

§ 1. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРОВ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Мы приступаем к изучению основных понятий аналитической геометрии — координат векторов и точек. Фундаментальное значение этих понятий объясняется тем, что они позволяют геометрическому объекту, вектору или точке, однозначно поставить в соответствие алгебраический объект, его координаты, что дает возможность применить алгебраические методы к исследованию геометрических свойств фигур. Прежде всего, рассмотрим свойства линейно зависимых систем векторов, с их помощью и будут введены координаты векторов на плоскости и в пространстве.

Условимся вектор $\vec{m} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$ называть *линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$* . В этом случае будем также говорить, что вектор $\vec{m}$ линейно выражается через векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ или линейно раскладывается по этим векторам с указанными коэффициентами.

Определение 1. Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ называется *линейно зависимой*, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, среди которых, по крайней мере, одно отлично от нуля, что линейная комбинация $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$ равна нулевому вектору.

Если система векторов не является линейно зависимой, то она называется *линейно независимой*. Таким образом, система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ линейно независима в том и только в том слу-

чае, когда из равенства $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$ следует $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Докажем некоторые свойства линейно зависимых систем векторов.

Свойство 1. Если система содержит нулевой вектор, то она линейно зависима.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\vec{a}_1 = \vec{0}$. Положим $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. Тогда

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = 1\vec{a}_1 + 0\vec{a}_2 + \dots + 0\vec{a}_n = \vec{0}.$$

Мы получили нулевую линейную комбинацию векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$, среди коэффициентов которых — отличный от нуля коэффициент λ_1 . Утверждение доказано.

Свойство 2. Если в системе векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ содержится линейно зависима подсистема, то вся система также линейно зависима.

Доказательство. Перенумеруем векторы системы так, чтобы линейно зависимую подсистему составляли первые k векторов. Таким образом, существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, среди которых по крайней мере одно отлично от нуля, такие, что $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k = \vec{0}$. Положим $\lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$. Тогда линейная комбинация векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ равна нулевому вектору: $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k + 0\vec{a}_{k+1} + \dots + 0\vec{a}_n = \vec{0}$. Утверждение доказано.

Свойство 3. Система, содержащая не менее двух векторов, линейно зависима тогда и только тогда, когда один из ее векторов линейно выражается через остальные.

Доказательство. Необходимость. Пусть система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ линейно зависима. Тогда существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, среди которых содержится по крайней мере одно, отличное от нуля, для которых $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$. Перенумеруем векторы и числа так, что $\lambda_1 \neq 0$. Тогда $\lambda_1 \vec{a}_1 = -\lambda_2 \vec{a}_2 - \dots - \lambda_n \vec{a}_n$. Разделим обе части этого равенства на ненулевое число λ_1 : $\vec{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{a}_2 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \vec{a}_n$. Вектор $\vec{a}_1$ представлен как линейная комбинация векторов $\vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ с коэффициентами $-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \dots, -\frac{\lambda_n}{\lambda_1}$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть один из векторов системы, например $\vec{a}_1$, линейно выражается через остальные: $\vec{a}_1 = \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n$. Тогда $\vec{a}_1 - \alpha_2 \vec{a}_2 - \dots - \alpha_n \vec{a}_n = \vec{0}$. Мы получили нулевую линейную комбинацию векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ с коэффициентами $1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_n$, среди которых содержится число 1, отличное от нуля. Система $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ линейно зависима. Утверждение доказано.

Из рассмотренных свойств вытекает, что линейно независимая система векторов не содержит нулевого вектора, любая ее подсистема также линейно независима, и ни один из ее векторов линейно не выражается через остальные.

Понятие линейной зависимости было введено нами алгебраическим способом. Но в аналитической геометрии каждое алгебраическое свойство геометрических объектов имеет геометрический смысл. Установим его для линейно зависимых систем векторов. Теорема о коллинеарных векторах (теорема 1, § 2) позволяет выяснить этот смысл для линейной зависимой системы, состоящей из двух векторов.

Теорема 1. Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.

Доказательство. Пусть $\vec{a}, \vec{b}$ — линейно зависимая система векторов. Из свойства 3 настоящего параграфа следует, что один из векторов, например $\vec{a}$, линейно выражается через второй: $\vec{a} = \lambda \vec{b}$. Поэтому векторы коллинеарны.

Пусть $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Тогда из теоремы о коллинеарных векторах (§ 2) следует, что один из векторов, например $\vec{a}$, линейно выражается через вектор $\vec{b}$: $\vec{a} = \lambda \vec{b}$. Из того же свойства 3 следует, что система $\vec{a}, \vec{b}$ линейно зависима. Теорема доказана.

Следствие. Система, состоящая из двух неколлинеарных векторов, линейно независима.

Будем говорить, что вектор $\vec{a}$ параллелен плоскости π , если его представитель параллелен или лежит в этой плоскости. Ясно, что это определение не зависит от выбора представителя вектора.

Определение 2. Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ называется компланарной, если существует плоскость, которой параллельны все векторы системы.

Приведем примеры компланарных систем векторов.

1. Если система $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ состоит из коллинеарных векторов, то она компланарна.

Действительно, согласно определению коллинеарных векторов, существует прямая a , параллельная представителям данных векторов. Возьмем произвольную плоскость, параллельную прямой a . Тогда векторы параллельны выбранной плоскости.

2. Система, состоящая из двух векторов, всегда является компланарной.

В самом деле, рассмотрим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то справедливость утверждения вытекает из предыдущего примера. Если они неколлинеарны, то отложим их от некоторой точки A : $\overline{AB} = \vec{a}$, $\overline{AC} = \vec{b}$. Точки A, B и C не лежат на одной прямой, поэтому существует проходящая через них плоскость. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ параллельны этой плоскости.

Если вектор $\vec{a}$ параллелен плоскости, то существует представитель этого вектора, принадлежащий плоскости. Поэтому можно отождествить систему, состоящую из всех векторов, компланарных между собой, с множеством векторов той плоскости, которой параллельны векторы системы. Все утверждения, доказанные для векторов плоскости, будут справедливы для системы векторов, параллельных плоскости, и наоборот.

Введем следующие фундаментальные определения.

Определение 3. Система, состоящая из двух неколлинеарных векторов плоскости, заданных в определенном порядке, называется базисом плоскости.

Из следствия теоремы 1 вытекает, что базис плоскости образует линейно независимую систему векторов. Базис будем называть ортонормированным или прямоугольным декартовым, если его векторы взаимно перпендикулярны и имеют единичную длину. Произвольный базис плоскости называется аффинным или общим декартовым.

Теорема 2 (о разложении вектора плоскости по векторам базиса). Если на плоскости дан базис, то любой ее вектор линейно выражается через векторы базиса, при этом коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Доказательство. Вначале докажем существование разложения. Обозначим векторы базиса через $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Отложим их от некоторой точки O : $\overline{OE_1} = \vec{e}_1$, $\overline{OE_2} = \vec{e}_2$. От этой же точки также отложим произвольный вектор $\vec{a}$: $\overline{OA} = \vec{a}$ (рис. 14). Через точку A

проведем прямую, параллельную $\vec{e}_2$. Так как $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ не коллинеарны, то эта прямая пересечет прямую OE_1 в некоторой точке A_1 . Тогда $\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A}$. Так как по построению $\overrightarrow{OA_1} \parallel \vec{e}_1$, $\overrightarrow{A_1A} \parallel \vec{e}_2$, то, согласно теореме о коллинеарных векторах (§ 2), существуют такие числа α и β , для которых $\overrightarrow{OA_1} = \alpha \vec{e}_1$, $\overrightarrow{A_1A} = \beta \vec{e}_2$. Таким образом, $\vec{a} = \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2$. Существование разложения доказано.

Теперь докажем его единственность. Пусть наряду с найденным разложением существует еще одно: $\vec{a} = \alpha' \vec{e}_1 + \beta' \vec{e}_2$. Вычтем из одного равенства другое. После преобразований получим $(\alpha - \alpha') \vec{e}_1 + (\beta - \beta') \vec{e}_2 = \vec{0}$. Мы нашли нулевую линейную комбинацию линейно независимых векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Поэтому $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$. Теорема доказана.

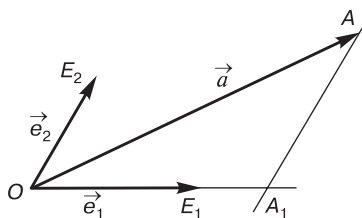


Рис. 14

Теорема о разложении вектора плоскости по векторам базиса позволит установить геометрический смысл линейной зависимости трех векторов.

Теорема 3 (о компланарных векторах). Система, состоящая из трех векторов, линейно зависима тогда и только тогда, когда векторы компланарны.

Доказательство. Необходимость. Пусть векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и $\vec{a}_3$ линейно зависимы. Тогда по свойству 3 один из них, например $\vec{a}_3$, линейно выражается через $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$:

$$\vec{a}_3 = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2. \quad (3.1)$$

Возможны следующие случаи:

1. Векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ коллинеарны. Воспользуемся теоремой о коллинеарных векторах. Один из этих векторов выразится через второй. Пусть $\vec{a}_1 = \alpha \vec{a}_2$. Тогда из равенства (3.1) следует $\vec{a}_3 = (\alpha \lambda_1 + \lambda_2) \vec{a}_2$, вектор $\vec{a}_3$ также коллинеарен $\vec{a}_2$. Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ коллинеарная, поэтому, как показано выше, она компланарная.

2. Векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ не коллинеарны. Отложим их от некоторой точки O : $\overrightarrow{OA_1} = \vec{a}_1$, $\overrightarrow{OA_2} = \vec{a}_2$. Точки O , A_1 , A_2 не лежат

на одной прямой, поэтому они принадлежат одной плоскости π . Отложим от точки O векторы $\lambda_1 \vec{a}_1$ и $\lambda_2 \vec{a}_2$: $\overline{OB_1} = \lambda_1 \vec{a}_1$, $\overline{OB_2} = \lambda_2 \vec{a}_2$. Точки B_1 и B_2 лежат соответственно на прямых OA_1 и OA_2 , поэтому они также принадлежат плоскости π . Отложим теперь от точки O вектор $\vec{a}_3$: $\overline{OC} = \vec{a}_3$. Согласно (3.1), $\overline{OC} = \overline{OB_1} + \overline{OB_2}$. Отсюда следует, что точка C также лежит в плоскости π , вектор $\vec{a}_3 = \overline{OC}$ параллелен π . Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и $\vec{a}_3$ компланарны. Покажем, что они линейно зависимы. Для этого рассмотрим следующие случаи.

1. Векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ коллинеарны. Тогда они образуют линейно зависимую подсистему в системе $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$. Следовательно, вся система линейно зависима (свойство 2).

2. Векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ не коллинеарны. Обозначим через π плоскость, параллельную данным векторам. Тогда $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ образуют ее базис. По теореме о разложении вектора плоскости по векторам базиса $\vec{a}_3$ линейно выражается через $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. Из свойства 3 линейно зависимых систем векторов следует, что вся система $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ линейно зависима. Теорема доказана.

Следствие. Система, состоящая из трех некопланарных векторов, линейно независима.

Введем основное понятие аналитической геометрии — координаты вектора.

Определение 4. Коэффициенты разложения вектора плоскости по векторам базиса называются координатами этого вектора относительно базиса.

Таким образом, координаты вектора плоскости представляют собой упорядоченную пару чисел — коэффициенты разложения вектора по векторам базиса. Как следует из теоремы 2, если на плоскости выбран базис, то любому вектору однозначно соответствуют его координаты. Координаты вектора будем заключать в фигурные скобки. Если векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ образуют базис, а координаты вектора $\vec{a}$ равны $\{\alpha_1; \alpha_2\}$, то $\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2$.

Пример 1. Дан треугольник ABC , O — точка пересечения его медиан. Найти координаты вектора $\overline{OC}$ в базисе $\vec{e}_1 = \overline{OA}$, $\vec{e}_2 = \overline{OB}$.

Решение. Для решения можно воспользоваться способом разложения вектора по векторам базиса, изложенным при

доказательстве теоремы 2. Но удобнее найти искомые координаты, используя линейные зависимости между векторами, вытекающие из условия. Пусть ABC — данный треугольник (рис. 15). Так как O — точка пересечения его медиан, то $\overrightarrow{OC} = -2\overrightarrow{OM}$. Но $\overrightarrow{OM} = \vec{e}_1 + \overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\vec{e}_2 - \vec{e}_1)$.

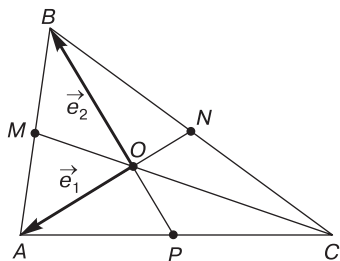


Рис. 15

Таким образом, $\overrightarrow{OM} = \vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2 - \frac{1}{2}\vec{e}_1 = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2$ и $\overrightarrow{OC} = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2$.

Искомые координаты равны $\{-1; -1\}$.

Легко найти координаты нулевого вектора и базисных векторов. Действительно, поскольку $\vec{0} = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2$, нулевой вектор имеет нулевые координаты: $\vec{0} \{0; 0\}$. Из соотношений $\vec{e}_1 = 1\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2$, $\vec{e}_2 = 0\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2$ получаем $\vec{e}_1 \{1; 0\}$, $\vec{e}_2 \{0; 1\}$.

Введем понятие базиса пространства.

Определение 5. Упорядоченная система, состоящая из трех некопланарных векторов пространства, называется его базисом.

Из теоремы 3 следует, что векторы, составляющие базис пространства, линейно независимы. Так же как и в случае плоскости, базис пространства называется *ортонормированным* или *прямоугольным декартовым*, если его векторы взаимно перпендикулярны и имеют единичную длину. Произвольный базис пространства носит название *аффинного* или *общего декартова*.

Теорема 4 (о разложении вектора пространства по векторам базиса). Пусть в пространстве дан произвольный базис. Тогда любой вектор пространства линейно выражается через базисные векторы, при этом коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Доказательство. Обозначим векторы базиса через $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$. Возьмем произвольный вектор $\vec{a}$ пространства. Отложим векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ и $\vec{a}$ от одной точки O : $\overrightarrow{OE_1} = \vec{e}_1$, $\overrightarrow{OE_2} = \vec{e}_2$, $\overrightarrow{OE_3} = \vec{e}_3$, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ (рис. 16). Обозначим через π плоскость, определяемую точками O , E_1 , E_2 . Так как векторы базиса не компланарны, то точка E_3 не лежит в этой плоскости. Проведем через точку A

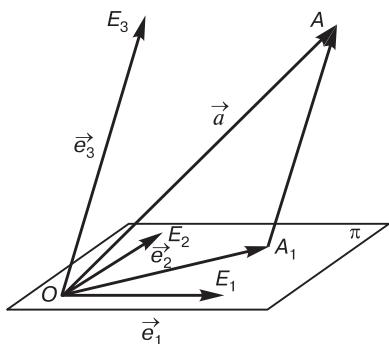


Рис. 16

прямую, параллельную вектору $\vec{e}_3$. Она не параллельна плоскости π , поэтому пересекает ее в некоторой точке A_1 :

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A}. \quad (3.2)$$

Векторы $\overrightarrow{A_1A}$ и $\vec{e}_3$ коллинеарны. Из теоремы о коллинеарных векторах следует:

$$\overrightarrow{A_1A} = \alpha_3 \vec{e}_3. \quad (3.3)$$

Векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ образуют базис плоскости π . Вектор $\overrightarrow{OA_1}$ компланарен векторам $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Поэтому по теореме о разложении вектора плоскости по векторам базиса имеем:

$$\overrightarrow{OA_1} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2. \quad (3.4)$$

Подставим соотношения (3.3) и (3.4) в (3.2): $\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3$. Мы построили искомое разложение вектора $\vec{a}$ по векторам базиса.

Докажем единственность. Пусть существует еще одно разложение: $\vec{a} = \alpha'_1 \vec{e}_1 + \alpha'_2 \vec{e}_2 + \alpha'_3 \vec{e}_3$. Вычтем из первого разложения второе: $(\alpha_1 - \alpha'_1) \vec{e}_1 + (\alpha_2 - \alpha'_2) \vec{e}_2 + (\alpha_3 - \alpha'_3) \vec{e}_3 = \vec{0}$. Мы получили нулевую комбинацию линейно независимых векторов. Поэтому ее коэффициенты равны нулю, т. е. $\alpha_1 = \alpha'_1$, $\alpha_2 = \alpha'_2$, $\alpha_3 = \alpha'_3$. Теорема доказана.

Теорема 4 позволяет ответить на вопрос о максимальном числе векторов, составляющих линейно независимую систему пространства.

Теорема 5. Система, состоящая из четырех и более векторов пространства, является линейно зависимой.

Доказательство. Пусть дана система, состоящая из четырех векторов пространства $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$. Предположим, что подсистема $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ линейно зависима. Тогда из свойства 2 линейно зависимых систем следует, что и вся система $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ линейно зависима. Если же система $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ линейно независима, то она образует базис пространства. Из теоремы 4 следует, что вектор $\vec{a}_4$ линейно раскладывается по векторам $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$.

Поэтому из свойства 3 линейно зависимых систем вытекает, что и в этом случае вся система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ линейно зависима. Теорема доказана.

Определение 6. Коэффициенты разложения вектора пространства по векторам базиса называются его координатами относительно этого базиса.

Из теоремы 4 следует, что если в пространстве выбран базис, то любому вектору пространства однозначно соответствует упорядоченная тройка чисел — его координаты относительно этого базиса. Если $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — базис пространства, а вектор $\vec{a}$ имеет координаты $\{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3\}$, то $\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3$.

Выясним, как вычисляются координаты суммы векторов и произведения вектора на число.

Теорема 6. Пусть на плоскости или в пространстве дан базис. Тогда координаты суммы двух векторов равны сумме их соответствующих координат, а координаты произведения вектора на число — произведению этого числа на соответствующие координаты вектора.

Доказательство. Теорему докажем для случая плоскости. Для векторов пространства рассуждения аналогичны, проведите их самостоятельно. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ — данный базис плоскости. Запишем координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{a}\{\alpha_1; \alpha_2\}$, $\vec{b}\{\beta_1; \beta_2\}$. Так как $\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2$, $\vec{b} = \beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2$, то $\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1)\vec{e}_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\vec{e}_2$. Таким образом, координаты суммы данных векторов равны суммам соответствующих координат слагаемых: $(\vec{a} + \vec{b})\{\alpha_1 + \beta_1; \alpha_2 + \beta_2\}$.

Аналогично проводятся доказательства для случая произведения вектора на число. Если $\vec{a}\{\alpha_1; \alpha_2\}$, то $\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2$. Поэтому $\lambda\vec{a} = \lambda\alpha_1\vec{e}_1 + \lambda\alpha_2\vec{e}_2$. Отсюда следует, что координаты вектора $\lambda\vec{a}$ равны $\{\lambda\alpha_1; \lambda\alpha_2\}$. Теорема доказана.

Следствие. Если вектор $\vec{a}$ плоскости или пространства равен линейной комбинации векторов $\vec{a} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots + \lambda_n\vec{a}_n$, то его координаты равны сумме соответствующих координат векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ умноженных на коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Выведем условия коллинеарности и компланарности векторов в координатах. Не оговаривая особо, будем предполагать, что на плоскости или в пространстве выбран некоторый базис.

Теорема 7. Два вектора плоскости или пространства коллинеарны в том и только в том случае, когда их координаты пропорциональны.

Доказательство. Доказательство теоремы непосредственно следует из теорем 1 и 6. По теореме 1 два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда они линейно зависимы, а из теоремы 6 вытекает, что они линейно зависимы в том и только в том случае, когда линейно зависимы строки, составленные из их координат.

Следствие. Пусть даны координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{a}\{\alpha_1; \alpha_2\}$, $\vec{b}\{\beta_1; \beta_2\}$. Векторы коллинеарны в том и только в том случае, когда

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.5)$$

Из курса алгебры следует, что условие (3.5) равносильно требованию пропорциональности строк определителя, т. е. коллинеарности данных векторов.

Введем условие компланарности трех векторов пространства в координатах.

Теорема 8. Пусть даны координаты трех векторов пространства $\vec{a}\{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3\}$, $\vec{b}\{\beta_1; \beta_2; \beta_3\}$, $\vec{c}\{\gamma_1; \gamma_2; \gamma_3\}$. Тогда эти векторы компланарны в том и только в том случае, когда

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.6)$$

Доказательство этого утверждения следует из теоремы 3 свойства координат линейной комбинации векторов (следствие теоремы 6). Проведите его самостоятельно.

Пример 2. Доказать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны и найти координаты вектора $\vec{c}$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$, если $\vec{a}\{1; -1; 2\}$, $\vec{b}\{3; 1; 4\}$, $\vec{c}\{2; 2; 2\}$.

Решение. Проверим условие (3.6):

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны. Так как координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не пропорциональны, то они неколлинеарны и образуют базис в системе векторов плоскости, параллельной $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Вектор $\vec{c}$ раскладывается по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$. Координаты линейной комбинации $x\vec{a} + y\vec{b}$ равны $\{x + 3y; -x + y; 2x + y\}$, поэтому

$$\begin{cases} x + 3y = 2, \\ -x + y = 2, \\ 2x + 4y = 2. \end{cases}$$

Полученная линейная система состоит из трех уравнений и содержит два неизвестных. В силу компланарности векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ она совместна. Найдём x и y из первых двух уравнений: $x = -1$; $y = 1$. Легко видеть, эти значения удовлетворяют третьему уравнению. Искомые координаты вектора $\vec{c}$ равны $\{-1; 1\}$.