$c = \gamma_1 c_1 + \dots + \gamma_m c_m. \quad (9.7)$$

Очевидно, что $c \in V_2$ и тогда по (9.6) имеем $c \in V_1$. Следовательно, $c \in V_1 \cap V_2$ и поэтому найдутся такие $\delta_1, \dots, \delta_k$, что

$$c = \delta_1 a_1 + \dots + \delta_k a_k. \quad (9.8)$$

Из (9.7, 9.8) получаем два разложения вектора c по базису пространства V_2 :

$$c = 0a_1 + \dots + 0a_k + \gamma_1 c_1 + \dots + \gamma_m c_m,$$

$$c = \delta_1 a_1 + \dots + \delta_k a_k + 0c_1 + \dots + 0c_m.$$

Так как разложение по базису единственно, то все коэффициенты в этих разложениях нулевые, поэтому $c = 0$ и, следовательно, нулевая линейная комбинация (9.6) — тривиальная. ■

Понятие суммы и пересечения подпространств распространяется на произвольное конечное их число. А именно, под *суммой* $V_1 + V_2 + \dots + V_s$ подпространств $V_1, V_2, \dots, V_s$ понимается

$$V_1 + V_2 + \dots + V_s = \{a_1 + a_2 + \dots + a_s : a_i \in V_i \ (i = 1, 2, \dots, s)\}.$$

Под *пересечением* $V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_s$ понимается

$$V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_s = \{a : a \in V_i \ (i = 1, 2, \dots, s)\}.$$

Легко проверить справедливость утверждений 9.54 и 9.55 для таких сумм и пересечений соответственно.

Прямая сумма подпространств

Сумма подпространств $V_1 + \dots + V_s$ называется *прямой*, если для произвольного вектора $x \in V_1 + \dots + V_s$ векторы $x_1, \dots, x_s$, такие, что

$$x = x_1 + \dots + x_s, \quad (9.9)$$

где $x_i \in V_i$ ($i = 1, \dots, s$), определены единственным образом. Для прямой суммы будем использовать обозначение $V_1 \dot{+} \dots \dot{+} V_s$. Представление вектора x в виде (9.9) называют его *разложением по подпространствам*. Таким образом, в случае прямой суммы это разложение определено единственным образом.

Лемма 9.58 (Единственность разложения o). *Для того, чтобы сумма $V_1 + \dots + V_s$ являлась прямой, необходимо и достаточно, чтобы из условий $o = x_1 + \dots + x_s$, $x_i \in V_i$ ($i = 1, \dots, s$) следовало $x_i = o$ ($i = 1, \dots, s$).*

Доказательство. Необходимость следует из определения прямой суммы.

Достаточность. Пусть для некоторого x нашлось два разложения:

$$x = x_1 + \dots + x_s = y_1 + \dots + y_s,$$

где $x_i \in V_i$, $y_i \in V_i$ ($i = 1, \dots, s$). Тогда

$$o = \underbrace{(x_1 - y_1)}_{\in V_1} + \dots + \underbrace{(x_s - y_s)}_{\in V_s}$$

Из единственности разложения вектора o теперь следует, что $x_i = y_i$ ($i = 1, \dots, s$).

Теорема 9.59 (Критерий прямой суммы). *Для того, чтобы сумма $V_1 + \dots + V_s$ конечномерных подпространств была прямой, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\dim(V_1 + \dots + V_s) = \dim V_1 + \dots + \dim V_s.$$

Доказательство. Рассмотрим систему, состоящую из базисов пространств V_i :

[illegible]

Для доказательства теоремы покажем, что для того, чтобы сумма $V_1 + \dots + V_s$ была прямой, необходимо и достаточно, чтобы совокупная система A образует базис этой суммы.

Необходимость. Легко видеть, что A — полная система. Докажем ее линейную независимость. Пусть

$$\sum_{j=1}^{n_1} \alpha_{1j} a_{1j} + \dots + \sum_{j=1}^{n_s} \alpha_{sj} a_{sj} = 0. \quad (9.10)$$

Проинтерпретируем приведенное равенство как разложение o по подпространствам V_i . Так как сумма подпространств прямая, то данное разложение единственно, и поэтому

$$\sum_{j=1}^{n_1} \alpha_{1j} a_{1j} = \dots = \sum_{j=1}^{n_s} \alpha_{sj} a_{sj} = o.$$

Векторы в каждой из приведенных линейных комбинаций образуют базис, поэтому все коэффициенты равны нулю. Итак, линейная комбинация (9.10) тривиальная.

Достаточность. Для доказательства достаточности воспользуемся леммой. Для этого покажем, что если система A линейно независима, то разложение o по подпространствам V_i определяется единственным образом. Действительно, в противном случае найдутся такие векторы a_i , что

$$o = a_1 + \dots + a_s,$$

где $a_i \in V_i$ ($i = 1, \dots, s$) и $a_{i'} \neq 0$ для некоторого i' . Каждый вектор a_i разложим по базису $a_{i1}, \dots, a_{in_i}$:

$$o = \sum_{j=1}^{n_1} \alpha_{1j} a_{1j} + \dots + \sum_{j=1}^{n_s} \alpha_{sj} a_{sj}.$$

В приведенной линейной комбинации найдутся ненулевые коэффициенты (среди чисел $\alpha_{i'1}, \dots, \alpha_{i'n_{i'}}$), поэтому система A — линейно зависима, что противоречит условию. ■

Следствие 9.60. Сумма $V_1 + V_2$ прямая тогда и только тогда, когда $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Доказательство. Утверждение следует из доказанного критерия и теоремы о размерности суммы подпространств. ■

Пусть линейное пространство V раскладывается в прямую сумму подпространств: $V = V_1 + V_2$. Тогда для произвольного $x \in V$ определяются единственным образом векторы $y \in V_1$, $z \in V_2$, такие, что $x = y + z$. Вектор y называется *проекцией* вектора x на подпространство V_1 параллельно V_2 .

Линейное многообразие

Рассмотрим линейное пространство V над полем F . Пусть a_0 — произвольный вектор, L — подпространство в V . Под записью $a_0 + L$ будем понимать множество всевозможных векторов вида $a_0 + x$, где x — произвольный вектор из L . Множество $a_0 + L$ называется *линейным многообразием*, порожденным вектором a_0 и подпространством L . Подпространство L называется также *несущим* подпространством для многообразия $a_0 + L$.

Утверждение 9.61. Следующие три утверждения эквивалентны:

1. $a_0 + L = b_0 + L$,
2. $b_0 \in a_0 + L$,
3. $b_0 - a_0 \in L$.

Доказательство. Импликации $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 3$ очевидны. Докажем импликацию $3 \rightarrow 1$. Пусть $b_0 - a_0 \in L$, тогда $b_0 = a_0 + l$ для некоторого $l \in L$. Рассмотрим произвольный вектор $a = a_0 + x$ из $a_0 + L$, $x \in L$. Имеем $a = b_0 + (x - l)$, поэтому $a \in b_0 + L$, откуда $a_0 + L \subseteq b_0 + L$. Аналогично можно показать, что $b_0 + L \subseteq a_0 + L$. ■

Замечание 9.62. Импликация $2 \rightarrow 1$ означает, что многообразие порождается любым своим представителем. Эквивалентность $1 \sim 3$ дает критерий совпадения двух линейных многообразий с одинаковым несущим подпространством.

Утверждение 9.63. Пусть a_0, b_0 — векторы, L, L' — подпространства. Тогда, если $a_0 + L = b_0 + L'$, то $L = L'$. Таким образом, несущее подпространство линейного многообразия определяется единственным образом.

Доказательство. Из предыдущего утверждения следует, что, если $a_0 + L = b_0 + L'$, то $a_0 + L = a_0 + L'$, поэтому для любого x из L найдется такой y из L' , что $a_0 + x = a_0 + y$, откуда $x = y$, т. е. $x \in L'$, а, следовательно, $L \subseteq L'$. Аналогично можно показать, что $L' \subseteq L$. ■

Из доказанного утверждения следует корректность следующего определения. *Размерностью* линейного многообразия $a_0 + L$ называется размерность его несущего подпространства L : $\dim(a_0 + L) = \dim L$.

Линейное многообразие размерности 1 называется *прямой*, размерности 2 — *плоскостью*⁴, размерности $n - 1$ — *гиперплоскостью*.

⁴Иногда плоскостью называют линейное многообразие произвольной размерности