

ТЕМА 2. 2

СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

§ 1. Декартовы системы координат

Определение 1. *Прямоугольной декартовой системой координат в пространстве называется упорядоченная четвёрка*

$$\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\},$$

в которой O — это некоторая фиксированная точка пространства, векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ имеют единичную длину и являются взаимно перпендикулярными.

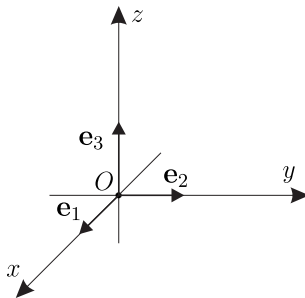


Рис. 1. Декартова система координат в пространстве и её орты.

Замечание 1. *Поскольку векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ не компланарны, то они линейно независимы и поэтому образуют базис в пространстве.*

Определение 2. *Осями координат Ox , Oy , Oz называются оси, проведённые через точку O параллельно векторам $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, причём положительные направления осей совпадают с направлениями этих векторов соответственно.*

Обозначение. Ox — ось абсцисс, Oy — ось ординат, Oz — ось аппликат.

Определение 3. *Радиусом-вектором $\mathbf{r}$ точки M пространства относительно фиксированной точки O называется направленный отрезок $\overrightarrow{OM}$.*

Замечание 2. Отметим, что при заданной точке O радиус-вектор $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$ взаимно однозначно соответствует точке M . Мы можем ввести *декартовы координаты произвольной точки пространства*.

Определение 4. Координатами точки M пространства называются координаты радиуса-вектора этой точки в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3, \quad (1.1)$$

где векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ отложены от точки O .

Обозначение. $M(x, y, z)$.

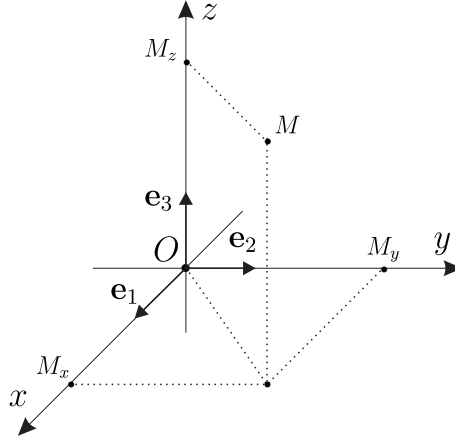


Рис. 2. Декартовы координаты точки M пространства.

По аналогии можно ввести декартову косоугольную систему координат.

Определение 5. Косоугольной декартовой системой координат в пространстве называется упорядоченная четвёрка

$$\{O, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\},$$

в которой O — это некоторая фиксированная точка пространства, векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ являются некопланарными.

Аналогичным образом вводятся декартовы системы координат на плоскости $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ и декартова система координат на прямой $\{O, \mathbf{e}_1\}$.

§ 2. Направляющие косинусы

Пусть рассматриваемая точка M имеет координаты (x, y, z) в прямоугольной декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Тогда

$$x = \text{Pr}_{\mathbf{e}_1} \overrightarrow{OM} = |\overrightarrow{OM}| \cos \alpha, \quad (2.1)$$

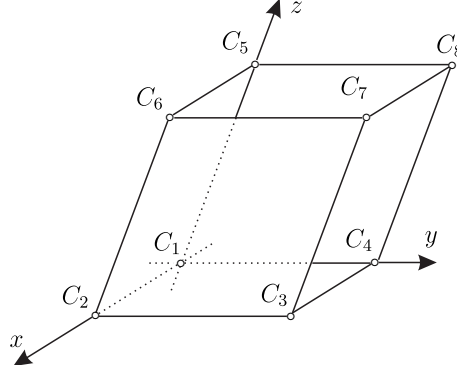


Рис. 3. Косоугольная система координат в пространстве, связанная с кристаллической решеткой.

$$y = \text{Pr}_{\mathbf{e}_2} \overrightarrow{OM} = |\overrightarrow{OM}| \cos \beta, \quad (2.2)$$

$$z = \text{Pr}_{\mathbf{e}_3} \overrightarrow{OM} = |\overrightarrow{OM}| \cos \gamma, \quad (2.3)$$

где $\alpha \in [0, \pi]$, $\beta \in [0, \pi]$ и $\gamma \in [0, \pi]$ — углы между радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$ и векторами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$, соответственно.

□ Действительно, пусть

$$\overrightarrow{OM} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3. \quad (2.4)$$

Тогда имеем

$$x = (\overrightarrow{OM}, \mathbf{e}_1) = |\mathbf{e}_1| \text{Pr}_{\mathbf{e}_1} \overrightarrow{OM} = |\overrightarrow{OM}| \cos \alpha, \quad (2.5)$$

$$y = (\overrightarrow{OM}, \mathbf{e}_2) = |\mathbf{e}_2| \text{Pr}_{\mathbf{e}_2} \overrightarrow{OM} = |\overrightarrow{OM}| \cos \beta, \quad (2.6)$$

$$z = (\overrightarrow{OM}, \mathbf{e}_3) = |\mathbf{e}_3| \text{Pr}_{\mathbf{e}_3} \overrightarrow{OM} = |\overrightarrow{OM}| \cos \gamma. \quad \boxtimes \quad (2.7)$$

Поскольку

$$|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (2.8)$$

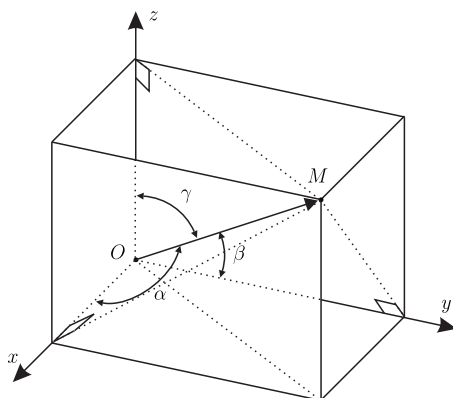
то

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad (2.9)$$

$$\cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad (2.10)$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad (2.11)$$

Определение 6. Числа $\cos \alpha$, $\cos \beta$ и $\cos \gamma$ называются направляющими косинусами радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$.

Рис. 4. Углы между радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$ и осями координат.

Очевидно, что

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (2.12)$$

Замечание 4. С одной стороны, для того чтобы однозначно определить точку M пространства достаточно задать длину радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ и его направляющие косинусы. С другой стороны, задание двух из трёх направляющих косинусов и длины радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ определяет не одну, а две точки! Действительно, пусть задана длина $r = |\overrightarrow{OM}|$ и направляющие косинусы $\cos \alpha$ и $\cos \beta$, тогда мы из равенства (2.12) получим равенство

$$|\cos \gamma| = 1 \Leftrightarrow \cos \gamma = \pm 1.$$

Итак, мы имеем две точки, лежащие на одной прямой

$$M_1(r, \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) \quad \text{и} \quad M_2(r, \cos \alpha, \cos \beta, -\cos \gamma),$$

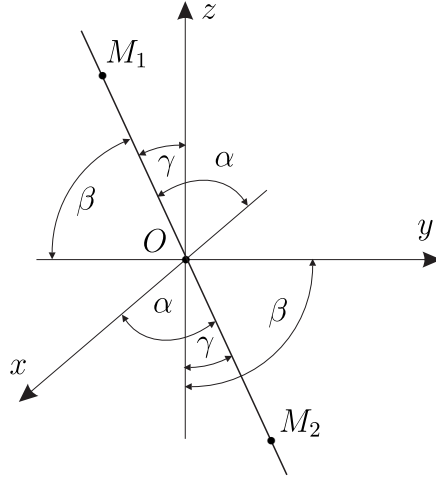
причём угол между векторами $\overrightarrow{OM}_1$ и $\overrightarrow{OM}_2$ равен π .

§ 3. Полярная система координат

Определение 7. Плоскость называется ориентированной, если фиксирован вектор нормали $\mathbf{n}$ к этой плоскости.

Определение 8. Полярной системой координат на заданной ориентированной плоскости называется упорядоченная двойка $\{O, \mathbf{e}\}$, где O — это некоторая фиксированная точка, называемая полюсом, а $\mathbf{e}$ — это ненулевой вектор компланарный данной плоскости.

Определение 9. Ось, проходящая через точку O параллельно вектору $\mathbf{e}$ и сонаправленная этому вектору, называется полярной осью.

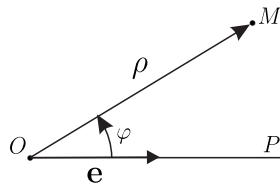
Рис. 5. Точки M_1 и M_2 .

Определение 10. Полярными координатами точки M на ориентированной плоскости называется упорядоченная двойка (ρ, φ) , где

$$\rho = |\overrightarrow{OM}|, \quad (3.1)$$

а φ — это угол между полярной осью и радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$, отсчитываемый от полярной оси против часовой стрелки, если смотреть с конца направленного вектора нормали $\mathbf{n}$ к ориентированной плоскости, отложенного от произвольной точки плоскости.

Замечание 5. По своему определению $0 \leq \rho < +\infty$ и $0 \leq \varphi < 2\pi$. Для полюса O не определён угол φ , но полюс вполне определяется равенством $\rho = 0$. Иногда удобно отсчитывать угол по часовой стрелки.

Рис. 6. Полярная система координат на плоскости и полярные координаты (ρ, φ) точки M .

Тогда отсчитываемый угол считается отрицательным.

Можно указать формулы перехода от полярных координат (ρ, φ) на плоскости π к декартовым координатам (x, y) точки M в случае специальным образом выбранной прямоугольной декартовой системы координат Oxy на ориентированной плоскости π .

Пусть $\{O, \mathbf{e}\}$ — это фиксированная полярная система координат.

1. Выберем в качестве оси абсцисс Ox — полярную ось OP .

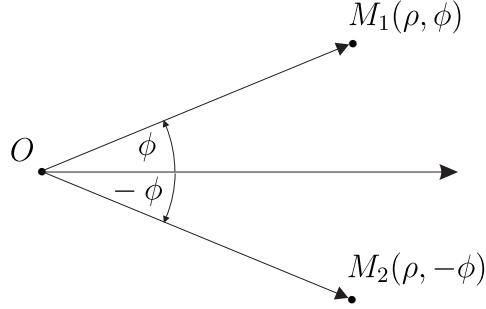


Рис. 7. Отрицательный угол.

2. Ось ординат Oy выберем таким образом, чтобы ось абсцисс Ox поворотом против часовой стрелки на угол $\pi/2$ (если смотреть с конца вектора нормали $\mathbf{n}$, отложенного от произвольной точки плоскости) совмещалась с осью Oy с учётом их направления. Заметим, что такая система координат Oxy называется правой.

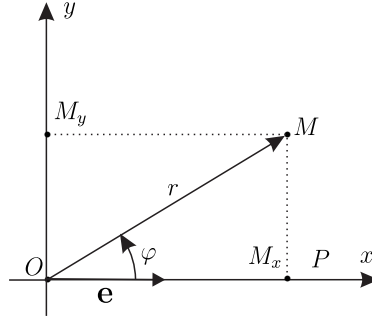


Рис. 8. Полярная система координат на плоскости и специальная прямоугольная система координат.

Мы ввели вспомогательные точки $M_x(x, 0)$ и $M_y(0, y)$ — ортогональные проекции точки $M(x, y)$ на соответствующие оси декартовой системы координат Oxy . Итак, имеем

$$\overrightarrow{OM} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y.$$

Пусть $\alpha \in [0, \pi]$ и $\beta \in [0, \pi]$ — углы между радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$ и векторами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, соответственно. Тогда справедливы следующие равенства:

$$x = \text{Pr}_{\mathbf{e}_1} \overrightarrow{OM} = |\overrightarrow{OM}| \cos \alpha, \quad (3.2)$$

$$y = \text{Pr}_{\mathbf{e}_2} \overrightarrow{OM} = |\overrightarrow{OM}| \cos \beta. \quad (3.3)$$

Имеет место следующая связь углов α и β :

$$\beta = \begin{cases} \pi/2 - \alpha, & \text{если } y > 0; \\ \pi/2 + \alpha, & \text{если } y < 0; \\ \pi/2, & \text{если } y = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Поэтому из (3.3) и (3.4) вытекают следующие равенства:

$$y = |\vec{OM}| \begin{cases} \sin \alpha, & \text{если } y \geq 0; \\ -\sin \alpha, & \text{если } y \leq 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Формулы (3.2) и (3.5) можно записать единообразно, если ввести угол $\varphi \in [0, 2\pi)$ между осью Ox и радиус-вектором $\vec{OM}$, отсчитываемый против часовой стрелки на ориентированной плоскости. Тогда имеем

$$\alpha = \begin{cases} \varphi, & \text{если } y > 0; \\ 2\pi - \varphi, & \text{если } y < 0; \\ 0, & \text{если } y = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Заметим, что

$$\cos \alpha = \cos \varphi, \quad (3.7)$$

$$\sin \alpha = \begin{cases} \sin \varphi, & \text{если } y > 0; \\ -\sin \varphi, & \text{если } y < 0; \\ 0, & \text{если } y = 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Таким образом, из (3.7), (3.8) и (3.2), (3.5) приходим к следующим формулам:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad \rho = |\vec{OM}|, \quad \varphi \in [0, 2\pi). \quad (3.9)$$

Имеют место обратные формулы

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (3.10)$$

Замечание 6. Соответствие точек ориентированной плоскости и их полярных координат не являются взаимно однозначным.

§ 4. Цилиндрическая система координат

Определение 11. Цилиндрической системой координат называется упорядоченная четвёрка $\{\pi, O, \mathbf{n}, \mathbf{e}\}$, где π — это некоторая фиксированная плоскость в пространстве, O — это некоторая фиксированная точка на плоскости π , $\mathbf{n}$ — это некоторый фиксированный ненулевой вектор, ортогональный плоскости π , наконец, $\mathbf{e}$ — это ненулевой вектор, лежащий в плоскости π .

Замечание 7. Таким образом, плоскость π с учетом выбора вектора нормали π является ориентированной.

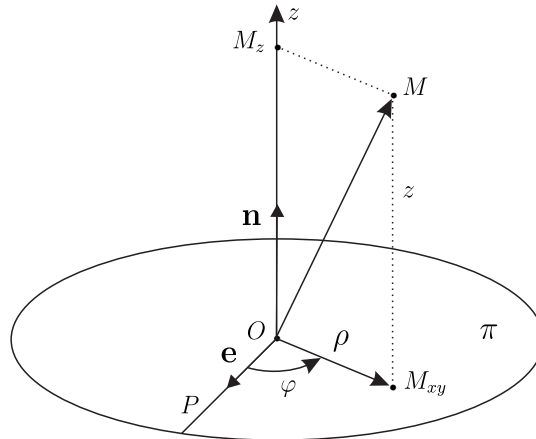


Рис. 9. Цилиндрическая система координат.

Через точку O в направлении вектора $\mathbf{n}$ проведём ось Oz , которая называется *зенитной осью*. Отметим, что плоскость π называется *экваториальной плоскостью*.

Определение 12. Цилиндрическими координатами точки M в цилиндрической системе координат $\{\pi, O, \mathbf{n}, \mathbf{e}\}$ называется упорядоченная тройка чисел (ρ, φ, z) , где (ρ, φ) — это полярные координаты ортогональной проекции M_{xy} точки M на плоскость π в полярной системе координат $\{O, \mathbf{e}\}$, причём $\varphi \in [0, 2\pi)$ — угол между полярной осью и радиус-вектором $\overrightarrow{OM_{xy}}$ на ориентированной плоскости π , а z — это координата ортогональной проекции M_z точки M на ось Oz , т. е. $\overrightarrow{OM_z} = z\mathbf{n}$.

Замечание 8. Отметим, что точки лежащие на оси Oz вполне определяются своей декартовой координатой z и равенством $\rho = 0$ и не имеют угловой координаты φ .

С выбранной системой цилиндрических координат можно как и ранее связать специальную прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ в пространстве Π , выбрав на плоскости π как и ранее прямоугольную систему декартовых координат Oxy .

Формулы связывающие цилиндрические координаты (ρ, φ, z) с декартовыми координатами (x, y, z) в специальной декартовой системе координат, в которой имеют следующий вид:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z. \quad (4.1)$$

ПРИМЕР 1. Уравнение кругового параболоида в декартовой прямоугольной системе координат с координатами (x, y, z) имеем следующий вид:

$$z = x^2 + y^2,$$

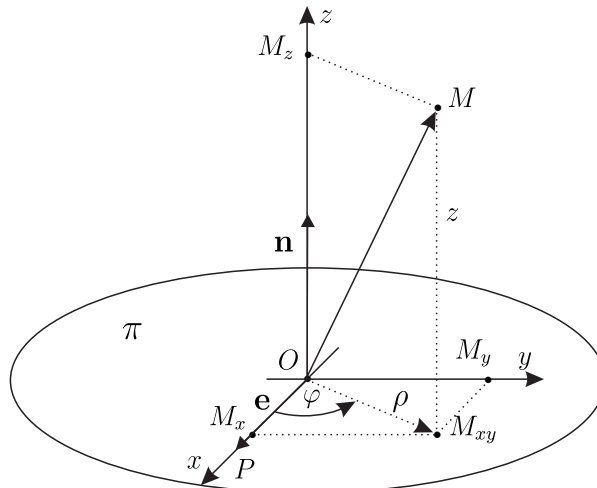


Рис. 10. Цилиндрическая система координат и специальная декартова система координат $Oxyz$.

а в связанной с этой декартовой системы координат цилиндрической системе координат $\{Oxy, O, \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_x\}$ с координатами (ρ, φ, z) уравнение кругового параболоида имеет следующий вид:

$$z = \rho^2,$$

где

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad \rho \geq 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

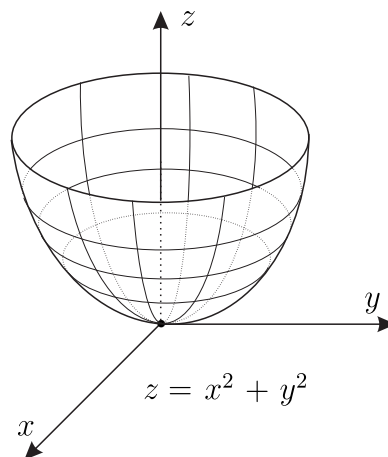


Рис. 11. Эллиптический параболоид.

ПРИМЕР 2. Уравнение кругового конуса в некоторой прямоугольной декартовой системе координат с координатами (x, y, z) имеет следующий вид:

$$z^2 = x^2 + y^2,$$

а в связанной цилиндрической системе координат $\{Oxy, O, \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_x\}$ с координатами (ρ, φ, z) имеет следующий вид:

$$|z| = \rho,$$

где

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad \rho \geq 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

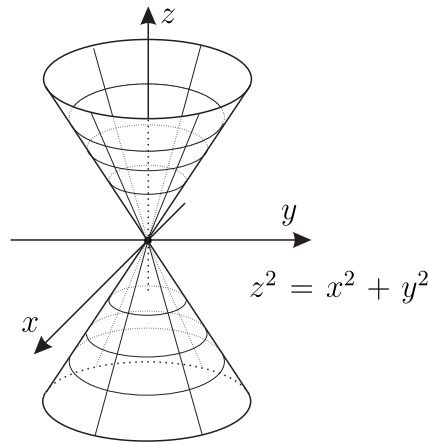


Рис. 12. Эллиптический конус.

§ 5. Сферическая система координат

Определение 13. *Сферической системой координат называется упорядоченная четвёрка $\{\pi, O, \mathbf{n}, \mathbf{e}\}$, где π — это некоторая фиксированная плоскость в пространстве, O — это некоторая фиксированная точка на плоскости π , $\mathbf{n}$ — это некоторый фиксированный ненулевой вектор, ортогональный плоскости π , наконец, $\mathbf{e}$ — это ненулевой вектор, лежащий в плоскости π .*

Замечание 9. Определения 13 и 11 совпадают. Различие сферической системы координат от цилиндрической системы координат заключается в записи координат точки.

Сначала проведём через точку $O \in \pi$ ось, сонаправленную вектору $\mathbf{n}$. Полученную *зенитную ось* Oz .

Пусть M — произвольная точка пространства. Обозначим через r длину радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$, через $\vartheta \in [0, \pi]$ — угол между вектором $\mathbf{n}$ и радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$; через $\varphi \in [0, 2\pi)$ — обозначим угол между на-

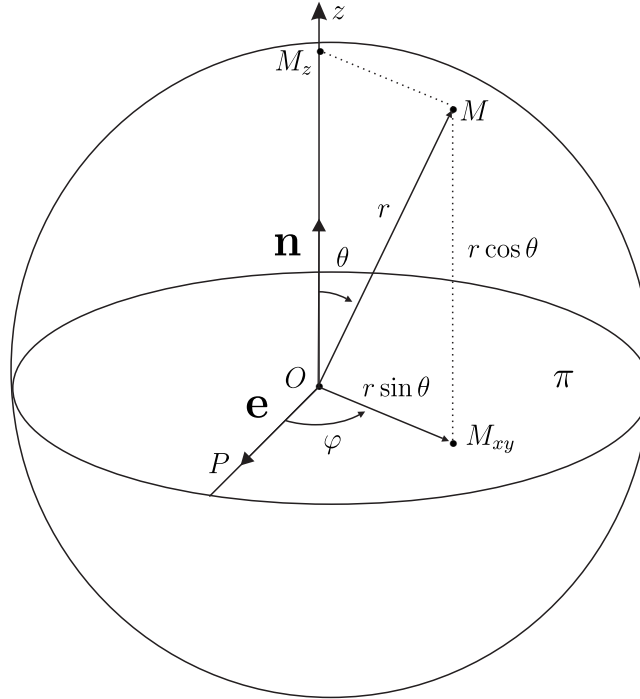


Рис. 13. Сферическая система координат в пространстве.

правленным отрезком $\overrightarrow{OM_{xy}}$ (M_{xy} — ортогональная проекция точки M на плоскость π) и полярной осью OP , отсчитываемый от полярной оси против часовой стрелки. При этом угол φ называется *азимутальным углом*, а угол ϑ — *зенитным углом*.

Определение 14. Упорядоченная тройка (r, ϑ, φ) называется *сферическими координатами точки M в сферической системе координат $\{\pi, O, \mathbf{n}, \mathbf{e}\}$* .

Заключение 10. Отметим, что полюс O сферической системы координат не имеет угловых координат (ϑ, φ) , но вполне определяется равенством $r = 0$.

Формулы связи декартовых и сферических координат.

Пусть на плоскости π введена специальная декартова система координат Oxy . Тогда с учётом выбранной ранее оси Oz мы можем получить связь координат произвольной точки (r, ϑ, φ) в выбранной сферической системе координат $\{\pi, O, \mathbf{n}, \mathbf{e}\}$ с соответствующими координатами (x, y, z) в связанной декартовой системе координат.

Справедливы следующие формулы:

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta, \quad (5.1)$$

$$0 \leq r < +\infty, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

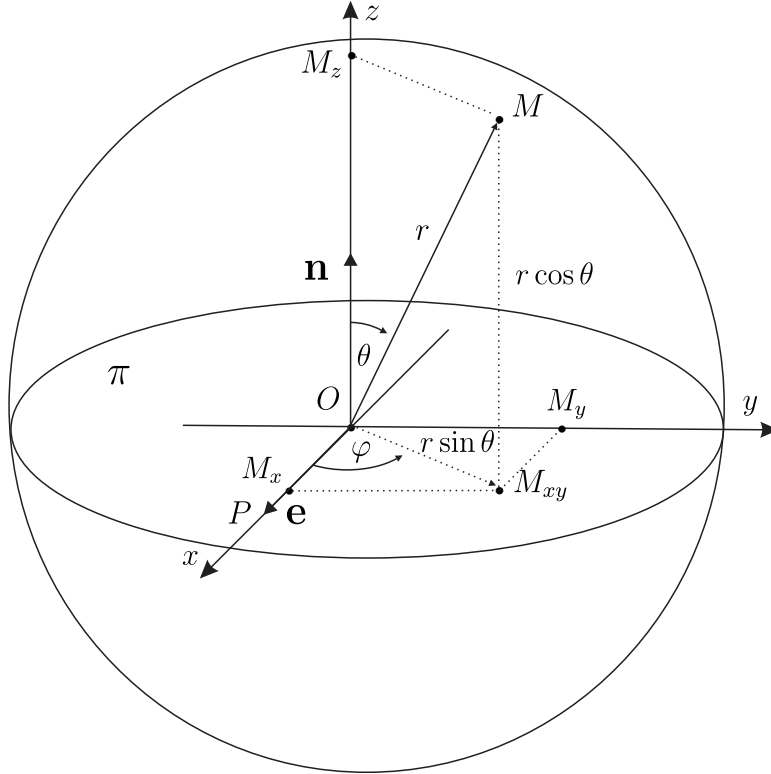


Рис. 14. Сферическая система координат в пространстве и согласованная с ней декартова система координат $Oxyz$.

□ Действительно,

1. Отметим, что $\overrightarrow{OM}_z = z\mathbf{n}$. Поэтому

$$z = \text{Pr}_{\mathbf{n}} \overrightarrow{OM} = |\overrightarrow{OM}| \cos \vartheta = r \cos \vartheta;$$

2. Кроме того,

$$|\overrightarrow{OM}_{xy}| = |\overrightarrow{OM}| \sin \vartheta,$$

поэтому

$$x = \text{Pr}_{\mathbf{e}_1} \overrightarrow{OM}_{xy} = |\overrightarrow{OM}_{xy}| \cos \varphi = r \sin \vartheta \cos \varphi,$$

$$y = \text{Pr}_{\mathbf{e}_2} \overrightarrow{OM}_{xy} = |\overrightarrow{OM}_{xy}| \sin \varphi = |\overrightarrow{OM}_{xy}| \sin \varphi = r \sin \vartheta \sin \varphi. \quad \boxtimes$$

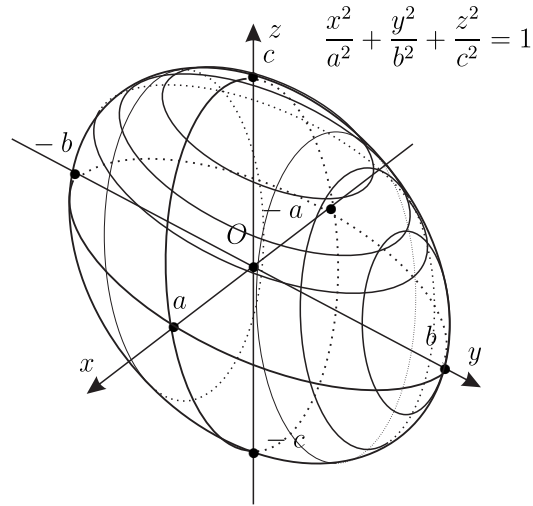


Рис. 15. Эллипсоид.

ПРИМЕР 3. Уравнение эллипсоида в некоторой декартовой прямоугольной системе координат имеет следующий вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Мы рассмотрим один важный частный случай, когда $a = b = c = 1$. Тогда уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

— это уравнение сферы единичного радиуса с центром в начале системы координат. Тогда в связанной сферической системе координат $\{Oxy, O, \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_x\}$ уравнение окружности примет очень простой вид

$$r = 1,$$

где

$$x = \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = \cos \vartheta, \quad \vartheta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$