

## § 23. УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ ЛИНИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

### *Свойства уравнений прямой линии в аффинной системе координат*

Будем предполагать, что в пространстве выбрана некоторая *аффинная система координат*. В § 11 были рассмотрены два способа задания линий в пространстве. Линию можно задать как пересечение двух поверхностей, а также параметрически, когда каждой ее точке ставится в соответствие некоторое число — параметр точки, при этом уравнения линии представляют собой функции координат от этого параметра.

Существует бесконечно много поверхностей, которые пересекаются по прямой линии. Удобнее всего прямую задать как линию пересечения двух плоскостей. Пусть даны две пересекающиеся по прямой  $l$  плоскости  $\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  и  $\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ . Плоскости пересекаются, поэтому ранг

$R$  матрицы  $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$  равен двум (теорема 3, § 21). Точка тогда и только тогда принадлежит  $l$ , когда ее координаты удовлетворяют одновременно уравнениям плоскостей  $\pi_1$  и  $\pi_2$ . Отсюда следует, что система двух линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \quad (23.1)$$

представляет собой *аналитические условия, определяющие прямую  $l$*  (§ 11). Ясно, что любая прямая пространства может быть определена с помощью такой системы. Уравнения (23.1) называются *общими уравнениями прямой в пространстве*.

Рассмотрим параметрический способ задания прямой. Выберем точку  $M(x_0; y_0; z_0)$  прямой и ненулевой вектор  $\vec{p}\{\alpha; \beta; \gamma\}$ , параллельный прямой. Точку  $M$  будем называть *начальной точкой* прямой, а вектор  $\vec{p}$  — ее *направляющим вектором*. Ясно, что существует единственная прямая, проходящая через  $M$  и параллельная  $\vec{p}$ . Точка  $N(x; y; z)$  тогда и только тогда принадлежит прямой, когда вектор  $\overline{MN}$  коллинеарен направляющему вектору  $\vec{p}$ , т. е. тогда и только тогда, когда существует такое число  $t$ , что  $\overline{MN} = t\vec{p}$ . С учетом того что координаты вектора  $\overline{MN}$  равны  $\{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$ , получаем  $x - x_0 = \alpha t$ ,  $y - y_0 = \beta t$ ,  $z - z_0 = \gamma t$ , или

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t, \\ y = y_0 + \beta t, \\ z = z_0 + \gamma t. \end{cases} \quad (23.2)$$

Таким образом, точка  $N$  тогда и только тогда принадлежит прямой, когда существует такое число  $t$ , что ее координаты вычисляются по формулам (23.2). Соотношения (23.2) носят название *параметрических уравнений прямой*. Правые части этих соотношений представляют собой линейные функции от  $t$ . Можно составить бесконечно много параметрических уравнений прямой в пространстве, для которых функции, стоящие в правых частях, отличны от линейных. Но в дальнейшем под параметрическими уравнениями прямой мы будем понимать только уравнения вида (23.2).

Пусть координаты направляющего вектора  $\vec{p}$  прямой отличны от нуля. Тогда из соотношений (23.2) следует, что

$t = \frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta} = \frac{z-z_0}{\gamma}$ . Таким образом, точка  $N(x; y; z)$  в том и только в том случае принадлежит прямой, заданной начальной точкой  $M(x_0; y_0; z_0)$  и направляющим вектором  $\vec{p}\{\alpha; \beta; \gamma\}$  ( $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma \neq 0$ ), когда ее координаты удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta} = \frac{z-z_0}{\gamma}. \quad (23.3)$$

Уравнения (23.3) носят название *канонических уравнений прямой*.

Уравнения  $\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta}$ ,  $\frac{y-y_0}{\beta} = \frac{z-z_0}{\gamma}$  и  $\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{z-z_0}{\gamma}$  определяют плоскости, параллельные осям координат. Первое уравнение — плоскость, параллельную оси аппликат, второе уравнение — плоскость, параллельную оси абсцисс, и третье — параллельную оси ординат (§ 22). Поэтому *канонические уравнения прямой представляют собой систему, составленную из уравнений плоскостей, проходящих через прямую линию и параллельных осям координат*.

При решении задач возникает необходимость найти параметрические уравнения прямой при условии, что даны ее общие уравнения. Ясно, что для этого достаточно определить координаты какой-либо точки прямой и ее направляющего вектора.

**Теорема 1.** Пусть прямая задана своими общими уравнениями

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

тогда вектор

$$\vec{p} \left\{ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right\} \quad (23.4)$$

является ее направляющим.

**Доказательство.** Вектор  $\vec{p}$  параллелен прямой в том и только в том случае, когда он параллелен плоскостям  $\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  и  $\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ , образующим

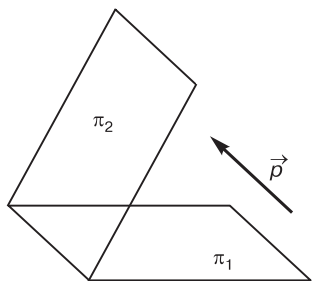


Рис. 87

в пересечении данную прямую (рис. 87). Проверим условие параллельности вектора и плоскости  $\pi_1$  (теорема 2, § 22):

$$A_1 \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} + B_1 \begin{vmatrix} C_1 & A_2 \\ C_1 & A_2 \end{vmatrix} + C_1 \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда следует, что вектор  $\vec{p}$  параллелен плоскости  $\pi_1$ . Аналогично доказывается, что вектор  $\vec{p}$  параллелен плоскости  $\pi_2$ . Теорема доказана.

**Пример 1.** Найти параметрические и канонические уравнения прямой  $l$ , заданной своими общими уравнениями

$$\begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0, \\ x + 2y - 3z + 1 = 0. \end{cases}$$

**Решение.** Определим координаты начальной точки прямой. Для этого найдем произвольное решение данной системы. Поло-

жим  $z = 0$ , тогда  $\begin{cases} 2x + y - 1 = 0, \\ x + 2y + 1 = 0. \end{cases}$  Получим  $x = 1$ ;  $y = -1$ . Таким образом, точка  $M(1; -1; 0)$  лежит на данной прямой. Для нахождения координат направляющего вектора  $\vec{p}$  воспользуемся

соотношениями (23.4):  $\vec{p} \left\{ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right\}$  или  $\vec{p} \{-1; 5; 3\}$ .

Искомые уравнения имеют вид

$$\begin{cases} x = 1 - t, \\ y = -1 + 5t, \\ z = 3t \end{cases}$$

или

$$1 - x = \frac{y + 1}{5} = \frac{z}{3}.$$

Таким образом, при любом способе задания прямой можно найти ее направляющий вектор и начальную точку.

**Теорема 2.** Пусть в пространстве задана плоскость  $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$  и прямая  $l$  с начальной точкой  $M(x_0; y_0; z_0)$  и направляющим вектором  $\vec{p}\{\alpha; \beta; \gamma\}$ . Тогда прямая  $l$  и  $\pi$  плоскость пересекаются в том и только в том случае, когда

$$A\alpha + B\beta + C\gamma \neq 0, \quad (23.5)$$

$l$  и  $\pi$  параллельны тогда и только тогда, когда

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0, \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0, \quad (23.6)$$

и  $l$  лежит в плоскости  $\pi$  в том и только в том случае, когда

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \quad (23.7)$$

**Доказательство.** Параметрические уравнения прямой  $l$  имеют вид

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t, \\ y = y_0 + \beta t, \\ z = z_0 + \gamma t. \end{cases}$$

Найдем общие точки прямой  $l$  и плоскости  $\pi$ . Для этого следует заменить в общем уравнении плоскости неизвестные  $x$ ,  $y$  и  $z$  на их выражения через параметр  $t$  из параметрических уравнений прямой. Получим уравнение относительно  $t$ , корни которого являются параметрами точек пересечения прямой и плоскости. Итак, сделав замену

$$A(\alpha + x_0 t) + B(\beta + y_0 t) + C(\gamma + z_0 t) = 0$$

или

$$(A\alpha + B\beta + C\gamma)t + Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \quad (23.8)$$

получим линейное уравнение относительно  $t$ . Оно имеет единственное решение в том и только в том случае, когда коэффициент при  $t$  отличен от нуля, т. е. тогда и только тогда, когда выполнено неравенство (23.5). В этом случае прямая и плоскость пересекаются в точке. Уравнение (23.8) не имеет решений тогда и только тогда, когда выполнены условия (23.6). Этот случай возможен только при условии параллельности прямой и плоскости. И наконец, для того чтобы уравнение имело бесконечно много решений, необходимо и достаточно, чтобы и коэффициент при  $t$ , и свободный член совпадали с нулем, т. е. чтобы выполнялись равенства (23.7). В этом случае все точки прямой принадлежат плоскости. Теорема доказана.

Исследуем взаимное расположение двух прямых. Будем предполагать, что прямая  $l_1$  задана точкой  $M_1(x_1; y_1; z_1)$  и направляющим вектором  $\vec{p}_1\{\alpha_1; \beta_1; \gamma_1\}$ , а прямая  $l_2$  — точкой  $M_2(x_2; y_2; z_2)$  и направляющим вектором  $\vec{p}_2\{\alpha_2; \beta_2; \gamma_2\}$ .

Прямые  $l_1$  и  $l_2$  скрещиваются в том и только в том случае, когда не существует плоскости, содержащей эти прямые. Пусть существует плоскость  $\pi$ , содержащая  $l_1$  и  $l_2$  (рис. 88). Тогда векторы  $\overrightarrow{M_1M_2}$ ,  $\vec{p}_1$  и  $\vec{p}_2$  компланарны. Ясно, что справедливо и обратное утверждение: если эти векторы компланарны, то прямые  $l_1$  и  $l_2$  принадлежат одной плоскости. Используя условие компланарности векторов в пространстве (§ 3), получим, что прямые  $l_1$  и  $l_2$  скрещиваются тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (23.9)$$

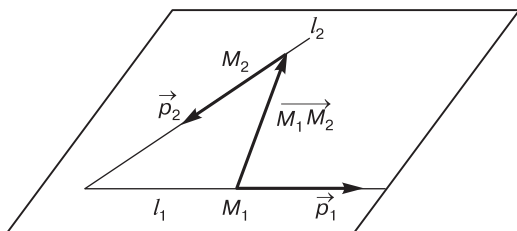


Рис. 88

Изучим теперь условия параллельности прямых  $l_1$  и  $l_2$ . Обозначим соответственно через  $R$  и  $r$  ранги матриц

$$\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_1 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix}.$$

Пусть прямые  $l_1$  и  $l_2$  параллельны. Тогда векторы  $\vec{p}_1$  и  $\vec{p}_2$  коллинеарны, а значит,  $r = 1$ . Но при этом точка  $M_2$  не лежит на прямой  $l_1$  (рис. 89, а). Отсюда вытекает, что вектор  $\overrightarrow{M_1M_2}$  не коллинеарен  $\vec{p}_1$ . Это означает, что  $R = 2$ . Ясно, что эти условия также являются и достаточными. Таким образом, если

$$r = 1, R = 2, \quad (23.10)$$

то прямые  $l_1$  и  $l_2$  параллельны. Отметим, что из условия  $r = 1$  следует, что векторы  $\vec{p}_1$  и  $\vec{p}_2$  компланарны.

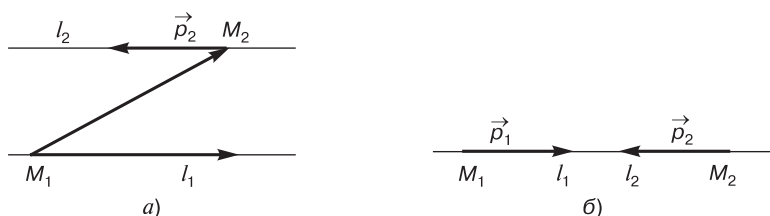


Рис. 89

Рассмотрим теперь совпадающие прямые  $l_1$  и  $l_2$ . Тогда векторы  $\vec{p}_1$  и  $\vec{p}_2$ , а также вектор  $\overline{M_1M_2}$  коллинеарны (рис. 89, б). Отсюда следует, что

$$R = r = 1. \quad (23.11)$$

Очевидно обратное: если выполнены соотношения (23.11), то прямые  $l_1$  и  $l_2$  совпадают. Мы доказали следующую теорему.

**Теорема 3.** Для того чтобы прямые  $l_1$  и  $l_2$  скрещивались, были параллельны или совпадали, необходимо и достаточно, чтобы соответственно выполнялись условия (23.9), (23.10) или (23.11).

**Пример 2.** Даны уравнения двух прямых

$$l_1: \begin{cases} x = 2, \\ y = -1 + t, \\ z = -7 + 3t, \end{cases} \quad l_2: \begin{cases} x = 5 - t, \\ y = -2 + t, \\ z = -4 + t. \end{cases}$$

Доказать, что прямые пересекаются, и найти координаты точки пересечения.

**Решение.** Первая прямая определена точкой  $M_1(2, -1, -7)$  и вектором  $\vec{p}_1\{0; 1; 3\}$ , вторая — точкой  $M_2(5, -2, -4)$  и вектором  $\vec{p}_2\{-1; 1; 1\}$ . Проверим условия (23.9) и (23.10). Вычислим определитель, составленный из координат векторов  $\overline{M_1M_2}$ ,  $\vec{p}_1$ ,  $\vec{p}_2$ :

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Значит, прямые  $l_1$  и  $l_2$  лежат в одной плоскости. Координаты векторов  $\vec{p}_1$  и  $\vec{p}_2$  непропорциональны, поэтому они неколлинеарные, следовательно, выполнено условие (23.10). Прямые  $l_1$  и  $l_2$  пересекаются.

Пусть  $x, y$  и  $z$  — координаты точки пересечения, а  $u$  и  $v$  — соответственно параметры этой точки в параметрических уравнениях прямых  $l_1$  и  $l_2$ . Тогда  $x = 2, y = 1 + u, z = -7 + 3u$  и  $x = 5 - v, y = -2 + v, z = -4 + v$ . Отсюда следует, что

$$\begin{cases} 2 = 5 - v, \\ -1 + u = -2 + v, \\ -7 + 3u = -4 + v. \end{cases}$$

Мы получили систему трех линейных уравнений с двумя неизвестными  $u$  и  $v$ . Такие системы в основном случае не имеют решений. Но так как прямые  $l_1$  и  $l_2$  пересекаются, то полученная система совместна. Найдем  $u$  и  $v$  из первых двух уравнений:  $u = 2, v = 3$ . Нетрудно видеть, что эти значения удовлетворяют третьему уравнению. Подставляя  $u = 2$  в параметрические уравнения прямой  $l_1$ , получим координаты искомой точки  $X$  пересечения прямых:  $X(2; 1; -1)$ .

### *Свойства уравнений прямой линии в прямоугольной декартовой системе координат*

Будем предполагать, что в пространстве выбрана прямоугольная декартова система координат. Так как прямоугольная декартова система координат является частным случаем аффинной системы, то при этом остаются справедливыми все свойства прямой, доказанные выше. Рассмотрим задачи, для решения которых удобно использовать именно прямоугольную декартову систему координат. Выведем формулы для вычислений углов между двумя прямыми, между прямой и плоскостью, расстояний от точки до прямой и между двумя прямыми.

Прежде всего, отметим следующее. Пусть прямая задана своими общими уравнениями  $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$  Тогда вектор

$\vec{p} \left\{ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right\}$  является для нее направляющим согласно теореме 1. Но в прямоугольной декартовой системе координат векторы  $\vec{n}_1\{A_1; B_1; C_1\}$  и  $\vec{n}_2\{A_2; B_2; C_2\}$  перпендикулярны плоскостям  $\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  и  $\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ , пересекающимся по данной прямой. Вектор  $\vec{p}$ , как следует из формул для вычисления его координат, равен векторному произведению векторов  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_2$ :  $\vec{p} = [\vec{n}_1 \vec{n}_2]$  (§ 6). Этот факт



имеет ясный геометрический смысл. Векторное произведение перпендикулярно сомножителям  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_2$ , т. е. параллельно плоскостям  $\pi_1$  и  $\pi_2$ . Поэтому вектор  $\vec{p}$  параллелен прямой  $l$  пересечения этих плоскостей.

Пусть дана плоскость  $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$  и прямая  $l$ , определенная начальной точкой  $M(x_0; y_0; z_0)$  и направляющим вектором  $\vec{p}\{\alpha; \beta; \gamma\}$ . Как известно из школьного курса стереометрии, прямая  $l$  перпендикулярна плоскости  $\pi$ , если она образует прямой угол с любой прямой, принадлежащей  $\pi$ . В этом случае  $\vec{p}$  — нормальный вектор плоскости и, следовательно, он коллинеарен вектору  $\vec{n}\{A; B; C\}$ . Таким образом, прямая  $l$  перпендикулярна плоскости  $\pi$  тогда и только тогда, когда ранг матрицы  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ A & B & C \end{pmatrix}$  равен единице.

Если прямая  $l$  не перпендикулярна плоскости  $\pi$ , то под углом  $\varphi$  между прямой и плоскостью понимается острый угол между этой прямой и ее проекцией  $l'$  на плоскость  $\pi$ . Если  $m$  — прямая, перпендикулярная плоскости, а  $\psi$  — угол между  $m$  и  $l$ , то  $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$ ,  $\sin \varphi = \cos \psi$ . Вектор  $\vec{n}\{A; B; C\}$  перпендикулярен  $\pi$ , т. е. параллелен прямой  $m$ .

Поэтому  $\psi = \angle \vec{n}\vec{p}$ , если угол  $\angle \vec{n}\vec{p}$  острый (рис. 90, а), и  $\psi = \pi - \angle \vec{n}\vec{p}$ , если угол  $\angle \vec{n}\vec{p}$  тупой (рис. 90, б). Отсюда следует, что  $\sin \psi = |\cos \angle \vec{n}\vec{p}|$ . Таким образом,  $\sin \psi = |\cos \angle \vec{n}\vec{p}| = \frac{|\vec{n}\vec{p}|}{|\vec{n}||\vec{p}|}$ . Так как координаты векторов  $\vec{n}$  и  $\vec{p}$  даны в прямоугольной декартовой системе координат, то

$$\sin \psi = \frac{|A\alpha + B\beta + C\gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}. \quad (22.12)$$

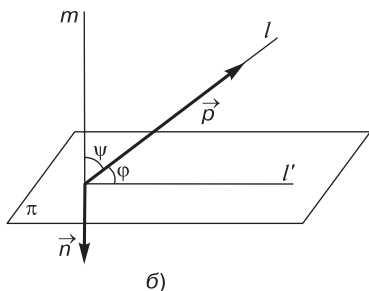
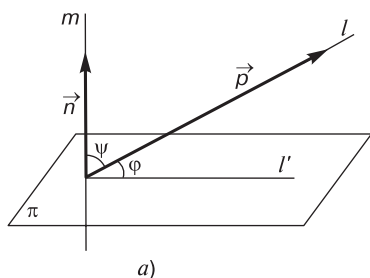


Рис. 90

Рассмотрим в пространстве две прямые  $l_1$  и  $l_2$  с направляющими векторами  $\vec{p}_1\{\alpha_1; \beta_1; \gamma_1\}$  и  $\vec{p}_2\{\alpha_2; \beta_2; \gamma_2\}$ . Как известно, под величиной угла  $\varphi$  между прямыми  $l_1$  и  $l_2$  понимается острый угол между пересекающимися прямыми  $l'_1$  и  $l'_2$ , параллельными  $l_1$  и  $l_2$ . Следовательно,  $\varphi = \angle \vec{p}_1 \vec{p}_2$ , если угол  $\angle \vec{p}_1 \vec{p}_2$  острый или прямой, и  $\varphi = \pi - \angle \vec{p}_1 \vec{p}_2$ , если угол  $\angle \vec{p}_1 \vec{p}_2$  тупой. Отсюда

$$\cos \varphi = \frac{|\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2|}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2} \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2}}.$$

Выведем формулу для вычисления расстояния от точки до прямой в пространстве. Пусть даны координаты точки  $N(x_1; y_1; z_1)$ , а прямая  $l$  задана своей начальной точкой  $M(x_0; y_0; z_0)$  и направляющим вектором  $\vec{p}\{\alpha; \beta; \gamma\}$ . Рассмотрим параллелограмм  $MNPQ$ , построенный на векторах  $\overrightarrow{MN}$  и  $\vec{p}$  (рис. 91). Искомое расстояние равно длине  $h$  высоты  $NH$  этого параллелограмма. Если  $S$  — его площадь, то  $h = \frac{S}{|\overrightarrow{MQ}|}$ . Но, как было

показано в § 6,  $S = |\overrightarrow{MN} \vec{p}|$ . Кроме того,  $|\overrightarrow{MN}| = |\vec{p}|$ . Поэтому

$$h = \frac{|\overrightarrow{MN} \vec{p}|}{|\vec{p}|}.$$

Так как координаты вектора  $\overrightarrow{MN}$  равны  $\{x_1 - x_0; y_1 - y_0; z_1 - z_0\}$ , то, используя формулы для вычисления координат векторного произведения векторов, получаем искомое выражение:

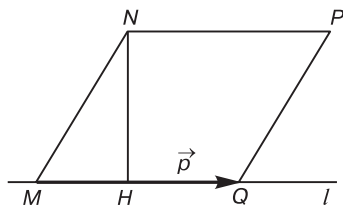


Рис. 91

$$h = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ \alpha & \gamma \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ \beta & \gamma \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}.$$

Пусть  $l_1$  и  $l_2$  — скрещивающиеся прямые в пространстве. Прямая  $l_1$  определена точкой  $M_1(x_1; y_1; z_1)$  и направляющим вектором  $\vec{p}\{\alpha_1; \beta_1; \gamma_1\}$ , а прямая  $l_2$  — точкой  $N(x_2; y_2; z_2)$  и направляющим вектором  $\vec{q}\{\alpha_2; \beta_2; \gamma_2\}$ . Найдем расстояние  $d$  между этими прямыми. Оно равно расстоянию между параллельными плоскостями, каждая из которых параллельна одной из этих прямых и содержит вторую. Рассмотрим тройку неком-

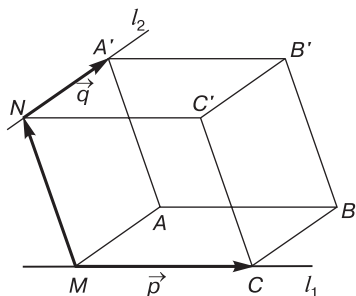


Рис. 92

планарных векторов  $\overrightarrow{MN}$ ,  $\vec{p}$ ,  $\vec{q}$  и достроим ее до параллелепипеда  $MABCA'B'C'$  (рис. 92). Искомое расстояние равно высоте этого параллелепипеда. Поэтому  $d = \frac{V}{S}$ , где  $V$  — его объем, а  $S$  — площадь основания  $MABC$ . Из свойств смешанного и векторного произведений векторов

(§ 6, 7), имеем:  $d = \frac{|(\overrightarrow{MN}, \vec{p}, \vec{q})|}{|[\vec{p}, \vec{q}]|}$ .

Координаты вектора  $\overrightarrow{MN}$  равны  $\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$ , отсюда следует, что

$$d = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}^2}}.$$