ПЛОСКОСТИ, ПРЯМЫЕ И ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПРОСТРАНСТВЕ

В настоящей главе мы используем средства векторной алгебры и метод координат для изучения свойств плоскостей, прямых и поверхностей второго порядка в пространстве. При этом мы так же, как в предыдущей главе, будем рассматривать их свойства в аффинной и прямоугольной декартовой системах координат.

§ 22. УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Свойства уравнений плоскостей в аффинной системе координат

Не оговаривая особо, будем считать, что в пространстве дана некоторая аффинная система координат. Ясно, что плоскость в пространстве можно определить точкой M и двумя неколлинеарными векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$, параллельными этой плоскости (рис. 82). Пусть заданы координаты точки M и векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$:

$$M(x_0; y_0; z_0), \ \ \vec{p}\{\alpha_1; \beta_1; \gamma_1\}, \ \ \vec{q}\{\alpha_2; \beta_2; \gamma_2\}.$$

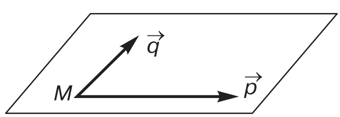


Рис. 82

Найдем уравнение плоскости. Предположим, что в этой плоскости лежит точка $N(x; y; z)$. Тогда вектор $\overrightarrow{MN}\{x-x_0; y-y_0; z-z_0\}$ параллелен плоскости, а векторы $\overrightarrow{MN}$, $\vec{p}$ и $\vec{q}$ — компланарные. Воспользуемся условием компланарности векторов в координатах (§ 3):

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (22.1)$$

Это соотношение можно рассматривать как уравнение относительно x, y и z. Таким образом, если точка лежит на плоскости, то ее координаты удовлетворяют уравнению (22.1). Обратно, если координаты x, y и z какой-либо точки N служат решением уравнения (22.1), то векторы $\overrightarrow{MN}$, $\vec{p}$ и $\vec{q}$ компланарны, поэтому вектор $\overrightarrow{MN}$ параллелен плоскости, а точка N лежит в этой плоскости. Уравнение (22.1) представляет собой *уравнение плоскости, определенной точкой M и векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$.*

С помощью уравнения (22.1) можно решить следующую задачу. Даны координаты точек $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, $C(x_3;\ y_3;\ z_3)$, не лежащих на одной прямой. Требуется найти уравнение плоскости ABC. Легко видеть, что искомая плоскость определена точкой A и неколлинеарными векторами $\overrightarrow{AB}\{x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1\}$, $\overrightarrow{AC}\{x_3-x_1; y_3-y_1; z_3-z_1\}$. Поэтому из (22.1) получим искомое уравнение:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

При решении задач уравнение (22.1) обычно упрощают. Раскроем определитель в его левой части по первой строке и получим

$$\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}(x-x_0)+\begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{vmatrix}(y-y_0)+\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}(z-z_0)=0.$$

Обозначим $A=\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$, $B=\begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{vmatrix}$, $C=\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$. Так как векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ неколлинеарные, то эти числа не равны одновременно нулю, т. е. $A^2+B^2+C^2\neq 0$. Итак, уравнение плоскости принимает вид $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ или $Ax+By+Cz+D=$ $=0$, где $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$. Таким образом, уравнение плоскости представляет собой алгебраическое уравнение первого порядка (§11). Докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Поверхность в пространстве является плоскостью тогда и только тогда, когда она представляет собой алгебраическую поверхность первого порядка.*

Доказательство. Требуется доказать, что поверхность является плоскостью в том и только в том случае, когда ее уравнение можно представить в виде

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{22.2}$$

где

$$A^2 + B^2 + C^2 \neq 0. \qquad (22.3)$$

Первая часть утверждения уже доказана. Мы показали, что уравнение любой плоскости можно преобразовать к виду (22.2) и при этом выполнено условие (22.3).

Обратно, пусть дана поверхность σ, уравнение которой имеет вид (22.2), а его коэффициенты удовлетворяют неравенству (22.3). Докажем, что она является плоскостью. В силу неравенства (22.3) среди коэффициентов A, B и C существует по крайней мере один ненулевой. Пусть $A \neq 0$. Рассмотрим точку $M\left(\dfrac{D}{A}; 0; 0\right)$, векторы $\vec{p}\{B; -A; 0\}$ и $\vec{q}\{C; 0; -A\}$. Так как $A \neq 0$, то векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ неколлинеарные. Поэтому точка M и векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ определяют некоторую плоскость π пространства. Используя соотношение (22.1), составим ее уравнение:

$$\begin{vmatrix} x + \dfrac{D}{A} & y & z \\ B & -A & 0 \\ C & 0 & -A \end{vmatrix} = 0.$$

Раскроем определитель по первой строке: $A^2\left(x + \dfrac{D}{A}\right) + ABy + {}$ $+ ACz = 0$. Так как $A \neq 0$, то, сократив обе части уравнения на A, получим $Ax + By + Cz + D = 0$. Уравнение плоскости π имеет тот же вид, что и уравнение поверхности σ. Поэтому плоскость и поверхность совпадают друг с другом. Случаи, когда $A = 0$, но $B \neq 0$, либо $A = B = 0$, а $C \neq 0$, рассмотрите самостоятельно. Теорема доказана.

Уравнение (22.2) называется *общим уравнением плоскости в пространстве*. Оно позволяет исследовать аналитическими методами геометрические свойства плоскостей. Прежде всего, докажем теорему, характеризующую взаимное расположение вектора и плоскости.

Теорема 2. *Вектор* $\vec{p}\{\alpha; \beta; \gamma\}$ *тогда и только тогда параллелен плоскости, заданной своим общим уравнением* (21.2), *когда*

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0. \qquad (22.4)$$

Доказательство. Очевидно, что вектор $\vec{p}$ параллелен плоскости π в том и только в том случае, когда она содержит такие точки M и N, для которых $\overrightarrow{MN} = \vec{p}$.

Пусть вектор $\vec{p}$ параллелен данной плоскости π. Тогда она содержит такие точки $M(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $N(x_2;\ y_2;\ z_2)$, для которых $\overrightarrow{MN} = \vec{p}$. Точки принадлежат плоскости, поэтому их координаты удовлетворяют ее уравнению: $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$, $Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0$. Вычтем из второго равенства первое: $A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) + D = 0$. Так как $\overrightarrow{MN} = \vec{p}$, то $x_2 - x_1 = \alpha$, $y_2 - y_1 = \beta$, $z_2 - z_1 = \gamma$. Поэтому $A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$. Соотношение (22.4) доказано,

Обратно, пусть координаты α, β и γ некоторого вектора $\vec{p}$ удовлетворяют равенству (22.4). Возьмем произвольную точку $M(x_1;\ y_1;\ z_1)$, принадлежащую плоскости π. Тогда $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$. Отложим от точки M вектор $\vec{p}$: $\overrightarrow{MN} = \vec{p}$. Тогда координаты точки N равны $(x_1 + \alpha;\ y_1 + \beta;\ z_1 + \gamma)$. Подставим их в уравнение плоскости, получим:

$$A(x_1 + \alpha) + B(y_1 + \beta) + C(z_1 + \gamma) + D =$$
$$= Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D + A\alpha + B\beta + C\gamma = 0.$$

Координаты точки удовлетворяют уравнению плоскости, следовательно, точка N лежит в этой плоскости, поэтому вектор $\vec{p}$ ей параллелен. Теорема доказана.

Доказанное утверждение позволяет вывести условия, характеризующие взаимное расположение плоскости и системы координат. Пусть плоскость π задана своим общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Выясним, при каких условиях, наложенных на коэффициенты A, B, C и D ее уравнения, она содержит начало системы координат или параллельна координатным осям. Легко видеть, точка $O(0; 0; 0)$ тогда и только тогда принадлежит плоскости, когда $D = 0$. Поэтому *плоскость содержит начало координат в том и только в том случае, когда $D = O$*. Направляющий вектор $\vec{i}\{1; 0; 0\}$, согласно соотношению (22.4), тогда и только тогда параллелен π, когда $A \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot 0 = 0$. Таким образом, *плоскость в том и только в том случае параллельна оси абсцисс, когда $A = 0$*. Аналогично доказывается, что *плоскость соответственно параллельна оси ординат или аппликат тогда и только тогда, когда $B = 0$ или $C = 0$*. Ясно, что плоскость π *параллельна координатной плоскости Oxy в том и только в том случае, когда $A = B = 0$*, а *условия параллельности π координатным плоскостям Oxz и Oyz равносильны равенствам $A = C = 0$ и $B = C = 0$.*

Теорема 2 позволяет легко исследовать взаимное расположение двух плоскостей.

Теорема 3. *Пусть плоскости* π_1 *и* π_2 *заданы своими общими уравнениями*: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. *Обозначим через* R *и* r *ранги матриц*

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}; \qquad (22.5)$$

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}. \qquad (22.6)$$

Тогда данные плоскости пересекаются в том и только в том случае, когда $r = 2$, *параллельны тогда и только тогда, когда* $r = 1$, $R = 2$, *и совпадают, когда* $r = R = 1$.

Доказательство. Рассмотрим векторы $\vec{p}\{B_2; -A_2; 0\}$, $\vec{q}\{C_2; 0; -A_2\}$ и $\vec{r}\{0; C_2; -B_2\}$. Согласно соотношению (22.4), эти векторы параллельны π_2. В силу неравенства (22.3) по крайней мере один из коэффициентов A_2, B_2 или C_2 отличен от нуля. Например, если $A_2 \neq 0$, то векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ неколлинеарные. Если же $A_2 = 0$, то либо $B_2 \neq 0$, либо $C_2 \neq 0$. В первом случае вектор $\vec{p}$ не коллинеарен вектору $\vec{r}$, во втором вектор $\vec{r}$ не коллинеарен вектору $\vec{q}$. Таким образом, из рассматриваемой тройки векторов два заведомо линейно независимы.

Плоскости π_1 и π_2 пересекаются в том и только в том случае, когда среди векторов $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$ существует хотя бы один из векторов, непараллельный π_1. Пусть вектор $\vec{p}$ непараллелен π_1. Тогда из формулы (22.4) следует, что $A_1B_2 - B_1A_2 \neq 0$, или $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$ Аналогично, если вектор $\vec{q}$ непараллелен π_1, то $\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0$, когда вектор $\vec{r}$ непараллелен π_1, выполняется неравенство $\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0.$ Таким образом, плоскости пересекаются тогда и только тогда, когда хотя бы один из миноров матрицы (22.6) отличен от нуля, т. е. когда $r = 2$.

Пусть плоскости π_1 и π_2 параллельны. В этом случае они не имеют общих точек, а система двух линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (22.7)$$

несовместна. Матрицы (22.5) и (22.6) являются, соответственно, основной и расширенной матрицами системы (22.7). Из теории решения линейных систем следует, что в этом случае ранги r и R этих матриц удовлетворяют неравенству $r < R$. Так как матрицы (22.5) и (22.6) содержат ненулевые элементы и состоят из двух строк, то $0 < r \le 2$, $0 < R \le 2$. Таким образом, если плоскости параллельны, то $r = 1$, $R = 2$. Обратно, если $r = 1$, $R = 2$, то система (22.7) несовместна, она не имеет решений, плоскости π_1 и π_2 параллельны.

И наконец, если плоскости π_1 и π_2 совпадают, то векторы $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$ параллельны плоскости π_1. Отсюда следует, что $A_1B_2 - B_1A_2 = A_1C_2 - C_1A_2 = B_1C_2 - C_1B_2 = 0$ или

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, ранг матрицы (22.6) равен 1. Система же (22.7) в этом случае совместна, поэтому ранги r и R совпадают: $r = R = 1$. Наоборот, если $r = R = 1$, то векторы $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$ параллельны плоскости π_1. Отсюда следует, что π_2 либо параллельна π_1, либо совпадает с ней. Кроме того, так как $r = R$, то система (22.7) имеет решение, т. е. существуют точки, принадлежащие и π_1 и π_2. Поэтому плоскости π_1, и π_2 совпадают. Теорема доказана.

Легко выяснить, в каком случае ранги матриц (22.5) и (22.6) равны 1 или 2. Так как эти матрицы имеют две строки, то их ранги равны 2, когда строки непропорциональны. Если существует коэффициент пропорциональности между строками, то ранги матриц равны 1.

Легко видеть, что доказанные утверждения аналогичны соответствующим свойствам прямой на плоскости, доказанным в § 13.

Пример 1. *Найти значения коэффициентов A_1 и C_2, при которых плоскости π_1: $A_1x + 2y + 4z + 1 = 0$ и π_2: $x + y - C_2z + 3 = 0$ параллельны.*

Решение. Как следует из теоремы 3, плоскости параллельны в том и только в том случае, когда ранг матрицы $\begin{pmatrix} A_1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -C_2 \end{pmatrix}$ равен единице, а матрицы $\begin{pmatrix} A_1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -C_2 & 3 \end{pmatrix}$ — двум. Ранг первой матрицы равен единице тогда и только тогда, когда $\dfrac{A_1}{1} = \dfrac{2}{1} = \dfrac{4}{-C_2}$.

Отсюда получим $A_1 = 2$, $C_2 = -2$. Так как $2 \neq \frac{1}{3}$, то ранг второй матрицы при найденных A_1 и C_2 равен 2.

Рассмотрим плоскость, заданную своим общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. *Если x, y, z — координаты точки M, то через $\delta(M)$ обозначим результат подстановки координат этой точки в уравнение плоскости*: $\delta(M) = Ax + By + Cz + D$. $\delta(M) = 0$ в том и только в том случае, когда точка лежит в плоскости.

Теорема 4. *Точки $M(x_1; y_1; z_1)$ и $N(x_2; y_2; z_2)$ тогда и только тогда лежат в одном полупространстве относительно плоскости π, заданной своим общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, когда $\delta(M)$ и $\delta(N)$ имеют одинаковые знаки. Точки расположены в различных полупространствах, когда знаки этих чисел различны.*

Доказательство. Любой точке T прямой MN, отличной от данных точек M и N, можно поставить в соответствие простое отношение $\lambda = (MN, T)$. Найдем координаты x, y и z точки T: $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$, $y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$, $z = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$ (§ 10). Точки M и N лежат в различных полупространствах относительно плоскости π в том и только в том случае, когда отрезок MN пересекает π в некоторой своей внутренней точке T. Найдем простое отношение $\lambda = (MN, T)$. Для этого необходимо подставить координаты точки T в уравнение плоскости и решить его относительно λ:

$$A\frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} + B\frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} + C\frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} + D = 0.$$

Отсюда получим $A(x_1 + \lambda x_2) + B(y_1 + \lambda y_2) + C(z_1 + \lambda z_2) + D(1 + \lambda) = 0$ или $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + \lambda(Ax_2 + By_2 + Cz_2) = 0$. Таким образом, $\delta(M) + \lambda\delta(N) = 0$. Точка N не принадлежит плоскости π, поэтому $\delta(N) \neq 0$. Окончательно имеем

$$\lambda = -\frac{\delta(M)}{\delta(N)}. \qquad (22.8)$$

Для того чтобы точка T лежала на отрезке MN, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $\lambda > 0$ (§ 10). Таким образом, из формулы (22.8) следует, что M и N лежат в разных полупространствах тогда и только тогда, когда знаки $\delta(M)$ и $\delta(N)$ различны. Поэтому условие совпадения знаков и равносильно условию принадлежности точек M и N одному полупространству. Теорема доказана.

Следствие. *Точки, координаты которых являются решением неравенства* $Ax + By + Cz + D > 0$, *образуют полупространство, граница которого определена плоскостью* π, *имеющей уравнение* $Ax + By + Cz + D = 0$. *Координаты точек, образующих дополнительное полупространство, удовлетворяют неравенству* $Ax + By + Cz + D < 0$.

Действительно, если мы возьмем произвольную точку M пространства, координаты которой удовлетворяют неравенству $Ax + By + Cz + D > 0$, то, как следует из доказанной теоремы, этому неравенству удовлетворяют координаты тех и только тех точек, которые лежат в том же полупространстве относительно π, что и точка M. Неравенству же $Ax + By + Cz + D < 0$ удовлетворяют координаты всех точек, принадлежащих второму полупространству.

Рассмотрим плоскость π: $Ax + By + Cz + D = 0$ и вектор $\vec{n}\{A; B; C\}$. Как следует из теоремы 2, вектор $\vec{n}$ не параллелен плоскости π. Возьмем в π произвольную точку $M(x_0; y_0; z_0)$, при этом $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$. Отложим от M вектор $\overrightarrow{MN} = \vec{n}$. Тогда координаты точки N имеют вид $x = x_0 + A$, $y = y_0 + B$, $z = z_0 + C$. Найдем $\delta(N)$:

$$\delta(N) = A(x_0 + A) + B(y_0 + B) + C(z_0 + C) + D = A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

Таким образом, конец вектора $\vec{n}$, отложенного от произвольной точки плоскости π, принадлежит полупространству, определяемому неравенством $Ax + By + Cz + D > 0$.

Здесь мы также видим полную аналогию между доказанной теоремой 4 о принадлежности точек двум различным полупространствам и вытекающими из нее следствиями и свойствами точек, принадлежащих двум полуплоскостям на плоскости, доказанными в § 13.

Свойства уравнений плоскостей в прямоугольной декартовой системе координат

Будем предполагать, что в пространстве выбрана некоторая прямоугольная декартова система координат. Такая система представляет собой частный случай аффинной системы. Поэтому для нее справедливы все утверждения, доказанные выше.

Теорема 5. *Если плоскость* π *задана своим общим уравнением* $Ax + By + Cz + D = 0$, *то вектор* $\vec{n}\{A; B; C\}$ *перпендикулярен любому вектору, параллельному этой плоскости.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный вектор $\vec{p}\{\alpha; \beta; \gamma\}$, параллельный плоскости. Тогда, согласно равенству (22.4), его координаты удовлетворяют соотношению $A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$. Так как система координат прямоугольная декартова, то скалярное произведение векторов $\vec{n}$ и $\vec{p}$ имеет следующий вид: $\vec{n}\vec{p} = A\alpha + B\beta + C\gamma$ (§ 4). Таким образом, условие параллельности вектора $\vec{p}$ и плоскости π равносильно равенству нулю скалярного произведения векторов $\vec{n}$ и $\vec{p}$. Отсюда следует, что вектор $\vec{n}$ перпендикулярен любому вектору, параллельному плоскости. Теорема доказана.

Вектор, перпендикулярный любому вектору плоскости, называется ее *нормальным вектором*. Ясно, что *прямая в том и только в том случае перпендикулярна плоскости, когда она параллельна ее нормальному вектору*.

Пусть даны точка $M(x_0; y_0; z_0)$ и вектор $\vec{n}\{A; B; C\}$, отличный от нулевого. Существует единственная плоскость π, проходящая через M, для которой вектор $\vec{n}$ является нормальным. Составим ее уравнение. Пусть точка принадлежит π (рис. 83). Тогда векторы $\overrightarrow{MN}\{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$ и $\vec{n}$ перпендикулярны, их скалярное произведение равно нулю: $\overrightarrow{MN}\vec{n} = 0$. Отсюда следует, что координаты точки N удовлетворяют уравнению

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (22.9)$$

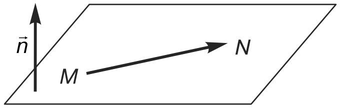


Рис. 83

Обратно, пусть координаты некоторой точки $N(x; y; z)$ — решение уравнения (22.9). Тогда вектор $\overrightarrow{MN}\{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$ перпендикулярен вектору $\vec{n}\{A; B; C\}$. Так как точка M лежит в плоскости π, то и точка N также принадлежит этой плоскости. Уравнение (22.9) является уравнением этой плоскости.

Пример 2. *Даны уравнения двух пересекающихся плоскостей* α: $4x - y + z + 1 = 0$, β: $2x + 3y - z + 1 = 0$, *а также координаты точки* M (1; −1; 5). *Найти уравнение плоскости, проходящей через* M *и перпендикулярной данным плоскостям*.

Решение. Как известно из школьного курса геометрии, искомая плоскость γ в том и только в том случае перпендикулярна плоскостям α и β, когда она параллельна прямым, перпен-

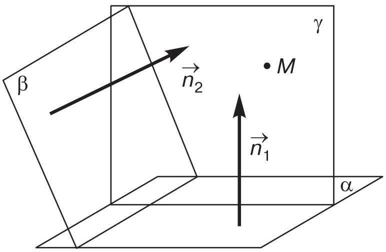


Рис. 84

дикулярным к данным плоскостям. Поэтому искомая плоскость γ параллельна векторам $\vec{n}_1\{4; -1; 1\}$ и $\vec{n}_2\{2; 3; -1\}$ (рис. 84). Векторы $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ не коллинеарные. Уравнение плоскости определим с помощью уравнения (22.1), где в качестве начальной точки выбрана точка $M\,(1; -1; 5)$:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-5 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

После преобразований получим $x - 3y - 7z + 31 = 0$.

Рассмотрим задачу об определении угла между двумя плоскостями. Из школьного курса геометрии известно, что угол между плоскостями измеряется величиной линейного угла, который соответствует острому или прямому двугранному углу, образованному при пересечении этих плоскостей. Отсюда следует, что этот линейный угол по величине либо совпадает с углом между нормальными векторами к этим плоскостям, либо дополняет его до π (рис. 85). Пусть плоскости π_1 и π_2 заданы уравнениями π_1: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, π_2: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Тогда их нормальные векторы имеют вид $\vec{n}_1\{A_1; B_1; C_1\}$ и $\vec{n}_2\{A_2; B_2; C_2\}$. Таким образом, если φ — искомый угол между плоскостями π_1 и π_2, то $\varphi = \angle\vec{n}_1\vec{n}_2$ или $\varphi = \pi - \angle\vec{n}_1\vec{n}_2$. Поэтому $\cos\varphi = \left|\cos(\angle n_1 n_2)\right|$.

Используем формулу для вычисления угла между векторами в координатах (§ 4):

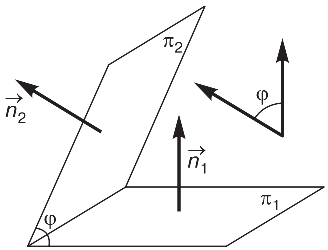


Рис. 85

$$\cos\varphi = \frac{\left|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2\right|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (22.10)$$

Плоскости π_1 и π_2 взаимно перпендикулярны в том и только в том случае, когда $\cos\varphi = 0$. Из формулы (22.10) следует, что условие перпендикулярности равносильно равенству

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \qquad (21.11)$$

Выведем формулу для вычисления расстояния от точки до плоскости. Будем рассуждать так же, как и в § 14, в котором мы получили аналогичную формулу для вычисления расстояния от точки до прямой на плоскости. Будем считать, что плоскость π задана своим общим уравнением π: $Ax + By + Cz + D = 0$. Рассмотрим точку $M(x_0;\ y_0;\ z_0)$, которая ей не принадлежит. Выберем на плоскости π произвольную точку $N(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и рассмотрим вектор $\vec{n}\{A; B; C\}$, перпендикулярный плоскости. Пусть m — ось, сонаправленная с вектором $\vec{n}$. Без ограничения общности можно считать, что она проходит через точку N (рис. 86). Обозначим через K проекцию точки M на ось m. Искомое расстояние d равно длине отрезка NK, или, как нетрудно видеть, абсолютной величине проекции вектора $\overrightarrow{NM}$ на ось m: $d = \left|pr_m \overrightarrow{NM}\right|$. В § 4 нами была доказана лемма 1, в соответствии с которой скалярное произведение векторов $\overrightarrow{NM}$ и $\vec{n}$ равно $\overrightarrow{NM}\vec{n} = |\vec{n}|\, pr_m \overrightarrow{NM}$. Отсюда следует, что $d = \dfrac{\left|\vec{n}\overrightarrow{NM}\right|}{|\vec{n}|}$. Координаты вектора $\overrightarrow{NM}$ равны $\{x_0 - x_1; y_0 - y_1; z_1 - z_0\}$, поэтому $\vec{n}\overrightarrow{NM} = A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1) = Ax_0 + By_0 + Cz_0 - Ax_1 - By_1 - Cz_1$. Координаты точки N, лежащей в плоскости π, удовлетворяют уравнению этой плоскости: $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$. Отсюда $D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1$. Таким образом: $\vec{n}\overrightarrow{NM} = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D$. Следовательно, $d = \dfrac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{|\vec{n}|}$. Так как $|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, то окончательно получим

$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (21.12)$$

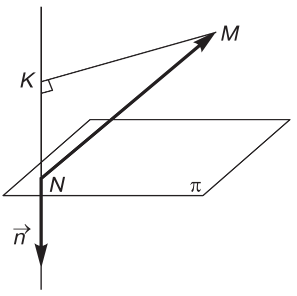


Рис. 86

Пример 3. *Дан тетраэдр, три грани которого совпадают с координатными плоскостями, а четвертая лежит в плоскости $2x + 2y + z - 4 = 0$. Найти координаты центра и радиус вписанного в тетраэдр шара.*

Решение. Прежде всего определим координаты вершин тетраэдра. Одна из них совпадает с началом координат — точкой $O(0;\ 0;\ 0)$, три другие — с точками пересечения осей координат с плоскостью $2x + 2y + z - 4 = 0$. Нетрудно найти координаты этих точек. Они равны $A(2; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 4)$. Таким образом, грани тетраэдра имеют уравнения OAB: $z = 0$, OAC: $y = 0$, OBC: $x = 0$, ABC: $2x + 2y + z - 4 = 0$.

Обозначим через u, v, w координаты центра Q вписанного в тетраэдр шара. Если R — его радиус, то расстояние от Q до граней равно R. Поэтому из формулы (22.12) следует, что $R = |u| = |v| = |w| = \dfrac{|2u+2v+w-4|}{3}$.

Центр Q лежит в том же полупространстве относительно грани ABC, что и вершина O. Значит, координаты этих точек удовлетворяют одному и тому же линейному неравенству, определяющему это полупространство. Так как координаты точки O удовлетворяют неравенству $2x + 2y + z - 4 < 0$, то $2u + 2v + w - 4 < 0$ и $|2u + 2v + w - 4| = 4 - 2u - 2v - w$. Аналогично проверяется, что $|u| = u$, $|v| = v$, $|w| = w$. Таким образом, $u = v = w = \dfrac{4-2u-2v-w}{3}$. Решая эту систему уравнений, получаем: $4 - 5u = 3u$, $u = \dfrac{1}{2}$. Точка Q имеет координаты $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$, а радиус равен $\dfrac{1}{2}$.

§ 23. УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ ЛИНИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Свойства уравнений прямой линии в аффинной системе координат

Будем предполагать, что в пространстве выбрана некоторая *аффинная система координат*. В § 11 были рассмотрены два способа задания линий в пространстве. Линию можно задать как пересечение двух поверхностей, а также параметрически, когда каждой ее точке ставится в соответствие некоторое число — параметр точки, при этом уравнения линии представляют собой функции координат от этого параметра.

Существует бесконечно много поверхностей, которые пересекаются по прямой линии. Удобнее всего прямую задать как линию пересечения двух плоскостей. Пусть даны две пересекающиеся по прямой l плоскости π_1: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и π_2: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Плоскости пересекаются, поэтому ранг

R матрицы $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ равен двум (теорема 3, § 21). Точка тогда и только тогда принадлежит l, когда ее координаты удовлетворяют одновременно уравнениям плоскостей π_1 и π_2. Отсюда следует, что система двух линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \tag{23.1}$$

представляет собой *аналитические условия, определяющие прямую* l (§ 11). Ясно, что любая прямая пространства может быть определена с помощью такой системы. Уравнения (23.1) называются *общими уравнениями прямой в пространстве*.

Рассмотрим параметрический способ задания прямой. Выберем точку $M(x_0; y_0; z_0)$ прямой и ненулевой вектор $\vec{p}\{\alpha; \beta; \gamma\}$, параллельный прямой. Точку M будем называть *начальной точкой* прямой, а вектор $\vec{p}$ — ее *направляющим вектором*. Ясно, что существует единственная прямая, проходящая через M и параллельная $\vec{p}$. Точка $N(x; y; z)$ тогда и только тогда принадлежит прямой, когда вектор $\overrightarrow{MN}$ коллинеарен направляющему вектору $\vec{p}$, т. е. тогда и только тогда, когда существует такое число t, что $\overrightarrow{MN} = t\vec{p}$. С учетом того что координаты вектора $\overrightarrow{MN}$ равны $\{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$, получаем $x - x_0 = \alpha t$, $y - y_0 = \beta t$, $z - z_0 = \gamma t$, или

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t, \\ y = y_0 + \beta t, \\ z = z_0 + \gamma t. \end{cases} \tag{23.2}$$

Таким образом, точка N тогда и только тогда принадлежит прямой, когда существует такое число t, что ее координаты вычисляются по формулам (23.2). Соотношения (23.2) носят название *параметрических уравнений прямой*. Правые части этих соотношений представляют собой линейные функции от t. Можно составить бесконечно много параметрических уравнений прямой в пространстве, для которых функции, стоящие в правых частях, отличны от линейных. Но в дальнейшем под параметрическими уравнениями прямой мы будем понимать только уравнения вида (23.2).

Пусть координаты направляющего вектора $\vec{p}$ прямой отличны от нуля. Тогда из соотношений (23.2) следует, что

$t = \dfrac{x - x_0}{\alpha} = \dfrac{y - y_0}{\beta} = \dfrac{z - z_0}{\gamma}$. Таким образом, точка $N(x;\ y;\ z)$ в том и только в том случае принадлежит прямой, заданной начальной точкой $M(x_0;\ y_0;\ z_0)$ и направляющим вектором $\vec{p}\{\alpha; \beta; \gamma\}$ $(\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0,\ \gamma \neq 0)$, когда ее координаты удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}. \tag{23.3}$$

Уравнения (23.3) носят название *канонических уравнений прямой*.

Уравнения $\dfrac{x - x_0}{\alpha} = \dfrac{y - y_0}{\beta}$, $\dfrac{y - y_0}{\beta} = \dfrac{z - z_0}{\gamma}$ и $\dfrac{x - x_0}{\alpha} = \dfrac{z - z_0}{\gamma}$ определяют плоскости, параллельные осям координат. Первое уравнение — плоскость, параллельную оси аппликат, второе уравнение — плоскость, параллельную оси абсцисс, и третье — параллельную оси ординат (§ 22). Поэтому *канонические уравнения прямой представляют собой систему, составленную из уравнений плоскостей, проходящих через прямую линию и параллельных осям координат*.

При решении задач возникает необходимость найти параметрические уравнения прямой при условии, что даны ее общие уравнения. Ясно, что для этого достаточно определить координаты какой-либо точки прямой и ее направляющего вектора.

Теорема 1. *Пусть прямая задана своими общими уравнениями*

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0, \end{cases}$$

тогда вектор

$$\vec{p}\left\{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right\} \tag{23.4}$$

является ее направляющим.

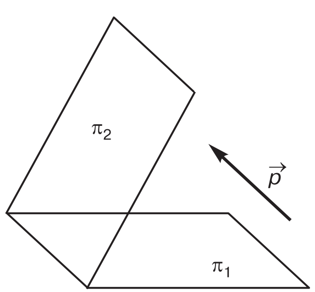


Рис. 87

Доказательство. Вектор $\vec{p}$ параллелен прямой в том и только в том случае, когда он параллелен плоскостям π_1: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и π_2: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, образующим в пересечении данную прямую (рис. 87). Проверим условие параллельности вектора и плоскости π_1 (теорема 2, § 22):

$$A_1\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} + B_1\begin{vmatrix} C_1 & A_2 \\ C_1 & A_2 \end{vmatrix} + C_1\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда следует, что вектор $\vec{p}$ параллелен плоскости π_1. Аналогично доказывается, что вектор $\vec{p}$ параллелен плоскости π_2. Теорема доказана.

Пример 1. *Найти параметрические и канонические уравнения прямой l, заданной своими общими уравнениями*

$$\begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0, \\ x + 2y - 3z + 1 = 0. \end{cases}$$

Решение. Определим координаты начальной точки прямой. Для этого найдем произвольное решение данной системы. Положим $z = 0$, тогда $\begin{cases} 2x + y - 1 = 0, \\ x + 2y + 1 = 0. \end{cases}$ Получим $x = 1$; $y = -1$. Таким образом, точка $M(1; -1; 0)$ лежит на данной прямой. Для нахождения координат направляющего вектора $\vec{p}$ воспользуемся соотношениями (23.4): $\vec{p}\left\{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right\}$ или $\vec{p}\{-1; 5; 3\}$.

Искомые уравнения имеют вид

$$\begin{cases} x = 1 - t, \\ y = -1 + 5t, \\ z = 3t \end{cases}$$

или

$$1 - x = \frac{y+1}{5} = \frac{z}{3}.$$

Таким образом, при любом способе задания прямой можно найти ее направляющий вектор и начальную точку.

Теорема 2. *Пусть в пространстве задана плоскость* π: $Ax + By + Cz + D = 0$ *и прямая* l *с начальной точкой* $M\,(x_0; y_0; z_0)$ *и направляющим вектором* $\vec{p}\{\alpha; \beta; \gamma\}$. *Тогда прямая* l *и* π *плоскость пересекаются в том и только в том случае, когда*

$$A\alpha + B\beta + C\gamma \neq 0, \qquad (23.5)$$

l и π параллельны тогда и только тогда, когда

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0, \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0, \qquad (23.6)$$

и l лежит в плоскости π в том и только в том случае, когда

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \qquad (23.7)$$

Доказательство. Параметрические уравнения прямой l имеют вид

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t, \\ y = y_0 + \beta t, \\ z = z_0 + \gamma t. \end{cases}$$

Найдем общие точки прямой l и плоскости π. Для этого следует заменить в общем уравнении плоскости неизвестные x, y и z на их выражения через параметр t из параметрических уравнений прямой. Получим уравнение относительно t, корни которого являются параметрами точек пересечения прямой и плоскости. Итак, сделав замену

$$A(\alpha + x_0t) + B(\beta + y_0t) + C(\gamma + z_0t) = 0$$

или

$$(A\alpha + B\beta + C\gamma)t + Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \qquad (23.8)$$

получим линейное уравнение относительно t. Оно имеет единственное решение в том и только в том случае, когда коэффициент при t отличен от нуля, т. е. тогда и только тогда, когда выполнено неравенство (23.5). В этом случае прямая и плоскость пересекаются в точке. Уравнение (23.8) не имеет решений тогда и только тогда, когда выполнены условия (23.6). Этот случай возможен только при условии параллельности прямой и плоскости. И наконец, для того чтобы уравнение имело бесконечно много решений, необходимо и достаточно, чтобы и коэффициент при t, и свободный член совпадали с нулем, т. е. чтобы выполнялись равенства (23.7). В этом случае все точки прямой принадлежат плоскости. Теорема доказана.

Исследуем взаимное расположение двух прямых. Будем предполагать, что прямая l_1 задана точкой $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и направляющим вектором $\vec{p}_1\{\alpha_1; \beta_1; \gamma_1\}$, а прямая l_2 — точкой $M_2(x_2; y_2; z_2)$ и направляющим вектором $\vec{p}_2\{\alpha_2; \beta_2; \gamma_2\}$.

Прямые l_1 и l_2 скрещиваются в том и только в том случае, когда не существует плоскости, содержащей эти прямые. Пусть существует плоскость π, содержащая l_1 и l_2 (рис. 88). Тогда векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ компланарны. Ясно, что справедливо и обратное утверждение: если эти векторы компланарны, то прямые l_1 и l_2 принадлежат одной плоскости. Используя условие компланарности векторов в пространстве (§ 3), получим, что прямые l_1 и l_2 скрещиваются тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \neq \mathbf{0}. \qquad (23.9)$$

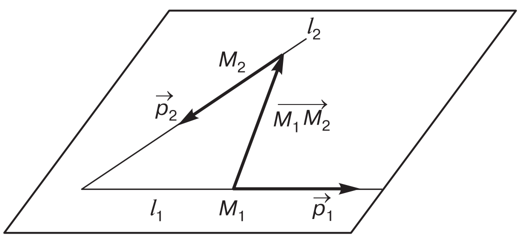


Рис. 88

Изучим теперь условия параллельности прямых l_1 и l_2.

Обозначим соответственно через R и r ранги матриц

$$\begin{pmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix}$$

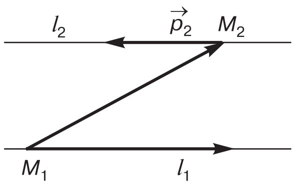
и

$$\begin{pmatrix} \alpha_1\, \beta_1\, \gamma_1 \\ \alpha_1\, \beta_2\, \gamma_2 \end{pmatrix}.$$

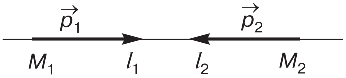
Пусть прямые l_1 и l_2 параллельны. Тогда векторы $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ коллинеарны, а значит, $r = 1$. Но при этом точка M_2 не лежит на прямой l_1 (рис. 89, *а*). Отсюда вытекает, что вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ не коллинеарен $\vec{p}_1$. Это означает, что $R = 2$. Ясно, что эти условия также являются и достаточными. Таким образом, если

$$r = 1,\ R = 2, \qquad (23.10)$$

то прямые l_1 и l_2 параллельны. Отметим, что из условия $r = 1$ следует, что векторы $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ компланарны.



а)



б)

Рис. 89

Рассмотрим теперь совпадающие прямые l_1 и l_2. Тогда векторы $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$, а также вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ коллинеарны (рис. 89, *б*). Отсюда следует, что

$$R = r = 1. \tag{23.11}$$

Очевидно обратное: если выполнены соотношения (23.11), то прямые l_1 и l_2 совпадают. Мы доказали следующую теорему.

Теорема 3. *Для того чтобы прямые l_1 и l_2 скрещивались, были параллельны или совпадали, необходимо и достаточно, чтобы соответственно выполнялись условия* (23.9), (23.10) *или* (23.11).

Пример 2. *Даны уравнения двух прямых*

$$l_1:\begin{cases} x = 2, \\ y = -1 + t, \\ z = -7 + 3t, \end{cases} \quad l_2:\begin{cases} x = 5 - t, \\ y = -2 + t, \\ z = -4 + t. \end{cases}$$

Доказать, что прямые пересекаются, и найти координаты точки пересечения.

Решение. Первая прямая определена точкой $M_1(2,\ -1,\ -7)$ и вектором $\vec{p}_1\{0; 1; 3\}$, вторая — точкой $M_2(5, -2, -4)$ и вектором $\vec{p}_2\{-1; 1; 1\}$. Проверим условия (23.9) и (23.10). Вычислим определитель, составленный из координат векторов $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Значит, прямые l_1 и l_2 лежат в одной плоскости. Координаты векторов $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ непропорциональны, поэтому они неколлинеарные, следовательно, выполнено условие (23.10). Прямые l_1 и l_2 пересекаются.

Пусть x, y и z — координаты точки пересечения, а u и v — соответственно параметры этой точки в параметрических уравнениях прямых l_1 и l_2. Тогда $x = 2$, $y = 1 + u$, $z = -7 + 3u$ и $x = 5 - v$, $y = -2 + v$, $z = -4 + v$. Отсюда следует, что

$$\begin{cases} 2 = 5 - v, \\ -1 + u = -2 + v, \\ -7 + 3u = -4 + v. \end{cases}$$

Мы получили систему трех линейных уравнений с двумя неизвестными u и v. Такие системы в основном случае не имеют решений. Но так как прямые l_1 и l_2 пересекаются, то полученная система совместна. Найдем u и v из первых двух уравнений: $u = 2$, $v = 3$. Нетрудно видеть, что эти значения удовлетворяют третьему уравнению. Подставляя $u = 2$ в параметрические уравнения прямой l_1, получим координаты искомой точки X пересечения прямых: $X\,(2;\,1;\,-1)$.

Свойства уравнений прямой линии в прямоугольной декартовой системе координат

Будем предполагать, что в пространстве выбрана прямоугольная декартова система координат. Так как прямоугольная декартова система координат является частным случаем аффинной системы, то при этом остаются справедливыми все свойства прямой, доказанные выше. Рассмотрим задачи, для решения которых удобно использовать именно прямоугольную декартову систему координат. Выведем формулы для вычислений углов между двумя прямыми, между прямой и плоскостью, расстояний от точки до прямой и между двумя прямыми.

Прежде всего, отметим следующее. Пусть прямая задана своими общими уравнениями $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$ Тогда вектор $\vec{p}\left\{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right\}$ является для нее направляющим согласно теореме 1. Но в прямоугольной декартовой системе координат векторы $\vec{n}_1\{A_1; B_1; C_1\}$ и $\vec{n}_2\{A_2; B_2; C_2\}$ перпендикулярны плоскостям π_1: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и π_2: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, пересекающимся по данной прямой. Вектор $\vec{p}$, как следует из формул для вычисления его координат, равен векторному произведению векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$: $\vec{p} = [\vec{n}_1\vec{n}_2]$ (§ 6). Этот факт имеет ясный геометрический смысл. Векторное произведение перпендикулярно сомножителям $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$, т. е. параллельно плоскостям π_1 и π_2. Поэтому вектор $\vec{p}$ параллелен прямой l пересечения этих плоскостей.

Пусть дана плоскость $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ и прямая l, определенная начальной точкой $M(x_0; y_0; z_0)$ и направляющим вектором $\vec{p}\{\alpha; \beta; \gamma\}$. Как известно из школьного курса стереометрии, прямая l перпендикулярна плоскости π, если она образует прямой угол с любой прямой, принадлежащей π. В этом случае $\vec{p}$ — нормальный вектор плоскости и, следовательно, он коллинеаран вектору $\vec{n}\{A; B; C\}$. Таким образом, прямая l *перпендикулярна плоскости* π *тогда и только тогда, когда ранг матрицы* $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ A & B & C \end{pmatrix}$ *равен единице*.

Если прямая l не перпендикулярна плоскости π, то под углом φ между прямой и плоскостью понимается острый угол между этой прямой и ее проекцией e' на плоскость π. Если m — прямая, перпендикулярная плоскости, а ψ — угол между m и l, то $\varphi = \dfrac{\pi}{2} - \psi$, $\sin\varphi = \cos\psi$. Вектор $\vec{n}\{A; B; C\}$ перпендикулярен π, т. е. параллелен прямой m.

Поэтому $\psi = \angle\vec{n}\vec{p}$, если угол $\measuredangle\vec{n}\vec{p}$ острый (рис. 90, *а*), и $\psi = \pi - \angle\vec{n}\vec{p}$, если угол $\angle\vec{n}\vec{p}$ тупой (рис. 90, *б*). Отсюда следует, что $\sin\psi = |\cos\angle\vec{n}\vec{p}|$. Таким образом, $\sin\psi = |\cos\angle\vec{n}\vec{p}| = \dfrac{|\vec{n}\vec{p}|}{|\vec{n}||\vec{p}|}$. Так как координаты векторов $\vec{n}$ и $\vec{p}$ даны в прямоугольной декартовой системе координат, то

$$\sin\psi = \frac{|A\alpha + B\beta + C\gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}. \qquad (22.12)$$

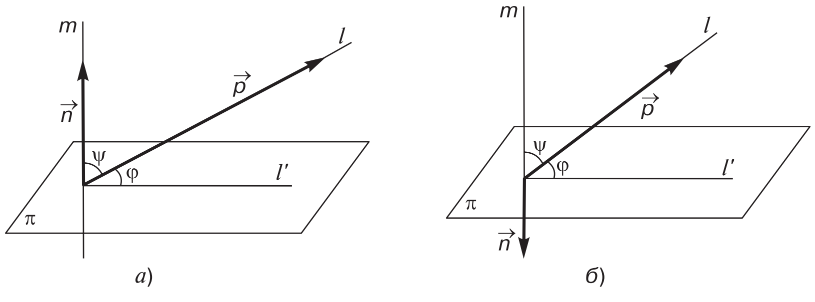


Рис. 90

Рассмотрим в пространстве две прямые l_1 и l_2 с направляющими векторами $\vec{p}_1\{\alpha_1;\beta_1;\gamma_1\}$ и $\vec{p}_2\{\alpha_2;\beta_2;\gamma_2\}$. Как известно, под величиной угла φ между прямыми l_1 и l_2 понимается острый угол между пересекающимися прямыми l_1' и l_2', параллельными l_1 и l_2. Следовательно, $\varphi=\angle\vec{p}_1\vec{p}_2$, если угол $\angle\vec{p}_1\vec{p}_2$ острый или прямой, и $\varphi=\pi-\angle\vec{p}_1\vec{p}_2$, если угол $\angle\vec{p}_1\vec{p}_2$ тупой. Отсюда

$$\cos\varphi=\frac{|\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2|}{\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2}\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2}}.$$

Выведем формулу для вычисления расстояния от точки до прямой в пространстве. Пусть даны координаты точки $N(x_1;y_1;z_1)$, а прямая l задана своей начальной точкой $M(x_0;y_0;z_0)$ и направляющим вектором $\vec{p}\{\alpha;\beta;\gamma\}$. Рассмотрим параллелограмм $MNPQ$, построенный на векторах $\overrightarrow{MN}$ и $\vec{p}$ (рис. 91). Искомое расстояние равно длине h высоты NH этого параллелограмма. Если S — его площадь, то $h=\dfrac{S}{|MQ|}$. Но, как было показано в § 6, $S=\left|[\overrightarrow{MN}\vec{p}]\right|$. Кроме того, $\left|\overrightarrow{MN}\right|=|\vec{p}|$. Поэтому $h=\dfrac{\left|[\overrightarrow{MN}\vec{p}]\right|}{|\vec{p}|}$. Так как координаты вектора $\overrightarrow{MN}$ равны $\{x_1-x_0;\,y_1-y_0;\,z_1-z_0\}$, то, используя формулы для вычисления координат векторного произведения векторов, получаем искомое выражение:

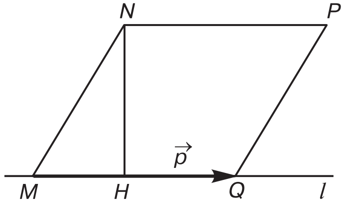


Рис. 91

$$h=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix}x_1-x_0 & y_1-y_0\\ \alpha & \beta\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1-x_0 & z_1-z_0\\ \alpha & \gamma\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}y_1-y_0 & z_1-z_0\\ \beta & \gamma\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}.$$

Пусть l_1 и l_2 — скрещивающиеся прямые в пространстве. Прямая l_1 определена точкой $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и направляющим вектором $\vec{p}\{\alpha_1;\beta_1;\gamma_1\}$, а прямая l_2 — точкой $N(x_2;\ y_2;\ z_2)$ и направляющим вектором $\vec{q}\{\alpha_2;\beta_2;\gamma_2\}$. Найдем расстояние d между этими прямыми. Оно равно расстоянию между параллельными плоскостями, каждая из которых параллельна одной из этих прямых и содержит вторую. Рассмотрим тройку неком-

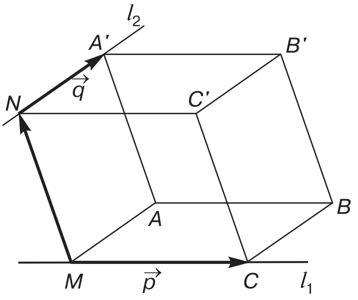


Рис. 92

планарных векторов $\overrightarrow{MN}$, $\vec{p}$, $\vec{q}$ и достроим ее до параллелепипеда $MABCNA'B'C'$ (рис. 92). Искомое расстояние в равно высоте этого параллелепипеда. Поэтому $d=\dfrac{V}{S}$, где V — его объем, а S — площадь основания $MABC$. Из свойств смешанного и векторного произведений векторов (§ 6, 7), имеем: $d=\dfrac{\left|(\overrightarrow{MN}, \vec{p}, \vec{q})\right|}{\left|[\vec{p}\,\vec{q}]\right|}$.

Координаты вектора $\overrightarrow{MN}$ равны $\{x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1\}$, отсюда следует, что

$$d=\frac{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}^2}}.$$