§ 1. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Мы переходим к изучению свойств скалярного, векторного и смешанного произведений векторов. Они впервые были определены в книге У. Гамильтона «Лекции о кватернионах», а также в трудах немецкого математика Г. Грассмана. В дальнейшем их абстрактные математические исследования были успешно применены при изучении различных свойств физических объектов. Например, с помощью скалярного произведения векторов определяется работа силы при перемещении тела.

В настоящем параграфе мы рассмотрим свойства скалярного произведения векторов. Для этого нам потребуется ввести несколько геометрических понятий.

Определение 1. *Под углом между двумя ненулевыми векторами* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *будем понимать величину угла* AOB, *где* $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. *Если векторы* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *сонаправлены, то угол между ними равен* 0, *если же противоположно направлены, то* π.

Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будем обозначать через $\angle\vec{a}\vec{b}$. Ясно, что это понятие не зависит от выбора точки O. Угол между ненулевыми векторами заключается в пределах от 0 до π: $0\le\angle\vec{a}\vec{b}\le\pi$. *Если среди векторов содержится хотя бы один нулевой, то будем считать, что угол между ними принимает произ-*

вольное значение в пределах от 0 *до* π. Для изучения свойств скалярного произведения введем понятие проекции вектора на ось.

Определение 2. *Под осью будем понимать прямую, для которой указан параллельный ей ненулевой вектор.*

Будем говорить, что вектор оси задает ее *направление*. Будем также считать *две оси равными друг другу, если они образованы одной и той же прямой, а векторы, определяющие их направления, сонаправлены*. Таким образом, нам не существенна длина вектора оси, мы будем использовать только его направление. Вектор оси, имеющий единичную длину, называется ее *ортом*.

Пусть в пространстве даны ось l и точка A. Проведем через A плоскость, перпендикулярную l. Точку пересечения этой плоскости с осью будем называть *ортогональной проекцией точки A на l*.

Определение 3. *Пусть даны вектор $\vec{a}$ и ось l, $\overrightarrow{AB}$ — произвольный представитель $\vec{a}$. Тогда под векторной проекцией $\vec{a}$ на l будем понимать вектор $\overrightarrow{A'B'}$, где A' и B' — ортогональные проекции точек A и B на l.*

Векторную проекцию $\vec{a}$ на l будем обозначать $\overrightarrow{pr_l\vec{a}}$. Ясно, что она не зависит от выбора представителя вектора $\vec{a}$. Пусть $\vec{e}$ — орт оси, тогда $\overrightarrow{pr_l\vec{a}} \parallel \vec{e}$. Так как $\vec{e}$ — ненулевой вектор, то из теоремы о коллинеарных векторах (§ 2) следует, что существует единственное число λ, удовлетворяющее условию $\overrightarrow{pr_l\vec{a}} = \lambda\vec{e}$.

Определение 4. *Под проекцией вектора $\vec{a}$ на ось l будем понимать число, на которое следует умножить орт оси, чтобы получить векторную проекцию $\vec{a}$ на l.*

Проекцию $\vec{a}$ на l будем обозначать через $pr_l\vec{a}$. Если $\vec{e}$ — орт оси, то

$$\overrightarrow{pr_l\vec{a}} = pr_l\vec{a}\,\vec{e}. \tag{4.1}$$

Легко видеть, что $pr_l\vec{a} > 0$ тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{pr_l\vec{a}}$ и $\vec{e}$ сонаправлены. В этом случае угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{e}$ острый (рис. 17, *а*); $pr_l\vec{a} = \vec{0}$ в том и только в том случае, когда либо $\vec{a} \perp \vec{e}$ (рис. 17, *б*), либо $\vec{a} = \vec{0}$; $pr_l\vec{a} < 0$ тогда и только тогда, когда векторы $pr_l\vec{a}$ и $\vec{e}$ противоположно направлены. При этом угол между $\vec{a}$ и $\vec{e}$ тупой (рис. 17, *в*).

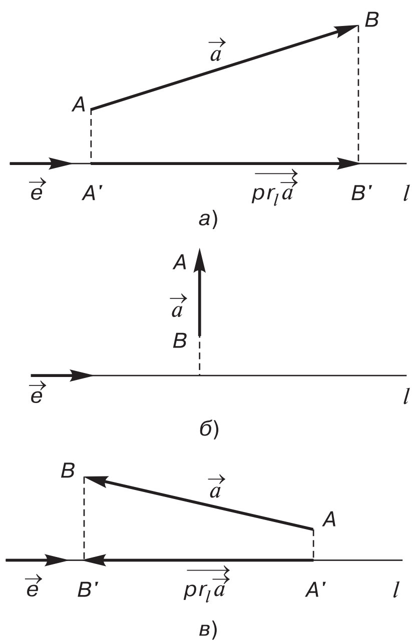


Рис. 17

Свойство 1. *Пусть l — ось, а $\vec{e}$ — ее орт. Тогда для любого ненулевого вектора $\vec{a}$ выполняется равенство*

$$pr_l\vec{a} = |\vec{a}|\cos(\angle\vec{a}\vec{e}). \qquad (4.2)$$

Доказательство. Предположим, что $pr_l\vec{a} = \vec{0}$. Так как $\vec{a} \neq \vec{0}$, то в этом случае $\vec{a} \perp \vec{e}$. Тогда $\cos(\angle\vec{a}\vec{e}) = 0$. Равенство (4.2) выполнено.

Пусть $pr_l\vec{a} > 0$. Отложим от точки A вектор $\vec{a}$: $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$, обозначим через $\overrightarrow{AB}$ векторную проекцию $\overrightarrow{pr_l\vec{a}}$ (рис. 18, *а*). Треугольник ACB — прямоугольный. Так как $pr_l\vec{a} = |\vec{a}|\cos(\angle\vec{a}\vec{e}) > 0$, то из равенства (4.1) следует, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{e}$ сонаправлены. Поэтому $\angle CAB = \angle\vec{a}\vec{e}$. Из свойств прямоугольного треугольника ACB следует $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|\cos(\angle CAB)$ или $pr_l\vec{a} = |\vec{a}|\cos(\angle\vec{a}\vec{e})$. Равенство (4.2) в этом случае доказано.

Наконец, рассмотрим случай, когда $pr_l\vec{a} < 0$. Пусть $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{pr_l\vec{a}}$. Отложим от точки A вектор $\vec{a}$: $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$ (рис. 18, *б*). Треугольник ABC — прямоугольный. Так как $pr_l\vec{a} < 0$, то $pr_l\vec{a} = -|\overrightarrow{AB}|$ и векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{e}$ противоположно направлены, а значит, $\angle CAB = \pi - \angle\vec{a}\vec{e}$. Из свойств прямоугольного треугольника ABC следует $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|\cos(\angle CAB)$. Но $\cos(\angle CAB) = \cos(\pi - \angle\vec{a}\vec{e}) = -\cos(\angle\vec{a}\vec{e})$, поэтому $|\overrightarrow{AB}| = -|\overrightarrow{AC}|\cos(\angle\vec{a}\vec{e})$, $-pr_l\vec{a} = -|\vec{a}|\cos(\angle\vec{a}\vec{e})$, и $pr_l\vec{a} = |\vec{a}|\cos(\angle\vec{a}\vec{e})$. Свойство доказано.

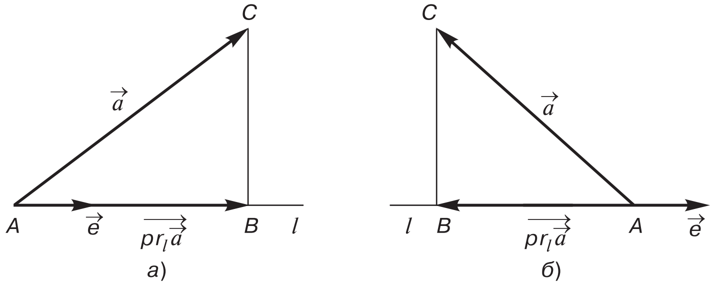


Рис. 18

Свойство 2. *Пусть l — произвольная ось. Тогда для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо следующее соотношение*:

$$pr_l(\vec{a} + \vec{b}) = pr_l\vec{a} + pr_l\vec{b}. \tag{4.3}$$

Доказательство. Отложим от точки A последовательно векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, тогда $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$. Проектируя точки A, B и C на ось l, получим: $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{pr_l\vec{a}}$, $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{pr_l\vec{b}}$, $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{pr_l(\vec{a} + \vec{b})}$ (рис. 19). Тогда $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'}$, т. е.

$$\overrightarrow{pr_l(\vec{a} + \vec{b})} = \overrightarrow{pr_l\vec{a}} + \overrightarrow{pr_l\vec{b}}. \tag{4.4}$$

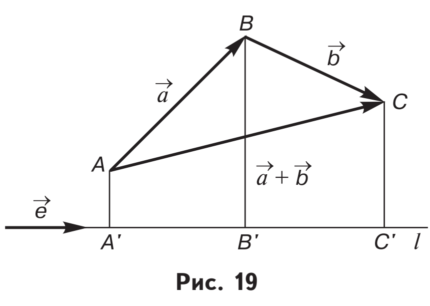


Рис. 19

Если $\vec{e}$ — орт оси, то, согласно равенству (4.1), $\overrightarrow{pr_l(\vec{a} + \vec{b})} = pr_l(\vec{a} + \vec{b})\vec{e}$, $\overrightarrow{pr_l\vec{a}} = pr_l\vec{a}\vec{e}$, $\overrightarrow{pr_l\vec{b}} = pr_l\vec{b}\vec{e}$. Подставив эти соотношения в выражение (4.4), получаем: $pr_l(\vec{a}+\vec{b})\vec{e} = pr_l\vec{a}\vec{e} + pr_l\vec{b}\vec{e}$. Отсюда непосредственно следует соотношение (4.3). Свойство доказано.

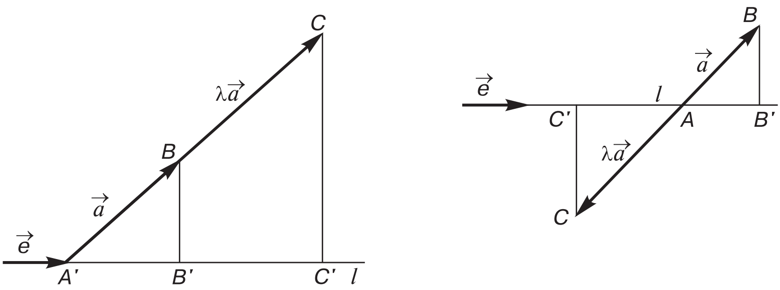
Свойство 3. *Пусть l — произвольная ось. Тогда для любого числа λ и вектора $\vec{a}$ выполняется равенство*

$$pr_l\lambda\vec{a} = \lambda pr_l\vec{a}. \tag{4.5}$$

Доказательство. Равенство очевидно, если $\lambda = 0$. В дальнейшем будем предполагать, что $\lambda \neq 0$. Равенство легко проверить при $pr_l\vec{a} = 0$. Действительно, в этом случае либо $\vec{a} = \vec{0}$, либо $\angle\vec{a}\vec{e} = \frac{\pi}{2}$. Но тогда либо $\lambda\vec{a}$ — нулевой вектор, либо он перпендикулярен оси. И в том, и в другом случае $pr_l\vec{a} = 0$.

Рассмотрим случай $pr_l\vec{a} \neq 0$. Отложим векторы $\vec{a}$ и $\lambda\vec{a}$ от одной точки A оси l: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \lambda\vec{a}$, $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{pr_l\vec{a}}$, $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{pr_l(\lambda\vec{a})}$. Пусть $\lambda > 0$, тогда $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{AB'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AC'}$ (рис. 20, *а*). Легко видеть, что прямоугольные треугольники ABB' и ACC' подобны между собой, при этом $|\overrightarrow{AC}| : |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC'}| : |\overrightarrow{AB'}| = \lambda$. Так как $\lambda > 0$ и $\overrightarrow{AB'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AC'}$ то $\overrightarrow{AC'} = \lambda\overrightarrow{AB'}$ или

$$\overrightarrow{pr_l\lambda\vec{a}} = \lambda\overrightarrow{pr_l\vec{a}}. \tag{4.6}$$



а) б)

Рис. 20

Предположим теперь, что $\lambda < 0$, $\vec{a} \neq \vec{0}$. Тогда $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB'} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AC'}$ (рис. 20, *б*). Из подобия треугольников ABB' и ACC' следует, что $|\overrightarrow{AC}| : |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC'}| : |\overrightarrow{AB'}| = |\lambda|$. Так как $\lambda < 0$ и $\overrightarrow{AB'} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AC'}$ то $\overrightarrow{AC'} = \lambda\overrightarrow{AB'}$, в этом случае также справедлива формула (4.6).

Воспользуемся теперь равенством (4.1). Если $\vec{e}$ — орт оси l, то $\overrightarrow{pr_l(\lambda\vec{a})} = pr_l(\lambda\vec{a})\vec{e}$, $\overrightarrow{pr_l\vec{a}} = (pr_l\vec{a})\vec{e}$. Подставим эти равенства в формулу (4.6): $pr_l(\lambda\vec{a})\vec{e} = \lambda(pr_l\vec{a})\vec{e}$. Отсюда следует равенство (4.5). Свойство доказано.

Свойства 1—3 служат основой для изучения скалярного произведения векторов.

Определение 5. *Под скалярным произведением ненулевых векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *будем понимать число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Если среди сомножителей хотя бы один совпадет с нулевым вектором, то скалярное произведение равно* 0.

Скалярное произведение векторов будем обозначать через $\vec{a}\vec{b}$. Таким образом, если $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, то

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\angle\vec{a}\vec{b}). \tag{4.7}$$

В определении 5 специально выделен случай нулевых сомножителей, так как при этом угол между векторами не определен и формула (4.7) не имеет места.

Докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Если* $\vec{b} \neq \vec{0}$, *а* l — *произвольная ось, направление которой определено вектором* $\vec{b}$, *то для любого вектора* $\vec{a}$ *справедливо соотношение*

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{b}|\, pr_l\vec{a}. \tag{4.8}$$

Доказательство. Если $\vec{a} = \vec{0}$, то, согласно определению скалярного произведения векторов, $\vec{a}\vec{b} = 0$. Но в этом случае $pr_l\vec{a} = 0$. Равенство (4.8) выполнено.

Пусть $\vec{a} \neq \vec{0}$. Воспользуемся свойством 1 проекции вектора на ось: $pr_l\vec{a} = |\vec{a}|\cos(\angle\vec{a}\vec{e})$, где $\vec{e}$ — орт оси. Так как орт $\vec{e}$ сонаправлен с $\vec{b}$, то $\angle\vec{a}\vec{e} = \angle\vec{a}\vec{b}$. Поэтому $pr_l\vec{a} = |\vec{a}|\cos(\angle\vec{a}\vec{b})$. Подставив это равенство в соотношение (4.8), получим формулу (4.7). Лемма доказана.

Рассмотрим свойства скалярного произведения векторов.

Свойство 1. *Для любых векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *справедливо равенство*

$$\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a} \tag{4.9}$$

(*свойство коммутативности*).

Справедливость утверждения следует из формулы (4.7) и равенства $\angle\vec{a}\vec{b} = \angle\vec{b}\vec{a}$.

Свойство 2. *Для любых векторов* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *и* $\vec{c}$ *справедливы следующие равенства*:

$$(\vec{a}+\vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}, \tag{4.10}$$

$$\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}. \tag{4.11}$$

Доказательство. Вначале докажем равенство (4.10). Если $\vec{c}=\vec{0}$, то $\vec{a}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}=(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=0$, равенство (4.10) выполнено. Пусть $\vec{c}\neq\vec{0}$. Рассмотрим произвольную ось l, направление которой определено вектором $\vec{c}$. Согласно доказанной лемме 1, $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=|\vec{c}|\,pr_l(\vec{a}+\vec{b})$, $\vec{a}\vec{c}=|\vec{c}|\,pr_l\vec{a}$, $\vec{b}\vec{c}=|\vec{c}|\,pr_l\vec{b}$. Воспользуемся свойством 2 проекции вектора на ось: $|\vec{c}|\,pr_l(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{c}|\,pr_l\vec{a}+|\vec{c}|\,pr_l\vec{b}$. Отсюда следует, что $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}$.

Для доказательства соотношения (4.11) воспользуемся свойством 1 скалярного произведения векторов и доказанным равенством (4.10): $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{b}+\vec{c})\vec{a}=\vec{b}\vec{a}+\vec{c}\vec{a}=\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}$. Свойство 2 доказано.

Замечание. Ясно, что свойство 2 распространяется на любое число слагаемых: $(\vec{a}_1+\vec{a}_2+\ldots+\vec{a}_n)\vec{b}=\vec{a}_1\vec{b}+\vec{a}_2\vec{b}+\ldots+\vec{a}_n\vec{b}$, $\vec{a}(\vec{b}_1+\vec{b}_2+\ldots+\vec{b}_n)=\vec{a}\vec{b}_1+\vec{a}\vec{b}_2+\ldots+\vec{a}\vec{b}_n$.

Свойство 3. *Для любых векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *и числа* λ *справедливы следующие соотношения*:

$$(\lambda\vec{a})\vec{b}=\lambda(\vec{a}\vec{b}), \tag{4.12}$$

$$\vec{a}(\lambda\vec{b})=\lambda\vec{a}\vec{b}. \tag{4.13}$$

Доказательство. Вначале проверим равенство (4.12). Если $\vec{b}=\vec{0}$, то $(\lambda\vec{a})\vec{b}=\lambda(\vec{a}\vec{b})=\vec{0}$. Следовательно, равенство (4.12) выполняется. Пусть $\vec{b}\neq\vec{0}$. Рассмотрим произвольную ось l, направление которой определено вектором $\vec{b}$. Воспользуемся доказанной леммой 1. Из соотношения (4.8) следует $(\lambda\vec{a})\vec{b}=|\vec{b}|\,pr_l(\lambda\vec{a})$. Теперь используем свойство 3 проекции вектора на ось. Согласно равенству (4.5), $|\vec{b}|\,pr_l\lambda\vec{a}=\lambda|\vec{b}|\,pr_l\vec{a}=\lambda\vec{a}\vec{b}$. Поэтому $(\lambda\vec{a})\vec{b}=\lambda(\vec{a}\vec{b})$. Равенство (4.12) доказано.

Доказательство равенства (4.13) проведите самостоятельно по аналогии с доказательством соотношения (4.11) свойства 2.

Свойство 4. *Для любого ненулевого вектора* $\vec{a}$ *справедливо неравенство*

$$\vec{a}\vec{a} > 0. \qquad (4.14)$$

Доказательство. Так как $\vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|^2 \cos\angle\vec{a}\vec{a}$ и $\angle\vec{a}\vec{a} = 0$, т. е. $\cos\angle\vec{a}\vec{a} = 1$, то $\vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|^2$. Но $\vec{a} \neq \vec{0}$, поэтому $\vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|^2 > 0$.

Скалярное произведение $\vec{a}\vec{a}$ обычно обозначают как $\vec{a}^2$. Его называют скалярным квадратом вектора. Мы получили, что $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Доказанные утверждения аналогичны соответствующим свойствам операции умножения чисел. На первый взгляд кажется, что свойства скалярного произведения векторов полностью аналогичны свойствам чисел. Но такое мнение ошибочно. Например, скалярное произведение двух векторов равно нулю, когда либо один из сомножителей нулевой, либо, как вытекает из формулы (4.7), угол между ними прямой.

Пример 1. *Найти угол между единичными векторами* $\vec{s}$ *и* $\vec{t}$, *если известно, что векторы* $\vec{m} = 2\vec{t} - \vec{s}$ *и* $\vec{n} = \vec{t} + 3\vec{s}$ *перпендикулярны.*

Решение. Определим значение косинуса угла между векторами $\vec{s}$ и $\vec{t}$. Так как $\vec{s}\vec{t} = |\vec{s}||\vec{t}|\cos(\angle\vec{s}\vec{t})$ и $|\vec{s}| = |\vec{t}| = 1$, то $\cos(\angle\vec{s}\vec{t}) = \vec{s}\vec{t}$. Векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ перпендикулярны, $\vec{m}\vec{n} = (2\vec{t} - \vec{s})(\vec{t} + 3\vec{s}) = 0$; отсюда $2\vec{t}^{\,2} - 3\vec{s}^{\,2} + 5\vec{s}\vec{t} = 0$. Но $\vec{t}^{\,2} = \vec{s}^{\,2} = 1$, поэтому $\vec{s}\vec{t} = \dfrac{1}{5}$. Искомый угол равен $\arccos\dfrac{1}{5}$.

Выведем формулы для вычисления скалярного произведения векторов в координатах в ортонормированном базисе. Пусть в пространстве дан ортонормированный базис $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в этом базисе: $\vec{a}\{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3\}$, $\vec{b}\{\beta_1; \beta_2; \beta_3\}$. Тогда $\vec{a} = \alpha_1\vec{i} + \alpha_2\vec{j} + \alpha_3\vec{k}$, $\vec{b} = \beta_1\vec{i} + \beta_2\vec{j} + \beta_3\vec{k}$. Так как базис ортонормированный, то $\vec{i}^{\,2} = \vec{j}^{\,2} = \vec{k}^{\,2} = 1$, $\vec{i}\vec{j} = \vec{j}\vec{k} = \vec{i}\vec{k} = 0$. Найдем скалярное произведение:

$$\vec{a}\vec{b} = (\alpha_1\vec{i} + \alpha_2\vec{j} + \alpha_3\vec{k})(\beta_1\vec{i} + \beta_2\vec{j} + \beta_3\vec{k}) = \alpha_1\beta_1\vec{i}^{\,2} + \alpha_2\beta_2\vec{j}^{\,2} + \alpha_3\beta_3\vec{k}^{\,2} +$$
$$+\alpha_1\beta_2\vec{i}\vec{j} + \alpha_1\beta_3\vec{i}\vec{k} + \alpha_2\beta_1\vec{i}\vec{j} + \alpha_2\beta_3\vec{j}\vec{k} + \alpha_3\beta_1\vec{k}\vec{i} + \alpha_3\beta_2\vec{k}\vec{j}.$$

Подставляя в это равенство значения попарных скалярных произведений базисных векторов, окончательно получим

$$\vec{a}\vec{b} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3. \tag{4.15}$$

Аналогично выводится формула для вычисления скалярного произведения векторов плоскости через координаты сомножителей. Если на плоскости в прямоугольном декартовом базисе заданы координаты векторов:

$$\vec{a}\{\alpha_1;\alpha_2\},\quad \vec{b}\{\beta_1;\beta_2\},$$

то

$$\vec{a}\vec{b} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2. \tag{4.16}$$

Докажите это соотношение самостоятельно.

Формулы (4.15) и (4.16) часто используются в аналитической геометрии. Выведем с их помощью формулы для вычисления длины вектора и косинуса угла между векторами через их координаты. Пусть в пространстве в ортонормированном базисе даны координаты векторов $\vec{a}\{\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3\}$, $\vec{b}\{\beta_1;\beta_2;\beta_3\}$. Так как $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$, то из (4.15) следует, что

$$|\vec{a}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}. \tag{4.17}$$

Из соотношения (4.7) получим, что для ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедлива формула $\cos(\angle\vec{a}\vec{b}) = \dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$. Подставляя в нее соотношения (4.15) и (4.17), получим

$$\cos(\angle\vec{a}\vec{b}) = \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}}. \tag{4.18}$$

Аналогично, если на плоскости в ортонормированном базисе заданы координаты векторов $\vec{a}\{\alpha_1;\alpha_2\}$, $\vec{b}\{\beta_1;\beta_2\}$, то

$$|\vec{a}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, \tag{4.19}$$

$$\cos(\angle\vec{a}\vec{b}) = \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}}. \tag{4.20}$$

Формулы для вычисления скалярного произведения векторов можно вывести в произвольном аффинном базисе, но при этом они будут иметь гораздо более сложный вид, чем соотношения (4.15) и (4.16).

§ 5. ОРИЕНТАЦИЯ ПЛОСКОСТИ И ПРОСТРАНСТВА

Рассмотрим задачу. На плоскости или в пространстве даны два базиса. Требуется найти зависимости между координатами одного и того же вектора в этих базисах. Эти зависимости называются *формулами перехода* от одного базиса ко второму. Условимся координаты вектора в первом базисе снабжать индексом 1, а во втором — индексом 2; например, $\vec{a}\{\alpha_1;\alpha_2\}_1$; $\vec{b}\{\beta_1;\beta_2\}_2$. Все рассуждения проведем вначале для случая плоскости, затем рассмотрим пространственный случай.

Пусть даны два базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$. Известны координаты векторов второго базиса относительно первого: $\vec{e}_1'\{a_1;a_2\}_1$; $\vec{e}_2'\{b_1;b_2\}_1$; при этом

$$\vec{e}_1' = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2; \;\; \vec{e}_2' = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2. \tag{5.1}$$

Эти координаты по сути определяют взаимное расположение базисов друг относительно друга и необходимы для решения поставленной задачи. Так как векторы $\vec{e}_1'$ и $\vec{e}_2'$ линейно независимы, то (§ 3)

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{5.2}$$

Пусть $\vec{a}$ — произвольный вектор плоскости. Запишем его координаты относительно данных базисов: $\vec{a}\{\alpha_1;\alpha_2\}_1$, $\vec{a}\{\alpha_1';\alpha_2'\}_2$. Вектор $\vec{a}$ представим в виде $\vec{a} = \alpha_1'\vec{e}_1' + \alpha_2'\vec{e}_2'$. Заменим векторы второго базиса $\vec{e}_1'$ и $\vec{e}_2'$ на их разложения (5.1) по векторам первого:

$$\vec{a} = \alpha_1'(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2) + \alpha_2'(b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2) = (a_1\alpha_1' + b_1\alpha_2')\vec{e}_1 + (a_2\alpha_1' + b_2\alpha_2')\vec{e}_2.$$

В то же время, $\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2$. Из теоремы о разложении вектора плоскости по векторам базиса (теорема 2, § 3) следует, что

$$\begin{cases} \alpha_1 = a_1\alpha_1' + b_1\alpha_2', \\ \alpha_2 = a_2\alpha_1' + b_2\alpha_2'. \end{cases} \tag{5.3}$$

Соотношения (5.3) *представляют собой искомые формулы перехода от первого базиса ко второму*. Если известны координаты вектора $\vec{a}$ во втором базисе, то с помощью этих соотношений можно вычислить его координаты в первом. Наоборот, если даны координаты $\vec{a}$ в первом базисе, то, рассматривая формулы перехода (5.3) как систему двух линейных уравнений с неизвестными α_1' и α_2' и решая ее, можно найти координаты вектора во втором. Заметим, что в силу условия (5.2) такая система всегда совместна.

Ведем следующее определение.

Определение 1. *Даны два базиса. Матрица, столбцы которой равны координатам векторов второго базиса относительно первого, называется матрицей перехода от первого базиса ко второму.*

Матрицу перехода от первого базиса B_1 ко второму B_2 будем обозначать $(B_1|B_2)$, а ее определитель — $|B_1|B_2|$. Таким образом, если B_1: $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$; B_2: $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$ и $\vec{e}_1'\{a_1;a_2\}_1$, $\vec{e}_2'\{b_1;b_2\}_1$, то $(B_1|B_2)=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$. Если известна матрица перехода, то можно составить формулы перехода (5.3). Из соотношения (5.2) следует $|B_1|B_2|\neq 0$.

Докажем свойства матриц перехода.

Свойство 1. *Пусть даны базисы B_1, B_2, и B_3. Тогда определитель матрицы перехода от базиса B_1 к базису B_3 равен произведению определителей матриц перехода от B_1 к B_2 и от B_2 к B_3:*

$$|B_1|B_3| = |B_1|B_2|\cdot|B_2|B_3|. \tag{5.4}$$

Доказательство. Пусть базисы B_1, B_2, и B_3 состоят из векторов B_1: $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$; B_2: $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$; B_3: $\vec{e}_1''$, $\vec{e}_2''$, а матрицы перехода имеют следующий вид:

$$(B_1|B_2)=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix},\ (B_2|B_3)=\begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \vec{e}_1' &= a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2, \\ \vec{e}_2' &= b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2; \end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned} \vec{e}_1'' &= c_1\vec{e}_1' + c_2\vec{e}_2', \\ \vec{e}_2'' &= d_1\vec{e}_1' + d_2\vec{e}_2'. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Подставим выражения (5.5) в (5.6):

$$\vec{e}_1'' = c_1(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2) + c_2(b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2) = (c_1a_1 + c_2b_1)\vec{e}_1 + (c_1a_2 + c_2b_2)\vec{e}_2,$$
$$\vec{e}_2'' = d_1(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2) + d_2(b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2) = (d_1a_1 + d_2b_1)\vec{e}_1 + (d_1a_2 + d_2b_2)\vec{e}_2.$$

Мы получили коэффициенты разложения векторов $\vec{e}_1''$ и $\vec{e}_2''$ по векторам первого базиса, поэтому $(B_1|B_3) = \begin{pmatrix} c_1a_1 + c_2b_1 & d_1a_1 + d_2b_1 \\ c_1a_2 + c_2b_2 & d_1a_2 + d_2b_2 \end{pmatrix}$. Полученная матрица совпадает с произведением

$$(B_1|B_2)(B_2|B_3) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_1a_1 + c_2b_1 & d_1a_1 + d_2b_1 \\ c_1a_2 + c_2b_2 & d_1a_2 + d_2b_2 \end{pmatrix} = (B_1|B_3).$$

Из курса алгебры известно, что определитель произведения двух матриц равен произведению их определителей. Поэтому $|B_1|B_3| = |B_1|B_2| \cdot |B_2|B_3|$. Свойство доказано.

Свойство 2. *Для любого базиса B*

$$|B|B| = 1. \tag{5.7}$$

Доказательство свойства непосредственно следует из того, что матрица $(B|B)$ — единичная. Проверьте самостоятельно.

Свойство 3. Пусть даны базисы B_1 и B_2. Тогда

$$|B_1|B_2| = \frac{1}{|B_2|B_1|}. \tag{5.8}$$

Доказательство. Из равенства (5.4) получим $|B_1|B_2||B_2|B_1| = |B_1|B_1|$. Отсюда и из формулы (5.7) $|B_1|B_2| \cdot |B_2|B_1| = 1$. Равенство (5.8) доказано.

Приступим к изучению понятия ориентации плоскости.

Определение 2. *Два базиса называются одинаково ориентированными, если определитель матрицы перехода от первого базиса ко второму положителен.*

В этом случае будем также говорить, что *ориентации базисов совпадают*, или *они имеют одну и ту же ориентацию*. Если базисы не имеют одинаковой ориентации, то говорят, что их *ориентации различны или противоположны*.

Пример 1. *Дан треугольник ABC, O — точка пересечения его медиан. Найти матрицу перехода от базиса* $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AC}$ *к базису* $\vec{e}_1' = \overrightarrow{OC}$, $\vec{e}_2' = \overrightarrow{OA}$. *Выяснить, имеют ли эти базисы одинаковую ориентацию.*

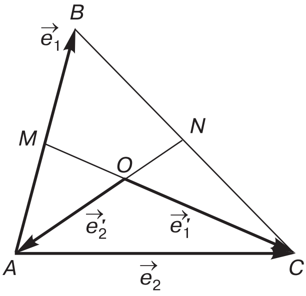


Рис. 21

Решение. Найдем координаты векторов $\vec{e}_1' = \overrightarrow{OC}$, $\vec{e}_2' = \overrightarrow{OA}$ в базисе $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AC}$. Пусть M и N — середины сторон AB и BC (рис. 21). Тогда $\overrightarrow{MC} = -\frac{1}{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2$. Так как $\overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MC}$, то $\overrightarrow{OC} = -\frac{1}{3}\vec{e}_1 + \frac{2}{3}\vec{e}_2$, поэтому $\vec{e}_1'\left\{-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right\}$. Кроме того, $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2$, $\overrightarrow{OA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AN}$. Следовательно, $\overrightarrow{OA} = -\frac{1}{3}\vec{e}_1 - \frac{1}{3}\vec{e}_2$ и $\vec{e}_2'\left\{-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right\}$. Искомая матрица перехода имеет вид $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Ее определитель равен $\frac{1}{3}$. Так как он положителен, то базисы имеют одинаковую ориентацию.

Справедливо утверждение, которое позволяет по чертежу определить, имеют ли два базиса одну и ту же ориентацию или она у них различна. Отложим векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ первого базиса от точки O, а второго $\vec{e}_1'$ и $\vec{e}_2'$ — от точки O'. Если кратчайшие повороты от $\vec{e}_1$ к $\vec{e}_2$ и от $\vec{e}_1'$ к $\vec{e}_2'$ одновременно видны либо по ходу движения часовой стрелки, либо против ее движения, то ориентации базисов совпадают. Если для одного базиса такой поворот виден по ходу движения часовой стрелки, а для другого — против ее движения, то их ориентации различны. Это утверждение примем без доказательства. В качестве упражнения примените его к базисам примера 1.

Определим на множестве базисов следующее бинарное отношение. *Базис B_1 находится в бинарном отношении Δ с B_2, если их ориентации одинаковы*. Таким образом, $B_1 \Delta B_2$ в том и только в том случае, когда $|B_1|B_2| > 0$.

Теорема 1. *Бинарное отношение Δ является отношением эквивалентности.*

Доказательство. Проверим, что отношение Δ подчиняется условиям рефлексивности, симметричности и транзитивности.

Рефлексивность. Необходимо проверить, что любой базис находится в отношении Δ сам с собой. Согласно свойству 2, для любого базиса B плоскости выполнено соотношение $\left|B|B\right| = 1 > 0$. Следовательно, $B\Delta B$.

Симметричность. Даны базисы B_1 и B_2, для которых выполнено условие $B_1\Delta B_2$. Требуется доказать, что $B_2\Delta B_1$. По условию, $\left|B_1|B_2\right| > 0$. Но из свойства 3 вытекает, что $\left|B_2|B_1\right| = \dfrac{1}{\left|B_1|B_2\right|}$. Поэтому $\left|B_2|B_1\right| > 0$ и $B_2\Delta B_1$.

Транзитивность. Даны базисы B_1, B_2, B_3, удовлетворяющие условиям $B_1\Delta B_2$, $B_2\Delta B_3$. Требуется доказать, что $B_1\Delta B_3$. Нам дано: $\left|B_1|B_2\right| > 0$ и $\left|B_2|B_3\right| > 0$. Согласно свойству 1, $\left|B_1|B_3\right| = \left|B_1|B_2\right| \cdot \left|B_2|B_3\right|$. Поэтому $\left|B_1|B_3\right| > 0$. Теорема доказана.

Так как Δ — отношение эквивалентности, множество всех базисов плоскости разбивается на классы эквивалентности. Два базиса принадлежат одному классу в том и только в том случае, когда они одинаково ориентированы. Докажем следующее утверждение.

Теорема 2. *Число классов эквивалентности, на которое отношение Δ разбивает множество базисов плоскости, равно двум.*

Доказательство. Пусть B — произвольный базис плоскости. Обозначим через K_1 тот класс эквивалентности, которому он принадлежит. Базис B' содержится в K_1 тогда и только тогда, когда $B\Delta B'$. Теорема будет доказана, если мы проверим, что все базисы, ориентация которых противоположна B, также принадлежат одному классу эквивалентности. Предположим, что ориентации базисов B_1 и B_2 противоположны ориентации B. Тогда $\left|B|B_1\right| < 0$ и $\left|B_2|B\right| < 0$. Но из равенства (5.4) следует, что $\left|B_2|B_1\right| = \left|B_2|B\right| \cdot \left|B|B_1\right|$. Таким образом, $\left|B_2|B_1\right| > 0$. Любые два базиса, противоположно ориентированные базису B, эквивалентны между собой, т. е. содержатся в одном классе. Теорема доказана.

Определение 3. *Плоскость называется ориентированной, если на множестве ее базисов зафиксирован один из классов эквивалентности, определенных отношением Δ.*

В этом случае также говорят, что на плоскости задана ориентация. Базис, принадлежащий выбранному классу, называют *правым*. Если он не принадлежит этому классу, то носит название *левого*. Ясно, что при задании ориентации классы эквивалентности абсолютно равноправны. Ориентацию на плоскости можно задать, выбрав некоторый базис. Тем самым будет зафиксирован класс эквивалентности, которому этот базис принадлежит. Обычно ориентацию задают с помощью такого базиса, для которого поворот от первого базисного вектора ко второму, при условии что они отложены от одной точки, виден против движения часовой стрелки. Тогда все базисы, обладающие этим свойством, являются правыми. Если при этом для базиса такой поворот виден по ходу движения часовой стрелки, то он левый.

Рассмотрим, как вводится понятие ориентации пространства. Все выкладки и рассуждения в случае пространства аналогичны соответствующим выкладкам и рассуждениям, проведенным для базисов плоскости.

Формулы перехода от одного базиса пространства к другому выводятся так же, как и в случае плоскости. Если заданы координаты векторов $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$, $\vec{e}_3'$ второго базиса относительно первого $\vec{e}_1'\{a_1; a_2; a_3\}$, $\vec{e}_2'\{b_1; b_2; b_3\}$, $\vec{e}_3'\{c_1; c_2; c_3\}$, то формулы перехода, связывающие координаты одного и того же вектора $\vec{a}$ относительно этих базисов, имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \alpha_1 = a_1\alpha_1' + b_1\alpha_2' + c_1\alpha_3', \\ \alpha_2 = a_2\alpha_1' + b_2\alpha_2' + c_2\alpha_1', \\ \alpha_3 = a_3\alpha_1' + b_3\alpha_2' + c_3\alpha_3'. \end{cases} \tag{5.9}$$

Здесь $\{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3\}$ — координаты вектора $\vec{a}$ относительно первого базиса, $\{\alpha_1'; \alpha_2'; \alpha_3'\}$ — его координаты относительно второго. Матрица $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, столбцы которой совпадают с координатами векторов $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$, $\vec{e}_3'$ относительно первого базиса, называется *матрицей перехода* от первого базиса ко второму. Ее определитель всегда не равен нулю, так как векторы $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$, $\vec{e}_3'$ линейно независимы. Если этот определитель положителен, то базисы имеют *одинаковую ориентацию*, если отрицателен, то *ориентации различны*.

Пример 2. *Даны два базиса пространства $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ и $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$, $\vec{e}_3'$, для которых $\vec{e}_1 \uparrow\uparrow \vec{e}_1'$, $\vec{e}_2 \uparrow\uparrow \vec{e}_2'$. Доказать, что базисы имеют одинаковую ориентацию в том и только в том случае, когда векторы $\vec{e}_3$ и $\vec{e}_3'$, отложенные от некоторой точки O, лежат* *в одном полупространстве относительно плоскости, проходящей через точку O и параллельной векторам $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$.*

Решение. Отложим векторы базисов от одной точки O:

$$\vec{e}_1=\overrightarrow{OA},\quad \vec{e}_2=\overrightarrow{OB},\quad \vec{e}_3=\overrightarrow{OC},\quad \vec{e}_1{}'=\overrightarrow{OA'},\quad \vec{e}_2{}'=\overrightarrow{OB'},\quad \vec{e}_3{}'=\overrightarrow{OC'}$$

(рис. 22). Обозначим через l прямую, проходящую через O и параллельную $\vec{e}_3$, а через π — плоскость, содержащую O и параллельную $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Пусть π' — плоскость, проведенная через C' и параллельная π, N — ее точка пересечения с l. Тогда $\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NC'}$. Вектор $\overrightarrow{ON}$ коллинеарен $\vec{e}_3$, поэтому $\overrightarrow{ON}=\lambda\vec{e}_3$. Вектор $\overrightarrow{NC'}$ компланарен $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, следовательно, $\overrightarrow{NC'}=\gamma\vec{e}_1+\delta\vec{e}_2$. Таким образом, вектор $\vec{e}_3{}'$ в первом базисе имеет вид $\vec{e}_3{}'\{\gamma;\delta;\lambda\}$. Так как $\vec{e}_1\uparrow\uparrow\vec{e}_1{}'$ и $\vec{e}_2\uparrow\uparrow\vec{e}_2{}'$, то $\vec{e}_1{}'=\alpha\vec{e}_1$, $\vec{e}_2{}'=\beta\vec{e}_2$, где $\alpha>0$, $\beta>0$. Координаты векторов $\vec{e}_1{}'$, $\vec{e}_2{}'$ в первом базисе имеют вид $\vec{e}_1{}'\{\alpha;0;0\}$, $\vec{e}_2{}'\{0;\beta;0\}$. Поэтому матрица $\begin{pmatrix}\alpha & 0 & \gamma\\ 0 & \beta & \delta\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$ представляет собой матрицу перехода от первого базиса ко второму. Ее определитель равен $\alpha\beta\lambda$. Так как $\alpha>0$ и $\beta>0$, то знак определителя совпадает со знаком λ. Легко видеть, что если $\lambda>0$, то $\overrightarrow{ON}\uparrow\uparrow\vec{e}_3$ и точки C' и C лежат в одном полупространстве относительно плоскости π. Если же $\lambda<0$, то $\overrightarrow{ON}\uparrow\downarrow\vec{e}_3$ и точки лежат в разных полупространствах. Утверждение доказано.

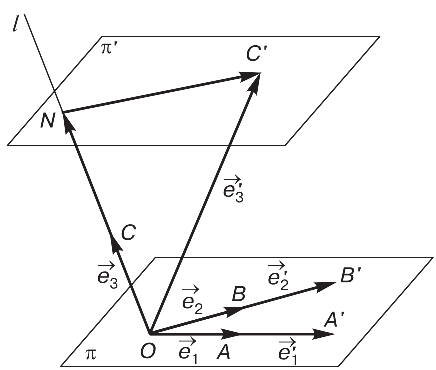


Рис. 22

Для базисов пространства так же, как и на плоскости, вводится бинарное отношение Δ. Если B_1 и B_2 — базисы пространства, то $B_1 \Delta B_2$ в том и только в том случае, когда $\left| B_1 \middle| B_2 \right| > 0$. При этом Δ — отношение эквивалентности, которое разбивает множество всех базисов пространства на два класса. Пространство называется *ориентированным*, если для него задан один из классов эквивалентности. Базисы, принадлежащие выбранному классу, называются *правыми*, а находящиеся во втором классе — *левыми*.

Справедливо следующее правило, которое примем без доказательства. Отложим векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ первого базиса от точки O, а векторы $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$, $\vec{e}_3'$ второго базиса — от точки O'. Базисы имеют одинаковую ориентацию, если кратчайшие повороты от вектора $\vec{e}_1$ к $\vec{e}_2$ из конца вектора $\vec{e}_3$ и от $\vec{e}_1'$ к $\vec{e}_2'$ из конца вектора $\vec{e}_3'$ видны одновременно либо по ходу движения часовой стрелки, либо против ее движения. Если один из этих поворотов виден по ходу движения, а другой против, то базисы имеют различные ориентации. Обычно пространство ориентируют с помощью такого базиса, для которого этот поворот виден против движения часовой стрелки. Примените это правило к базисам, определенным в примере 2.

В курсе алгебры средней школы при изучении свойств тригонометрических функций наряду с обычными углами рассматриваются так называемые ориентированные углы. Покажем, как вводится это понятие на ориентированной плоскости, и рассмотрим некоторые свойства ориентированных углов.

Определение 4. *Пусть дана упорядоченная пара неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Под ориентированным углом между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будем понимать величину угла $\angle \vec{a}\vec{b}$, взятую со знаком «+», если базис $\vec{a}$, $\vec{b}$ правый, и со знаком «−», если этот базис левый. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, то ориентированный угол равен 0; если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположно направлены, то этот угол равен π.*

Ориентированный угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будем обозначать через $\measuredangle \vec{a}\vec{b}$. Итак,

$$-\pi < \measuredangle \vec{a}\vec{b} \le \pi. \tag{5.10}$$

При этом $0 < \measuredangle \vec{a}\vec{b} < \pi$, если ориентация базиса $\vec{a}$, $\vec{b}$ положительна, и $-\pi < \measuredangle \vec{a}\vec{b} < 0$, если она отрицательна.

Рассмотрим некоторые свойства ориентированных углов.

Свойство 1. *Если векторы* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *не противоположно направлены, то*

$$\measuredangle\vec{a}\vec{b} = -\measuredangle\vec{b}\vec{a}. \tag{5.11}$$

Доказательство. Если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, то, согласно определению 1, $\measuredangle\vec{a}\vec{b} = \measuredangle\vec{b}\vec{a} = 0$ и соотношение (5.11) выполнено. Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то они образуют базис плоскости. Базисы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{b}$, $\vec{a}$ имеют разные ориентации (проверьте самостоятельно), поэтому модули ориентированных углов $\measuredangle\vec{a}\vec{b}$ и $\measuredangle\vec{b}\vec{a}$ совпадают, а их знаки различны. Свойство доказано.

Свойство 2. *Если* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *— произвольные векторы, то*

$$\cos\angle\vec{a}\vec{b} = \cos\measuredangle\vec{a}\vec{b}. \tag{5.12}$$

Справедливость равенства (5.12) непосредственно следует из четности функции $y = \cos x$.

Следующее свойство приведем без доказательства.

Свойство 3. *Для любых векторов* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *и* $\vec{c}$ *справедливы следующие соотношения*:

$$\begin{gathered}\cos\left(\measuredangle\vec{a}\vec{b} + \measuredangle\vec{b}\vec{c}\right) = \cos(\measuredangle\vec{a}\vec{c}),\\ \sin\left(\measuredangle\vec{a}\vec{b} + \measuredangle\vec{b}\vec{c}\right) = \sin(\measuredangle\vec{a}\vec{c}).\end{gathered} \tag{5.13}$$

В дальнейшем, не оговаривая особо, будем предполагать, что координаты векторов даны в прямоугольном декартовом правом базисе.

Теорема 3. *Пусть координаты вектора в прямоугольном декартовом базисе* $\vec{i}, \vec{j}$ *имеют вид* $\vec{a}\{\alpha_1; \alpha_2\}$. *Тогда*

$$\begin{gathered}\alpha_1 = |\vec{a}|\cos(\measuredangle\vec{i}\vec{a}),\\ \alpha_2 = |\vec{a}|\sin(\measuredangle\vec{i}\vec{a}).\end{gathered} \tag{5.14}$$

Доказательство. Представим данный вектор $\vec{a}$ в виде $\vec{a} = \alpha_1\vec{i} + \alpha_2\vec{j}$. Так как $\vec{i}, \vec{j}$ — прямоугольный декартов правый базис, то $\left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = 1$, $\measuredangle\vec{i}\vec{j} = \dfrac{\pi}{2}$. Скалярно умножив вектор $\vec{a}$ на базисные векторы, получим $\vec{a}\vec{i} = (\alpha_1\vec{i} + \alpha_2\vec{j})\vec{i} = \alpha_1$, $\vec{a}\vec{j} = (\alpha_1\vec{i} + \alpha_2\vec{j})\vec{j} = \alpha_2$. В то же время $\vec{a}\vec{i} = |\vec{a}|\cos(\angle\vec{i}\vec{a})$, поэтому из (5.12) следует, что $\alpha_1 = |\vec{a}|\cos(\measuredangle\vec{i}\vec{a})$. Аналогично, $\alpha_2 = |\vec{a}|\cos(\measuredangle\vec{j}\vec{a})$. Используем соотношения (5.13) и равенство $\measuredangle\vec{j}\vec{i}=-\dfrac{\pi}{2}$: $\cos(\measuredangle\vec{j}\vec{a})=\cos(\measuredangle\vec{j}\vec{i}+\measuredangle\vec{i}\vec{a})=$ $=\cos\left(\measuredangle\vec{i}\vec{a}-\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin(\measuredangle\vec{i}\vec{a})$. Отсюда следует $\alpha_2=|\vec{a}|\sin(\measuredangle\vec{i}\vec{a})$. Теорема доказана.

Рассмотрим задачу нахождения ориентированного угла между векторами по их прямоугольным декартовым координатам. Ориентированный угол лежит на полуинтервале $(-\pi;\pi]$, поэтому для его вычисления необходимо знать значения двух тригонометрических функций. Выведем формулы, выражающие значения синуса и косинуса ориентированного угла между векторами через их координаты. Они позволят решить поставленную задачу.

Как мы условились, на плоскости выбран правый прямоугольный декартов базис $\vec{q}\left\{0;0;\dfrac{\alpha}{\varepsilon}\right\}\ \vec{j}$. Даны векторы $\vec{a}\{\alpha_1;\alpha_2\}$ и $\vec{b}\{\beta_1;\beta_2\}$. Из соотношений (5.14) следует:

$$\begin{gathered}\cos(\measuredangle\vec{i}\vec{a})=\frac{\alpha_1}{|\vec{a}|};\quad \sin(\measuredangle\vec{i}\vec{a})=\frac{\alpha_2}{|\vec{a}|},\\ \cos(\measuredangle\vec{i}\vec{b})=\frac{\beta_1}{|\vec{b}|};\quad \sin(\measuredangle\vec{i}\vec{b})=\frac{\beta_2}{|\vec{b}|}.\end{gathered}\tag{5.15}$$

Из (5.13) получаем $\sin(\measuredangle\vec{a}\vec{b})=\sin(\measuredangle\vec{a}\vec{i}+\measuredangle\vec{i}\vec{b})$. Так как $\measuredangle\vec{a}\vec{i}=-\measuredangle\vec{i}\vec{a}$, то

$$\sin(\measuredangle\vec{a}\vec{b})=\sin(\measuredangle\vec{i}\vec{b}-\measuredangle\vec{i}\vec{a})=\sin(\measuredangle\vec{i}\vec{b})\cos(\measuredangle\vec{i}\vec{a})-\cos(\measuredangle\vec{i}\vec{b})\sin(\measuredangle\vec{i}\vec{a}).$$

Подставим в полученное выражение соотношения (5.15): $\sin(\measuredangle\vec{a}\vec{b})=\dfrac{\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1}{|\vec{a}||\vec{b}|}$. Так как $|\vec{a}|=\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}$, $|\vec{b}|=\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}$, $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}$, то окончательно имеем:

$$\sin(\measuredangle\vec{a}\vec{b})=\frac{\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}}.\tag{5.16}$$

Проведем аналогичные выкладки для $\cos(\measuredangle\vec{a}\vec{b})$:

$$\cos(\measuredangle\vec{a}\vec{b})=\frac{\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}}.\tag{5.17}$$

В силу свойства 2 ориентированных углов, формула (5.17) вычисления косинуса ориентированного угла совпадает с соответствующей формулой (4.20) для вычисления косинуса неориентированного угла между векторами.

Выведем формулы перехода от одного прямоугольного декартова базиса к другому. Будем предполагать, что нам даны два таких базиса $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{i}'$, $\vec{j}'$, причем ориентация плоскости определена с помощью первого из них. Прямоугольные декартовы базисы — частные случаи аффинных, поэтому формулы перехода имеют вид (5.3). Напомним, что коэффициенты a_1, a_2 и b_1, b_2 в этих формулах равны соответственно координатам векторов $\vec{i}'$, $\vec{j}'$ в базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$: $\vec{i}'\{a_1; a_2\}$, $\vec{j}'\{b_1; b_2\}$. Покажем, что в данном случае эти координаты зависят только от одного параметра — ориентированного угла $\varphi = \measuredangle\vec{i}\vec{i}'$.

Рассмотрим первый случай, когда базисы $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{i}'$, $\vec{j}'$ имеют одинаковую ориентацию. Тогда $\measuredangle\vec{i}'\vec{j}' = \frac{\pi}{2}$. Из соотношений (5.14) следует, что

$$a_1 = |\vec{i}'|\cos(\measuredangle\vec{i}\vec{i}') = \cos\varphi, \quad a_2 = |\vec{i}'|\sin(\measuredangle\vec{i}\vec{i}') = \sin\varphi,$$
$$b_1 = |\vec{j}'|\cos(\measuredangle\vec{i}\vec{j}) = \cos(\measuredangle\vec{i}\vec{j}), \quad b_2 = |\vec{j}'|\sin(\measuredangle\vec{i}\vec{j}) = \sin(\measuredangle\vec{i}\vec{j}).$$

Воспользуемся соотношениями (5.13):

$$\cos(\measuredangle\vec{i}\vec{j}') = \cos(\measuredangle\vec{i}\vec{i}' + \measuredangle\vec{i}'\vec{j}') = \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\varphi;$$

$$\sin(\measuredangle\vec{i}\vec{j}') = \sin(\measuredangle\vec{i}\vec{i}' + \measuredangle\vec{i}'\vec{j}') = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\varphi.$$

Таким образом, вектор $\vec{j}$ имеет координаты $\vec{j}\{-\sin\varphi; \cos\varphi\}$, формулы перехода имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_1' \cos\varphi - \alpha_2' \sin\varphi, \\ \alpha_2 = \alpha_1' \sin\varphi + \alpha_2' \cos\varphi. \end{cases} \tag{5.18}$$

Во втором случае ориентации данных базисов различны, $\measuredangle\vec{i}'\vec{j}' = -\frac{\pi}{2}$. Координаты вектора $\vec{i}'$ имеют такой же вид, что и в первом случае: $\vec{i}'\{\cos\varphi; \sin\varphi\}$. Определим координаты $\vec{j}'$:

$$b_1 = |\vec{j}'|\cos(\measuredangle\vec{i}\vec{j}') = \cos(\measuredangle\vec{i}\vec{i}' + \measuredangle\vec{i}'\vec{j}') = \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\varphi,$$

$$b_2 = |\vec{j}'|\sin(\measuredangle\vec{i}\vec{j}') = \sin(\measuredangle\vec{i}\vec{i}' + \measuredangle\vec{i}'\vec{j}') = \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\varphi.$$

Поэтому формулы перехода в этом случае имеют вид

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_1' \cos\varphi + \alpha_2' \sin\varphi, \\ \alpha_2 = \alpha_1' \sin\varphi - \alpha_2' \cos\varphi. \end{cases} \tag{5.19}$$

Формулы (5.18) и (5.19) можно объединить:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_1' \cos\varphi - \varepsilon\alpha_2' \sin\varphi, \\ \alpha_2 = \alpha_1' \sin\varphi + \varepsilon\alpha_2' \cos\varphi. \end{cases} \tag{5.20}$$

где $\varepsilon = 1$, если ориентации базисов одинаковы, и $\varepsilon = -1$, если они различны.

§ 6. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Будем предполагать, что пространство является ориентированным. Как принято, будем считать, что ориентация задана классом эквивалентности, базисы которого удовлетворяют условию: если их векторы отложены от одной точки, то кратчайший поворот от первого базисного вектора ко второму из конца третьего виден против движения часовой стрелки. Такие базисы мы называем правыми (§ 5).

Определение 1. *Под векторным произведением* $[\vec{a}\vec{b}]$ *двух неколлинеарных векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *будем понимать третий вектор* $\vec{c}$, *удовлетворяющий следующим условиям*:

1) *его модуль равен произведению длин сомножителей, умноженному на синус угла между ними*:

$$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\angle\vec{a}\vec{b}); \tag{6.1}$$

2) *вектор* $\vec{c}$ *перпендикулярен сомножителям* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$;

3) *тройка векторов* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *имеет правую ориентацию.*

Если векторы $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *коллинеарны, то их векторное произведение равно нулевому вектору.*

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — неколлинеарные векторы. Отложим их от некоторой точки O (рис. 23). Обозначим через α плоскость, содержащую точку O и параллельную векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а через l — прямую, проходящую через O и перпендикулярную α. По формуле (6.1) найдем длину векторного произведения $\vec{c} = [\vec{a}\vec{b}]$. Из условия 2) определения следует, что конец вектора $\vec{c}$, отложенного от точ-

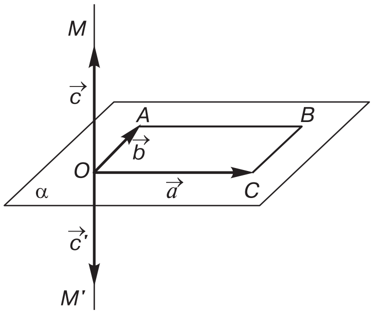


Рис. 23

ки O, принадлежит прямой l. На этой прямой существуют две точки M и M', для которых $|\overrightarrow{OM}| = |\overrightarrow{OM'}| = |\vec{c}|$. Третье условие позволяет выбрать из этих двух точек одну. Так как $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — правая тройка, то, согласно нашей договоренности, из точки M кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ виден против движения часовой стрелки. Таким образом, результат векторного произведения векторов зависит от того, какой класс эквивалентности зафиксирован на множестве базисов при выборе ориентации пространства. Если выбран класс, отличный от указанного выше, то направление векторного произведения будет противоположным для той же самой упорядоченной пары векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Рассмотрим свойства векторного произведения.

Свойство 1. *Если сомножители векторного произведения неколлинеарны, то его длина численно равна площади параллелограмма, построенного на сомножителях.*

Действительно, отложим сомножители векторного произведения, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, от точки O: $\overrightarrow{OC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OA} = \vec{b}$ (рис. 23). $OABC$ — параллелограмм, построенный на этих векторах. Из школьного курса геометрии известно, что его площадь равна $S = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OC}|\sin(\angle AOC)$. Из (6.1) следует, что $S = |[\vec{a}\vec{b}]|$.

Свойство 2. *Векторное произведение* $[\vec{a}\vec{b}]$ *равно нулевому вектору в том случае, когда* $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Справедливость этого утверждения непосредственно следует из определения 1.

Свойство 3. *Для любых векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *справедливо равенство*:

$$[\vec{a}\vec{b}] = -[\vec{b}\vec{a}] \qquad (6.2)$$

(*свойство антикоммутативности*).

Доказательство. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то $[\vec{a}\vec{b}] = [\vec{b}\vec{a}] = \vec{0}$, поэтому равенство (6.2) выполнено. Пусть сомножители неколлинеарны. Ведем обозначения: $\vec{c}=[\vec{a}\vec{b}]$, $\vec{c}\,'=[\vec{b}\vec{a}]$. Проверим, что длины этих векторов совпадают: $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\angle\vec{a}\vec{b})$, $|\vec{c}\,'|=|\vec{b}||\vec{a}|\sin(\angle\vec{b}\vec{a})$. Так как $\angle\vec{a}\vec{b}$ и $\angle\vec{b}\vec{a}$ — неориентированные углы, то $\sin\angle\vec{a}\vec{b}=\sin\angle\vec{b}\vec{a}$, поэтому $|\vec{c}|=|\vec{c}\,'|$. Векторы $\vec{c}$ и $\vec{c}\,'$ коллинеарны между собой, так как перпендикулярны сомножителям $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Поэтому можно записать $\vec{c}\,'=\varepsilon\vec{c}$. Из равенства длин векторов $\vec{c}$ и $\vec{c}\,'$ следует, что $\varepsilon=\pm1$. Докажем, что $\varepsilon=-1$. Согласно определению 1, базисы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{b}$, $\vec{a}$, $\vec{c}\,'$ имеют правую ориентацию. Координаты второго базиса относительно первого имеют вид $\vec{b}\{0;1;0\}$, $\vec{a}\{1;0;0\}$, $\vec{c}\,'\{0;0;\varepsilon\}$. Составим матрицу перехода от первого базиса ко второму: $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&\varepsilon\end{pmatrix}$. Ее определитель равен $-\varepsilon$. Базисы одинаково ориентированы, значит, этот определитель положителен: $-\varepsilon>0$. Таким образом, $\varepsilon=-1$ и $\vec{c}\,'=-\vec{c}$. Свойство доказано.

Свойство 4. *Для любых векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *и любого числа* α *справедливы соотношения*:

$$[\alpha\vec{a}\vec{b}]=\alpha[\vec{a}\vec{b}], \tag{6.3}$$

$$[\vec{a}\alpha\vec{b}]=\alpha[\vec{a}\vec{b}]. \tag{6.4}$$

Доказательство. Вначале докажем соотношение (6.3). Пусть $\vec{a}\parallel\vec{b}$. Тогда $\alpha\vec{a}\parallel\vec{b}$. Поэтому $\alpha[\vec{a}\vec{b}]=[\alpha\vec{a}\vec{b}]=\vec{0}$. В этом случае равенство (6.3) выполнено. Ясно, что оно выполняется и при $\alpha=0$.

Предположим теперь, что сомножители неколлинеарны и число α отлично от нуля. Введем обозначения: $[\vec{a}\vec{b}]=\vec{c}$, $[\alpha\vec{a}\vec{b}]=\vec{q}$. Требуется доказать, что $\vec{q}=\alpha\vec{c}$. Покажем, что модули этих векторов равны. Пусть $\alpha>0$. Тогда $\alpha\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{a}$, поэтому $\angle\vec{a}\vec{b}=\angle(\alpha\vec{a})\vec{b}$, $|\alpha\vec{c}|=|\alpha||\vec{a}||\vec{b}|\sin(\angle\vec{a}\vec{b})$, $|\vec{q}|=|\alpha\vec{a}||\vec{b}|\sin(\angle(\alpha\vec{a})\vec{b})=$ $=|\alpha||\vec{a}||\vec{b}|\sin(\angle\vec{a}\vec{b})$. В этом случае $|\vec{q}|=|\alpha\vec{c}|$ Предположим теперь, что $\alpha<0$. Тогда $\alpha\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{a}$ и $\angle\vec{a}\vec{b}=\angle(\alpha\vec{a})\vec{b}=\pi-\angle\vec{a}\vec{b}$, $|\alpha\vec{c}|=|\alpha||\vec{a}||\vec{b}|\sin(\angle\vec{a}\vec{b})$ и $|\vec{q}|=|\alpha\vec{a}||\vec{b}|\sin(\angle(\alpha\vec{a})\vec{b})=|\alpha||\vec{a}||\vec{b}|\sin(\pi-\angle\vec{a}\vec{b})$. Так как для любого угла $\sin\varphi=\sin(\pi-\varphi)$, то и в этом случае $|\vec{q}|=|\alpha\vec{c}|$.

Обозначим через π произвольную плоскость, параллельную векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Ясно, что эта же плоскость также параллельна векторам $\alpha\vec{a}$ и $\vec{b}$. Согласно определению 1, векторы $\alpha\vec{c}$ и $\vec{q}$ перпендикулярны плоскости π. Поэтому они коллинеарны: $\alpha\vec{c}=\varepsilon\vec{q}$. Так как их модули равны, то либо $\varepsilon = 1$, либо $\varepsilon = -1$. Докажем, что $\varepsilon = 1$. Рассмотрим два базиса $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\alpha\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{q}$. Найдем координаты векторов второго базиса относительно первого. Очевидно, что $\alpha\vec{a}\{\alpha; 0; 0\}$, $\vec{b}\{0; 1; 0\}$. Так как $\alpha\vec{c}=\varepsilon\vec{q}$, то координаты вектора $\vec{q}$ равны $\vec{q}\left\{0; 0; \dfrac{\alpha}{\varepsilon}\right\}$. Таким образом, матрица перехода от первого базиса ко второму имеет вид $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\alpha}{\varepsilon} \end{pmatrix}$. Ее определитель равен $\dfrac{\alpha^2}{\varepsilon}$. Ориентации рассматриваемых базисов совпадают, поэтому $\dfrac{\alpha^2}{\varepsilon} > 0$, отсюда $\varepsilon > 0$, т. е. $\varepsilon = 1$. Соотношение (6.3) доказано.

Для доказательства соотношения (6.4) воспользуемся формулами (6.2) и (6.3): $[\vec{a}\alpha\vec{b}]=-[\alpha\vec{b}\vec{a}]=-\alpha[\vec{b}\vec{a}]=\alpha[\vec{a}\vec{b}]$. Свойство 4 доказано полностью.

Для обоснования следующего свойства потребуется вспомогательное утверждение. Пусть $\vec{a}$ — произвольный вектор, $\overrightarrow{AB}$ — его представитель, а π — некоторая плоскость. Опустим из точек A и B перпендикуляры на π, обозначим через A' и B' их точки пересечения с этой плоскостью. Тогда вектор $\overrightarrow{A'B'}$ будем называть *векторной проекцией* $\vec{a}$ *на плоскость* π. Очевидно, векторная проекция не зависит от выбора представителя вектора $\vec{a}$. Векторную проекцию будем обозначать $\overrightarrow{pr_\pi\vec{a}}$. Легко видеть, что $\overrightarrow{pr_\pi\vec{a}}=\vec{0}$ в том и только в том случае, когда вектор $\vec{a}$ либо нулевой, либо перпендикулярен π.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — произвольные векторы, причем $\vec{b}\neq\vec{0}$. Обозначим через $\vec{c}$ векторное произведение $\vec{c}=[\vec{a}\vec{b}]$. Отложим векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ от одной точки O: $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$. Пусть π — плоскость, проходящая через O и перпендикулярная вектору $\vec{b}$, вектор $\vec{c}$ принадлежит π. Обозначим через $\vec{a}'$ проекцию $\vec{a}$ на π: $\vec{a}'=\overrightarrow{pr_\pi\vec{a}}$ (рис. 24). Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то $\vec{a}'\neq\vec{0}$, в этом случае обозначим через $\vec{a}_1$ вектор плоскости π, полученный из $\vec{a}'$ поворотом на угол $\frac{\pi}{2}$, который виден из точки B по ходу движения часовой стрелки. Если же $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{a}' = \vec{0}$. Тогда положим: $\vec{a}_1 = \vec{0}$. Без ограничения общности можно считать, что в этом случае вектор $\vec{a}_1$ также получен из $\vec{a}'$ указанным поворотом. Для этих векторов справедлива следующая лемма.

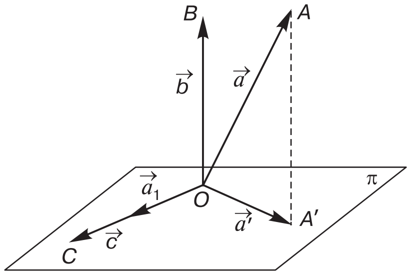


Рис. 24

Лемма. *Векторное произведение* $\vec{c} = [\vec{a}\vec{b}]$ *совпадает с вектором* $|\vec{b}|\vec{a}_1$.

Доказательство. Обозначим вектор $|\vec{b}|\vec{a}_1$ через $\vec{q}$. Пусть $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Тогда $\vec{c} = \vec{a}_1 = \vec{q} = \vec{0}$. Поэтому $\vec{c} = \vec{q}$, в этом случае лемма доказана.

Предположим теперь, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. Вначале докажем, что модули $\vec{q}$ и $\vec{c}$ совпадают. Отложим вектор $\vec{a}'$ от точки O: $\overrightarrow{OA'} = \vec{a}'$ (рис. 24). Треугольник OAA' — прямоугольный. Поэтому $|\overrightarrow{OA'}| = |\overrightarrow{OA}|\cos(\angle A'OA)$. Но $\angle A'OA = \frac{\pi}{2} - \angle\vec{a}\vec{b}$. Следовательно, $|\vec{a}_1| = |\vec{a}|\sin(\angle\vec{a}\vec{b})$. Таким образом, $|\vec{q}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\angle\vec{a}\vec{b})$. Модули векторов $\vec{q}$ и $\vec{c}$ совпадают.

По построению вектор $\vec{a}_1$ лежит в плоскости π и перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Поэтому $\vec{q}$ также перпендикулярен $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и, как следует из определения векторного произведения векторов, коллинеарен $\vec{c}$. Так как модули $\vec{q}$ и $\vec{c}$ равны друг другу, то $\vec{q} = \varepsilon\vec{c}$, где $\varepsilon = 1$, либо $\varepsilon = -1$. Для завершения доказательства необходимо установить, что $\varepsilon = 1$. Вектор $\vec{a}_1$ был выбран таким образом, что базис $\vec{a}'$, $\vec{a}_1$, $\vec{b}$ имеет левую ориентацию. Ясно, что и базис $\vec{a}'$, $\vec{a}_1$, $\vec{b}$ также является левым базисом (рис. 24). Векторы $\vec{q}$ и $\vec{a}_1$ сонаправлены, поэтому базис $\vec{a}$, $\vec{q}$, $\vec{b}$ имеет левую ориентацию. По определению векторного произведения векторов, базис $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ — правый. Тогда $\vec{a},\ \vec{c},\ \vec{b}$ — левый базис (докажите самостоятельно). Таким образом, базисы $\vec{a},\ \vec{c},\ \vec{b}$ и $\vec{a},\ \vec{q},\ \vec{b}$ имеют одинаковые ориентации. Матрица перехода от базиса $\vec{a},\ \vec{c},\ \vec{b}$ к базису $\vec{a},\ \vec{q},\ \vec{b}$ имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ее определитель, равный ε, положителен. Следовательно, $\varepsilon = 1$ и $\vec{c} = \vec{q}$. Лемма доказана.

Свойство 5. *Для любых векторов $\vec{a},\ \vec{b}$ и $\vec{c}$ справедливы соотношения*

$$[(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}] = [\vec{a}\vec{c}] + [\vec{b}\vec{c}], \tag{6.5}$$

$$[\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})] = [\vec{a}\vec{b}] + [\vec{a}\vec{c}]. \tag{6.6}$$

Доказательство. Вначале докажем равенство (6.5). Предположим, что $\vec{c} = \vec{0}$. Тогда $[(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}] = [\vec{a}\vec{c}] = [\vec{b}\vec{c}] = \vec{0}$. Соотношение (6.5) для этого случая справедливо. Легко видеть, что оно также справедливо и в случае, когда $\vec{a} = \vec{0}$ или $\vec{b} = \vec{0}$. Будем предполагать, что данные векторы отличны от нулевого.

Пусть $\vec{c} \neq \vec{0}$. Отложим от произвольной точки O векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, обозначим через π плоскость, проходящую через O и перпендикулярную $\vec{c}$ (рис. 25). Отложим от точки A вектор $\vec{b}$: $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Отсюда $\overrightarrow{OB} = \vec{a}+\vec{b}$. Пусть $\overrightarrow{OA'} = \vec{a}\,' = \overrightarrow{pr_\pi \vec{a}}$, $\overrightarrow{A'B'} = \vec{b}\,' = \overrightarrow{pr_\pi \vec{b}}$. Тогда $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{pr_\pi \overrightarrow{OB}}$. Но $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'B'}$, следовательно, $\overrightarrow{pr_\pi(\vec{a}+\vec{b})} = \overrightarrow{pr_\pi \vec{a}} + \overrightarrow{pr_\pi \vec{b}}$. Повернем треугольник $OA'B'$ в плоскости π на прямой угол так, чтобы из точки C этот поворот был виден по ходу движения часовой стрелки. Получим треугольник $OA''B''$. Осуществим гомотетию с центром в точке O и коэффициентом $|\vec{c}|$. Треугольник $OA''B''$ преобразуется в треугольник $OA'''B'''$. Тогда $\overrightarrow{OA'''} = |\vec{c}|\overrightarrow{OA''}$, $\overrightarrow{A'''B'''} = |\vec{c}|\overrightarrow{A''B''}$, $\overrightarrow{OB'''} = |\vec{c}|\overrightarrow{OB''}$. Согласно доказанной лемме, $\overrightarrow{OA'''} = [\vec{a}\vec{c}]$, $\overrightarrow{A'''B'''} = [\vec{b}\vec{c}]$, $\overrightarrow{OB'''} = [(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}]$. Так как $\overrightarrow{OA'''} + \overrightarrow{A'''B'''} = \overrightarrow{OB'''}$, то $[\vec{a}\vec{c}] + [\vec{b}\vec{c}] = [(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}]$. Равенство (6.5) доказано.

Для доказательства формулы (6.6) воспользуемся соотношениями (6.2) и (6.5): $[\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})] = -[(\vec{b}+\vec{c})\vec{a}] = -[\vec{b}\vec{a}] - [\vec{c}\vec{a}] = [\vec{a}\vec{b}] + [\vec{a}\vec{c}]$. Свойство 5 доказано полностью.

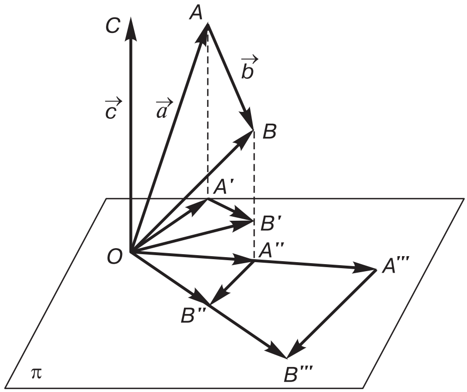


Рис. 25

Выведем формулы, выражающие координаты векторного произведения векторов через координаты сомножителей. Пусть дан прямоугольный декартов правый базис $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ и даны координаты векторов $\vec{a}\{\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3\}$ и $\vec{b}\{\beta_1;\beta_2;\beta_3\}$. Используя свойства векторного произведения векторов, получим:

$$\begin{aligned}[\vec{a}\vec{b}] = [(\alpha_1\vec{i}+\alpha_2\vec{j}+\alpha_3\vec{k})(\beta_1\vec{i}+\beta_2\vec{j}+\beta_3\vec{k})] = \\ = \alpha_1\beta_1[\vec{i}\vec{i}]+\alpha_1\beta_2[\vec{i}\vec{j}]+\alpha_1\beta_3[\vec{i}\vec{k}]+ \\ +\alpha_2\beta_1[\vec{j}\vec{i}]+\alpha_2\beta_2[\vec{j}\vec{j}]+\alpha_2\beta_3[\vec{j}\vec{k}]+\alpha_3\beta_1[\vec{k}\vec{i}]+\alpha_3\beta_2[\vec{k}\vec{j}]+\alpha_3\beta_3[\vec{k}\vec{k}].\end{aligned} \tag{6.7}$$

Найдем попарные векторные произведения базисных векторов. Из определения векторного произведения векторов следует, что $[\vec{i}\vec{i}]=[\vec{j}\vec{j}]=[\vec{k}\vec{k}]=\vec{0}$. Обозначим через $\vec{c}$ векторное произведение $[\vec{i}\vec{j}]$. Так как базис прямоугольный декартов, то $|\vec{i}|=|\vec{j}|=1$, $\angle\vec{i}\,\vec{j}=\dfrac{\pi}{2}$. Поэтому $|\vec{c}|=|\vec{i}||\vec{j}|\sin(\angle\vec{i}\,\vec{j})=1$. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен $\vec{i}$ и $\vec{j}$, а значит, коллинеарен вектору $\vec{k}$. Так как $|\vec{c}|=|\vec{k}|$ и базисы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ и $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{c}$ оба правые, то $[\vec{i}\,\vec{j}]=\vec{k}$. Из свойства 3 следует, что $[\vec{j}\,\vec{i}]=-\vec{k}$.

Аналогично, $|[\vec{i}\,\vec{k}]|=1$, поэтому либо $[\vec{i}\,\vec{k}]=\vec{j}$, либо $[\vec{i}\,\vec{k}]=-\vec{j}$. Рассмотрим базисы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ и $\vec{i}$, $\vec{k}$, $-\vec{j}$. Матрица перехода от первого базиса ко второму имеет вид $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$. Ее определитель равен 1. Тройка векторов $\vec{i}$, $\vec{k}$, $-\vec{j}$ правая. Отсюда вытекает, что $[\vec{i}\,\vec{k}] = -\vec{j}$. Из соотношения (6.2) получим $[\vec{k}\,\vec{i}] = \vec{j}$. Аналогично определяются векторные произведения $[\vec{j}\vec{k}]$ и $[\vec{k}\,\vec{j}]$: $[\vec{j}\vec{k}] = \vec{i}$, $[\vec{k}\,\vec{j}] = -\vec{i}$. Итак, найдены все попарные произведения базисных векторов:

$$\begin{gathered}
[\vec{i}\vec{i}\,] = [\vec{j}\vec{j}\,] = [\vec{k}\vec{k}] = \vec{0}; \\
[\vec{i}\vec{j}\,] = \vec{k},\ [\vec{j}\vec{i}\,] = -\vec{k}; \\
[\vec{i}\vec{k}] = -\vec{j},\ [\vec{k}\vec{i}\,] = \vec{j}; \\
[\vec{k}\vec{j}\,] = -\vec{i},\ [\vec{j}\vec{k}] = \vec{i}.
\end{gathered} \tag{6.8}$$

Подставим найденные попарные векторные произведения (6.8) базисных векторов в разложение (6.7):

$$\begin{aligned}
[\vec{a}\vec{b}] &= \alpha_1\beta_2\vec{k} - \alpha_1\beta_3\vec{j} - \alpha_2\beta_1\vec{k} + \alpha_2\beta_3\vec{i} + \alpha_3\beta_1\vec{j} - \alpha_3\beta_2\vec{i} = \\
&= (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\vec{i} - (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)\vec{j} + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\vec{k} = \\
&= \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}\vec{k}.
\end{aligned}$$

Отсюда можно получить координаты векторного произведения $[\vec{a}\vec{b}]$:

$$[\vec{a}\vec{b}]\left\{\begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}\right\}. \tag{6.9}$$

Выражение (6.9) можно преобразовать к более удобному для запоминания виду:

$$[\vec{a}\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}. \tag{6.10}$$

Правую часть равенства (6.10) нельзя считать определителем матрицы, так как первая строка состоит из векторов, а две другие из чисел. Но если формально раскрыть этот определитель по первой строке, то получим разложение вектора $[\vec{a}\vec{b}]$ по базисным векторам.

В примере 1 будем предполагать, что координаты векторов даны в прямоугольном декартовом правом базисе.

Пример 1. *Дана треугольная пирамида ABCD. Даны также координаты векторов* $\overrightarrow{AB}\{1;1;1\}$, $\overrightarrow{AC}\{-2;0;3\}$, $\overrightarrow{AD}\{4;1;0\}$. *Найти величину двугранного угла между основанием ABC и боковой гранью ABD.*

Решение. Пусть *ABCD* — данная пирамида (рис. 26). Величина двугранного угла между плоскостями *ABC* и *ADB* равна углу, образованному двумя векторами $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$, перпендикулярными этим плоскостям. Положим $\vec{n}_1 = [\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}]$, $\vec{n}_2 = [\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AD}]$, найдем координаты этих векторов, затем определим угол между ними:

$$[\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k},$$

$$[\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}.$$

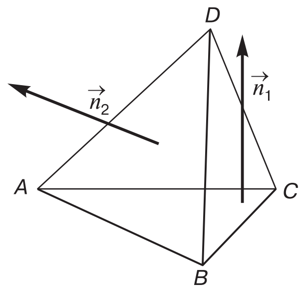


Рис. 26

Таким образом, $[\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}]\{-3;1;2\}$, $[\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AD}]\{-1;4;-3\}$. Вычислим косинус угла φ между ними по формуле (4.18): $\cos\varphi = \dfrac{3+4-6}{\sqrt{9+1+4}\sqrt{1+16+9}} = \dfrac{1}{2\sqrt{91}}$. Искомый угол равен $\arccos\dfrac{1}{2\sqrt{91}}$.

§ 7. СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Определение 1. *Смешанным произведением векторов* $\vec{a}, \vec{b}$ *и* $\vec{c}$ *называется скалярное произведение вектора* $\vec{c}$ *и векторного произведения* $[\vec{a}\vec{b}]$.

Смешанное произведение векторов, в отличие от векторного, является числом. Его будем обозначать как $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$:

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = [\vec{a}\vec{b}]\vec{c}. \tag{7.1}$$

Смешанное произведение обладает рядом важных геометрических свойств.

Свойство 1. *Смешанное произведение векторов в том и только в том случае равно нулю, когда сомножители компланарны.*

Доказательство. Пусть дана компланарная тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Сначала рассмотрим частные случаи, когда $\vec{a} \parallel \vec{b}$ или $\vec{c} = \vec{0}$. В первом случае в соответствии с определением векторного произведения векторов $[\vec{a}\vec{b}] = \vec{0}$, поэтому из равенства (7.1) следует, что $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = 0$. Во втором случае из того же равенства также получим, что $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = 0$.

Рассмотрим основной случай, при котором векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, а вектор $\vec{c}$ отличен от нулевого. Пусть π — плоскость, параллельная векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Отложим их от одной точки O этой плоскости. Тогда вектор $[\vec{a}\vec{b}]$ перпендикулярен π, поэтому $[\vec{a}\vec{b}] \perp \vec{c}$. Из свойств скалярного произведения векторов следует, что $[\vec{a}\vec{b}]\vec{c} = (\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = 0$.

Обратно, рассмотрим тройку векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, для которой $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = 0$. Так как $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = [\vec{a}\vec{b}]\vec{c} = 0$, то возможны следующие случаи.

1. $[\vec{a}\vec{b}] = \vec{0}$. Тогда $\vec{a} \parallel \vec{b}$, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы, следовательно, тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ также линейно зависима и поэтому компланарна (§ 3).

2. $\vec{c} = \vec{0}$. Тогда система векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ также линейно зависима, так как содержит нулевой вектор, а следовательно, компланарна.

3. $[\vec{a}\vec{b}] \neq \vec{0}$, $\vec{c} \neq \vec{0}$. Отсюда вытекает, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны. Рассмотрим плоскость π, параллельную векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отложим $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ от точки O этой плоскости (рис. 27). Так как $[\vec{a}\vec{b}]\vec{c} = \vec{0}$ и $[\vec{a}\vec{b}] \neq \vec{0}$, $\vec{c} \neq \vec{0}$, то угол между этими векторами прямой. Но вектор $[\vec{a}\vec{b}]$ перпендикулярен π, отсюда следует, что вектор $\vec{c}$ параллелен плоскости π. Свойство доказано.

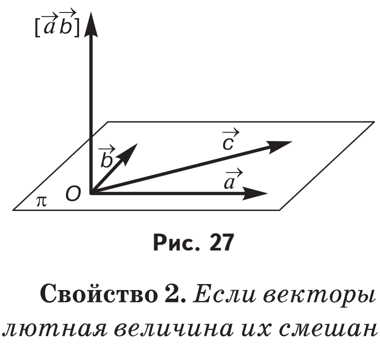


Рис. 27

Свойство 2. *Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не компланарны, то абсолютная величина их смешанного произведения равна объему параллелепипеда, построенного на этих векторах. Смешанное произведение положительно, если тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ правая, и отрицательно, если эта тройка левая.*

Доказательство. Рассмотрим первый случай, когда тройка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — правая. Отложим векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ от одной точки A: $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{c}$. Достроим полученную систему точек до параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ (рис. 28). Обозначим через $\vec{n}$ вектор $[\vec{a}\vec{b}]$, а через π — плоскость основания $ABCD$ параллелепипеда. Пусть l — прямая, проходящая через A и перпендикулярная π. Отложим вектор $\vec{n}$ от точки A: $\overrightarrow{AN}=\vec{n}$. Так как вектор $\vec{n}$ перпендикулярен π, то точка N лежит на прямой l. Тройки векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{n}$ правые, поэтому концы векторов $\vec{c}$ и $\vec{n}$ — точки A' и N — лежат в одном полупространстве относительно плоскости π (пример 2, § 5). Обозначим через φ угол между прямыми l и AA'. В рассматриваемом случае $\varphi=\angle\vec{n}\vec{c}$. Опустим из вершины A' высоту $A'H$ на плоскость основания. Обозначим ее длину через h. Тогда объем параллелепипеда равен: $V = Sh$, где S — площадь параллелограмма $ABCD$. Но, согласно свойству 1 векторного произведения векторов, $\left|[\vec{a}\vec{b}]\right|=S$. Поэтому $V=\left|[\vec{a}\vec{b}]\right|h$. Проецируя отрезок $A'H$ на l, получаем отрезок AK. Так как длина AK равна h, то из свойств прямоугольного треугольника $AA'K$ следует $h=|\vec{c}|\cos\varphi$. Таким образом, $V=\left|[\vec{a}\vec{b}]\right||\vec{c}|\cos\varphi=\left|(\vec{a}\vec{b}\vec{c})\right|$.

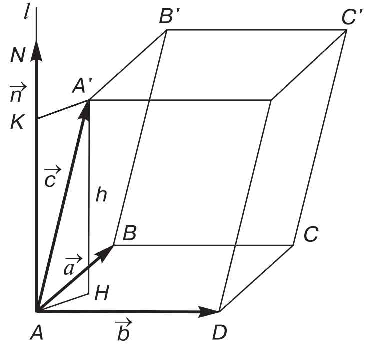


Рис. 28

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — левая тройка векторов. Отложим векторы от точки A: $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{c}$. Достроим эту тройку векторов до параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ (рис. 29). Как и в предыдущем случае, обозначим плоскость $ABCD$ через π, векторное произведение $[\vec{a}\vec{b}]$ через $\vec{n}$. Проведем через вершину A

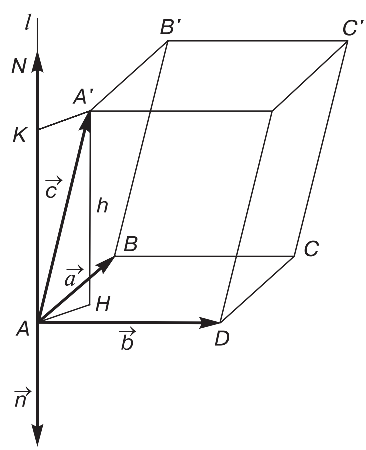


Рис. 29

прямую l, перпендикулярную π, и отложим от точки A вектор $\vec{n}$: $\overrightarrow{AN} = \vec{n}$. Так как вектор $\vec{n}$ перпендикулярен π, то точка N принадлежит прямой l. Пусть φ — угол между ребром AA' и l. Так как ориентации троек векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{n}$ различны, то точки A' и N лежат в разных полупространствах относительно плоскости π. Если $\psi = \angle\vec{n}\vec{c}$, то в этом случае $\psi = \pi - \varphi$. Пусть $A'H$ — высота параллелепипеда, h — ее длина. Объем параллелепипеда V равен Sh, где S — площадь параллелограмма $ABCD$. Поэтому $V = \left|[\vec{a}\vec{b}]\right|h$. Проецируя отрезок $A|H$ на прямую l, получим отрезок AK. Из свойств прямоугольного треугольника $AA'K$ следует, что $h = |\vec{c}|\cos\varphi$. Так как $\cos\varphi = \cos(\pi - \psi) = -\cos\psi$, ψ — острый угол, а φ — тупой, то $\cos\varphi = |\cos\psi|$. Поэтому $h = |\vec{c}||\cos\psi|$, $V = \left|[\vec{a}\vec{b}]\right||\vec{c}||\cos\psi| = |(\vec{a}\vec{b}\vec{c})|$.

Нетрудно проверить, что если $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) > 0$, то тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — правая, а в случае, когда $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) < 0$, эта тройка левая. Действительно, так как $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \left|[\vec{a}\vec{b}]\right||\vec{c}|\cos\varphi$, где φ — угол между векторами $[\vec{a}\vec{b}]$ и $\vec{c}$, то $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) > 0$ в том и только в том случае, когда $\cos\varphi > 0$, т. е. угол φ острый. Отсюда следует, что векторы $[\vec{a}\vec{b}]$ и $\vec{c}$, отложенные от точки A, лежат в одном полупространстве относительно плоскости π, проходящей через A и параллельной векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. В этом случае (пример 2, § 6) тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{n}$ имеют одинаковые ориентации. Но тройки $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{n}$ правая, следовательно, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — также правая тройка векторов.

Если $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) < 0$, то аналогично доказывается, что векторы $[\vec{a}\vec{b}]$ и $\vec{c}$ лежат в различных полуплоскостях относительно π. Поэтому $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — левая тройка векторов. Свойство 2 доказано.

Свойства 1 и 2 обосновывают геометрический смысл смешанного произведения векторов.

Свойство 3. *Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ справедливы следующие соотношения*:

$$((\vec{a}+\vec{b})\vec{c}\vec{d}) = (\vec{a}\vec{c}\vec{d}) + (\vec{b}\vec{c}\vec{d}), \tag{7.2}$$

$$(\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})\vec{d}) = (\vec{a}\vec{b}\vec{d}) + (\vec{a}\vec{c}\vec{d}), \tag{7.3}$$

$$(\vec{a}\vec{b}(\vec{c}+\vec{d})) = (\vec{a}\vec{b}\vec{c}) + (\vec{a}\vec{b}\vec{d}). \tag{7.4}$$

Доказательство. Воспользуемся свойствами скалярного и векторного произведений векторов (§ 4, 6). Докажем равенство (7.2), остальные соотношения проверяются аналогично. Согласно (7.1), $((\vec{a}+\vec{b})\vec{c}\vec{d})=[(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}]\vec{d}$, поэтому

$$((\vec{a}+\vec{b})\vec{c}\vec{d})=([\vec{a}\vec{c}]+[\vec{b}\vec{c}])\vec{d}=[\vec{a}\vec{c}]\vec{d}+[\vec{b}\vec{c}]\vec{d}=(\vec{a}\vec{c}\vec{d})+(\vec{b}\vec{c}\vec{d}).$$

Свойство 3 доказано.

Свойство 4. *Для любых векторов* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *и любого числа* α *справедливы следующие соотношения*:

$$((\alpha\vec{a})\vec{b}\vec{c})=\alpha(\vec{a}\vec{b}\vec{c}), \tag{7.5}$$

$$(\vec{a}(\alpha\vec{b})\vec{c})=\alpha(\vec{a}\vec{b}\vec{c}), \tag{7.6}$$

$$(\vec{a}\vec{b}(\alpha\vec{c}))=\alpha(\vec{a}\vec{b}\vec{c}). \tag{7.7}$$

Доказательство. Для доказательства воспользуемся формулой (7.1), а также свойствами скалярного и векторного произведений векторов (§ 4, 6). Докажем соотношение (7.5), остальные равенства обосновываются аналогично: $((\alpha\vec{a})\vec{b}\vec{c})=[(\alpha\vec{a})\vec{b}]\vec{c}=$ $=\alpha([\vec{a}\vec{b}]\vec{c})=\alpha(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$. Свойство 4 доказано.

Выведем формулу для подсчета смешанного произведения векторов через координаты сомножителей. Пусть в пространстве дан прямоугольный декартов правый базис $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ и даны координаты векторов $\vec{a}\{\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3\}$, $\vec{b}\{\beta_1;\beta_2;\beta_3\}$ и $\vec{c}\{\gamma_1;\gamma_2;\gamma_3\}$ относительно этого базиса. По формулам (6.9) (§ 6) найдем координаты векторного произведения $[\vec{a}\vec{b}]$: $[\vec{a}\ \vec{b}]\left\{\begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix};-\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}\right\}$. Так как $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=[\vec{a}\vec{b}]\vec{c}$, то, воспользовавшись формулой (4.15) для определения скалярного произведения векторов в координатах (§ 4), получим $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=\gamma_1\begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}-\gamma_2\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_3\end{vmatrix}+\gamma_3\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}$. Легко видеть, что правая часть этого выражения равна определителю третьего порядка, составленного из координат векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}. \tag{7.8}$$

Как вытекает из формулы (7.8) и свойства 1 смешанного произведения векторов, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны в том и только в том случае, когда определитель, составленный из их координат, вычисленных в прямоугольном декартовом базисе, равен нулю. Это утверждение полностью согласуется с результатом теоремы 9, § 3. Но при этом следует иметь в виду, что упомянутая теорема доказывалась нами при условии, что координаты векторов даны в произвольном аффинном базисе.