

Тема 4. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ В АФФИННОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

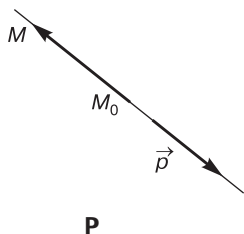
Будем предполагать, что на плоскости выбрана аффинная система координат. Рассмотрим произвольную прямую плоскости. Под ее направляющим вектором будем понимать любой ненулевой вектор, который ей параллелен. Ясно, что любая прямая полностью определена, если даны координаты какой-либо ее точки и направляющего вектора. Через эту точку проходит единственная прямая, параллельная данному ненулевому вектору.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. Даны координаты точки $M_0(x_0; y_0)$ и ненулевого вектора $\vec{p}\{\alpha; \beta\}$. Найти уравнение прямой, которая проходит через M и для которой вектор $\vec{p}$ — направляющий.

Решение. Рассмотрим произвольную точку $M(x; y)$, принадлежащую данной прямой (рис. 49). Тогда $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{p}$. Вектор $\overrightarrow{M_0M}$ имеет следующие координаты: $\{x - x_0; y - y_0\}$. Воспользуемся условием коллинеарности векторов в координатах (§ 3):

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0. \quad (13.1)$$



Соотношение (13.1) можно рассматривать как уравнение с неизвестными x и y . Таким образом, если точка M лежит на прямой, то ее координаты служат решением уравнения (13.1). Обратно, пусть координаты некоторой точки $N(x; y)$ удовлетворяют уравнению (13.1). Так как координаты вектора $\overline{M_0N}$ вны $\{x - x_0; y - y_0\}$, то из соотношений (13.1) следует, что $\overline{M_0N} \parallel \vec{p}$. Отсюда получим, что точка N лежит на прямой, проходящей через точку M_0 и параллельной вектору $\vec{p}$. Мы показали, что точка лежит на данной прямой в том и только в том случае, когда ее координаты удовлетворяют уравнению (13.1).

Как известно, через две различные точки проходит единственная прямая. В связи с этим рассмотрим следующую задачу.

Задача 2. Даны координаты двух различных точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Требуется определить уравнение прямой AB .

Решение. Решение этой задачи легко сводится к решению предыдущей. Так как точки A и B различны, то $\overline{AB} \neq \vec{0}$. Поэтому $\overline{AB}$ можно принять в качестве направляющего вектора искомой прямой. Так как $\overline{AB}\{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$, то, воспользовавшись соотношением (13.1), получим искомое уравнение:
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0.$$

В § 11 было дано определение параметрических уравнений линий на плоскости. Выведем параметрические уравнения прямой. Пусть прямая l задана точкой $M(x_0; y_0)$ и направляющим вектором $\vec{p}\{\alpha; \beta\}$. Предположим, что $M(x; y)$ — произвольная точка прямой. Тогда $\overline{M_0M} \parallel \vec{p}$. Из теоремы о коллинеарных векторах (§ 2) следует, что существует такое число t , для которого $\overline{M_0M} = t\vec{p}$. Так как координаты вектора $\overline{M_0M}$ равны $\{x - x_0; y - y_0\}$, то

$$\begin{cases} x - x_0 = \alpha t, \\ y - y_0 = \beta t, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t, \\ y = y_0 + \beta t. \end{cases} \quad (13.2)$$

Обратно, пусть дана точка $N(x; y)$ и пусть существует такое число t , при котором координаты x и y удовлетворяют соотношениям (13.2). Тогда $x - x_0 = \alpha t$, $y - y_0 = \beta t$. Так как $\{x - x_0; y - y_0\}$ — координаты вектора $\overline{M_0N}$, $\{\alpha; \beta\}$ — координаты вектора $\vec{p}$,

то полученное соотношение равносильно векторному равенству $\overrightarrow{M_0N} = t\vec{p}$. Поэтому $\overrightarrow{M_0N} \parallel \vec{p}$ и точка N лежит на прямой l . Таким образом, точка лежит на прямой тогда и только тогда, когда существует такое число t , что ее координаты вычисляются по формулам (13.2), которые и представляют собой искомые параметрические уравнения.

Ясно, что параметрические уравнения прямой можно записать в виде, отличном от (13.2). Например, если в этих соотношениях заменить t на любую монотонную функцию, зависящую от t и принимающую все действительные значения, то опять получим параметрические уравнения той же прямой. Условимся в дальнейшем под параметрическими уравнениями прямой понимать только уравнения вида (13.2).

Уравнение (13.1) не всегда удобно в использовании. Например, для того чтобы проверить, лежит ли точка на прямой, следует подставить ее координаты в это уравнение, а затем раскрыть определитель, стоящий в левой части. Поэтому раскроем определитель и преобразуем уравнение (13.1) к виду

$$\beta x - \alpha y + \alpha y_0 - \beta x_0 = 0. \quad (13.3)$$

Теперь для проверки достаточно подставить координаты точки в левую часть этого уравнения. Уравнение (13.3) также позволяет нам сделать важное заключение. Числа α и β как координаты ненулевого вектора $\vec{p}$ не равны нулю одновременно, поэтому уравнение (13.3) представляет собой линейное уравнение. Следовательно, *прямая линия является алгебраической линией первого порядка* (§ 11). Возникает следующий вопрос: всегда ли алгебраическая линия первого порядка является прямой линией? Ответ на него дает следующая теорема.

Теорема 1. *Линия на плоскости тогда и только тогда является алгебраической линией первого порядка, когда она представляет собой прямую линию.*

Доказательство. Необходимость этого утверждения почти очевидна. Любая прямая на плоскости определена некоторой точкой и направляющим вектором. Поэтому ее уравнение представимо в виде (13.3), т. е. в виде

$$Ax + By + C = 0, \quad (13.4)$$

где $A = \beta$, $B = -\alpha$, $C = \alpha y_0 - \beta x_0$. Так как α и β — координаты направляющего вектора, который по определению отличен от нуля,

то коэффициенты при неизвестных в этом уравнении удовлетворяют неравенству

$$A^2 + B^2 \neq 0. \quad (13.5)$$

Необходимость доказана.

Проверим достаточность утверждения теоремы. Пусть на плоскости дана некоторая линия γ , уравнение которой имеет вид $Ax + By + C = 0$, где $A^2 + B^2 \neq 0$. Покажем, что это уравнение имеет, по крайней мере, одно решение. Пусть $A \neq 0$. Рассмотрим точку M_0 , координаты которой равны $\left(-\frac{C}{A}; 0\right)$. Легко видеть, что $A\left(-\frac{C}{A}\right) + B \cdot 0 + C = 0$, т. е. M_0 принадлежит γ . Если $A = 0$, то в силу неравенства (13.5) $B \neq 0$. В этом случае следует рассмотреть точку N_0 с координатами $\left(0; -\frac{C}{B}\right)$. В дальнейшем рассуждение будем проводить при условии $A \neq 0$. Для случая $A = 0$ доказательство приводится аналогично. Проведем через точку $M_0\left(-\frac{C}{A}; 0\right)$ прямую l , направляющий вектор $\vec{p}$ которой имеет координаты $\{-B; A\}$. Так как $A \neq 0$, то $\vec{p} \neq \vec{0}$, поэтому вектор $\vec{p}$ может служить в качестве направляющего вектора прямой. Из формулы (13.1) следует, что уравнение прямой l можно представить в виде $\begin{vmatrix} x + \frac{C}{A} & y \\ -B & A \end{vmatrix} = 0$. Отсюда $A\left(x + \frac{C}{A}\right) + By = 0$, или $Ax + By + C = 0$. Таким образом, кривая γ и прямая l имеют одно и то же уравнение. Поэтому они совпадают. Теорема доказана полностью.

Уравнение (13.4) называют *общим уравнением прямой на плоскости*.

В дальнейшем мы часто будем использовать следующую лемму.

Лемма. Пусть даны прямая, общее уравнение которой имеет вид $Ax + By + C = 0$, и вектор $\vec{p}\{\alpha; \beta\}$. Тогда вектор в том и только в том случае параллелен прямой, когда

$$A\alpha + B\beta = 0. \quad (13.6)$$

Доказательство. Пусть вектор $\vec{p}\{\alpha; \beta\}$ параллелен прямой. Тогда на ней существуют точки $M(x_1; y_1)$ и $N(x_2; y_2)$ такие, что $\vec{p} = \overrightarrow{MN}$. Координаты этих точек удовлетворяют уравнению пря-

мой, поэтому $Ax_2 + By_2 + C = 0$, $Ax_1 + By_1 + C = 0$. Вычтем из первого равенства второе: $A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) = 0$. Так как $\vec{p} = \overrightarrow{MN}$, то $x_2 - x_1 = \alpha$, $y_2 - y_1 = \beta$. Равенство (13.6) доказано.

Обратно, пусть координаты вектора $\vec{p}$ удовлетворяют соотношению (13.6). Выберем произвольную точку $M(x_1; y_1)$ на прямой и отложим от нее вектор $\vec{p}$: $\overrightarrow{MN} = \vec{p}$. Пусть координаты точки N равны $(x_2; y_2)$, тогда $x_2 = x_1 + \alpha$, $y_2 = y_1 + \beta$. Ясно, что вектор $\vec{p}$ в том и только в том случае параллелен прямой, когда ей принадлежит точка N . Подставим ее координаты в левую часть уравнения прямой: $Ax_2 + By_2 + C = A(x_1 + \alpha) + B(y_1 + \beta) + C = Ax_1 + By_1 + A\alpha + B\beta$. Но $Ax_1 + By_1 + C = 0$ так как точка M принадлежит прямой, а $A\alpha + B\beta = 0$ в силу условия (13.6). Поэтому N лежит на прямой, а вектор $\vec{p}$ ей параллелен. Лемма доказана.

Следствие. Если уравнение прямой l имеет вид $Ax + By + C = 0$, то векторы $\vec{p}\{B; -A\}$ и $\vec{q}\{-B; A\}$ параллельны прямой.

Действительно, координаты векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$ удовлетворяют соотношению (13.6).

Пример 1. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(3; -1)$ и параллельной прямой l , заданной своим общим уравнением $2x - 3y + 5 = 0$.

Решение. Так как искомая прямая параллельна данной, то они имеют одни и те же направляющие векторы. Из следствия леммы вытекает, что в качестве направляющего можно выбрать вектор с координатами $\vec{p}\{3; 2\}$. Таким образом, нам дана точка $M(3; -1)$ искомой прямой и ее направляющий вектор $\vec{p}$. Вос-

пользуемся уравнением (13.1), получим: $\begin{vmatrix} x-3 & y+1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$ или $2x - 3y - 9 = 0$.

Если сравнить найденное уравнение прямой, параллельной l , с уравнением самой прямой l , то мы видим, что коэффициенты при неизвестных x и y совпадают, а свободные члены различны. Этот факт не является случайным. Рассмотрим следующую задачу.

Задача 3. Прямые l и t заданы своими общими уравнениями $l: A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $t: A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Выяснить, при каких условиях, наложенных на коэффициенты их уравнений, прямые пересекаются, параллельны или совпадают.

Ясно, что решение задачи зависит от количества общих точек данных прямых. Если существует единственная общая точка, то прямые пересекаются. Если таких точек две, то прямые совпадают и любая точка одной прямой принадлежит второй, и, если

прямые не имеют общих точек, то они параллельны. Координаты общих точек прямых l и m являются решениями системы, составленной из их уравнений (§ 11):

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases} \quad (13.7)$$

Обозначим через r ранг основной матрицы этой системы

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}, \quad (13.8)$$

а через R — ранг ее расширенной матрицы

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}. \quad (13.9)$$

Рассмотренные матрицы имеют две строки, поэтому $r \leq 2$ и $R \leq 2$. Ясно, что $R \geq r$. Коэффициенты A_1, B_1 и A_2, B_2 удовлетворяют условию (13.5), они не равны одновременно нулю, поэтому $r \geq 1$. В курсе алгебры доказывается, что система (13.7) имеет единственное решение в том и только в том случае, когда $r = 2$. Эта система несовместна, т. е. не имеет решения в том случае, когда $R > r$. Она имеет бесконечно много решений тогда и только тогда, когда $R = r < 2$. Мы доказали следующую теорему.

Теорема 2. Пусть прямые l и m заданы своими общими уравнениями $l: A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $m: A_2x + B_2y + C_2 = 0$, r и R — ранги матриц (13.8) и (13.9). Прямые тогда и только тогда пересекаются, когда $r = R = 2$, параллельны, когда $r = 1, R = 2$ и совпадают, когда $R = r = 1$.

Если $r = 2$, то строки матрицы (13.8) не пропорциональны, а ее определитель отличен от нуля. Если $r = 1, R = 2$, то строки матрицы (13.8) пропорциональны между собой, а матрицы (13.9) не пропорциональны друг другу. И наконец, если $r = R = 1$, то строки расширенной матрицы системы (13.7) пропорциональны между собой. Таким образом, справедливо следствие теоремы 2:

Следствие. Прямые l и m , заданные своими общими уравнениями $l: A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $m: A_2x + B_2y + C_2 = 0$, пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0; \quad (13.10)$$

параллельны, если существует такое число $k \neq 0$, что

$$A_1 = kA_2, \quad B_1 = kB_2, \quad C_1 \neq kC_2; \quad (13.11)$$

и совпадают, если существует такое число $k \neq 0$, что

$$A_1 = kA_2, \quad B_1 = kB_2, \quad C_1 = kC_2. \quad (13.12)$$

Полученные соотношения имеют следующий геометрический смысл. Нами установлено, что векторы $\vec{p}_1\{B_1; -A_1\}$ и $\vec{p}_2\{B_2; -A_2\}$ параллельны прямым l и m . Неравенство (13.10) равносильно неколлинеарности векторов $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$, но в этом и только в этом случае прямые пересекаются в единственной точке. Если $A_1 = kA_2$, $B_1 = kB_2$, то $\vec{p}_1 \parallel \vec{p}_2$, поэтому прямые l и m либо параллельны, либо совпадают друг с другом.

Рассмотрим прямую l , заданную своим общим уравнением $Ax + By + C = 0$. Координаты начала O системы координат равны $(0; 0)$. Поэтому точка O в том и только в том случае принадлежит прямой l , когда $C = 0$. Так как ось абсцисс имеет уравнение $y = 0$, то из формул (13.11) и (13.12) следует, что прямая l параллельна оси абсцисс в том и только в том случае, когда $A = 0$, $C \neq 0$, и совпадает с этой осью, когда $A = C = 0$. Аналогично, уравнение оси ординат имеет вид $x = 0$. Поэтому прямая l параллельна оси ординат тогда и только тогда, когда $B = 0$, $C \neq 0$, и совпадает с этой осью, когда $B = C = 0$.

Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости, для которых она служит границей. Выведем аналитические условия, определяющие эти полуплоскости. Для упрощения дальнейших выкладок введем следующие обозначения. Если дано уравнение $Ax + By + C = 0$, а некоторая точка M имеет координаты $(x; y)$, то под $\delta(M)$ будем понимать число, равное $\delta(M) = Ax + By + C$.

Пусть прямая l задана своим общим уравнением $Ax + By + C = 0$. Рассмотрим две точки M и N , не принадлежащие этой прямой. Из геометрических соображений ясно, что точки M и N лежат в различных полуплоскостях, определяемых прямой l , в том и только в том случае, когда отрезок MN пересекается с l в некоторой своей внутренней точке (рис. 50, а). Точки M и N лежат в одной полуплоскости, если отрезок MN не пересекается с l . В этом случае точка пересечения прямых MN и l лежит вне отрезка MN (рис. 50, б) либо прямые MN и l параллельны (рис. 50, в). Пусть заданы координаты точек M и N : $M(x_1; y_1)$, $N(x_2; y_2)$. Найдем условия, при которых точка T пересечения

MN и l лежит на отрезке MN . Обозначим через t простое отношение: $t = (MN, T)$. Тогда если x и y — координаты точки T , то $x = \frac{x_1 + tx_2}{1+t}$, $y = \frac{y_1 + ty_2}{1+t}$ (§ 10). Точка T принадлежит l в том и только в том случае, когда $A \frac{x_1 + tx_2}{1+t} + B \frac{y_1 + ty_2}{1+t} + C = 0$. Отсюда $(Ax_2 + By_2 + C)t + Ax_1 + By_1 + C = 0$ или $\delta(N)t + \delta(M) = 0$. Так как M и N не лежат на прямой l , то $\delta(M) \neq 0$, $\delta(N) \neq 0$, поэтому $t = -\frac{\delta(M)}{\delta(N)}$.

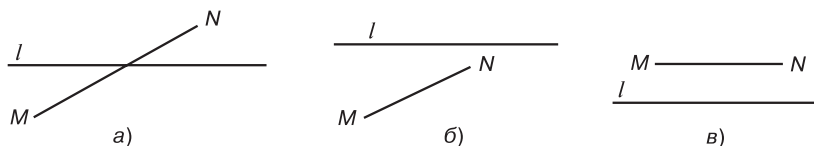


Рис. 50

В § 10 мы установили, точка T в том и только в том случае лежит на отрезке MN , когда $(MN, T) > 0$. Следовательно, точки M и N лежат в разных полуплоскостях относительно прямой l тогда и только тогда, когда $\delta(M)$ и $\delta(N)$ имеют разные знаки. Если точка T пересечения прямых MN и l лежит вне отрезка MN , то $t = (MN, T) < 0$, поэтому знаки чисел $\delta(M)$ и $\delta(N)$ одинаковы. Легко доказать, что знаки этих чисел совпадают и в случае, когда прямые MN и l параллельны. Действительно, при этом вектор $\overline{MN}$ параллелен l , и его координаты $\{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$ удовлетворяют условию параллельности вектора и прямой (см. лемму): $A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) = 0$. Отсюда получим $Ax_2 + By_2 = Ax_1 + By_1$ или $Ax_2 + By_2 + C = Ax_1 + By_1 + C$. Таким образом, $\delta(M) = \delta(N)$. Знаки этих чисел одинаковы. Итак, нами доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Точки M и N лежат в разных полуплоскостях относительно прямой l тогда и только тогда, когда числа $\delta(M)$ и $\delta(N)$ имеют различные знаки, и в одной полуплоскости, когда их знаки совпадают.*

Возьмем на плоскости произвольную точку M , координаты которой удовлетворяют неравенству $Ax + By + C > 0$. Тогда, как следует из теоремы 3, этому неравенству удовлетворяют координаты тех и только тех точек, которые лежат в той же полуплоскости относительно l , что и точка M . Неравенству же

$Ax + By + C < 0$ удовлетворяют координаты всех точек, принадлежащих второй полуплоскости. Таким образом, справедливо следствие.

Следствие. Точки, координаты которых являются решением неравенства $Ax + By + C > 0$, образуют полуплоскость, граница которой имеет уравнение $Ax + By + C = 0$. Координаты точек, лежащих в другой полуплоскости, определенной той же границей, удовлетворяют неравенству $Ax + By + C < 0$.

Можно указать геометрический способ, с помощью которого можно выяснить, какая полуплоскость соответствует неравенству $Ax + By + C > 0$. Рассмотрим вектор $\vec{n}\{A; B\}$. Так как $A^2 + B^2 \neq 0$, из леммы следует, что $\vec{n}$ не параллелен l . Отложим этот вектор от произвольной точки N , принадлежащей l : $\overrightarrow{NM} = \vec{n}$ (рис. 51). Если координаты точки N равны $(x_1; y_1)$, то точка M имеет координаты $(x_1 + A; y_1 + B)$. Найдем $\delta(M)$: $\delta(M) = A(x_1 + A) + B(y_1 + B) + C = Ax_1 + By_1 + C + A^2 + B^2$. Так как N лежит на l , то $Ax_1 + By_1 + C = 0$, поэтому $\delta(M) = A^2 + B^2$. Таким образом, нами построена точка M , которая принадлежит полуплоскости, определяемой неравенством $Ax + By + C > 0$. Для того чтобы выяснить, какая из полуплоскостей определяется неравенством $Ax + By + C > 0$, достаточно от произвольной точки прямой отложить вектор $\vec{n}$, его конец будет принадлежать искомой полуплоскости.

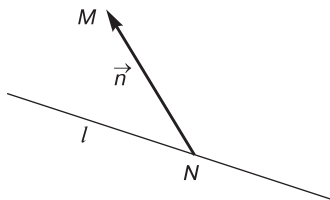


Рис. 51

Пример 2. Даны уравнения прямых $l: 4x + y - 8 = 0$ и $m: x - 3y + 1 = 0$, а также координаты точки $M(1; 1)$. Найти систему неравенств, определяющую угол, полученный при пересечении l и m , которому принадлежит точка M .

Решение. Подставим координаты точки M в левые части уравнений данных прямых: $\delta_1(M) = 4 + 1 - 8 < 0$, $\delta_2(M) = 1 - 3 + 1 < 0$. Рассмотрим полуплоскости π_1 и π_2 , определяемые неравенствами $4x + y - 8 < 0$, $x - 3y + 1 < 0$. Так как $\delta_1(M) < 0$, $\delta_2(M) < 0$, точка M лежит и в π_1 и в π_2 , поэтому она принадлежит углу, образованному при пересечении этих полуплоскостей. Искомые аналитические условия имеют вид

$$\begin{cases} 4x + y - 8 < 0, \\ x - 3y + 1 < 0. \end{cases}$$

§ 14. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

В настоящем параграфе мы рассмотрим задачи, решения которых удобно проводить в прямоугольной декартовой системе координат. Будем предполагать, если не оговорено особо, что на плоскости выбрана именно такая система координат. Так как прямоугольная декартова система координат является частным случаем аффинной, то в ней справедливы все уравнения и формулы, полученные в § 13.

Прежде всего, введем следующее определение.

Определение 1. *Ненулевой вектор $\vec{n}$ называется нормальным вектором прямой, если он перпендикулярен любому вектору, ей параллельному.*

Ясно, что ненулевой вектор $\vec{n}$ будет нормальным вектором прямой, если он перпендикулярен хотя бы одному из ее направляющих векторов. Если $\vec{n}$ — нормальный вектор прямой l , а прямая t параллельна $\vec{n}$, то l и t перпендикулярны.

Лемма. *Пусть прямая l задана своим общим уравнением $Ax + By + C = 0$. Тогда $\vec{n}\{A; B\}$ — нормальный вектор прямой l .*

Доказательство. Так как $A^2 + B^2 \neq 0$ (§ 13), то $\vec{n} \neq \vec{0}$. Пусть α и β — координаты произвольного вектора $\vec{r}$, параллельного прямой l . Тогда, как следует из леммы, доказанной в предыдущем параграфе, $A\alpha + B\beta = 0$. Так как система координат прямоугольная декартова, то левая часть этого неравенства равна скалярному произведению $\vec{n}\vec{r}$. Таким образом, $\vec{n}\vec{r} = 0$, векторы $\vec{n}$ и $\vec{r}$ перпендикулярны. Лемма доказана.

Если на плоскости задана точка и ненулевой вектор, то существует единственная прямая, которая проходит через эту точку и для которой данный вектор служит нормальным. Рассмотрим следующую задачу.

Задача. *Даны координаты точки $M(x_0; y_0)$ и ненулевого вектора $\vec{n}\{A; B\}$. Требуется составить уравнение прямой, для которой $\vec{n}$ — нормальный вектор и которая проходит через данную точку.*

Решение. Рассмотрим вектор $\vec{r}\{-B; A\}$. Так как $\vec{r} \neq \vec{0}$ и $\vec{n}\vec{r} = -AB + AB = 0$, то вектор $\vec{r}$ параллелен искомой прямой и является ее направляющим вектором. Составим уравнение прямой по точке и направляющему вектору (§ 13):

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ -B & A \end{vmatrix} = 0$$

или

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (14.1)$$

Уравнение (14.1) — исконое.

Пример 1. Даны уравнение прямой $l: x - 5y + 4 = 0$ и координаты точки $M(2; -4)$. Найти координаты точки N , симметричной M относительно l .

Решение. Точка N будет искомой, если она лежит на прямой m , перпендикулярной l и проходящей через M , а точка O пересечения m и l делит отрезок MN пополам (рис. 52). Так как прямые m и l перпендикулярны, то m параллельна любому нормальному вектору прямой l . Вектор $\vec{n}\{1; -5\}$, как следует из леммы 1, служит нормальным вектором по отношению к l , поэтому прямая m определяется точкой $M(2; -4)$ и направляющим вектором $\vec{n}$. Составим ее уравнение: $\begin{vmatrix} x-2 & y+4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 0$. После преобразования получим $5x + y - 6 = 0$. Для определения координат точки O следует решить систему, составленную из уравнений прямых m и l :

$$\begin{cases} x - 5y + 4 = 0, \\ 5x + y - 6 = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим, что точка O имеет координаты $(1; 1)$. Если обозначить координаты искомой точки N через x и y , то из формул для определения координат середин отрезка по координатам его концов (§ 10) следует, что $\frac{x+2}{2} = 1$, $\frac{y-4}{2} = 1$. Таким образом, $x = 0$, $y = 6$. Координаты искомой точки N равны $(0; 6)$.

В школьном курсе математики изучались свойства прямой пропорциональной зависимости $y = kx + b$. При этом доказывалось, что ее графиком является прямая линия, не параллельная оси ординат. Нетрудно видеть, что это утверждение полностью согласуется с фактами, доказанными в предыдущем параграфе. Преобразуем уравнение к виду $kx - y + b = 0$. Кривая, определяемая этим уравнением, является алгебраической первого порядка, т. е. прямой линией. Так как коэффициент

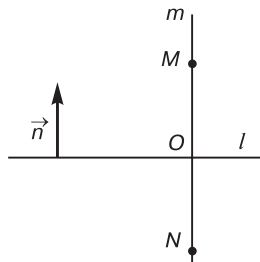
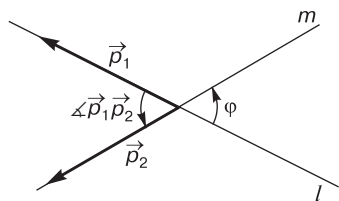


Рис. 52

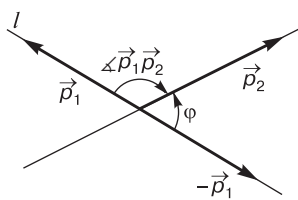
при неизвестном y отличен от нуля, то эта прямая не параллельна оси ординат. Число k называется *угловым коэффициентом прямой*, а уравнение такого вида — *уравнением прямой с угловым коэффициентом*. Общее уравнение прямой, не параллельной оси ординат, легко преобразовать к уравнению прямой с угловым коэффициентом. Действительно, если дано общее уравнение такой прямой $Ax + By + C = 0$, то $B \neq 0$. Отсюда $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$. Угловым коэффициентом k равен $-\frac{A}{B}$.

Выведем формулы для вычисления угла между прямыми на плоскости. Как известно, под углом между ними понимается острый или прямой угол, образованный при их пересечении. Такой угол мы будем называть *неориентированным углом* между прямыми. Если рассматривать упорядоченную пару неперпендикулярных прямых l и m на ориентированной плоскости (§ 3), то можно между ними определить ориентированный угол. Обозначим через $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ направляющие векторы прямых l и m . Возможны два случая. В первом угол между $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ острый. Тогда ориентированный угол φ между l и m будет равен ориентированному углу между векторами $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ (рис. 53, а):

$$\varphi = \angle \vec{p}_1 \vec{p}_2. \quad (14.2)$$



а)



б)

Рис. 53

Во втором случае угол между $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ тупой. Тогда ориентированный угол φ между прямыми будет равен $\angle(-\vec{p}_1) \vec{p}_2$ (рис. 53, б). Ясно, что при этом $\varphi = \angle \vec{p}_1(-\vec{p}_2)$. Так как в данном случае углы φ и $\angle \vec{p}_1 \vec{p}_2$ имеют разные знаки, а их модули дополняют друг друга до π , то

$$\varphi = \pm\pi + \angle \vec{p}_1 \vec{p}_2. \quad (14.3)$$

Если прямые l и m перпендикулярны друг другу, то ориентированный угол между ними не определяется, так как смежные

углы, образованные при их пересечении, равны между собой. Таким образом, ориентированный угол φ между прямыми удовлетворяет условиям

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Выведем формулы для вычисления ориентированного и неориентированного углов между прямыми. Будем предполагать, что l и m заданы своими общими уравнениями $l: A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $m: A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Определим величину неориентированного угла φ между ними. В качестве направляющих векторов этих прямых примем векторы $\vec{p}_1\{-B_1; A_1\}$ и $\vec{p}_2\{-B_2; A_2\}$. Если угол $\angle\vec{p}_1\vec{p}_2$ острый, то $\varphi = \angle\vec{p}_1\vec{p}_2$. Если же угол между направляющими векторами тупой, то $\varphi = \pi - \angle\vec{p}_1\vec{p}_2$. Так как φ — острый или прямой угол, то для его определения достаточно найти значение хотя бы одной его тригонометрической функции. В первом случае $\cos\varphi = \cos\angle\vec{p}_1\vec{p}_2$, во втором $\cos\varphi = -\cos\angle\vec{p}_1\vec{p}_2$. Поэтому в обоих случаях: $\cos\varphi = |\cos\angle\vec{p}_1\vec{p}_2|$. Так как нам известны координаты векторов $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$, то из формулы, выражающей косинус угла между векторами через их координаты (§ 4), получим

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \quad (14.4)$$

Из формулы (14.4) следует, что *прямые l и m перпендикулярны между собой в том и только в том случае, когда $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.*

Выведем формулы для вычисления ориентированного угла φ между прямыми l и m . Напомним, что l и m не перпендикулярны между собой. Согласно формулам (5.16) и (5.17), полученным в § 5, ориентированный угол $\angle\vec{p}_1\vec{p}_2$ между направляющими векторами $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ этих прямых удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} \sin(\angle\vec{p}_1\vec{p}_2) &= \frac{\begin{vmatrix} -B_1 & A_1 \\ -B_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}, \\ \cos(\angle\vec{p}_1\vec{p}_2) &= \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \end{aligned}$$

Углы φ и $\angle \vec{p}_1 \vec{p}_2$ связаны между собой соотношениями (14.2) и (14.3). И в первом, и во втором случаях $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\angle \vec{p}_1 \vec{p}_2)$. Поэтому

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}{A_1 A_2 + B_1 B_2}. \quad (14.5)$$

Полученная формула позволяет проверить утверждение, известное из школьного курса математики. Покажем, что угловой коэффициент k прямой l равен тангенсу ориентированного угла между осью абсцисс и l . Пусть прямая l задана своим уравнением с угловым коэффициентом $y = kx + b$, или $kx - y + b = 0$. Ось абсцисс Ox задается уравнением $y = 0$. Применим формулу (14.5) для вычисления тангенса φ ориентированного угла между упо-

рядоченной парой прямых Ox и l . Получим $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ k & -1 \end{vmatrix}}{-1} = k$.

Пример 2. Луч света, направленный по прямой a : $x + y = 0$, зеркально отразился от прямой b : $3x - 2y - 5 = 0$. Найти уравнение прямой a' , содержащей отраженный луч.

Решение. Согласно законам отражения, ориентированный угол между прямыми a и b равен ориентированному углу между b и a' . При этом a' проходит через точку пересечения a и b (рис. 54). Вначале определим точку пересечения a и b . Для этого решим систему

$\begin{cases} x + y = 0, \\ 3x - 2y - 5 = 0. \end{cases}$ Получим $x = 1$, $y = -1$. По формуле (14.5)

найдем тангенс ориентированного угла φ между a и b :

$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}{3 - 2} = -5$. Обозначим коэффициенты искомого уравнения прямой a' через A , B и C ; тогда прямая a' задается уравнением $Ax + By + C = 0$. Так как a' содержит точку с координатами

$(1; -1)$, то $A - B + C = 0$. Тангенс ориентированного угла между b и a' равен -5 . Еще раз воспользуемся фор-

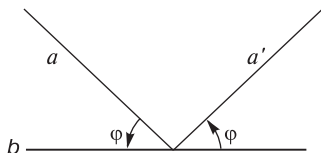


Рис. 54

мулой (14.5), получим $\frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ A & B \end{vmatrix}}{3A - 2B} = -5$ или $17A - 7B = 0$. Таким образом,

для определения искоемых коэффициентов следует найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} A - B + C = 0, \\ 17A - 7B = 0. \end{cases}$$

Полученная система является однородной, она состоит из двух линейно независимых уравнений и содержит три неизвестных A , B и C . Поэтому ее решение определяется с точностью до пропорциональности. Но A , B и C — коэффициенты уравнения прямой a' , поэтому они и должны быть определены с точностью до пропорциональности. Для решения достаточно найти любое ненулевое решение системы. Положим $A = 7$, $B = 17$. Тогда из первого уравнения $C = 10$. Окончательно получаем $7x + 17y + 10 = 0$.

Выведем формулы для вычисления расстояния от точки до прямой. Пусть уравнение прямой l имеет вид $Ax + By + C = 0$. Даны координаты точки $M(x_0; y_0)$. Требуется найти расстояние от M до l . Выберем на l произвольную точку $N(x_1; y_1)$ и проведем через нее прямую m , перпендикулярную l . Рассмотрим вектор $\vec{n}\{A; B\}$, нормальный к прямой l . Рассмотрим также произвольную ось t , сонаправленную с вектором $\vec{n}$. Без ограничения общности, можно считать, что ось t проходит через точку N (рис. 55). Спроектируем на t точку M , получим точку K . Искомое расстояние d равно длине отрезка NK , или, как нетрудно видеть, абсолютной величине проекции вектора $\overline{NM}$ на ось t : $d = |\text{pr}_m \overline{NM}|$. В § 4 нами была доказана лемма 1, в соответствии с которой скалярное произведение векторов $\overline{NM}$ и $\vec{n}$ равно $\overline{NM}\vec{n} = |\vec{n}| \text{pr}_m \overline{NM}$. Отсюда следует, что

$$d = \frac{|\vec{n}\overline{NM}|}{|\vec{n}|}. \quad (14.6)$$

Координаты вектора $\overline{NM}$ равны $\{x_0 - x_1; y_0 - y_1\}$, поэтому

$$\begin{aligned} \vec{n}\overline{NM} &= A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) = \\ &= Ax_0 + By_0 - Ax_1 - By_1. \end{aligned}$$

Так как точка N лежит на прямой l , ее координаты удовлетворяют уравнению этой прямой: $Ax_1 + By_1 + C = 0$. Отсюда $C = -Ax_1 - By_1$ и $\vec{n}\overline{NM} = Ax_0 + By_0 + C$.

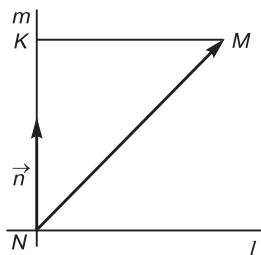


Рис. 55

Следовательно, $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{|\vec{n}|}$. Так как $|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2}$, окончательно получим

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (14.7)$$

Пример 3. Даны уравнения прямых a : $3x + 2y - 6 = 0$ и b : $3x - 2y + 1 = 0$, а также координаты точки $M(1; 4)$. Найти уравнение биссектрисы того угла, образованного при пересечении прямых a и b , которому принадлежит точка M .

Решение. Как известно, биссектриса представляет собой множество всех точек плоскости, равноудаленных от сторон угла. При пересечении прямых a и b образуются две пары вертикальных углов. Поэтому множество всех точек плоскости, равноудаленных от прямых a и b , совпадает с биссектрисами этих вертикальных углов. Точка $A(x; y)$ тогда и только тогда принадлежит этому множеству, когда $\frac{|3x + 2y - 6|}{\sqrt{9 + 4}} = \frac{|3x - 2y + 1|}{\sqrt{9 + 4}}$, или

$|3x + 2y - 6| = |3x - 2y + 1|$. Если модули двух чисел совпадают, т. е. $|a| = |b|$, то либо $a = b$, либо $a = -b$. Раскрывая модуль, получаем $3x + 2y - 6 = 3x - 2y + 1$ или $3x + 2y - 6 = -3x + 2y - 1$. Упростив, приходим к уравнениям $4y - 7 = 0$ или $3x - 5 = 0$. Таким образом, биссектриса одной из пар вертикальных углов имеет уравнение $4y - 7 = 0$, а $6x - 5 = 0$ — уравнение биссектрисы другой пары вертикальных углов. Нам следует определить уравнение той биссектрисы, которая делит пополам угол, содержащий точку $M(1; 4)$. Пусть $X(x; y)$ — произвольная точка искомой биссектрисы (рис. 56). Тогда точка X лежит в той же полуплоскости, что и точка M , относительно прямой a , а также относительно прямой b . Подставим координаты точки M в уравнения прямых a и b : $3 + 8 - 6 > 0$, $3 - 8 + 1 < 0$. Таким образом, точка $X(x; y)$ принадлежит искомому углу в том и только

в том случае, когда она удовлетворяет системе неравенств (§ 13)

$$\begin{cases} 3x + 2y - 6 > 0, \\ 3x - 2y + 1 < 0. \end{cases}$$

Поэтому искомое уравнение имеет вид $3x + 2y - 6 = -3x + 2y - 1$ или $6x - 5 = 0$.

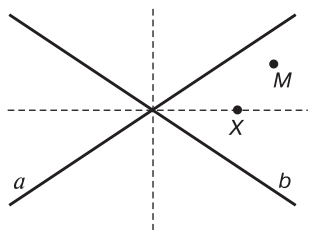


Рис. 56