

§ 25. МЕТОД СЕЧЕНИЙ, ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ И КОНИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ, ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

В § 11 было дано определение алгебраической поверхности и ее порядка. Там же было показано, что порядок поверхности не зависит от выбора системы координат. Согласно этому определению, поверхность пространства является алгебраической второго порядка в том и только в том случае, когда в некоторой аффинной системе координат ее уравнение имеет вид

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z + a_{00} = 0.$$

Мы изучим некоторые свойства таких поверхностей по их каноническим уравнениям. Не оговаривая особо, в дальнейшем будем предполагать, что в пространстве дана прямоугольная декартова система координат.

Любую поверхность можно рассматривать как множество линий, полученных при ее пересечении всеми плоскостями, параллельными между собой. Изучение свойств поверхности по этим линиям называется *методом сечений*. В дальнейшем будем рассматривать множества плоскостей, параллельных плоскостям координат.

Пусть в пространстве даны поверхность P и плоскость π , параллельная координатной плоскости Oxy и определенная уравнением $z = h$. Обозначим через γ' линию пересечения P и π , а через γ — проекцию γ' на координатную плоскость Oxy .

Определение 1. Кривая γ называется линией уровня поверхности P на плоскости Oxy , соответствующей значению h .

Аналогично определяются линии уровня поверхности P на координатных плоскостях Oxz и Oyz .

Теорема 1. Пусть уравнение поверхности P в системе координат $O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ имеет вид $F(x; y; z) = 0$. Тогда уравнение $F(x; y; h) = 0$ представляет собой уравнение ее линии уровня γ' на плоскости Oxy , соответствующей значению h , в системе координат $O, \vec{i}, \vec{j}$.

Доказательство. Возьмем произвольную точку $M(x; y)$, принадлежащую γ . Покажем, что ее координаты — решение уравнения $F(x; y; h) = 0$. Так как M лежит на γ , то существует точка M' кривой γ' пересечения P и плоскости $\pi: z = h$, которая проектируется параллельно оси Oz в точку M (рис. 96). M' лежит в π и проектируется в точку M , поэтому $M'(x; y; h)$. Но координаты точки M' , лежащей на поверхности P , удовлетворяют уравнению поверхности $F(x; y; h) = 0$. Таким образом, координаты M удовлетворяют уравнению линии γ .

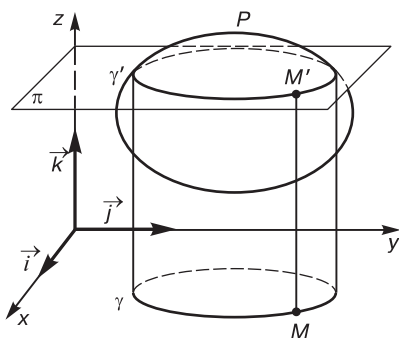


Рис. 96

Обратно, пусть M — некоторая точка плоскости Oxy , координаты x и y которой в системе $O, \vec{i}, \vec{j}$ удовлетворяют уравнению $F(x; y; h) = 0$. Покажем, что M принадлежит линии уровня γ . Рассмотрим точку M' плоскости π , которая проектируется параллельно оси Oz в точку M . Координаты M' равны $(x; y; h)$. Так как они удовлетворяют уравнению $F(x; y; h) = 0$, то M' лежит на поверхности P . Поэтому M' принадлежит пересечению γ' поверхности P и плоскости π , а точка M находится на проекции γ линии γ' на плоскость Oxy . Теорема доказана.

Аналогично определяются уравнения линий уровня поверхности на координатных плоскостях Oxz и Oyz . Например, уравнение линии уровня поверхности P : $F(x; y; z) = 0$ на плоскости Oyz , соответствующей значению h , в системе координат $O, \vec{j}, \vec{k}$ имеет вид $F(x; y; z) = 0$. Меняя h , получим систему линий уровня на каждой из координатных плоскостей. Такие системы позволяют судить о форме поверхности.

Метод сечений используется на практике. Например, с его помощью на топографических картах изображается рельеф местности, а на морских — рельеф дна.

Перейдем к изучению цилиндрических поверхностей.

Определение 2. Поверхность называется цилиндрической, если она вместе с каждой своей точкой содержит прямую, параллельную некоторому фиксированному ненулевому вектору.

Прямые цилиндрической поверхности, параллельные указанному вектору, называются ее образующими. Ясно, что любую цилиндрическую поверхность можно определить, выбрав в пространстве кривую γ и ненулевой вектор $\vec{p}$, а затем построить прямые, параллельные $\vec{p}$, проходящие через точки кривой γ (рис. 97). Кривая γ называется направляющей цилиндрической поверхности. Простейшей цилиндрической поверхностью является плоскость. Ее направляющей может служить ее любая прямая, а образующие могут быть параллельны произвольному вектору, который не параллелен направляющей прямой.

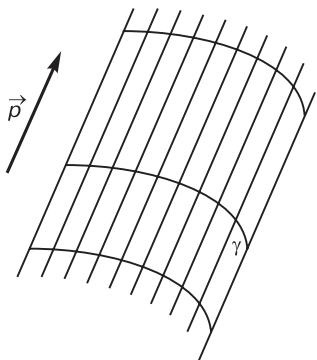


Рис. 97

Теорема 2. Пусть образующие цилиндрической поверхности параллельны оси аппликат прямоугольной декартовой системы координат $O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, а ее направляющая принадлежит координатной плоскости Oxy и имеет уравнение $F(x; y) = 0$ в системе координат $O, \vec{i}, \vec{j}$ этой плоскости. Тогда это же уравнение $F(x; y) = 0$ является уравнением всей поверхности в системе координат $O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ пространства.

Доказательство. Выберем произвольную точку $M(x; y; z)$, принадлежащую данной цилиндрической поверхности. Проведем через нее образующую l , которая пересечет направляющую γ в некоторой точке M_1 (рис. 98). Так как образующая параллельна оси Oz , то у точки M_1 в системе $O, \vec{i}, \vec{j}$ координаты совпадают с первыми двумя координатами точки M : $M_1(x; y)$. Так как M_1 принадлежит γ , то ее координаты удовлетворяют уравнению $F(x; y) = 0$. Следовательно, координаты точки M удовлетворяют тому же уравнению.

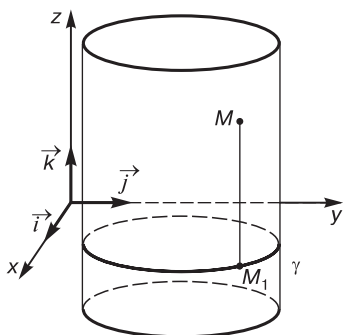


Рис. 98

Обратно, пусть координаты x, y и z некоторой точки M удовлетворяют уравнению $F(x; y) = 0$. Покажем, что она лежит на данной цилиндрической поверхности. Проведем через M прямую l , параллельную оси аппликат, и обозначим через M_1 точку пересечения l с плоскостью Oxy . Координаты точки M_1 в системе $O, \vec{i}, \vec{j}$ равны $(x; y)$. Но, по условию, x и y удовлетворяют уравнению кривой $\gamma: F(x; y) = 0$. Поэтому M_1 лежит на направляющей γ , следовательно, l — образующая цилиндрической поверхности. Данная точка M лежит на этой поверхности. Теорема доказана.

С помощью этой теоремы можно описать все вещественные цилиндрические поверхности второго порядка. Для этого на плоскости Oxy в качестве направляющей выберем кривую второго порядка, образующие поверхности будут параллельны оси аппликат. Приведем канонические уравнения таких поверхностей.

1. Эллиптический цилиндр: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

2. Гиперболический цилиндр: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

3. Параболический цилиндр: $y^2 = 2px$.

4. Цилиндрическая поверхность, представляющая собой пару плоскостей, пересекающихся на оси Oz : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$.

5. Цилиндрическая поверхность, представляющая собой пару параллельных плоскостей: $\frac{x^2}{a^2} = 1$.

6. Цилиндрическая поверхность, представляющая собой пару слившихся параллельных плоскостей: $x^2 = 0$.

На рисунке 99, а—в изображены эллиптический, гиперболический и параболический цилиндры.

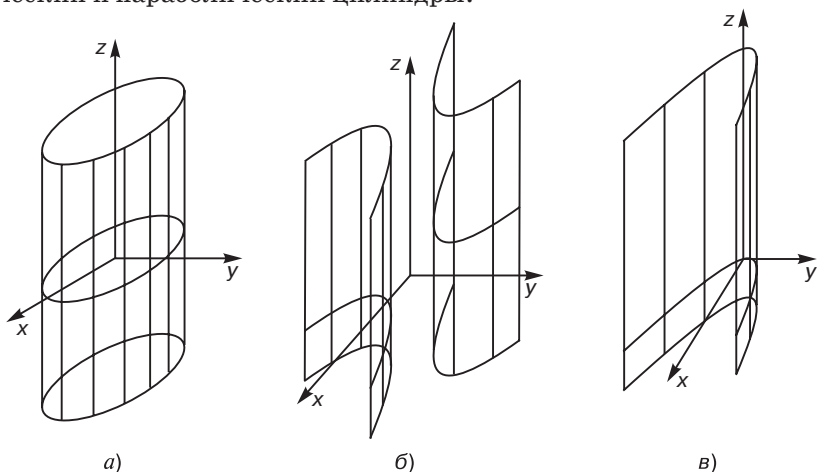


Рис. 99

Рассмотрим свойства вещественной конической поверхности второго порядка.

Определение 3. Поверхность p называется конической, если для нее можно указать такую точку O , для которой прямая, проходящая через нее и любую другую точку поверхности, целиком принадлежит p .

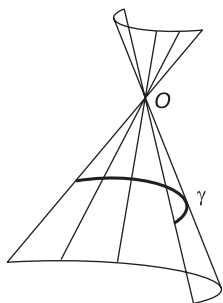


Рис. 100

Эти прямые называются образующими конической поверхности. Точка, в которой пересекаются все образующие, называется вершиной. Любую коническую поверхность можно построить следующим образом. Выберем в пространстве некоторую кривую γ и зафиксируем точку O . Затем через нее и через каждую точку кривой проведем прямые — образующие конической поверхности. В этом случае кривая γ называется направляющей этой поверхности (рис. 100). Докажем следующую теорему.

Теорема 3. *Поверхность, заданная уравнением*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad (25.1)$$

является конической с вершиной в начале координат.

Доказательство. Выберем на этой поверхности произвольную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Ее координаты удовлетворяют уравнению

$$(25.1): \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 0. \text{ Если } O — \text{начало координат, то координаты}$$

вектора $\overrightarrow{OM_0}$ равны $\{x_0; y_0; z_0\}$. Поэтому параметрические уравнения прямой OM_0 имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x = x_0 t, \\ y = y_0 t, \\ z = z_0 t. \end{cases}$$

Возьмем произвольную точку M этой прямой, соответствующей параметру t , и покажем, что ее координаты $x_0 t$, $y_0 t$ и $z_0 t$ удовлетворяют уравнению (25.1). Действительно,

$$\frac{(x_0 t)^2}{a^2} + \frac{(y_0 t)^2}{b^2} - \frac{(z_0 t)^2}{c^2} = t^2 \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} \right) = 0.$$

Таким образом, прямая OM_0 целиком лежит на поверхности. Теорема доказана.

Уравнение (25.1) называется *каноническим уравнением вещественной конической поверхности второго порядка*. Построим ее линии уровня на координатных плоскостях, начав с плоскости Oxy . Пусть плоскость сечения имеет уравнение $z = h$. Тогда уравнение соответствующей линии уровня имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}.$$

При $h = 0$ получим $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$. Этому уравнению соответствует начало системы координат, т. е. вершина конуса. Если $h \neq 0$,

$$\text{то преобразуем уравнение линии уровня к виду } \frac{x^2}{h^2 \frac{a^2}{c^2}} + \frac{y^2}{h^2 \frac{b^2}{c^2}} = 1.$$

Полученное уравнение при любом h , отличном от нуля, определяет эллипс, оси симметрии которого совпадают с осями координат. Отношение его полуосей равно $\frac{a}{b}$, т. е. не зависит от h . Та-

ким образом, линии уровня на плоскости Oxy представляют собой множество подобных между собой эллипсов, имеющих одни и те же оси симметрии, причем с увеличением h полуоси эллипсов бесконечно возрастают (рис. 101, а).

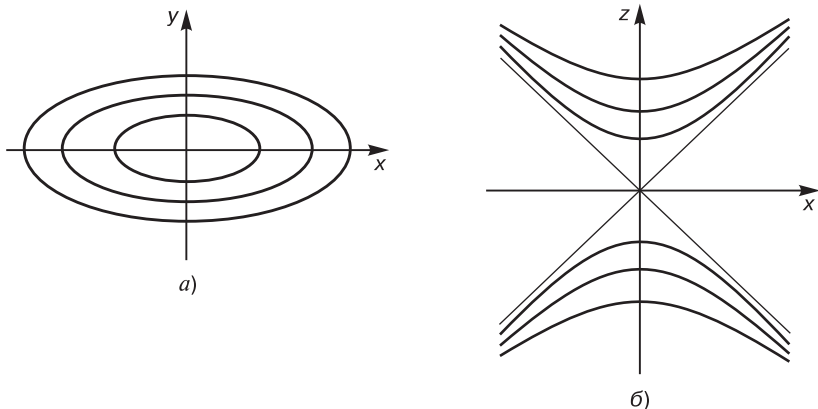


Рис. 101

Рассмотрим теперь сечения поверхности плоскостью $y = h$, параллельной координатной плоскости Oxz . Линия уровня на плоскости определяется уравнением $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{h^2}{b^2}$. Если $h = 0$, то линия уровня определяется уравнением $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 0$, т. е. представляет собой две прямые $z = \frac{c}{a}x$, $z = -\frac{c}{a}x$ — образующие конической поверхности.

Пусть $h \neq 0$. Преобразуем уравнение к виду $\frac{z^2}{h^2 \frac{c^2}{b^2}} - \frac{x^2}{h^2 \frac{a^2}{b^2}} = 1$.

В этом случае линией уровня является гипербола, для которой оси координат Oz и Ox служат действительной и мнимой осями симметрии, а отношение действительной полуоси к мнимой постоянно, не зависит от h и равно $\frac{c}{a}$. Поэтому все эти гиперболы имеют одни и те же асимптоты, определяемые уравнениями $z = \frac{c}{a}x$, $z = -\frac{c}{a}x$. Это те самые прямые, которые служат линиями уровня конической поверхности при $h = 0$.

Карта линий уровня $y = h$ приведена на рисунке 101, б. Ясно, что аналогичную карту линий уровня получим при пересечении поверхности плоскостями $x = z$. На рисунке 102 изображена вещественная коническая поверхность второго порядка, показаны сечения плоскостями, параллельными координатным плоскостям Oxy и Oxz .

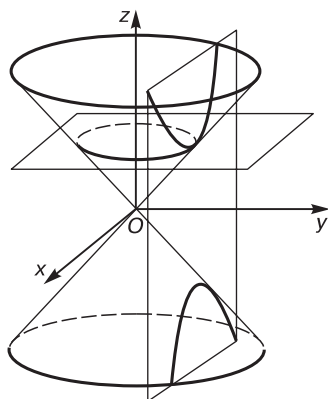


Рис. 102

Интересно отметить следующий факт. Если пересечь коническую поверхность второго порядка плоскостью, параллельной ее образующей, то в сечении образуется парабола. Это сечение изображено на рис. 103. Эллипс, гиперболу и параболу часто называют *коническими сечениями*.

Определение 4. Поверхность p называется *поверхностью вращения*, если для нее можно указать такую прямую l , что она вместе с каждой своей точкой целиком содержит линию, полученную при вращении этой точки вокруг l .

Прямая l называется *осью вращения*. Линии, полученные при вращении точек поверхности вокруг оси, называются *параллелями* поверхности вращения. Если точка не принадлежит l , то параллель, проходящая через нее, представляет собой окружность, если же точка принадлежит l , то параллель совпадает с самой точкой. Ясно, что плоскости, содержащие параллели поверхности, перпендикулярны ее оси. Кривая, полученная при пересечении поверхности вращения с плоскостью, проходящей через ее ось, называется *меридианом* этой поверхности. Поверхность можно получить, вращая любой ее меридиан вокруг оси.

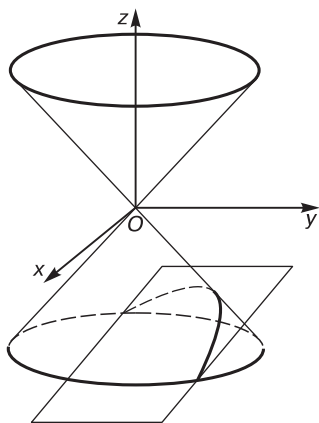


Рис. 103

Теорема 4. Пусть в пространстве дана прямоугольная декарто-

ва система координат $O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Если на координатной плоскости Oxz в системе координат $O, \vec{i}, \vec{k}$ задана кривая γ своим уравнением $x = f(z)$, то уравнение поверхности, полученной при вращении γ вокруг оси Oz , в системе координат $O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ имеет следующий вид:

$$x^2 + y^2 = f^2(z). \quad (25.2)$$

Доказательство. Пусть p — данная поверхность вращения, а $M(x; y; z)$ — ее произвольная точка (рис. 104). Обозначим через ω параллель поверхности p , проходящую через точку M . Эта параллель представляет собой окружность, центр которой находится в точке N оси Oz , а радиус равен длине отрезка MN . Так как отрезок MN перпендикулярен оси Oz , то координаты точки N равны $(0; 0; z)$. Поэтому $|MN| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Пусть ω пересекает координатную плоскость Oxz в точках P_1 и P_2 . Отрезки P_1N и P_2N также перпендикулярны оси Oz , точки P_1 и P_2 симметричны относительно N , поэтому их координаты имеют вид $P_1(a; 0; z)$, $P_2(-a; 0; z)$, где a — некоторое положительное число. Но из равенств $|P_1N| = |P_2N| = |MN|$ следует, что $|a| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Таким образом, для точек P_1 и P_2 имеем: $P_1(\sqrt{x^2 + y^2}; 0; z)$, $P_2(-\sqrt{x^2 + y^2}; 0; z)$. Одна из этих точек принадлежит кривой ω , следовательно, либо $\sqrt{x^2 + y^2} = f(z)$, либо $-\sqrt{x^2 + y^2} = f(z)$. Поэтому координаты точки M удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = f^2(z)$.

Обратно, пусть координаты x, y и z некоторой точки M удовлетворяют уравнению (25.2). Покажем, что она принадлежит поверх-

ности вращения p . Спроектируем M на ось Oz , получим точку N , координаты которой равны $(0; 0; z)$. Построим окружность ω с центром в точке N , радиуса $|MN|$, плоскость которой перпендикулярна оси Oz . Эта окружность пересекает координатную плоскость Oxz в точках P_1 и P_2 . Ранее были найдены координаты этих точек: $P_1(\sqrt{x^2 + y^2}; 0; z)$, $P_2(-\sqrt{x^2 + y^2}; 0; z)$. Из уравнения (25.2) следует, что

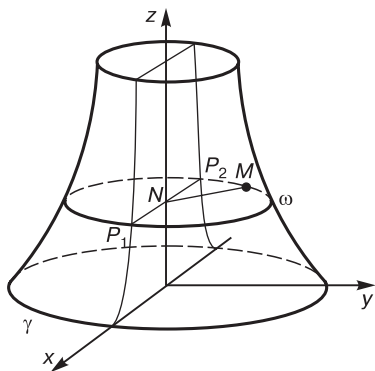


Рис. 104

$\sqrt{x^2 + y^2} = |f(z)|$. Если $f(z) \geq 0$, то $\sqrt{x^2 + y^2} = f(z)$ и точка P_1 лежит на кривой ω . Если $f(z) < 0$, то $-\sqrt{x^2 + y^2} = f(z)$, в этом случае P_2 принадлежит ω . Таким образом, ω — окружность вращения либо точки P_1 , либо точки P_2 вокруг оси Oz , поэтому она целиком принадлежит поверхности вращения p . Следовательно, на этой поверхности лежит и точка M . Теорема доказана.

Можно доказать, что уравнение поверхности, образованной вращением вокруг оси Oz кривой, принадлежащей плоскости Oyz и определенной в системе уравнением $y = f(z)$, также совпадает с уравнением (25.2). Аналогично определяются уравнения поверхностей вращения вокруг осей Ox и Oy .

Приведем примеры поверхностей вращения второго порядка.

Пример 1. В плоскости Oxz дана прямая $x = r$, параллельная оси Oz . Определить уравнение поверхности, образованной вращением прямой вокруг оси Oz .

Решение. Воспользуемся уравнением (25.2). Так как $f(z) = r$, то уравнение поверхности вращения имеет вид $x^2 + y^2 = r^2$. Эта поверхность в соответствии с теоремой 2 является цилиндрической. Она носит название *кругового цилиндра*.

Пример 2. В плоскости Oxz дана прямая $x = kz$, проходящая через начало координат. Определить уравнение поверхности, образованной вращением этой прямой вокруг оси Oz .

Решение. Как следует из формулы (25.2), искомое уравнение имеет вид $x^2 + y^2 = k^2 z^2$, или $\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{k^2} - z^2 = 1$. Полученная поверхность является конической (теорема 3). Ее называют *круговым конусом*.

Пример 3. В плоскости Oxz дан эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Определить уравнение, полученное при его вращении вокруг оси Oz .

Решение. Так как эллипс, определенный своим каноническим уравнением, симметричен относительно начала координат, то для построения поверхности достаточно вращать вокруг оси Oz только его половину, для точек которой абсциссы больше или равны 0. Эта часть эллипса определена уравнением

$x = \frac{a}{c} \sqrt{c^2 - z^2}$. Из формулы (25.2) следует, что уравнение искомой поверхности можно записать в виде $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{c^2} (c^2 - z^2)$ или

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Такая поверхность называется *эллипсоидом вращения*. Она представлена на рис. 105.

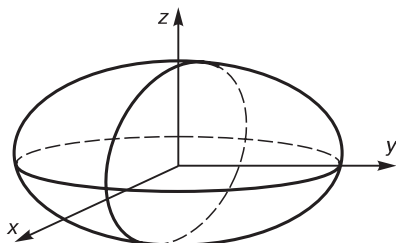


Рис. 105

Пример 4. В плоскости Oxz дана гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. Определить уравнение поверхности, полученной при вращении вокруг оси Oz .

Решение. Как следует из уравнения гиперболы, она пересекает ось Ox и не пересекает ось вращения Oz . Исходя из свойств симметрии гиперболы, для построения поверхности достаточно вращать только одну ее ветвь, для точек которой абсцисса положительна. Уравнение этой ветви можно представить в виде

$x = \frac{a}{c} \sqrt{z^2 + c^2}$. Используя (25.2), получим уравнение искомой по-

верхности вращения: $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{c^2}(z^2 + c^2)$ или $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Такая поверхность называется *однополостным гиперболоидом вращения* (рис. 106).

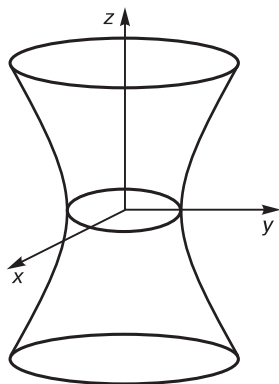


Рис. 106

Пример 5. В плоскости Oxz дана гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$. Определить уравнение поверхности, полученной при ее вращении вокруг оси аппликат.

Решение. Данная гипербола пересекает ось Oz и не пересекает оси Ox . Из соображений симметрии будем вращать только ту часть гиперболы, точки которой имеют положительную абсциссу. Уравнение этой части представим

в виде $x = \frac{a}{c} \sqrt{z^2 - c^2}$. Поэтому из (25.2) следует, что уравнение $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{c^2}(z^2 - c^2)$ служит уравнением искомой поверхности. Преобразуем его к виду $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$. Полученная поверхность называется *двуполостным гиперboloидом вращения* (рис. 107).

Пример 6. В плоскости Oxz дана парабола $x^2 = 2pz$. Найти уравнение поверхности, полученной при ее вращении вокруг оси Oz .

Решение. Искомую поверхность можно получить, вращая только одну ветвь параболы, определенную уравнением $x = \sqrt{2pz}$. Из (25.2) следует, что уравнение поверхности имеет вид $x^2 + y^2 = 2pz$.

Эта поверхность называется *эллиптическим параболоидом вращения*. Она изображена на рис. 108.

§ 26. ЭЛЛИПСОИДЫ И ГИПЕРБОЛОИДЫ

В предыдущем параграфе мы познакомились с эллипсоидом и гиперboloидами вращения. Теперь изучим общий вид этих поверхностей.

Определение 1. Под эллипсоидом понимается поверхность, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат имеет уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Из уравнения эллипсоида следует, что он пересекает каждую из осей координат в двух точках: ось абсцисс в точках $A_1(a; 0; 0)$ и $A_2(-a; 0; 0)$, ось ординат в точках $B_1(0; b; 0)$ и $B_2(0; -b; 0)$, а ось аппликат — в точках $C_1(0; 0; c)$ и $C_2(0; 0; -c)$. Координаты точек эллипсоида удовлетворяют неравенствам

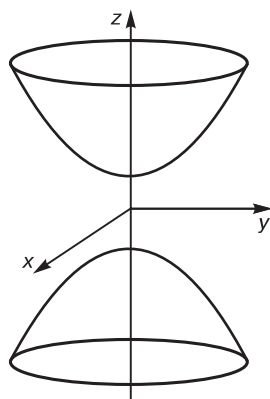


Рис. 107

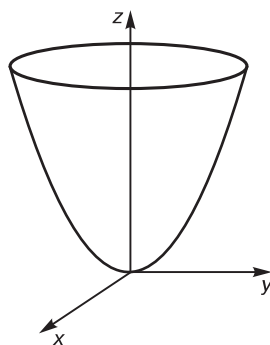


Рис. 108

$$\begin{cases} -a \leq x \leq a, \\ -b \leq y \leq b, \\ -c \leq z \leq c. \end{cases}$$

Из уравнения эллипсоида также следует, что он симметричен относительно координатных плоскостей и центрально симметричен относительно начала координат.

Исследуем эллипсоид с помощью метода сечений. Выясним вид линий уровня на координатной плоскости Oxy . Пересечем эллипсоид плоскостью $z = h$. Как следует из теоремы 1 (§ 25), уравнение линии уровня, соответствующей значению h , в системе $O, \vec{i}, \vec{j}$ имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{h^2}{c^2} = 1$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}. \quad (26.1)$$

Если $|h| > c$, то $1 - \frac{h^2}{c^2} < 0$, на плоскости не существует точек, координаты которых удовлетворяют уравнению (26.1), плоскость не пересекает эллипсоида. Если $h = \pm c$, то из соотношений

(26.1) получим: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$. Этому уравнению удовлетворяет

единственная точка плоскости $O(0; 0)$. Плоскости касаются эллипсоида в точках $C_1(0; 0; c)$ и $C_2(0; 0; -c)$. Пусть $|h| < c$. Преобразуем соотношение (26.1) к виду

$$\frac{x^2}{a^2 \left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} = 1.$$

Полученное уравнение определяет эллипс, оси симметрии которого

совпадают с осями координат, а полуоси равны $a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$

и $b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$. В этом случае линиями уровня служат эллипсы, симметричные относительно осей координат, отношение полуосей

которых постоянно, при этом длины полуосей максимальны при $h = 0$. Карта линий уровня приведена на рисунке 109. Аналогично строятся линии уровня на плоскостях Oxz и Oyz . Эллипсоид изображен на рис. 110.

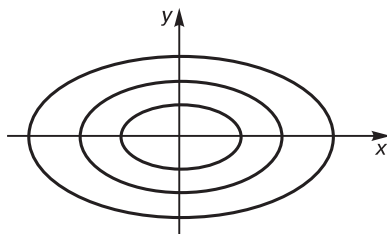


Рис. 109

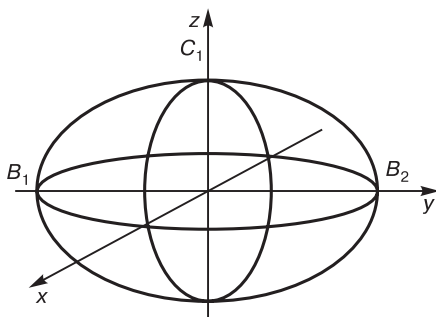


Рис. 110

Перейдем к изучению свойств гиперboloидов. Существуют два различных вида гиперboloидов.

Определение 2. Под однополостным гиперboloидом понимается поверхность, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат имеет уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (26.2)$$

Прежде всего, отметим простейшие свойства однополостного гиперboloида, вытекающего из его уравнения. Так как в уравнении (26.2) содержатся только квадраты неизвестных, то однополостный гиперboloид симметричен относительно координатных плоскостей и центрально симметричен относительно начала координат. Нетрудно видеть, что однополостный гиперboloид пересекает ось абсцисс в двух точках $A_1(a; 0; 0)$ и $A_2(-a; 0; 0)$, а ось ординат в точках $B_1(0; b; 0)$ и $B_2(0; -b; 0)$; ось Oz не имеет общих точек с гиперboloидом. Найдем точки пересечения однополостного гиперboloида с прямой, проходящей через начало координат. Если $\vec{q}\{q_1; q_2; q_3\}$ — направляющий вектор такой прямой,

то ее параметрические уравнения имеют вид
$$\begin{cases} x = q_1 t, \\ y = q_2 t, \\ z = q_3 t. \end{cases}$$
 Подставив

эти соотношения в равенство (26.2), получим уравнение для определения параметров точек пересечения:

$$t^2 \frac{q_1^2}{a^2} + t^2 \frac{q_2^2}{b^2} - t^2 \frac{q_3^2}{c^2} = 1. \quad (26.3)$$

Введем следующее обозначение: $Q = \frac{q_1^2}{a^2} + \frac{q_2^2}{b^2} - \frac{q_3^2}{c^2}$. Если $Q > 0$, то уравнение (26.3) имеет два действительных корня. В этом случае прямая пересекает однополостный гиперболоид в двух точках. Если $Q < 0$, то корни уравнения (26.3) — комплексно-сопряженные числа. Тогда говорят, что прямая не имеет с гиперболоидом общих точек и она пересекает поверхность в двух комплексно сопряженных точках. В случае $Q = 0$ уравнение (26.3) не имеет ни действительных, ни комплексных корней. Такая прямая называется прямой *асимптотического направления* однополостного гиперболоида. Легко видеть, точка $M(x; y; z)$ тогда и только тогда лежит на прямой асимптотического направления однополостного гиперболоида, когда ее координаты удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \quad (26.4)$$

Поверхность, определяемая этим уравнением, — коническая (§ 25). Она называется *асимптотическим конусом однополостного гиперболоида*.

Исследуем однополостный гиперболоид методом сечений. Положим $z = h$. Тогда из равенства (26.2) следует, что $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}$,

или $\frac{x^2}{a^2 \left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)} = 1$. Линии уровня на плоскости Oxy ,

определяемые этим уравнением, являются эллипсами. Их оси совпадают с осями координат, а отношение полуосей постоянно и равно $\frac{a}{b}$. Если $h = 0$, то длины полуосей равны a и b . Такой эллипс называется горловым.

При увеличении модуля числа h длины полуосей эллипса возрастают и стремятся к бесконечности. Линии уровня на плоскости Oxy изображены на рис. 111.

Исследуем линии уровня однополостного гиперболоида

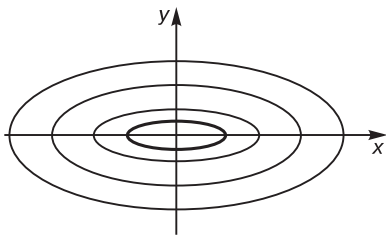


Рис. 111

на плоскости Oxz . Положим $y = h$, тогда из уравнения (25.4) получим:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}. \quad (26.5)$$

Уравнение (26.5) определяет кривую гиперболического типа.

Если $h_2 = b_2$, то $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0$. В этом случае линии уровня — две прямые линии $l_1: z = \frac{c}{a}x$ и $l_2: z = -\frac{c}{a}x$. Они целиком принадлежат однополостному гиперboloиду.

Если $h^2 < b^2$, то уравнение (26.5) определяет гиперболу $\frac{x^2}{a^2 \left(1 - \frac{h^2}{b^2}\right)} - \frac{z^2}{c^2 \left(1 - \frac{h^2}{b^2}\right)} = 1$, которая пересекает ось Ox и не пересекает ось Oz . Длины ее полуосей равны $a\sqrt{1 - \frac{h^2}{b^2}}$ и $c\sqrt{1 - \frac{h^2}{b^2}}$. Так как $0 \leq h^2 \leq b^2$, то действительная и мнимая полуоси гиперболы подчиняются неравенствам $0 < a\sqrt{1 - \frac{h^2}{b^2}} \leq a$, $0 < c\sqrt{1 - \frac{h^2}{b^2}} \leq c$. Наибольшие значения, равные a и c , они принимают при $h = 0$. Отношение полуосей постоянно и равно $\frac{a}{c}$. Поэтому при любом h гипербола имеет одни и те же асимптоты $l_1: z = \frac{c}{a}x$ и $l_2: z = -\frac{c}{a}x$; это те самые прямые, которые служат линиями уровня при $h = 0$.

Если $h^2 > b^2$, то преобразуем формулу (26.5) к виду $\frac{x^2}{a^2 \left(\frac{h^2}{b^2} - 1\right)} - \frac{z^2}{c^2 \left(\frac{h^2}{b^2} - 1\right)} = -1$. Это уравнение при любом h также определяет гиперболу, но такую, которая пересекает ось Oz и не пересекает ось Ox . При этом при бесконечном возрастании h по абсолютной величине длины полуосей изменяются от нуля до бесконечности, а отношение полуосей постоянно и равно $\frac{c}{a}$. Поэтому прямые $l_1: z = \frac{c}{a}x$ и $l_2: z = -\frac{c}{a}x$ служат асимптотами и этих гипербол тоже. Линии уровня однополостного гиперboloида на плоскости Oxz представлены на рис. 112.

Такое же строение имеют линии уровня этой поверхности на плоскости Oyz . Однополостный гиперболоид изображен на рис. 113. Там же пунктиром показан его асимптотический конус.

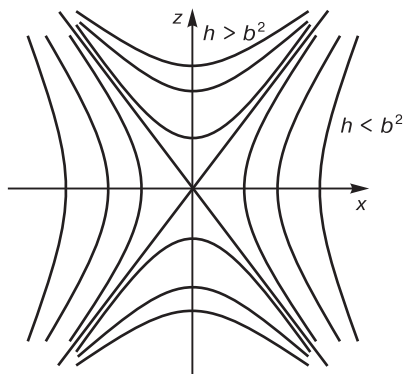


Рис. 112

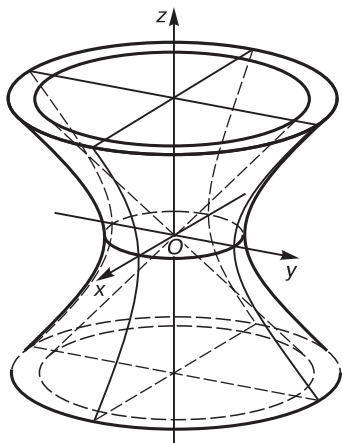


Рис. 113

Как мы уже видели, на однополостном гиперболоиде существуют прямые, целиком ему принадлежащие. Покажем, что таких прямых бесконечно много и они составляют два семейства. Преобразуем уравнение (26.4) к виду

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$$

или

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right). \quad (26.6)$$

Рассмотрим две системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} q\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = p\left(1 - \frac{y}{b}\right), \\ p\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = q\left(1 + \frac{y}{b}\right) \end{cases} \quad (26.7)$$

и

$$\begin{cases} m\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = n\left(1 + \frac{y}{b}\right), \\ n\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = m\left(1 - \frac{y}{b}\right). \end{cases} \quad (26.8)$$

Каждая из полученных систем при условии, что пары чисел p, q и m, n не равны одновременно нулю, представляет собой общие уравнения прямых в пространстве, которые целиком принадлежат гиперboloиду. Действительно, если координаты точки удовлетворяют либо системе (26.7), либо (26.8), то они являются решением уравнения (26.6), при этом точка принадлежит гиперboloиду. Меняя числа p, q и m, n , получим две системы прямолинейных образующих однополостного гиперboloида, определяемых указанными системами уравнений. Прямолинейные образующие обладают следующими свойствами: через каждую точку однополостного гиперboloида проходит только одна прямая каждого семейства; любые две прямые одного семейства скрещиваются, а принадлежащие различным семействам лежат в одной плоскости. Прямолинейные образующие однополостного гиперboloида изображены на рис. 114.

Замечательный русский инженер В. Г. Шухов использовал линейные свойства однополостного гиперboloида при строительстве высотных радиомачт, водонапорных башен и т. д. Конструкции, составленные из балок, расположенных по прямолинейным образующим однополостного гиперboloида, оказались прочными, легкими и простыми в изготовлении. Шаболовская телемачта в Москве построена по этому методу.

Пример 1. Найти уравнения прямолинейных образующих однополост-

ного гиперboloида $x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$, проходящих через его точку $M(1; 1; 2)$.

Решение. Уравнения первого и второго семейств прямолинейных образующих, как следует из (26.7) и (26.8), имеют вид

$$\begin{cases} q\left(x - \frac{z}{2}\right) = p(1 - y), \\ p\left(x + \frac{z}{2}\right) = q(1 + y) \end{cases}$$

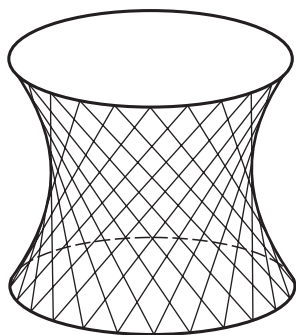


Рис. 114

и

$$\begin{cases} m\left(x - \frac{z}{2}\right) = n(1+y), \\ n\left(x + \frac{z}{2}\right) = m(1-y). \end{cases}$$

Ясно, что пары p и q , а также m и n заданы с точностью до пропорциональности. Из условия принадлежности точки M этим

прямым следует $\begin{cases} q(1-1) = p(1-1), \\ p(1+1) = q(1+1) \end{cases}$ или $p = q$. Аналогично,

$\begin{cases} m(1-1) = n(1+1), \\ n(1+1) = m(1-1). \end{cases}$ Получим $n = 0$, m — произвольное число. Та-

ким образом, уравнения искомых образующих имеют вид

$$\begin{cases} x - \frac{z}{2} = 1 - y, \\ x + \frac{z}{2} = 1 + y, \end{cases} \quad \begin{cases} x - \frac{z}{2} = 0, \\ 1 - y = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 2x + 2y - z - 2 = 0, \\ 2x - 2y + z - 2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - z = 0, \\ y - 1 = 0. \end{cases}$$

Изучим свойства еще одной поверхности второго порядка — двуполостного гиперболоида.

Определение 3. Поверхность называется двуполостным гиперболоидом, если ее уравнение в некоторой прямоугольной декартовой системе координат имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \quad (25.9)$$

Из приведенного уравнения следует, что двуполостный гиперболоид симметричен относительно координатных плоскостей и центрально симметричен относительно начала координат. Он не пересекает оси абсцисс и ординат, а с осью аппликат имеет две общие точки $C_1(0; 0; c)$ и $C_2(0; 0; -c)$, которые называются его вершинами. Так же как и в случае однополостного гиперболоида, доказывается, что эта поверхность и прямая, проходящая через начало координат, либо пересекаются в двух вещественных, либо в двух комплексно сопряженных точках, либо не имеют общих точек. В третьем случае направление прямой называется *асим-*

птотическим. Аналогично доказывается, что точка лежит на прямой асимптотического направления в том и только в том случае, когда ее координаты удовлетворяют уравнению конической поверхности $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, которая носит название *асимптотического конуса двуполостного гиперboloида*.

Исследуем двуполостный гиперboloид методом сечений. Положим $z = h$. Тогда из равенства (26.9) следует, что $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1$. Полученное уравнение при $h^2 < c^2$ не имеет вещественных решений. При $h^2 = c^2$ ему удовлетворяют координаты единственной точки $O(0; 0)$. В этом случае плоскости $z = c$ и $z = -c$ касаются двуполостного гиперboloида в его вершинах. Если $h^2 > c^2$, то уравнение определяет на плоскости

Oxy эллипс $\frac{x^2}{a^2\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)} = 1$, который симметричен

относительно координатных осей. Отношение его полуосей не зависит от h , поэтому все эллипсы подобны друг другу. Длины полуосей бесконечно возрастают при увеличении h .

Рассмотрим сечение двуполостного гиперboloида плоскостью $y = h$. Из равенства (25.9) следует $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{h^2}{b^2}$. Полученное уравнение при любом h определяет гиперболу, для которой оси координат являются осями симметрии, причем ось Oz — действительной, а ось Ox — мнимой осью. Полуоси принимают наименьшее значение при $h = 0$. При бесконечном увеличении h полуоси стремятся к бесконечности. Их отношение не зависит от h и равно $\frac{c}{a}$. Поэтому при любом h гиперболы имеют одни и те же асимптоты, уравнения которых имеют вид $z = \pm \frac{c}{a}x$. Линии уровня двуполостного гиперboloида на плоскости Oxz изображены на рис. 115.

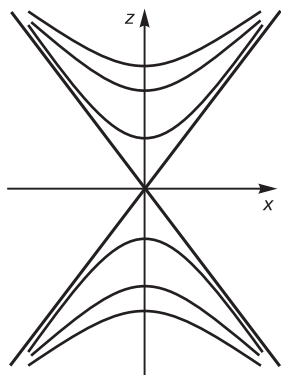


Рис. 115

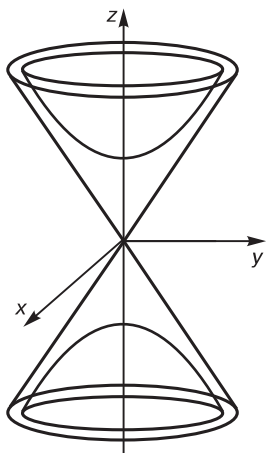


Рис. 116

Аналогично исследуются линии уровня на плоскости Oyz . Они представляют собой такое же семейство гипербол, как и на плоскости Oxz . Двуполостный гиперболоид представлен на рис. 116. Там же изображен его асимптотический конус.

В заключении отметим, что ни эллипсоид, ни двуполостный гиперболоид не имеют прямолинейных образующих. Эллипсоид целиком лежит в прямоугольном параллелепипеде, следовательно, не может содержать прямую. Сечения двуполостного гиперболоида плоскостями, параллельными координатной плоскости Oxy , представляют собой эллипсы. Поэтому он не может

содержать прямую, параллельную этой плоскости. Если бы существовала прямолинейная образующая двуполостного гиперболоида, не параллельная плоскости Oxy , то она пересекала бы Oxy в некоторой точке, однако гиперболоид с плоскостью Oxy общих точек не имеет.

§ 27. ПАРАБОЛОИДЫ

В § 25 мы познакомились с эллиптическим параболоидом вращения. Изучим свойства такого параболоида общего вида.

Определение 1. *Под эллиптическим параболоидом понимается поверхность, уравнение которой в некоторой прямоугольной декартовой системе координат имеет вид*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z. \quad (27.1)$$

Отметим простейшие свойства, вытекающие из этого уравнения. Эллиптический параболоид проходит через начало координат. Других точек пересечения с осями координат нет. Поверхность симметрична относительно координатных плоскостей Oxz и Oyz , но не симметрична относительно плоскости Oxy . Третья координата любой точки эллиптического параболоида, как следует из уравнения (27.1), всегда неотрицательна.

Исследуем эту поверхность методом сечений. Пусть $z = h$. Из (27.1) следует, что соответствующая линия уровня определяется уравне-

нием $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2h$. Ясно, что

при $h < 0$ не существует точек плоскости Oxy , координаты которых удовлетворяют этому

уравнению. Поэтому плоскость $z = h$ при $h < 0$ не пересекает эллиптический параболоид. Если $h = 0$, то из уравнения линии уровня следует, что $x = y = 0$. Линия представляет собой точку — начало координат. Если $h > 0$, то кривая, определяемая уравне-

нием линии уровня — эллипс: $\frac{x^2}{2ha^2} + \frac{y^2}{2hb^2} = 1$. Он симметричен относительно координатных осей. При любом h отношение его полуосей постоянно и при бесконечном увеличении h полуоси также стремятся к бесконечности. Линии уровня эллиптического параболоида на плоскости Oxy изображены на рис. 117.

Рассмотрим сечения этой поверхности плоскостями $y = h$. Из уравнения (27.1) получим

$$\frac{x^2}{a^2} = 2z - \frac{h^2}{b^2}$$

или

$$x^2 = 2a^2 \left(z - \frac{h^2}{a^2 b^2} \right). \quad (27.2)$$

Уравнение (27.2) определяет на плоскости Oxz параболу. Она симметрична относительно оси Oz . При всех значениях h параболы имеют один и тот же фокальный параметр, поэтому равны между собой. Вершина параболы, заданной уравнением (27.2),

имеет координаты $\left(0; \frac{h^2}{a^2 b^2} \right)$. При $h = 0$ вершина совпадает с началом системы координат. При бесконечном увеличении h вторая координата вершины стремится к бесконечности. Линии уровня эллиптического параболоида на плоскости Oxz представлены на рис. 118. Аналогичными свойствами обладают линии

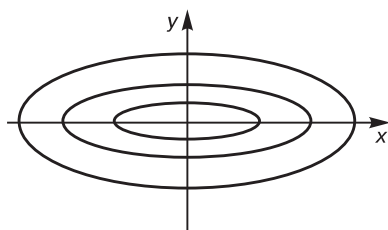


Рис. 117

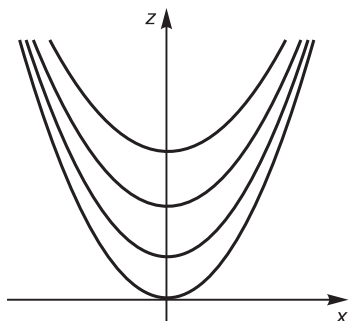


Рис. 118

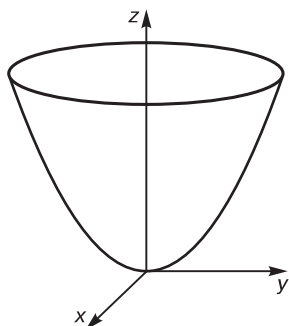


Рис. 119

уровня этой поверхности на плоскости Oyz . Эллиптический параболоид изображен на рисунке 119.

Нетрудно показать, что эллиптический параболоид не имеет прямолинейных образующих. Действительно, пусть такие образующие существуют. Тогда они не лежат в плоскости, параллельной координатной плоскости Oxy , так как такая плоскость пересекает эллиптический параболоид по эллипсу. Таким образом, если существует прямолинейная образующая, то она пересекает плоскость Oxy , и, следовательно, на ней существуют точки с отрицательной аппликатой. Эллиптический же параболоид таких точек не содержит.

Наиболее сложной и интересной поверхностью является гиперболический параболоид, который не является поверхностью вращения.

Определение 2. Поверхность, уравнение которой в некоторой прямоугольной декартовой системе координат имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z, \quad (27.3)$$

называется гиперболическим параболоидом.

Нетрудно видеть, что эта поверхность пересекает оси координат только в точке $O(0; 0; 0)$. Поверхность симметрична относительно координатных плоскостей Oxz и Oyz , но не симметрична относительно плоскости Oxy .

Проведем исследование гиперболического параболоида методом сечений. Определим его линии уровня на плоскости Oxy . Положим $z = h$. Тогда уравнение соответствующей линии уровня имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2h, \quad (27.4)$$

она является кривой второго порядка гиперболического типа. Если $h = 0$, то линия уровня представляет собой пару пересекающихся прямых

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

или

$$y = \pm \frac{b}{a} x. \quad (27.5)$$

Если $h > 0$, то уравнение (27.4) определяет гиперболу, которая симметрична относительно координатных осей и пересекает ось абсцисс. Так как ее каноническое уравнение имеет вид

$\frac{x^2}{2ha^2} - \frac{y^2}{2hb^2} = 1$, то полуоси бесконечно возрастают при бесконечном увеличении h . При этом отношение действительной полуоси

к мнимой не зависит от h и равно $\frac{a}{b}$. Отсюда следует, что при любом h гиперболы имеют одни и те же асимптоты, которые определяются уравнениями (27.5). Если $h < 0$, то уравнение (27.4) преоб-

разуется к виду $\frac{y^2}{2|h|b^2} - \frac{x^2}{2|h|a^2} = 1$. Оно также определяет

на плоскости Oxy гиперболу, оси симметрии которой совпадают с осями координат, но для которой ось Oy является действитель-

ной, а ось Ox — мнимой. Полу-

оси этой гиперболы бесконечно возрастают при бесконечном увеличении абсолютной вели-

чины h , их отношение постоян-

но и равно $\frac{a}{b}$. Отсюда следует,

что все эти гиперболы имеют

одни и те же асимптоты, опре-

деляемые теми же уравнения-

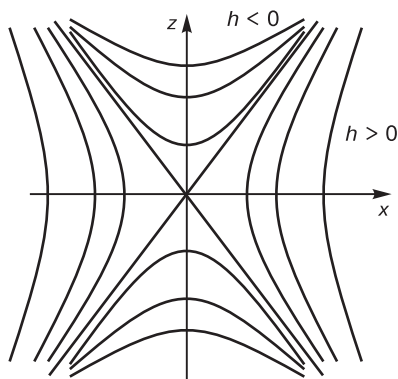


Рис. 120

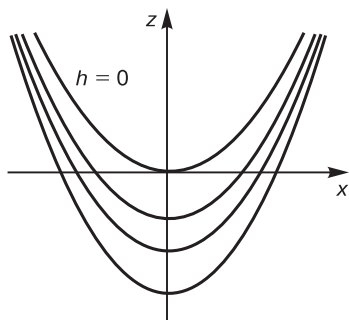


Рис. 121

Исследуем линии уровня плоскости Oxz . Положим $y = h$. Из (27.4) вытекает, что ее уравнение имеет вид $x^2 = 2a^2 \left(z + \frac{h^2}{2b} \right)$. Мы получили уравнение параболы, симметричной относительно оси Oz , ветви которой направлены «вверх», т. е. в положительном направлении оси Oz . Координаты ее вершины Q равны $\left(0; -\frac{h^2}{2b} \right)$. Поэтому при изменении h^2 от 0 до бесконечности Q перемещается по оси Oz от начала координат до $-\infty$. При всех значениях h фокальные параметры парабол одинаковы. Отсюда следует, что все линии уровня равны между собой (рис. 121).

Рассмотрим линии уровня гиперболического параболоида на плоскости Oyz . Положим $x = h$. Из (27.4) следует $-\frac{y^2}{b^2} = 2z - \frac{h^2}{a^2}$ или $y^2 = -2b^2 \left(z - \frac{h^2}{2a^2} \right)$. Так же как и в предыдущем случае, мы получили, что линии уровня представляют собой параболы, симметричные относительно оси Oz , только при этом их ветви направлены «вниз», т. е. в отрицательном направлении оси Oz . Параметры парабол не зависят от h , поэтому они равны между собой. Вершина параболы имеет координаты $\left(0; \frac{h^2}{2a^2} \right)$

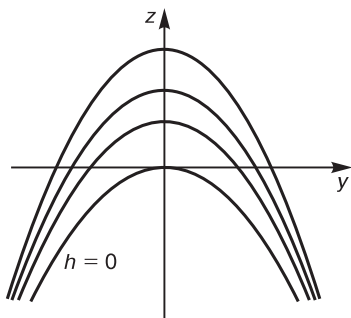


Рис. 122

и при бесконечном увеличении h^2 вершина перемещается по оси Oz от начала координат до ∞ . Линии уровня плоскости Oyz приведены на рис. 122. Карты линий уровней параболического параболоида на координатных плоскостях позволяют судить о форме этой поверхности. Она имеет вид седла и изображена на рис. 123.

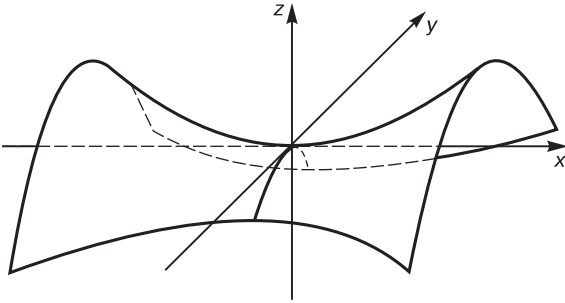


Рис. 123

Гиперболический параболоид, в отличие от эллиптического параболоида, имеет прямолинейные образующие. Представим его уравнение (27.4) в виде $\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 2z$, и рассмотрим

две прямые $\begin{cases} p\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = qz, \\ q\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 2p \end{cases}$ и $\begin{cases} m\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = nz, \\ n\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 2m, \end{cases}$ где p, q и m, n не рав-

ны одновременно нулю. Легко видеть, что координаты любой точки каждой из этих прямых удовлетворяют уравнению (27.4), поэтому каждая из прямых всеми своими точками принадлежит параболоиду. При различных m и n , p и q , не равных одновременно нулю, эти уравнения и определяют два типа прямолинейных образующих гиперболического параболоида. Они обладают свойствами, аналогичным свойствам прямолинейных образующих однополостного гиперболоида (§ 26), а именно через любую точку поверхности проходит единственная прямолинейная образующая каждого семейства, любые две образующие одного семейства скрещиваются, а различных семейств — принадлежат одной плоскости. Прямолинейные образующие гиперболического параболоида представлены на рис. 124.

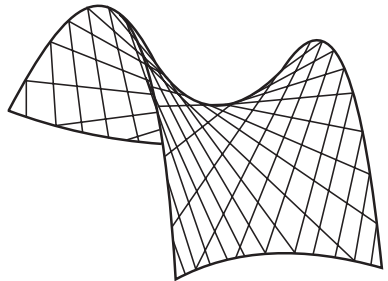


Рис. 124