ТЕМА 10

## 9.4. Линейные подпространства

Пусть $V$ — линейное пространство над полем $F$. Множество $W \subseteq V$ называется (линейным) *подпространством*, если оно само является пространством над $F$ относительно операций сложения векторов и умножения их на числа, определенных в $V$.

**Теорема 9.8** (Критерий линейного подпространства)**.** *Для того, чтобы непустое подмножество $W$ линейного пространства $V$ являлось подпространством необходимо и достаточно, чтобы*

1. *$a + b \in W$ для любых $a, b$ из $W$ (замкнутость относительно сложения векторов),*
2. *$\alpha a \in W$ для любого $\alpha$ из $F$ и любого $a$ из $W$ (замкнутость относительно умножения векторов на числа).*

*Доказательство.* *Необходимость.* Условия 1–2 включены в определение линейного пространства.
*Достаточность.* Проверим, что все 8 аксиом линейного пространства в условиях теоремы выполнены. Проверка аксиом (1)–(2), (5)–(8) тривиальна.

Проверим аксиому (3). Покажем, что $o \in W$. Пусть $\alpha = 0$, $a \in W$, тогда $o = 0a = \alpha a \in W$ по условию 2.

Проверим аксиому (4). Покажем, что $-a \in W$ для любого $a \in W$. Пусть $\alpha = -1$, тогда $-a = (-1)a = \alpha a \in W$ по условию 2. ∎

Легко проверить, что согласно приведенному критерию подпространствами являются, например, множество радиус-векторов, концы которых лежат на прямой, проходящей через полюс, в пространстве $\mathbf{V}_3$; множество арифметических векторов с нулевой первой (и, вообще, любой фиксированной) компонентой в пространстве $F^n$; множество четных (нечетных) многочленов в пространстве $F[x]$; множество многочленов степени не выше $n$ в пространстве $F[x]$.

## 9.5. Линейные комбинации и линейные оболочки

Пусть $V$ — линейное пространство над полем $F$. *Системой векторов* назовем произвольную конечную последовательность векторов $a_1, \ldots, a_n$ из $V$ (возможно с повторениями). Тот факт, что систему $\mathbf{a}$ образуют векторы $a_1, \ldots, a_n$ будем записывать следующим образом:

$$\mathbf{a} = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle.$$

Иногда нам будет нужна пустая система, т. е. система $\langle\,\rangle$, не содержащая ни одного вектора.

*Линейной комбинацией векторов $a_1, \ldots, a_n$ с коэффициентами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$* называется выражение $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n$.

Множество всех линейных комбинаций векторов $a_1, \ldots, a_n$ называется *линейной оболочкой* этих векторов и обозначается $L(a_1, \ldots, a_n)$. Формально:

$$L(a_1, \ldots, a_n) = \{\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n : \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F\}.$$

**Теорема 9.9.** *Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — произвольные векторы из $V$. Тогда $L(a_1, \ldots, a_n)$ — подпространство в $V$ и для любого другого подпространства $W$, содержащего векторы $a_1, \ldots, a_n$, справедливо $L(a_1, \ldots, a_n) \subseteq W$.*

*Доказательство.* Докажем сперва, что $L(a_1, \ldots, a_n)$ — подпространство в $V$. Действительно, если $a = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n$ и $b = \beta_1 a_1 + \ldots + \beta_n a_n$, то $a + b = (\alpha_1 + \beta_1)a_1 + \ldots + (\alpha_n + \beta_n)a_n$. Таким образом, $a + b \in L(a_1, \ldots, a_n)$. Если $\alpha \in F$, то $\alpha a = (\alpha\alpha_1)a_1 + \ldots + (\alpha\alpha_n)a_n$. Таким образом, $\alpha a \in F$. Достаточные условия в теореме 9.8 выполнены.

Пусть теперь $W$ — произвольное подпространство, содержащее векторы $a_1, \ldots, a_n$. Тогда для любых чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ из $F$ справедливо $\alpha_j a_j \in W$ $(j = 1, \ldots, n)$ (замкнутость относительно операции умножения на число) и $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n \in W$ (замкнутость относительно операции сложения), т. е. $b \in W$ для произвольного $b \in L(a_1, \ldots, a_n)$. ∎

Говорят, что вектор $b$ *линейно выражается* через систему $a_1, \ldots, a_n$, если $b = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n$ для некоторых $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, иными словами, $b \in L(a_1, \ldots, a_n)$. Говорят, что система $b_1, \ldots, b_m$ *линейно выражается* через систему $a_1, \ldots, a_n$, если для всех $i \in \{1, \ldots, m\}$ вектор $b_i$ линейно выражается через систему $a_1, \ldots, a_n$.

**Утверждение 9.10.** *Система* $b_1, \ldots, b_m$ *линейно выражается через систему* $a_1, \ldots, a_n$ *тогда и только тогда, когда* $L(b_1, \ldots, b_m) \subseteq L(a_1, \ldots, a_n)$.

*Доказательство. Необходимость.* Если система $b_1, \ldots, b_m$ линейно выражается через систему $a_1, \ldots, a_n$, т. е. $b_i \in L(a_1, \ldots, a_n)$ для всех $i \in \{1, \ldots, m\}$, то по замкнутости $\beta_1 b_1 + \ldots + \beta_m b_m \in L(a_1, \ldots, a_n)$ для любых $\beta_1, \ldots, \beta_m$ из $F$.
*Достаточность.* Пусть $L(b_1, \ldots, b_m) \subseteq L(a_1, \ldots, a_n)$. Так как $b_i \in L(b_1, \ldots, b_m)$, то $b_i \in L(a_1, \ldots, a_n)$ $(i = 1, \ldots, m)$. Т. е. система $b_1, \ldots, b_m$ линейно выражается через систему $a_1, \ldots, a_n$. ∎

Очевидно следующее

**Утверждение 9.11.** *Отношение линейной выразимости является рефлексивным и транзитивным, но, в общем случае, не симметричным.*

Системы $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_m$ называются *эквивалентными*, если $a_1, \ldots, a_n$ линейно выражается через $b_1, \ldots, b_m$, а $b_1, \ldots, b_m$ линейно выражается через $a_1, \ldots, a_n$.

**Следствие 9.12.** *Системы* $a_1, \ldots, a_n$ *и* $b_1, \ldots, b_m$ *эквивалентны тогда и только тогда, когда* $L(a_1, \ldots, a_n) = L(b_1, \ldots, b_m)$.

Очевидно следующее

**Утверждение 9.13.** *Отношение эквивалентности линейных систем является рефлексивным, симметричным и транзитивным.*

## 9.6. Линейная зависимость векторов

Линейная комбинация $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n$ векторов $a_1, \ldots, a_n \in V$ называется *тривиальной*, если $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Очевидно, тривиальная комбинация равна нулевому вектору. Говорят, что (непустая) система векторов $a_1, \ldots, a_n$ *линейно зависима*, если существует нетривиальная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору, иными словами, если найдутся числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$, такие, что $\alpha_j \neq 0$ для некоторого $j \in \{1, \ldots, n\}$ и

$$\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n = o. \tag{9.1}$$

В противном случае (непустая) система называется *линейно независимой.* В силу важности вводимых терминов переформулируем определение линейной независимости. Система $a_1, \ldots, a_n$ называется линейно независимой, если равенство (9.1) возможно лишь в случае $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.

**Утверждение 9.14** (Система из одного вектора)**.** *Система, состоящая из одного вектора линейно зависима тогда и только тогда, когда вектор нулевой.*

*Доказательство.* Для системы, состоящей лишь из одного вектора $a$, равенство (9.1) примет вид $\alpha a = 0$, откуда $\alpha = 0$, но тогда комбинация тривиальная, или $a = 0$, что и утверждается. ∎

**Утверждение 9.15** (Система из двух векторов)**.** *Система, состоящая из двух векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда векторы пропорциональны.*

*Доказательство.* Равенство (9.1) принимает вид $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = 0$, причем $\alpha_1 \neq 0$ или(и) $\alpha_2 \neq 0$. В первом случае имеем $a_1 = (-\alpha_2/\alpha_1)a_2$, во втором имеем $a_2 = (-\alpha_1/\alpha_2)a_1$. ∎

**Следствие 9.16.** *Два вектора геометрического пространства* $\mathbf{V}_2$ *или* $\mathbf{V}_3$ *линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.*

**Утверждение 9.17.** *Если подсистема некоторой системы линейно зависима, то и вся система линейно зависима.*

*Доказательство.* Пусть $a_1, \ldots, \alpha_n$ — исходная система, $a_{j_1}, \ldots, a_{j_m}$ — линейно зависимая подсистема ($1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_m \leq n$). По определению линейной зависимости найдутся такие $\alpha_{j_1}, \ldots, \alpha_{j_m}$, не все равные нулю, что

$$\alpha_{j_1} a_{j_1} + \ldots + \alpha_{j_m} a_{j_m} = o.$$

В последнем равенстве добавим к левой части тривиальную комбинацию векторов, не вошедших в подсистему:

$$0a_{i_1} + \ldots + 0a_{i_{n-m}},$$

где

$$\{i_1, \ldots, i_{n-m}\} = \{1, \ldots, n\} \setminus \{j_1, \ldots, j_m\}.$$

Полученная комбинация будет нулевой, но не тривиальной. ∎

**Следствие 9.18.** *Любая подсистема линейно независимой системы линейно независима.*

**Теорема 9.19** (Критерий линейной зависимости)**.** *Система* $a_1, \ldots, a_n$*, где* $n \geq 2$*, линейно зависима тогда и только тогда, когда*

$$a_j = L(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_n)$$

*для некоторого* $j \in \{1, \ldots, n\}$*.*

*Доказательство. Необходимость.* Пусть система $a_1, \ldots, a_n$ линейно зависима, тогда $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n = 0$, причем $\alpha_j \neq 0$ для некоторого $j$, откуда

$$a_j = \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_j}\right) a_1 + \ldots + \left(-\frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_j}\right) a_{j-1} + \left(-\frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j}\right) a_{j+1} + \ldots + \left(-\frac{\alpha_n}{\alpha_j}\right) a_n.$$

*Достаточность.* Пусть

$$a_j = \alpha_1 a_1 + \ldots \alpha_{j-1} a_{j-1} + \alpha_{j+1} a_{j+1} + \ldots + \alpha_n a_n$$

для некоторых $\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n$. Тогда

$$\alpha_1 a_1 + \ldots \alpha_{j-1} a_{j-1} + \alpha_j a_j + \alpha_{j+1} a_{j+1} + \ldots + \alpha_n a_n = 0,$$

где $\alpha_j = -1$. Получили нулевую нетривиальную (так как $\alpha_j = -1 \neq 0$) комбинацию. ∎

**Следствие 9.20.** *Любые три вектора геометрического пространства* $\mathbf{V}_2$ *линейно зависимы. Три вектора геометрического пространства* $\mathbf{V}_3$ *динейно зависимы тогда и только тогда, когда векторы компланарны.*

**Теорема 9.21** (Усиленный критерий линейной зависимости)**.** *Система* $a_1, \dots, a_n$ *линейно зависима тогда и только тогда, когда* $a_1 = o$ *или* $a_j = L(a_1, \dots, a_{j-1})$ *для некоторого* $j \in \{1, \dots, j-1, j+1, \dots n\}$*.*

*Доказательство. Необходимость* Пусть система $a_1, \dots, a_n$ линейно зависимая, тогда $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n = 0$. Пусть $j$ — максимальный индекс, такой, что $\alpha_j \neq 0$, тогда $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_j a_j = 0$, откуда

$$a_j = \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_j}\right) a_1 + \ldots + \left(-\frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_j}\right) a_{j-1}.$$

*Достаточность* Если $n \geq 2$, то воспользуемся предыдущим критерием. Если $n = 1$, то $a_1 = 0$. ∎

**Следствие 9.22.** *Если система* $a_1, \dots, a_n$ *линейно независима, а система* $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m$ *— линейно зависима, то найдется такое* $j \in 1, \dots, m$*, что*

$$b_j = L(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_{j-1}).$$

**Лемма 9.23** (Теорема о замене)**.** *Если система* $a_1, \dots, a_n$ *линейно выражается через систему* $b_1, \dots, b_m$*, причем* $n \geq m$*, то первая система линейно зависимая.*

*Доказательство.* Предположим противное. Пусть в условиях теоремы первая система линейно независима.

Так как $a_1$ линейно выражается через $b_1, \dots, b_m$, то объединенная система $a_1, b_1, \dots, b_m$ линейно зависима и эквивалентна $b_1, \dots, b_m$. По следствию 9.22 в новой системе найдется

$$b_{i_1} \in L(a_1, b_1, \dots, b_{i_1-1}, b_{i_1+1}, \dots, b_m),$$

поэтому система $b_1, \dots, b_m$ эквивалентна $a_1, b_1, \dots, b_{i_1-1}, b_{i_1+1}, \dots, b_m$.

Так как $a_2$ линейно выражается через систему $b_1, \dots, b_m$, эквивалентную $a_1, b_1, \dots, b_{i_1-1}, b_{i_1+1}, \dots, b_m$, то объединенная система $a_1, a_2, b_1, \dots, b_{i_1-1}, b_{i_1+1}, \dots, b_m$ линейно зависима и эквивалентна $b_1, \dots, b_m$. По следствию 9.22 в этой новой системе найдется

$$b_{i_2} \in L(a_1, a_2, b_1, \dots, b_{i_1-1}, b_{i_1+1}, \dots, b_{i_2-1}, b_{i_2+1}, \dots, b_m),$$

поэтому $b_1, \dots, b_m$ эквивалентна $a_1, a_2, b_1, \dots, b_{i_1-1}, b_{i_1+1}, \dots, b_{i_2-1}, b_{i_2+1}, \dots, b_m$.

Продолжая эти рассуждения далее (можно провести индукцию), мы получим цепочку эквивалентных систем

$$\begin{aligned} & b_1, \dots, b_m \sim \\ & \quad \sim a_1, b_1, \dots, b_{i_1-1}, b_{i_1+1}, \dots, b_m \sim \\ & \qquad \sim a_1, a_2, b_1, \dots, b_{i_1-1}, b_{i_1+1}, \dots, b_{i_2-1}, b_{i_2+1}, \dots, b_m \sim \ldots \\ & \qquad\quad \ldots \sim a_1, \dots, a_m. \end{aligned}$$

Поэтому система $b_1, \dots, b_m$ эквивалентна системе $a_1, \dots, a_m$. Следовательно, система $a_1, \dots, a_n$, выражающаяся через $b_1, \dots, b_m$, выражается через свою подсистему $a_1, \dots, a_m$, следовательно, она линейно зависима, что противоречит предположению. ∎

**Следствие 9.24.** *Эквивалентные линейно независимые системы содержат одинаковое число векторов.*

*Базой* системы векторов называется ее любая линейно независимая подсистема, эквивалентная исходной системе.

**Следствие 9.25.** *Любая ненулевая система векторов* $a_1, \ldots, a_m$ *имеет базу.*

*Доказательство.* Пусть $a_{i_1}$ — некоторый ненулевой вектор из $V$. Система, состоящая из одного вектора $a_{i_1}$, линейно независима. Поэтому, если она эквивалентна исходной системе, то является ее базой. В противном случае найдется вектор $a_{i_2} \notin L(a_{i_1})$. По усиленному критерию линейной зависимости система $a_{i_1}, a_{i_2}$ — независимая. Если она эквивалентна исходной системе, то является ее базой. В противном случае найдется вектор $a_{i_3} \notin L(a_{i_1}, a_{i_2})$ и т. д. Описанный процесс оборвется, так как исходная система конечна. ∎

**Следствие 9.26.** *Для любой системы число векторов в произвольной базе одинаково.*

Число векторов в базе называется *рангом* системы.

**Упражнение 9.27.** Докажите, что база — это наибольшая (по числу векторов) линейно независимая подсистема данной системы.

**Упражнение 9.28.** Докажите, что база — это наименьшая (по числу векторов) подсистема данной системы, эквивалентная всей системе.