§ 16. ЭЛЛИПС И ЕГО СВОЙСТВА

В настоящем параграфе мы рассмотрим геометрические свойства эллипса. Эта линия, наряду с гиперболой и параболой (их свойства будут рассмотрены в последующих параграфах), является алгебраической кривой второго порядка. Напомним, что в соответствии с определением, сформулированным в § 11, под алгебраической кривой второго порядка понимается линия на плоскости, уравнение которой в некоторой аффинной системе координат имеет вид

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0,$$

где коэффициенты a_{11}, a_{12} и a_{22} не равны одновременно нулю.

Свойства эллипса, гиперболы и параболы исследовались еще античными математиками, которые рассматривали эти кривые как сечения конуса плоскостью. Эти свойства используются при изучении различных вопросов естествознания. Например, траектории движения планет вокруг солнца представляют собой эллипс. Оптические свойства параболы широко применяются в технике, в различных осветительных приборах.

Определение 1. *Эллипсом называется множество всех точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2, принадлежащих той же плоскости, является постоянной величиной, большей расстояния между F_1 и F_2.*

Точки F_1 и F_2 называются фокусами эллипса. Обозначим расстояние между фокусами через $2c$, а сумму расстояний от точек эллипса до фокусов через $2a$. Тогда, как следует из определения 1,

$$a > c. \qquad (16.1)$$

Пусть M — точка эллипса, F_1 и F_2 — его фокусы (рис. 62). Из неравенства, связывающего длины сторон треугольника MF_1F_2, следует, что $|MF_1| + |MF_2| > |F_1F_2|$, что полностью согласуется с неравенством (16.1). Ясно, что не существует точек плоскости, для которых $|MF_1| + |MF_2| < <|F_1F_2|$. Если же потребовать, чтобы $|MF_1|+|MF_2|=|F_1F_2|$, то множество точек, удовлетворяющих этому условию, представляет собой отрезок F_1F_2. Таким образом, ограничения, наложенные неравенством (16.1), являются естественными, вытекающими из неравенства треугольника. Фокусы F_1 и F_2 могут совпадать. В этом случае эллипс представляет собой окружность радиуса a, центр которой находится в точке F_1. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что фокусы F_1 и F_2 не совпадают друг с другом.

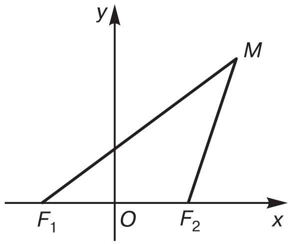

Рис. 62

Выведем уравнение эллипса. Для этого выберем прямоугольную декартову систему координат так, чтобы ее начало совпадало с серединой отрезка F_1F_2, а ось абсцисс содержала фокусы F_1 и F_2 (рис. 62). Такая система координат называется *канонической*. В этой системе запишем координаты фокусов: $F_1(-c;\ 0)$, $F_2(c;\ 0)$. Если точка M имеет координаты x и y, то $|MF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$, $|MF_2|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$. Поэтому точка M принадлежит эллипсу в том и только в том случае, когда ее координаты удовлетворяют уравнению

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a. \qquad (16.2)$$

Полученное выражение, по сути, и является уравнением эллипса. Для упрощения преобразуем его, перенеся один из радикалов в правую часть равенства:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Возведем обе его части в квадрат:

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2.$$

Отсюда

$$x^2+2cx+c^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2,$$

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx.$$

Еще раз возведем обе части полученного равенства в квадрат:

$$a^2(x-c)^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2,$$

или

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2,$$
$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Из неравенства (16.1) следует $a^2 - c^2 > 0$. Поэтому разность $a^2 - c^2$ равна некоторому положительному числу. Положим

$$a^2 - c^2 = b^2. \tag{16.3}$$

Тогда полученное уравнение приобретает вид $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Разделив обе части равенства на a^2b^2, окончательно получим

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{16.4}$$

Мы показали, что если точка принадлежит эллипсу, т. е. ее координаты в канонической системе координат удовлетворяют уравнению (16.2), то они также служат решениями уравнения (16.4). Обратное не является очевидным, так как в процессе перехода от первого уравнения ко второму мы дважды использовали неравносильное преобразование — возведение в квадрат обеих частей уравнения. Покажем, что если координаты точки являются решением уравнения (16.4), то они удовлетворяют (16.2), т. е. точка лежит на эллипсе. Тем самым будет доказано, что (16.4) — уравнение эллипса. Возьмем произвольную точку $M(x;\ y)$, координаты которой удовлетворяют уравнению (16.4). Обозначим через r_1 и r_2 расстояния от точки M до точек F_1 и F_2: $r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. Числа r_1 и r_2 носят название *фокальных радиусов* точки M. Из уравнения (16.4) выразим y^2 через x^2: $y^2 = b^2\dfrac{a^2 - x^2}{a^2}$. Поэтому

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + b^2\frac{a^2 - x^2}{a^2}} =$$
$$= \frac{1}{a}\sqrt{a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + b^2a^2 - b^2x^2} =$$
$$= \frac{1}{a}\sqrt{(a^2 - b^2)x^2 + 2a^2cx + a^2(c^2 + b^2)}.$$

Из соотношения (16.3) следует, что $a^2 - b^2 = c^2$, $c^2 + b^2 = a^2$. Отсюда

$$r_1 = \frac{1}{a}\sqrt{c^2x^2 + 2a^2cx + a^4} = \frac{1}{a}\sqrt{(cx + a^2)^2}.$$

Таким образом,

$$r_1 = \left|a + \frac{c}{a}x\right|. \tag{16.5}$$

Аналогично доказывается, что

$$r_2 = \left|a - \frac{c}{a}x\right|. \tag{16. 6}$$

Покажем, что $r_1 + r_2 = 2a$. Координаты точки M удовлетворяют уравнению (16.4). Поэтому $x^2 \le a^2$, т. е.

$$|x| \le a. \tag{16.7}$$

Предположим сначала, что $x \ge 0$. Тогда $a + \frac{c}{a}x > 0$, отсюда следует, что $r_1 = a + \frac{c}{a}x$. Теперь раскроем модуль в соотношении (16.6). Из неравенства (16.7) получим: $x \le a$. Так как c — положительное число, то $cx \le ac$. Но числа a и c удовлетворяют неравенству (16.1): $c < a$. Поэтому $ac < a^2$, следовательно, $cx < a^2$ или $a - \frac{c}{a}x > 0$. Отсюда вытекает, что $r_2 = a - \frac{c}{a}x$. Таким образом,

$$r_1 + r_2 = a + \frac{c}{a}x + a - \frac{c}{a}x = 2a.$$

Рассмотрим теперь случай, когда $x < 0$. Тогда $a - \frac{c}{a}x > 0$, т. е. $r_2 = a - \frac{c}{a}x$. Из неравенства (16.7) следует, что $-cx < ca$. Поэтому, используя (16.1), получим $-cx < a^2$ или $a + \frac{c}{a}x > 0$. Таким образом, $r_1 = a + \frac{c}{a}x$ и $r_1 + r_2 = 2a$.

Мы доказали, что точка в том и только в том случае принадлежит эллипсу, когда ее координаты удовлетворяют уравнению (16.4). Его называют *каноническим уравнением* эллипса. Оно является алгебраическим второго порядка, поэтому *эллипс представляет собой алгебраическую кривую второго порядка*.

Исследуем простейшие свойства эллипса. Из уравнения (16.4) следует, что $|x| \le a$, $|y| \le b$. Поэтому все точки эллипса находятся внутри прямоугольника, ограниченного прямыми $x = \pm a$ и $y = \pm b$ (рис. 63). Пусть эллипс пересекает ось абсцисс в точке $A(x_0; 0)$. Тогда из уравнения (15.4) следует, что $\frac{x_0}{a^2} = 1$, т. е. $x_0 = \pm a$. Таким образом, эллипс пересекает ось абсцисс в точках $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$. Аналогично можно найти координаты точек пересечения эллипса с осью ординат: $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$ (рис. 63). Точки A_1, A_2, B_1 и B_2 называются *вершинами* эллипса, а числа a и b — его *полуосями*, причем a — большой, а b — малой полуосью эллипса[1].

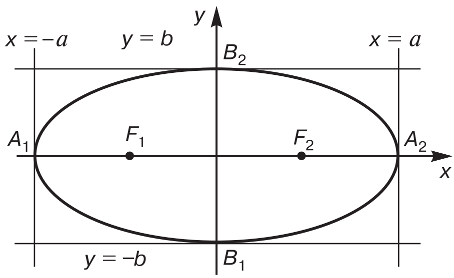

Рис. 63

Покажем, что эллипс симметричен относительно осей канонической системы координат и центрально симметричен относительно ее начала. Возьмем произвольную точку $M(x_0; y_0)$, принадлежащую эллипсу: $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$. Запишем координаты точек M_1, M_2 и M_3, симметричных точке M соответственно относительно осей абсцисс и ординат и относительно начала системы координат: $M_1(x_0; -y_0)$, $M_2(-x_0; y_0)$, $M_3(-x_0; -y_0)$. Очевидно, координаты этих точек удовлетворяют уравнению (16.4), точки лежат на эллипсе.

Исходя из доказанного, для построения эллипса достаточно определить множество его точек в первой координатной четверти, а затем воспользоваться свойством симметричности относительно координатных осей. Если $x \ge 0$ и $y \ge 0$, то из уравнения

[1] Определения большой и малой полуосей эллипса являются традиционными и никак не согласуются с понятием оси, приведенным выше.

(16.4) получаем: $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Средствами математического анализа доказывается, что эта функция представляет собой гладкую непрерывную кривую. Эллипс изображен на рис. 63.

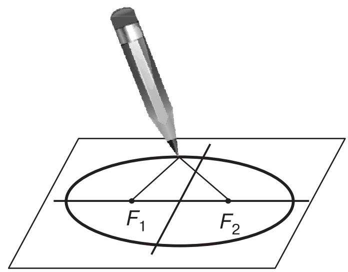

Рис. 64

Из определения 1 вытекает способ построения эллипса, который может использоваться на практике. Возьмем нить длиной $2a$, закрепим ее концы в точках F_1 и F_2, натянем ее с помощью острия карандаша. Передвигая карандаш по бумаге и натягивая при этом нить, получаем рисунок эллипса (рис. 64).

Разберем еще один способ построения эллипса. Пусть A_1, A_2, B_1 и B_2 — вершины эллипса, O — его центр, a и b — полуоси. Проведем оси канонической системы координат (рис. 65). Построим две окружности α и β с центром в точке O и радиусами a и b. Вершины A_1 и A_2 лежат на окружности α, а B_1 и B_2 — на β. Проведем луч l с началом в точке O. Обозначим через t ориентированный угол между положительным направлением оси абсцисс и лучом l. Легко найти координаты точек Q и P пересечения окружностей α и β с лучом l: $Q(a\cos t; a\sin t)$ и $P(b\cos t; b\sin t)$. Построим точку M пересечения двух прямых, одна из которых проходит через Q и параллельна оси ординат, а другая — через P и параллельна оси абсцисс. Тогда координаты точки M равны $(a\cos t; b\sin t)$. Подставив их в каноническое уравнение эллипса, получим

$$\frac{a^2\cos^2 t}{a^2} + \frac{b^2\sin^2 t}{b^2} = 1.$$

Таким образом, точка M лежит на эллипсе. Меняя положение луча, можно получить любое количество точек эллипса. Уравнения

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t \end{cases}$$

называются *параметрическими уравнениями эллипса*.

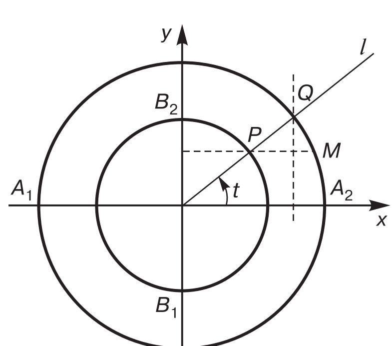

Рис. 65

Рассмотрим так называемое директориальное свойство эллипса.

Определение 2. *Эксцентриситетом эллипса называется число, равное отношению расстояния между фокусами к сумме фокальных радиусов любой его точки.*

Эксцентриситет эллипса будем обозначать через ε. Так как $|F_1F_2| = 2c$ а $r_1 + r_2 = 2a$, то

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \tag{16.8}$$

Из неравенства (16.1) следует, что $\varepsilon < 1$. Так как полуоси a и b и половина расстояния между фокусами c связаны соотношением $b^2 = a^2 - c^2$ (согласно (16.3)), то $b^2 = a^2(1-\varepsilon^2)$. Отсюда следует, что если $\varepsilon = 0$, то $b^2 = a^2$, т. е. эллипс представляет собой окружность. С увеличением эксцентриситета от 0 до 1 отношение $\frac{b}{a}$ уменьшается от 1 до 0, т. е. эллипс «сжимается» к оси Ox и «приближается» к отрезку. В дальнейшем будем предполагать, что $\varepsilon \neq 0$.

Определение 3. *Прямые*

$$d_1\colon x = -\frac{a}{\varepsilon},\ \ d_2\colon x = \frac{a}{\varepsilon} \tag{16.9}$$

называются директрисами эллипса.

Директрисы d_1 и d_2 параллельны оси ординат. В силу того, что $\frac{a}{\varepsilon} > a$, они не пересекают эллипс. Будем считать, что директриса d_1 соответствует фокусу F_1, а директриса d_2 — фокусу F_2. На рисунке 66 изображен эллипс и его директрисы.

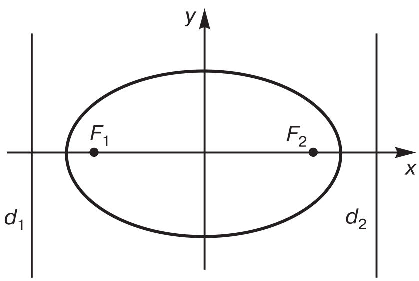

Рис. 66

Вычислим расстояния ρ_1 и ρ_2 от произвольной точки $M(x; y)$ эллипса до директрис d_1 и d_2. Воспользуемся формулой для вычисления расстояния от точки до прямой, полученной в § 14:

$$\rho_1 = \frac{|a+\varepsilon x|}{\varepsilon}, \ \ \rho_2 = \frac{|a-\varepsilon x|}{\varepsilon}. \qquad (16.10)$$

Сравним найденные соотношения с формулами (16.5) и (16.6). Используя формулу (16.8), соотношения, выражающие фокальные радиусы точки через a и c, можно выразить через a и эксцентриситет ε: $r_1 = |a+\varepsilon x|$, $r_2 = |a-\varepsilon x|$. Таким образом, если точка принадлежит эллипсу, то отношения $\frac{r_1}{\rho_1}$ и $\frac{r_2}{\rho_2}$ равны эксцентриситету.

Покажем обратное. Пусть даны эллипс и точка, отношение расстояния от которой до фокуса к расстоянию до соответствующей директрисы равно эксцентриситету эллипса. Покажем, что эта точка лежит на эллипсе. Введем его каноническую систему координат. Обозначим через x и y координаты точки. Будем считать, что $\frac{r_2}{\rho_2} = \varepsilon$, где r_2 и ρ_2 — расстояния от данной точки до фокуса F_2 и до директрисы d_2. Так как координаты F_2 равны $(c; 0)$, а уравнение директрисы d_2 имеет вид $x = \frac{a}{\varepsilon}$, то $r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, $\rho_2 = \frac{|a-\varepsilon x|}{\varepsilon}$. Поэтому

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = |a - \varepsilon x|.$$

Возведем обе части этого равенства в квадрат и преобразуем полученное выражение, используя соотношения (16.3) и (16.8):

$$(x-c)^2 + y^2 = a^2 - 2a\varepsilon x + \varepsilon^2 x^2,$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = a^2 - 2a\frac{c}{a}x + \frac{c^2}{a^2}x^2,$$

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2}x^2 + y^2 = a^2 - c^2,$$

$$\frac{b^2}{a^2}x^2 + y^2 = b^2.$$

Разделив обе части этого равенства на b^2, окончательно получим $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Таким образом, точка M лежит на эллипсе. Аналогично доказывается такое же утверждение для фокуса F_1 и директрисы d_1. Мы доказали следующую теорему.

Теорема (директориальное свойство эллипса). *Эллипс представляет собой множество всех точек плоскости, для которых отношение расстояния до точки (фокуса) к расстоянию до прямой (директрисы), не содержащей эту точку, является постоянным числом (эксцентриситетом), меньшим единицы.*

Пример 1. *Найти каноническое уравнение эллипса, если расстояние между его фокусами равно* 12, *а уравнения директрис имеют вид* $x = \pm\dfrac{50}{3}$.

Решение. Так как расстояние между фокусами равно $2c$, то из условия следует, что $c = 6$. Уравнения директрис имеют вид $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$, но $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$, поэтому $\dfrac{a^2}{c} = \dfrac{50}{3}$. Отсюда $a^2 = 100$, $a = 10$. По формуле (19.3) $b^2 = a^2 - c^2$. Поэтому $b^2 = 100 - 36 = 64$. Таким образом, искомое уравнение имеет вид $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{64} = 1$.

§ 17. ГИПЕРБОЛА И ЕЕ СВОЙСТВА

В настоящем параграфе мы познакомимся со свойствами еще одной кривой второго порядка, так называемой гиперболой.

Определение 1. *Гиперболой называется множество точек плоскости, для каждой из которых модуль разности расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2, принадлежащих той же плоскости, является постоянной величиной, меньшей расстояния между точками F_1 и F_2.*

Точки F_1 и F_2, как и в случае эллипса, будем называть *фокусами*. Очевидно, следует предполагать, что фокусы не совпадают друг с другом. Пусть $|F_1F_2| = 2c$, а модуль разности расстояний от точки гиперболы до фокусов равен $2a$. Тогда, как следует из определения,

$$a < c. \tag{17.1}$$

Из неравенств, связывающих стороны треугольника, следует, что не существует таких точек M, для которых $\big||F_1M| - |F_2M|\big| < 2c$. Заметим, что эта разность равна $2c$ в том и только в том случае, когда точка M лежит на прямой F_1F_2 и не принадлежит отрезку между фокусами. Будем также предполагать, что $a \neq 0$. В противном случае выполнялось бы равенство $|F_1M| = |F_2M|$, а точки, удовлетворяющие этому условию, образуют серединный перпендикуляр отрезка F_1F_2.

Выведем уравнение гиперболы. Как и в случае эллипса, введем прямоугольную декартову систему координат, которую также будем называть *канонической*, ось абсцисс которой содержит фокусы F_1 и F_2, а ось ординат совпадает с серединным перпендикуляром отрезка F_1F_2 (рис. 67). В этой системе запишем координаты фокусов: $F_1(-c;\ 0)$, $F_2(c;\ 0)$. Точка $M(x;\ y)$ в том и только в том случае лежит на гиперболе, когда ее координаты удовлетворяют уравнению:

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| = 2a. \tag{17.2}$$

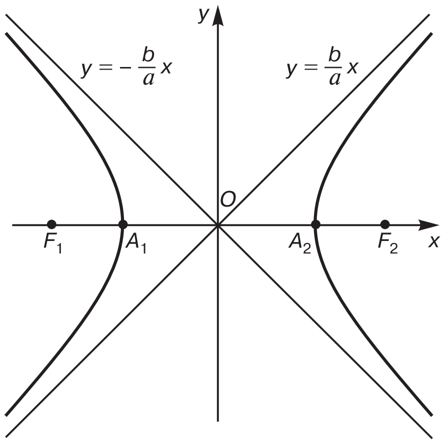

Рис. 67

Упростим это уравнение. Раскроем модуль: $\sqrt{(x+c)^2+y^2}-$ $-\sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a$ и «уединим» один из радикалов: $\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \sqrt{(x-c)^2+y^2} \pm 2a$. Возведем обе части полученного уравнения в квадрат:

$$(x+c)^2+y^2 = (x-c)^2+y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+4a^2.$$

После упрощений получим $cx-a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$. Еще раз возведем обе части в квадрат:

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

или

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

В силу неравенства (17.1) $c^2 - a^2 > 0$ поэтому существует число b, для которого

$$b^2 = c^2 - a^2. \qquad (17.3)$$

Тогда $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. Разделив обе части этого равенства на b^2, окончательно получим

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (17.4)$$

Таким образом, координаты любой точки гиперболы удовлетворяют уравнению (17.4). Покажем обратное. Возьмем произвольную точку $M(x; y)$, координаты которой являются решением этого уравнения. Пусть $r_1 = |F_1M|$, $r_2 = |F_2M|$. Эти числа будем называть *фокальными радиусами* точки M. Нам следует показать, что $|r_1 - r_2| = 2a$. Из уравнения (17.4) следует, что

$$|x| \geq a, \qquad (17.5)$$

$$|y| = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}. \qquad (17.6)$$

Так как $r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, то, заменив в этом выражении y по формуле (17.6), получим

$$r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + b^2\,\frac{a^2 - x^2}{a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + b^2a^2 - b^2x^2} =$$

$$= \frac{1}{a}\sqrt{(a^2 + b^2)x^2 - 2a^2cx + a^2(c^2 - b^2)}.$$

Из формулы (17.3) следует, что $a^2 + b^2 = c^2$, $c^2 - b^2 = a^2$. Поэтому

$$r_2 = \frac{1}{a}\sqrt{c^2x^2 - 2a^2cx + a^4} = \frac{1}{a}\sqrt{(cx - a^2)^2}.$$

Таким образом,

$$r_2 = \left|\frac{c}{a}x - a\right|. \qquad (17.7)$$

Аналогично показывается, что

$$r_1 = \left|\frac{c}{a}x + a\right|. \qquad (17.8)$$

Раскроем модули в полученных формулах. Пусть $x \geq 0$. Тогда $\frac{c}{a}x + a > 0$, поэтому $r_1 = \frac{c}{a}x + a$. Из неравенства (17.5) следует, что $x \geq a$. Так как $c > a$, то, перемножая эти неравенства, получим $cx \geq a^2$. Отсюда следует, что $\frac{c}{a}x - a > 0$. Таким образом, $r_2 = \frac{c}{a}x - a$ и $|r_1 - r_2| = 2a$.

Пусть $x < 0$. Тогда $\frac{c}{a}x - a < 0$ и $r_2 = a - \frac{c}{a}x$. Из неравенства (17.5) следует, что $-x \geq a$; перемножая это неравенство с неравенством $c > a$, получим: $-cx \geq a^2$ или $\frac{c}{a}x + a < 0$. Таким образом, $r_1 = -\frac{c}{a}x - a$ и $|r_1 - r_2| = 2a$. И в первом, и во втором случаях модуль разности фокальных радиусов постоянен и равен $2a$. Уравнение (17.4) является уравнением гиперболы. Оно носит название *канонического*.

Рассмотрим свойства гиперболы, которые позволят построить ее изображение. Вначале найдем ее точки пересечения с осями канонической системы координат. Пусть точка $A(x_0; y_0)$ служит точкой пересечения гиперболы с осью абсцисс. Тогда из уравнения (17.4) следует, что $\frac{x_0^2}{a^2} = 1$, т. е. либо $x = a$, либо $x = -a$. Гипербола пересекается с осью абсцисс в двух точках $A_1(-a; 0)$ и $A_2(a; 0)$. Она не пересекает оси ординат. Действительно, если точка $B(0; y_0)$ лежит на гиперболе, то число y_0 удовлетворяет уравнению $\frac{y^2}{b^2} = -1$, которое не имеет действительных корней. Точки A_1 и A_2 называются *вершинами* гиперболы, а числа a и b — ее *действительной и мнимой полуосями*.

Если точка $M(x; y)$ лежит на гиперболе, то, как следует из ее канонического уравнения, точки $M_1(-x; y)$, $M_2(x; -y)$ и $M_3(-x; -y)$ также лежат на гиперболе. Отсюда следует, что гипербола симметрична относительно осей и центрально симметрична относительно начала канонической системы координат. Поэтому достаточно построить точки гиперболы, лежащие в первой координатной четверти, а затем отразить их симметрично относительно осей и начала системы координат. Из формулы (17.6) следует, что в этой четверти гипербола совпадает с графиком функции $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$. Средствами математического анализа доказывается, что при $x \ge a$ эта функция является непрерывной, гладкой и возрастающей. Кроме того, она имеет асимптоту. Как доказывается в курсе математического анализа, прямая $y=kx+p$ тогда и только тогда служит асимптотой функции $y=f(x)$ при $x \to \infty$, когда $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$, $p=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)$. В данном случае

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{b\sqrt{x^2-a^2}}{ax}=\frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}=\frac{b}{a},$$

$$p=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{b\sqrt{x^2-a^2}}{a}-\frac{bx}{a}\right)=\frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-a^2-x^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x}=\mathbf{0}.$$

Таким образом, прямая $y=\frac{b}{a}x$ — асимптота гиперболы в первой координатной четверти. Так как гипербола симметрична относительно координатных осей, то эта же прямая служит ее асимптотой в третьей четверти, а прямая $y=-\frac{b}{a}x$ — во второй и четвертой четвертях. Гипербола изображена на рис. 67.

Укажем способ построения точек гиперболы циркулем и линейкой. Пусть F_1 и F_2 — ее фокусы, A_1 и A_2 — точки пересечения с осью абсцисс. Построим окружность α с центром в точке F_2 радиуса r. Затем увеличим раствор циркуля на длину отрезка A_1A_2 и построим окружность β с центром в точке F_1 с радиусом $r+A_1A_2$. Ясно, что точки пересечения окружностей α и β лежат на гиперболе. Меняя радиус r, можно построить любое число точек гиперболы (рис. 68).

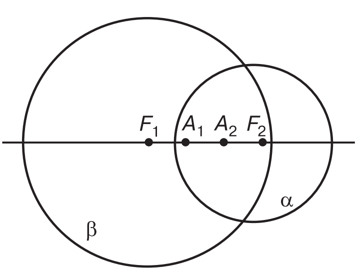

Рис. 68

Гипербола, как и эллипс, обладает директориальным свойством.

Определение 2. *Эксцентриситетом гиперболы называется* *число* ε, *равное отношению расстояния между фокусами к модулю разности фокальных радиусов любой точки гиперболы*:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \tag{17.9}$$

Из неравенства (17.1) следует, что для гиперболы $\varepsilon > 1$ (сравните, для эллипса эксцентриситет меньше единицы). Выясним, как меняется форма гиперболы, если ее эксцентриситет принимает значения от 1 до $+\infty$. Тогда из формулы (17.9) получим $a = \frac{c}{\varepsilon}$. Пусть $\varepsilon \to 1$, тогда $a \to c$. Как мы уже отмечали, в этом случае гипербола «сжимается», ее ветви приближаются к двум лучам оси абсцисс, начала которых лежат в ее фокусах. При $\varepsilon \to +\infty$ $a \to 0$, ветви гиперболы «распрямляются» к серединному перпендикуляру отрезка F_1F_2, т. е. к оси ординат.

Определение 3. *Прямые*

$$d_1 : x = -\frac{a}{\varepsilon}, \;\; d_2 : x = \frac{a}{\varepsilon} \tag{17.10}$$

называются директрисами гиперболы.

Считается, что директриса d_1 соответствует фокусу F_1, а d_2 — фокусу F_2. Так как $\varepsilon > 1$, то $\frac{a}{\varepsilon} < a$. Поэтому директрисы пересекают ось абсцисс во внутренних точках отрезка, заключенного между вершинами гиперболы (рис. 69). Докажем директориальное свойство гиперболы.

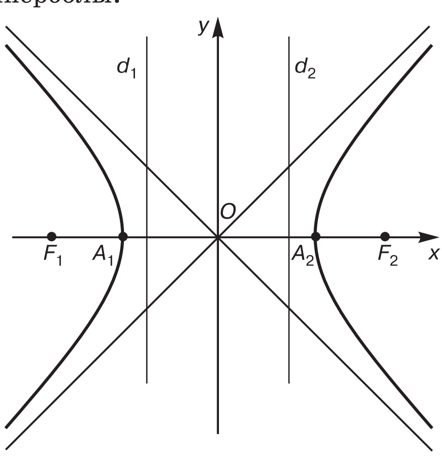

Рис. 69

Теорема (директориальное свойство гиперболы). *Гипербола представляет собой множество всех точек плоскости, для каждой из которых отношение расстояния от этой точки до фокуса к расстоянию до директрисы, соответствующей этому фокусу, является постоянным числом, равным эксцентриситету.*

Доказательство. Пусть дана гипербола. Будем предполагать, что на плоскости выбрана ее каноническая система координат. Рассмотрим точку $M(x;\, y)$, лежащую на гиперболе. Обозначим через ρ_1 и ρ_2 расстояния от нее до директрис d_1 и d_2. Из формулы для вычисления расстояния от точки до прямой (§ 14) следует, что $\rho_1 = \left|x + \frac{a}{\varepsilon}\right| = \frac{|a+\varepsilon x|}{\varepsilon}$, $\rho_2 = \left|x - \frac{a}{\varepsilon}\right| = \frac{|a-\varepsilon x|}{\varepsilon}$. Найдем отношения $\frac{r_1}{\rho_1}$ и $\frac{r_2}{\rho_2}$ где r_1 и r_2 — фокальные радиусы точки M. Из равенств (17.7)—(17.9) получим $r_1 = |a+\varepsilon x|$ и $r_2 = |a-\varepsilon x|$. Поэтому $\frac{r_1}{\rho_1} = \frac{r_2}{\rho_2} = \varepsilon$.

Покажем обратное. Пусть отношение расстояния от некоторой точки M до фокуса гиперболы к расстоянию от M до соответствующей директрисы равно эксцентриситету. Проверим, что точка лежит на гиперболе. Доказательство проведем для фокуса F_1 и директрисы d_1. Для вторых фокуса и директрисы рассуждения проводятся аналогично. Пусть даны координаты точки: $M(x;\, y)$. Тогда $r_1 = |MF_1| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$. Расстояние ρ_1 до директрисы d_1 равно $\rho_1 = \frac{|a+\varepsilon x|}{\varepsilon}$. Так как $\frac{r_1}{\rho_1} = \varepsilon$, то $\sqrt{(x+c)^2+y^2} = |a+\varepsilon x|$. Отсюда

$$(x+c)^2 + y^2 = (a + \frac{c}{a}x)^2,$$

$$a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2,$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Так как по формуле (17.3) $b^2 = c^2 - a^2$, то $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, или $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Точка M принадлежит гиперболе, теорема доказана.

Директориальные свойства эллипса и гиперболы позволяют иначе подойти к определению этих кривых. Из доказанных теорем следует, что если на плоскости даны прямая (директриса) и точка (фокус), которая не лежит на этой прямой, то множество всех точек плоскости, для каждой из которых отношение расстояния до фокуса к расстоянию до директрисы равно постоянному числу, представляет собой эллипс, если это число меньше единицы, и гиперболу, если оно больше единицы. Ответ на вопрос, какой вид имеет это множество, если отношение равно единице, будет дан в следующем параграфе.

Пример 1. *Доказать, что директрисы гиперболы проходят через основания перпендикуляров, опущенных из соответствующих фокусов на асимптоты.*

Решение. Пусть гипербола задана своим каноническим уравнением. Доказательство проведем для фокуса $F_2(c;\,0)$ и асимптоты l: $y=\dfrac{b}{a}x$. Обозначим через n перпендикуляр, опущенный из F_2 на l, а через N — точку пересечения l и n. Покажем, что N лежит на директрисе d_2: $x=\dfrac{a}{\varepsilon}$ (рис. 70). Уравнение асимптоты можно представить в виде $bx-ay=0$. Ее направляющий вектор имеет координаты $\vec{p}\{a;b\}$ (лемма, § 13). Вектор $\vec{p}$ служит нормальным вектором прямой n. Этот перпендикуляр проходит через $F_2(c;\,0)$. Составим его уравнение по точке и нормальному вектору (§ 14): $a(x-c)+by=0$, или $ax+by-ac=0$. Найдем абсциссу точки пересечения прямых l и n. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} bx-ay=0, \\ ax+by-ac=0. \end{cases}$$

Умножая первое уравнение на b, а второе на a, и складывая их, получим $(a^2+b^2)x-a^2c=0$. Так как $a^2+b^2=c^2$ и $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$ ((17.3) и (17.9)), то $x=\dfrac{a^2c}{a^2+b^2}=\dfrac{a^2}{c}=\dfrac{a}{\varepsilon}$. Точка N лежит на директрисе d_2. Аналогично это же утверждение доказывается для фокуса F_2 и асимптоты d_1: $y=-\dfrac{b}{a}x$, а также фокуса F_1 и асимптот $y=\pm\dfrac{b}{a}x$.

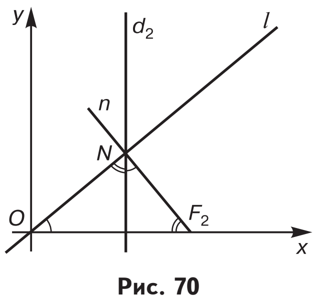

Рис. 70

§ 18. ПАРАБОЛА, ПОЛЯРНЫЕ УРАВНЕНИЯ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В предыдущих параграфах мы доказали директориальные свойства эллипса и гиперболы. Из них следует, что кривая в том и только в том случае является эллипсом или гиперболой, когда для точек этих кривых выполнено такое условие: отношение расстояния до фокуса к расстоянию до директрисы, соответствующей этому фокусу, является постоянным числом (эксцентриситетом). Для эллипса эксцентриситет меньше единицы, а для гиперболы — больше. В настоящем параграфе мы ответим на вопрос, какой вид имеет множество точек, для каждой из которых отношение расстояния до точки к расстоянию до прямой, не содержащей эту точку, равно единице. Мы покажем, что такое множество точек хорошо известно из школьного курса алгебры, оно совпадает с параболой.

Определение 1. *Множество точек плоскости, для каждой из которых расстояние до фиксированной точки плоскости равно расстоянию до фиксированной прямой, не содержащей эту точку, называется параболой.*

Точку и прямую, которые упомянуты в определении, будем называть соответственно *фокусом* и *директрисой* параболы. Будем также считать, что эксцентриситет параболы равен единице. Нетрудно выяснить, что представляет собой множество точек, удовлетворяющих определению 1, если фокус лежит на директрисе. Если F — фокус, d — директриса, а M — точка множества, то в этом случае отрезок FM перпендикулярен d. Поэтому такое множество совпадает с прямой, проходящей через фокус и перпендикулярной директрисе.

Выведем уравнение параболы. Для этого выберем прямоугольную декартову систему координат так, чтобы ось абсцисс проходила через фокус F и была перпендикулярна директрисе d параболы, а ее начало O совпадало с серединой отрезка, заключенного между F и точкой Q пересечения оси абсцисс и директрисы. Направление оси абсцисс определяется вектором $\overrightarrow{QF}$ (рис. 71). Такую систему координат будем на-

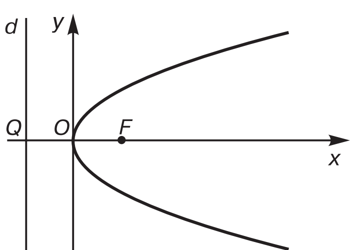

Рис. 71

зывать *канонической*. Обозначим через p длину отрезка FQ, Число p называется *фокальным параметром* параболы. Тогда в канонической системе координаты фокуса F равны $\left(\frac{p}{2};0\right)$, а уравнение директрисы d имеет вид $x+\frac{p}{2}=0$.

Рассмотрим произвольную точку $M(x;\ y)$. Расстояние ρ от M до F равно $\rho=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$. Длина δ перпендикуляра, опущенного из M на директрису d, согласно формуле для вычисления расстояния от точки до прямой (§ 14), равна $\left|x+\frac{p}{2}\right|$. Поэтому из определения 1 следует, что точка M в том и только в том случае лежит на параболе, когда

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|. \tag{18.1}$$

Уравнение (18.1) представляет собой уравнение параболы. Нам необходимо его упростить. Для этого возведем обе части в квадрат:

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2. \tag{18.2}$$

Отсюда следует, что

$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}. \tag{18.3}$$

После приведения подобных членов получим

$$y^2=2px. \tag{18.4}$$

Таким образом, если точка принадлежит параболе, то ее координаты удовлетворяют уравнению (18.4). Нетрудно убедиться в обратном. Если координаты точки M служат решением уравнения (18.4), то они удовлетворяют уравнениям (18.3) и (18.2). Извлекая квадратный корень из обеих частей равенства (18.2), получим, что координаты точки M удовлетворяют (18.1). Точка лежит на параболе.

Уравнение (18.4) носит название *канонического уравнения* параболы. Отметим ее свойства. Начало O канонической системы координат лежит на параболе, так как $x=y=0$ — решение уравнения (18.4). Эта точка называется вершиной параболы. Парабола симметрична относительно оси абсцисс и не симметрична относительно оси ординат канонической системы. Действительно, если координаты точки $M(x;\ y)$ удовлетворяют уравнению (18.4), то координаты точки $M'(x;\ -y)$ также удовлетворяют уравнению (18.4), а координаты точки $M''(-x;\ y)$ не являются решением этого уравнения. Таким образом, для построения параболы достаточно изобразить график степенной функции $y=\sqrt{2px}$, а затем отобразить его симметрично относительно оси абсцисс. Средствами математического анализа доказывается, что эта функция непрерывная, гладкая и бесконечно возрастающая. Парабола изображена на рисунке 71.

Рассмотрим способ построения точек параболы. Пусть F — ее фокус, а d — директриса. Проведем ось симметрии параболы, т. е. прямую l, содержащую F и перпендикулярную d. Затем построим несколько прямых, перпендикулярных оси. На каждой прямой определим две точки пересечения с окружностью, центр которой находится в фокусе F, а радиус равен расстоянию между этой прямой и директрисой (см. рис. 72). Ясно, что эти точки лежат на параболе.

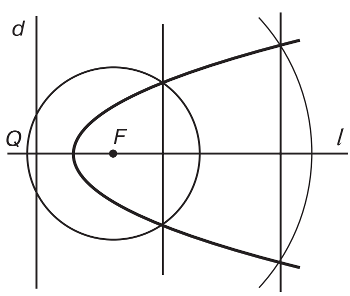

Рис. 72

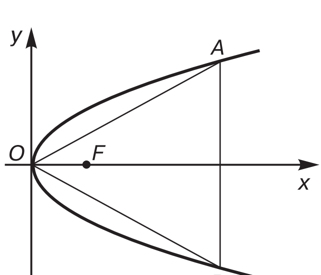

Рис. 73

Пример 1. *В параболу вписан равнобедренный треугольник так, что его вершина, общая для боковых сторон, совпадает с вершиной параболы. Доказать, что основание треугольника перпендикулярно оси параболы. Найти длины сторон равнобедренного прямоугольного треугольника, вписанного указанным способом в параболу, заданную своим каноническим уравнением* $y^2=2px$.

Решение. Пусть OAB — данный треугольник, где O — вершина параболы (рис. 73). Пусть координаты вершин A и B равны $(x_1;\ y_1)$ и $(x_2;\ y_2)$. Так как $y^2=2px$ — каноническое уравнение параболы, то

$$x_1 > 0,\ \ x_2 > 0. \qquad (18.5)$$

В канонической системе координат $|OA| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$, $|OB| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$. Изусловия $|OA| = |OB|$ следует, что $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$. Точки A и B лежат на параболе, поэтому $x_1^2 + 2px_1 = x_2^2 + 2px_2$. Отсюда $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 2p) = 0$. В силу неравенств (18.5) $(x_1 + x_2 + 2p) > 0$, поэтому $x_1 = x_2$. Точки A и B лежат на прямой, параллельной оси ординат. Первое утверждение доказано.

Пусть OAB — равнобедренный прямоугольный треугольник. Тогда координаты точек A и B имеют вид $A\left(\dfrac{y^2}{2p}; y\right)$, $B\left(\dfrac{y^2}{2p}; -y\right)$. Скалярное произведение векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ равно нулю. Следовательно, $\dfrac{y^4}{4p^2} - y^2 = 0$. Отсюда получим $y^2 = 4p^2$ и координаты точек A и B равны $(2p;\ 2p)$ и $(2p;\ -2p)$. Таким образом, $|OA| = |OB| = 2\sqrt{2}p$, $|AB| = 4p$.

В § 9 были введены полярная система координат и полярные координаты точек плоскости. Выведем уравнения эллипса, гиперболы и параболы в полярной системе координат. Пусть кривая γ представляет собой эллипс, одну ветвь гиперболы, либо параболу. Пусть F — фокус, а d — директриса кривой γ, соответствующая этому фокусу. При этом будем предполагать, что в случае гиперболы фокус и директриса выбраны так, что рассматриваемая ветвь кривой лежит в той же полуплоскости относительно d, что и фокус F. Будем также предполагать, что полюс полярной системы координат совпадает с F, а полярная ось l лежит на оси симметрии и не пересекает директрису d (рис. 74). Восставим в точке F перпендикуляр к l, P — точка его пересечения с γ. Обозначим через p длину отрезка FP. Число p будем называть фокальным параметром γ.

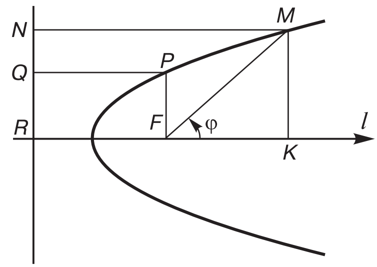

Рис. 74

Обозначим через ρ и φ полярные координаты точки M. Напомним, что в нашем случае $\rho = |FM|$, а φ — ориентированный угол между полярной осью l и вектором $\overrightarrow{FM}$. Обозначим через Q и N проекции точек P и M на директрису d, а через K — проекцию M на ось симметрии кривой γ (рис. 74). Тогда если R — точка пересечения директрисы d и оси симметрии l, то $|NM| = |RK| = |RF| + pr_l \overrightarrow{FM}$. Так как проекция $\overrightarrow{FM}$ на l имеет вид $pr_l \overrightarrow{FM} = |\overrightarrow{FM}|\cos\varphi = \rho\cos\varphi$, а $|RF| = |QP|$, то $|NM| = |QP| + \rho\cos\varphi$. Воспользуемся директориальным свойством кривой второго порядка. Если ε — эксцентриситет γ, то $\dfrac{p}{|QP|} = \dfrac{\rho}{|NM|} = \varepsilon$. Поэтому $|QP| = \dfrac{p}{\varepsilon}$, а $|NM| = \dfrac{\rho}{\varepsilon}$. Таким образом, $\dfrac{p}{\varepsilon} = \dfrac{\rho}{\varepsilon} + \rho\cos\varphi$. Помножив это соотношение на ε и выделив ρ, окончательно получим

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}. \qquad (18.6)$$

Уравнение (18.6) называется *полярным уравнением* кривой второго порядка γ.

Пусть $\varepsilon < 1$. Тогда γ представляет собой эллипс. В этом случае $1 - \varepsilon\cos\varphi > 0$ для любого φ. Так как полярный радиус всегда положителен, для любого угла φ существует значение ρ, определяемое формулой (18.6), для которого точка $M(\rho;\ \varphi)$ лежит на эллипсе. Любой луч с началом в полюсе полярной системы координат пересекает эллипс (рис. 75). Если $\varepsilon = 1$, то γ представляет собой параболу. В этом случае $1 - \cos\varphi \geq 0$ для любого φ, причем $1 - \cos\varphi = 0$ при $\varphi = 0$. Таким образом, в уравнении (18.6) φ принимает все значения на полуинтервале $(-\pi;\ \pi]$, за исключением 0. Любой луч с началом в фокусе F, за исключением полярной оси, пересекает параболу (рис. 76). Рассмотрим случай, когда $\varepsilon > 1$. Тогда γ представляет собой ветвь гиперболы. Как следует из уравнения (18.6), угол φ удовлетворяет неравенству $1 - \varepsilon\cos\varphi > 0$. Отсюда

$$\cos\varphi < \frac{1}{\varepsilon}. \qquad (18.7)$$

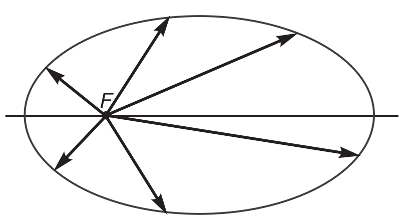

Рис. 75

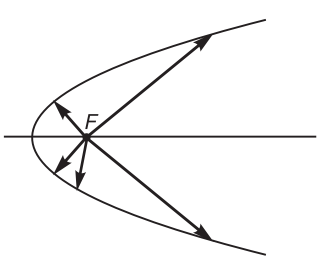

Рис. 76

Решим это неравенство. Пусть $\cos\varphi_0 = \frac{1}{\varepsilon}$. Так как $\operatorname{tg}^2\varphi_0 = \frac{1}{\cos^2\varphi_0} - 1$, то $\operatorname{tg}^2\varphi_0 = \varepsilon^2 - 1$. Воспользуемся формулами, выражающими эксцентриситет гиперболы через ее полуоси и расстояние между фокусами (§ 17): $\operatorname{tg}^2\varphi_0 = \frac{b^2}{a^2}$, т. е. $\operatorname{tg}\varphi_0 = \pm\frac{b}{a}$. Нетрудно видеть, что φ является решением неравенства (18.7) в том и только в том случае, когда $\operatorname{arctg}\frac{b}{a} < \varphi \le \pi$, $-\pi < \varphi < \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$. Геометрически это означает, что если угол φ принадлежит отрезку $[-\operatorname{arctg}\frac{b}{a}; \operatorname{arctg}\frac{b}{a}]$, то луч, составляющий угол φ с полярной осью и с началом в фокусе F, не пересекает ветвь гиперболы. Отметим, что лучи, образующие с полярной осью углы, равные $-\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$ и $\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$, параллельны асимптотам гиперболы (рис. 77). Можно доказать, что если на плоскости введены обобщенные полярные координаты (§ 9), то уравнение (18.6) в случае $1 - \varepsilon\cos\varphi < 0$ задает вторую ветвь гиперболы.

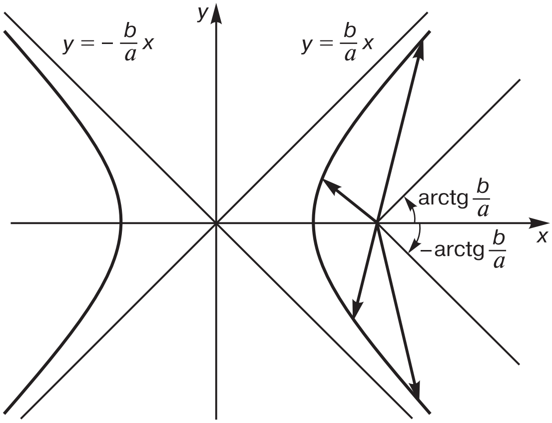

Рис. 77