Тема 1

# ВЕКТОРЫ И ИХ СВОЙСТВА

## § 1. ВЕКТОРЫ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Из школьных курсов математики и физики нам известно, что в естествознании используются величины, характеризуемые не только числовым значением, но и направлением (например, скорость, ускорение, сила и т. д.). Такого рода объекты носят название векторов. В переводе с латинского языка «вектор» означает «переносить». Впервые векторы в значении, близком к современному, рассматривались в книге ирландского математика и механика У. Гамильтона «Лекции о кватернионах» (1853 г.). В современном виде векторное исчисление было изложено в работах американского физика Д. Гиббса «Элементы векторного исчисления» (1881—1884 гг.) и английского физика О. Хевисайда «Электромагнитная теория» (1893 г.). Систематическое изложение векторного исчисления неслучайно появилось в трудах ученых, занимавшихся проблемами естествознания и физики. Оно позволяет наглядно и просто описать сложные математические и физические явления. Поэтому начала векторного исчисления изучаются в школе, они также составляют основу данного курса.

Как известно, в школьном курсе геометрии векторы отождествляются с направленными отрезками. Такое представление удобно для упрощенного изложения свойств векторов, но не является математически корректным. Однако для изучения свойств векторов направленные отрезки нам понадобятся. Отрезок называется *направленным*, если для него указан порядок его концов. Первый из них называется *началом*, а второй — *концом* направленного отрезка. На рисунках конец такого отрезка обозначается стрелкой (рис. 1). Если $M$ — начало, а $N$ — конец направленного отрезка, то будем его обозначать как $\overline{MN}$.

**Определение 1.** *Направленные отрезки, расположенные на одной прямой или на параллельных прямых, называются коллинеарными. Если коллинеарные направленные отрезки имеют одинаковые направления, то они называются сонаправленными, если их направления различны, то противоположно направленными.*

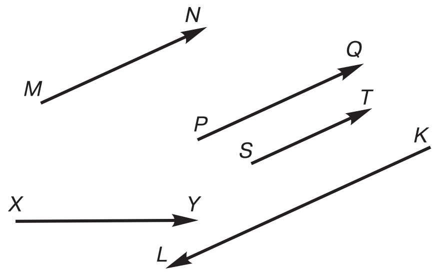


Рис. 1

Коллинеарные направленные отрезки будем обозначать как $\overline{MN} \parallel \overline{PQ}$. Сонаправленные и противоположно направленные отрезки обозначаются соответственно через $\overline{MN} \uparrow\uparrow \overline{PQ}$ и $\overline{AB} \uparrow\downarrow \overline{CD}$. На рисунке 1 отрезки $\overline{MN}$, $\overline{PQ}$ и $\overline{ST}$ сонаправлены между собой, а отрезок $\overline{KL}$ им противоположно направлен. На этом же рисунке отрезок $\overline{XY}$ не коллинеарен отрезкам $\overline{MN}$, $\overline{PQ}$, $\overline{ST}$ и $\overline{KL}$, поэтому он не сонаправлен и не противоположно направлен этим отрезкам.

Отметим признак сонаправленности отрезков. Пусть $\overline{MN}$ и $\overline{PQ}$ — коллинеарные направленные отрезки, не лежащие на одной прямой. Ясно, что отрезки сонаправлены в том и только в том случае, когда их концы $N$ и $Q$ лежат в одной полуплоскости относительно прямой $MP$, проходящей через их начала (рис. 2, $a$). Отсюда следует, что $\overline{MN} \uparrow\uparrow \overline{PQ}$ тогда и только тогда, когда отрезки $MP$ и $NQ$ не пересекаются. Если $\overline{MN}$ и $\overline{PQ}$ противоположно направлены и не лежат на одной прямой, то их концы $N$ и $Q$ принадлежат различным полуплоскостям относительно

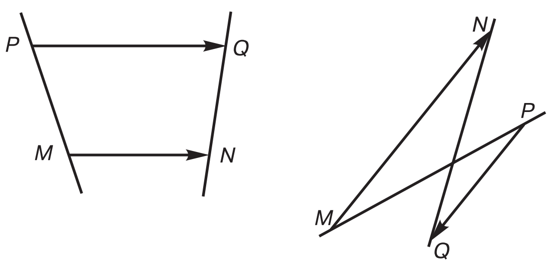


Рис. 2

прямой $MP$. Таким образом, $\overline{MN} \uparrow\downarrow \overline{PQ}$ в том и только в том случае, когда отрезки $MP$ и $NQ$ пересекаются (рис. 2, *б*).

Под *длиной* направленного отрезка $\overline{AB}$ понимается расстояние между точками $A$ и $B$. Направленный отрезок называется *нулевым*, если его начало совпадает с его концом. У такого отрезка длина равна нулю. Считается, что его направление произвольное, т. е. *он сонаправлен с любым отрезком*. Будем его обозначать как $\overline{0}$.

Из курса алгебры известно, что под *бинарным отношением* $\Delta$ на множестве $M$ понимается такое соответствие между элементами этого множества, что для любых двух элементов $a$ и $b$ из $M$ можно сказать, находятся ли они в этом отношении (соответствуют друг другу, $a \,\Delta\, b$) или нет. Такое отношение называется *отношением эквивалентности*, если выполнены следующие три условия:

1) *рефлексивности* — любой элемент множества находится в бинарном отношении сам с собой ($a \,\Delta\, a$);
2) *симметричности* — если элемент $a$ находится в бинарном отношении с элементом $b$, то $b$ также находится в бинарном отношении с элементом $a$ (если $a \,\Delta\, b$, то $b \,\Delta\, a$);
3) *транзитивности* — если элемент $a$ находится в бинарном отношении с элементом $b$, а $b$, в свою очередь, с элементом $c$, то $a$ находится в том же отношении с $c$ (если $a \,\Delta\, b$ и $b \,\Delta\, c$, то $a \,\Delta\, c$).

**Пример 1.** *На множестве направленных отрезков введено бинарное отношение* $\Delta$: *два отрезка находятся в этом отношении, если они коллинеарны. Является ли* $\Delta$ *отношением эквивалентности?*

**Решение.** Выясним, удовлетворяет ли данное отношение условиям рефлексивности, симметричности и транзитивности.

Условие рефлексивности выполнено, так как направленный отрезок коллинеарен сам себе. Легко видеть, что условие симметричности также выполнено. Выясним, выполняется ли условие транзитивности. Нам следует проверить, что из $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ и $\overline{CD} \parallel \overline{MN}$ вытекает $\overline{AB} \parallel \overline{MN}$. Покажем, что эти условия выполняются не для любых направленных отрезков $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ и $\overline{MN}$. Действительно, пусть $\overline{CD} = \overline{0}$. Нулевой вектор сонаправлен любому вектору, поэтому из условий $\overline{AB} \parallel \overline{0}$ и $\overline{0} \parallel \overline{MN}$ не следует, что $\overline{AB} \parallel \overline{MN}$. Данное бинарное отношение не является отношением эквивалентности.

Если на множестве введено отношение эквивалентности, то это множество естественным образом разбивается на непересекающиеся подмножества — классы эквивалентности. Их образуют все те элементы множества, которые эквивалентны между собой. Введем понятие равенства двух направленных отрезков.

**Определение 2.** *Два ненулевых направленных отрезка называются равными друг другу, если они сонаправлены и их длины одинаковы. Два нулевых направленных отрезка всегда равны между собой.*

Введенное отношение удовлетворяет следующим свойствам.

**Свойство 1.** *Отношение равенства направленных отрезков является отношением эквивалентности.*

Действительно, любой направленный отрезок равен самому себе. Если $\overline{AB}=\overline{CD}$, то $\overline{CD}=\overline{AB}$. Если $\overline{AB}=\overline{CD}$ и $\overline{CD}=\overline{EF}$, то длины этих трех отрезков одинаковы, а их направления совпадают, поэтому $\overline{AB}=\overline{EF}$. Таким образом, условия рефлексивности, симметричности и транзитивности для отношения равенства направленных отрезков выполнены.

**Свойство 2.** *Отрезок $\overline{AB}$ равен отрезку $\overline{CD}$ в том и только в том случае, когда середины отрезков $AD$ и $BC$ совпадают.*

Если равные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ не лежат на одной прямой (рис. 3, *а*), то из определения 2 следует, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, поэтому его диагонали в точке пересечения делятся пополам. Наоборот, если отрезки $AD$ и $BC$ в точке пересечения делятся пополам, то четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, отсюда вытекает равенство направленных отрезков $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.

Свойство 2 справедливо также и для отрезков, лежащих на одной прямой (рис. 3, *б*). Проверьте это самостоятельно.

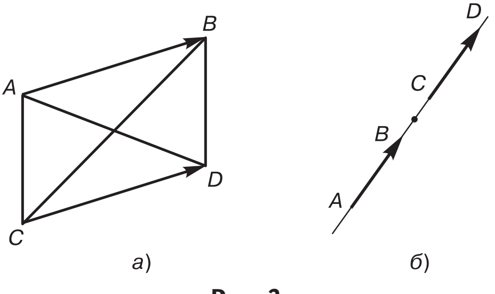


**Рис. 3**

**Свойство 3.** *Отрезок* $\overline{AB}$ *равен отрезку* $\overline{CD}$ *тогда и только тогда, когда* $\overline{AC} = \overline{BD}$.

Доказательство этого свойства аналогично предыдущему.

**Свойство 4.** *Если даны направленный отрезок* $\overline{AB}$ *и точка* $C$, *то существует единственная точка* $D$, *для которой* $\overline{AB} = \overline{CD}$.

Действительно, через точку $C$ всегда можно провести прямую, параллельную $AB$, а затем выбрать на ней такую точку $D$, для которой отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равны друг другу. В этом случае говорят, что направленный отрезок $\overline{AB}$ отложен от точки $C$.

Отношение равенства направленных отрезков, как следует из свойства 1, является отношением эквивалентности. Поэтому множество направленных отрезков разбивается на классы эквивалентности, т. е. классы равных между собой отрезков.

**Определение 3.** *Вектором называется класс равных между собой направленных отрезков.*

Если рассматривать класс равных между собой направленных отрезков, лежащих во всем пространстве, то они образуют вектор пространства; если же рассматривать класс равных между собой направленных отрезков плоскости, то они составляют вектор плоскости. Для обозначения векторов будем использовать строчные латинские буквы со стрелкой сверху: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Направленный отрезок, принадлежащий вектору, будем называть его *представителем*. Если дан направленный отрезок $\overline{AB}$, то вектор, которому принадлежит этот отрезок, будем обозначать через $\overrightarrow{AB}$. Таким образом, все множество направленных отрезков разбивается на непересекающиеся классы эквивалентности — векторы. При этом от любой точки плоскости можно «отложить данный вектор», т. е. построить его представитель с началом в этой точке.

Легко видеть, что все нулевые направленные отрезки равны между собой. Действительно, у каждого из них длина равна 0 и они сонаправлены друг с другом. Вектор, представителем которого является нулевой направленный отрезок, называется *нулевым*. Он будет нами обозначаться через $\vec{0}$.

Как следует из определения 2, все равные между собой направленные отрезки имеют одну и ту же длину. Ее мы будем называть *длиной* или *модулем* вектора и обозначать через $|\vec{a}|$ или $|\overrightarrow{AB}|$. Модуль нулевого вектора равен нулю. Если два вектора имеют одинаковый модуль, но противоположные направления, то их будем называть *противоположными*. Вектор, противоположный $\vec{a}$, будет обозначаться как $-\vec{a}$.

Векторы назовем соответственно коллинеарными, сонаправленными или противоположно направленными, если коллинеарны, сонаправлены или противоположно направлены любые два их представителя. Очевидно, что это определение не зависит от выбора представителей векторов. Обозначать коллинеарные, сонаправленные и противоположно направленные векторы будем соответственно через $\vec{a} \parallel \vec{b}$, $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$. *Систему векторов* $a_1$, $a_2$, ... $a_n$ *будем называть коллинеарной, если любые два вектора системы коллинеарны друг другу.*

Будем говорить, что *вектор параллелен прямой*, если его представитель параллелен или лежит на этой прямой. Очевидно, что введенное понятие не зависит от выбора представителя вектора. Ясно, что система векторов коллинеарна в том и только в том случае, когда существует прямая линия, которой параллельны все векторы системы.

## § 2. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

Под линейными операциями над векторами понимаются сложение векторов и умножение вектора на число. Введем понятие суммы векторов.

**Определение 1.** *Пусть даны векторы* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$. *От точки* $A$ *отложим вектор* $\vec{a}$: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, *а от конца направленного отрезка* $\overline{AB}$ *отложим вектор* $\vec{b}$: $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. *Вектор* $\vec{c}$, *определенный направленным отрезком* $\overline{AC}$, *называется суммой векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

Построение суммы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ показано на рис. 4. Из определения 1 следует, что для любых трех точек $A$, $B$ и $C$ выполнено равенство $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, поэтому такой способ сложения векторов часто называют *правилом треугольника*. Наряду с ним используется еще один способ сложения векторов — *правило параллелограмма*. Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два неколлинеарных вектора, то для построения суммы $\vec{a} + \vec{b}$ по правилу параллелограмма отложим их от одной точки: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Затем треугольник $ABD$ достроим до параллелограмма $ABCD$. Искомая сумма равна вектору $\overrightarrow{AC}$ (рис. 5). Такое правило сложения векторов часто используется в физике, например для определения равнодействующей двух сил.

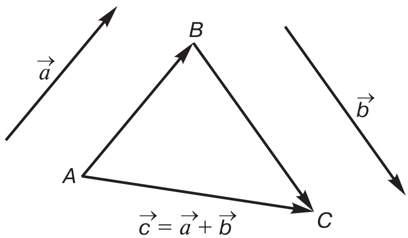


Рис. 4

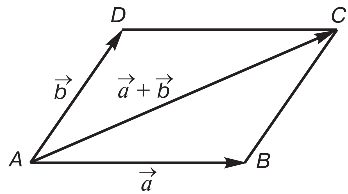


Рис. 5

Для обоснования корректности определения 1 следует проверить, что сумма векторов $\vec a$ и $\vec b$ не зависит от выбора начальной точки $A$. Действительно, возьмем две точки $A$ и $A_1$, отложим от них вектор $\vec a$: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1} = \vec a$, от точек $B$ и $B_1$ отложим вектор $\vec b$: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_1C_1} = \vec b$ (рис. 6). Так как $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$, то из свойства 3 отношения равенства (§ 1) $\overline{AA_1} = \overline{BB_1}$. Аналогично, из равенства $\overline{BC} = \overline{B_1C_1}$ вытекает $\overline{BB_1} = \overline{CC_1}$. Следовательно, $\overline{AA_1} = \overline{CC_1}$, откуда получим, что $\overline{AC} = \overline{A_1C_1}$.

Рассмотрим свойства операции сложения векторов.

**Свойство 1.** *Для любых векторов* $\vec a$ *и* $\vec b$ *справедливо равенство* $\vec a + \vec b = \vec b + \vec a$ (*свойство коммутативности*).

**Доказательство.** Отложим от точки $A$ вектор $\vec a$: $\overrightarrow{AB} = \vec a$, а от точки $B$ вектор $\vec b$: $\overrightarrow{BC} = \vec b$. Тогда $\overrightarrow{AC} = \vec a + \vec b$ (рис. 7). Теперь отложим от точки $A$ вектор $\vec b$: $\overrightarrow{AD} = \vec b$. Так как направленные отрезки $\overline{AD}$ и $\overline{BC}$ равны друг другу, то $\overline{AB} = \overline{DC}$ (свойство 3, § 1). Отсюда следует, что $\overrightarrow{DC} = \vec a$, т. е. $\vec b + \vec a = \overrightarrow{AC} = \vec a + \vec b$. Свойство доказано.

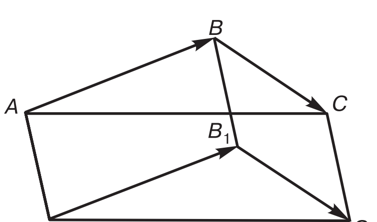


Рис. 6

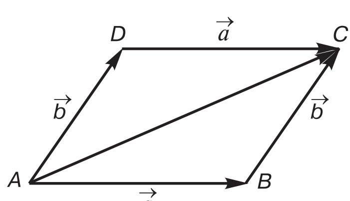


Рис. 7

**Свойство 2.** *Для любых векторов* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *и* $\vec{c}$ *выполнено равенство* $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (*свойство ассоциативности*).

**Доказательство.** Отложим последовательно от точки $A$ вектор $\vec{a}$: $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, от точки $B$ вектор $\vec{b}$: $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, а от точки $C$ вектор $\vec{c}$: $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$ (рис. 8). Тогда $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$ и из равенств $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$ следует $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\overrightarrow{AD}$. В то же время, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BD}$, поэтому $\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{BD}$. Так как $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$, то $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{AD}$. Свойство доказано.

Свойство 2 позволяет определить сумму любого числа векторов $\vec{a}_1+\vec{a}_2+\ldots+\vec{a}_n$. Она равна результату последовательного суммирования $(((\vec{a}_1+\vec{a}_2)+\vec{a}_3)+\ldots+\vec{a}_n)$: к сумме первых двух векторов прибавляется третий, затем четвертый и т. д. Из свойства 1 вытекает, что результат суммирования любого числа векторов не зависит от порядка суммирования. На рисунке 9 изображен процесс построения суммы шести векторов.

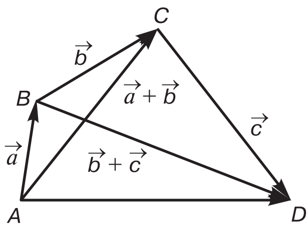


**Рис. 8**

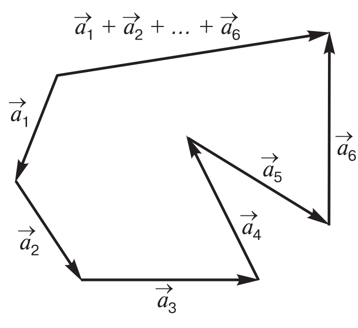


**Рис. 9**

**Свойство 3.** *Для любого вектора* $\vec{a}$ *выполнено соотношение* $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

**Доказательство.** Отложим от точки $A$ вектор $\vec{a}$: $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, а от точки $B$ вектор $\vec{0}$. Так как $\vec{0}=\overrightarrow{BB}$, то $\vec{a}+\vec{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}=\vec{a}$. Свойство доказано.

**Свойство 4.** *Для любого вектора* $\vec{a}$ *его сумма с противоположным вектором* $(-\vec{a})$ *равна нулевому вектору*: $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

**Доказательство.** Вектор $(-\vec{a})$, противоположный $\vec{a}$, имеет ту же длину, что и $\vec{a}$, но противоположное направление. Отложим от точки $A$ вектор $\vec{a}$: $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$. Если от точки $B$ отложить вектор $(-\vec{a})$, то, в силу отмеченных свойств противоположного вектора, его конец совпадет с точкой $A$. Поэтому $\vec{a}+(-\vec{a})=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$. Свойство доказано.

Исходя из правила треугольника сложения векторов, можно сделать вывод: при суммировании векторов, вообще говоря, их модули не складываются. Действительно, возьмем два произвольных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отложим от точки $A$ вектор $\vec{a}$: $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, а от точки $B$ — вектор $\vec{b}$, получим $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарные. Тогда точки $A$, $B$ и $C$ лежат в вершинах треугольника. Исходя из неравенства, связывающего длины сторон треугольника, получим $|\overrightarrow{AC}|<|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|$, т. е. $|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|$. Пусть теперь векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарные. Если они сонаправлены, то точка $B$ лежит между $A$ и $C$, поэтому $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|$, т. е. $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$. Если они противоположно направлены, то точка $B$ не лежит между $A$ и $C$, следовательно, $|\overrightarrow{AC}|<|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|$, т. е. $|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|$. Таким образом, нами доказано неравенство $|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$.

Определим теперь разность векторов.

**Определение 2.** *Под разностью двух векторов* $\vec{a}-\vec{b}$ *понимается вектор* $\vec{c}$, *удовлетворяющий условию* $\vec{c}+\vec{b}=\vec{a}$.

Пусть даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Рассмотрим сумму вектора $\vec{a}$ и вектора, противоположного $\vec{b}$: $\vec{a}+(-\vec{b})=\vec{c}$. Докажем, что $\vec{c}$ удовлетворяет условию $\vec{c}+\vec{b}=\vec{a}$. Используем свойства 3 и 4 операции сложения: $\vec{a}+(-\vec{b})+\vec{b}=\vec{a}+((-\vec{b})+\vec{b})=\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$. Таким образом, $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$.

Мы свели процесс нахождения разности $\vec{a}-\vec{b}$ к вычислению суммы $\vec{a}+(-\vec{b})$. Можно найти разность $\vec{a}-\vec{b}$ иначе. Для этого отложим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ от одной точки $A$: $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$ (рис. 10). Соединив концы $C$ и $B$, выберем направление отрезка $CB$ от вычитаемого к уменьшаемому, т. е. от вектора $\vec{b}$ к вектору $\vec{a}$, от $C$ к $B$. Так как $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$, то $\overrightarrow{CB}=\vec{a}-\vec{b}$.

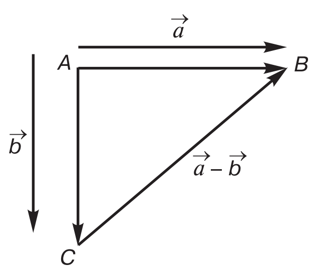

**Рис. 10**

Для модуля разности двух векторов справедливы неравенства $|\vec{a}|-|\vec{b}| \le |\vec{a}-\vec{b}| \le |\vec{a}|+|\vec{b}|$. Проверьте их самостоятельно.

**Определение 3.** *Под произведением ненулевых числа* $\lambda$ *и вектора* $\vec{a}$ *понимается такой вектор* $\vec{b}$, *который удовлетворяет следующим условиям*:

1. $|\vec{b}| = |\lambda||\vec{a}|$, *где* $|\lambda|$ *— абсолютная величина* $\lambda$.

2. *Если* $\lambda > 0$, *то векторы* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *сонаправлены*; *если* $\lambda < 0$, *то* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *противоположно направлены*.

*В случае, когда* $\lambda = 0$ *или* $\vec{a} = \vec{0}$, *полагают* $\lambda\vec{a} = \vec{0}$.

**Пример 1.** *Дан параллелограмм* $ABCD$, $O$ *— точка пересечения его диагоналей. Найти* $\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

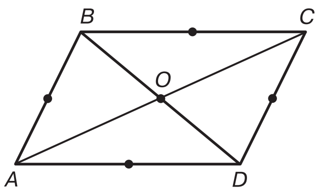

**Рис. 11**

**Решение.** Вектор $(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC})$ равен по длине половине модуля вектора $\overrightarrow{AC}$ и противоположен ему по направлению, поэтому $(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{CO}$ (рис. 11). Так как $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, то $\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{DO}$.

Рассмотрим свойства операции произведения вектора на число.

**Свойство 1.** *Пусть* $\vec{a}$ *— произвольный вектор, тогда* $1\vec{a} = \vec{a}$, $(-1)\vec{a} = (-\vec{a})$.

Первое равенство непосредственно следует из определения 3. Для доказательства второго достаточно проверить, что векторы $(-1)\vec{a}$ и $(-\vec{a})$ имеют равные модули и одинаковые направления. Проверьте самостоятельно.

**Свойство 2.** *Для любых чисел* $\alpha$ *и* $\beta$ *и любого вектора* $\vec{a}$ *справедливо равенство*:

$$\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}. \tag{2.1}$$

**Доказательство.** Если среди чисел $\alpha$ и $\beta$ есть хотя бы одно, равное нулю, либо вектор $\vec{a}$ — нулевой, то $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a} = \vec{0}$. В этом случае равенство (2.1) истинно.

Предположим, что $\alpha \ne 0$, $\beta \ne 0$, $\vec{a} \ne \vec{0}$. Введем обозначения: $\vec{b} = \alpha(\beta\vec{a})$, $\vec{b}' = (\alpha\beta)\vec{a}$. Для доказательства свойства достаточно проверить, что $|\vec{b}| = |\vec{b}'|$ и $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{b}'$.

Из определения 3 следует: $|\vec{b}| = |\alpha||\beta\vec{a}| = |\alpha||\beta||\vec{a}|$, $|\vec{b}'| = |\alpha\beta||\vec{a}| = |\alpha||\beta||\vec{a}|$, поэтому $|\vec{b}| = |\vec{b}'|$. Пусть числа $\alpha$ и $\beta$ имеют одинаковые знаки. Тогда $\alpha\beta > 0$, поэтому $\vec{b}' \uparrow\uparrow \vec{a}$. В то же время, если $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, то $\beta\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$ и $\alpha(\beta\vec{a}) \uparrow\uparrow \vec{a}$. При условии, когда $\alpha < 0$, $\beta < 0$, получим $\beta\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$ и $\alpha(\beta\vec{a}) \uparrow\downarrow \beta\vec{a}$, т. е. $\alpha(\beta\vec{a}) \uparrow\uparrow \vec{a}$. Мы показали, что в этом случае $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{b}'$.

Если числа $\alpha$ и $\beta$ имеют разные знаки, то $\alpha\beta < 0$. Отсюда следует, что $\vec{b}' \uparrow\downarrow \vec{a}$. Пусть $\alpha < 0$, а $\beta > 0$. Тогда $\beta\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$, $\alpha(\beta\vec{a}) \uparrow\downarrow \beta\vec{a}$, т. е. $\alpha(\beta\vec{a}) \uparrow\downarrow \vec{a}$. Если $\alpha > 0$, а $\beta < 0$, то $\beta\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$, $\alpha(\beta\vec{a}) \uparrow\uparrow \beta\vec{a}$. Отсюда вытекает, что $\alpha(\beta\vec{a}) \uparrow\downarrow \vec{a}$. Таким образом, и вектор $\vec{b}$, и вектор $\vec{b}'$ противоположно направлены вектору $\vec{a}$, поэтому они сонаправлены. Свойство доказано.

**Свойство 3.** *Для любых чисел* $\alpha$ *и* $\beta$ *и любого вектора* $\vec{a}$ *справедливо равенство*:

$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}. \tag{2.2}$$

**Доказательство.** Пусть $\vec{a} = \vec{0}$. Тогда и левая, и правая части равенства (2.2) равны нулевому вектору. Если $\alpha = 0$ или $\beta = 0$, то, очевидно, равенство (2.2) выполнено. Будем предполагать, что $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\vec{a} \neq \vec{0}$.

1. Пусть $\alpha > 0$, $\beta > 0$. В этом случае $\alpha\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$, $\beta\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$. Отложим от точки $A$ вектор $\alpha\vec{a}$: $\overrightarrow{AB} = \alpha\vec{a}$, затем от точки $B$ — вектор $\beta\vec{a}$: $\overrightarrow{BC} = \beta\vec{a}$ (рис. 12, *а*). Тогда $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Так как $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, то точка $B$ лежит между $A$ и $C$. Поэтому

$$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| = \alpha|\vec{a}| + \beta|\vec{a}| = (\alpha + \beta)|\vec{a}|, \quad \overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow \vec{a}.$$

В то же время, $\alpha + \beta > 0$, отсюда $(\alpha + \beta)\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$. Таким образом, вектор $(\alpha + \beta)\vec{a}$ равен по длине и сонаправлен с $\overrightarrow{AC}$. Следователь-

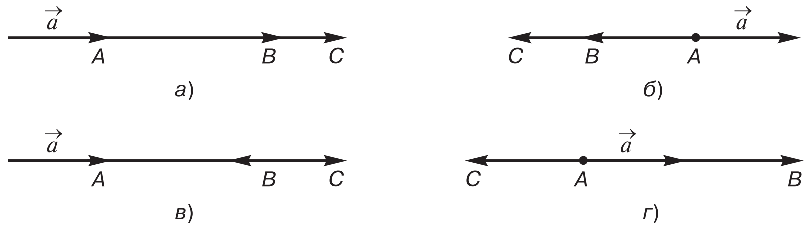


**Рис. 12**

но, $(\alpha+\beta)\vec{a} = \overrightarrow{AC} = \alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$. В этом случае равенство (2.2) доказано.

2. Пусть $\alpha < 0$, $\beta < 0$. Тогда $\alpha\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$, $\beta\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$. Отложим от точки $A$ вектор $\alpha\vec{a}$: $\overrightarrow{AB} = \alpha\vec{a}$, затем от точки $B$ отложим вектор $\beta\vec{a}$: $\overrightarrow{BC} = \beta\vec{a}$ (рис. 12, *б*). Тогда $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC} \uparrow\downarrow \vec{a}$. Так как векторы $\alpha\vec{a}$ и $\beta\vec{a}$ сонаправлены, то точка $B$ лежит между $A$ и $C$. Поэтому

$$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| = |\alpha||\vec{a}| + |\beta||\vec{a}| = (|\alpha| + |\beta|)|\vec{a}|.$$

В силу того что $\alpha$ и $\beta$ — отрицательные числа, $|\overrightarrow{AC}| = |\alpha+\beta||\vec{a}|$. Определим длину и направление вектора $(\alpha+\beta)\vec{a}$. В рассматриваемом случае $\alpha + \beta < 0$, следовательно, $(\alpha+\beta)\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$, $|(\alpha+\beta)\vec{a}| = |\alpha+\beta||\vec{a}|$. Таким образом, длины и направления векторов $\overrightarrow{AC}$ и $(\alpha+\beta)\vec{a}$ совпадают, $\overrightarrow{AC} = (\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$. В этом случае равенство (2.2) доказано.

Предположим, что $\alpha$ и $\beta$ имеют различные знаки. Без ограничения общности можно считать, что $\alpha > 0$, а $\beta < 0$.

3. Пусть $\alpha > 0$, $\beta < 0$, и $|\alpha| > |\beta|$. Тогда $\alpha\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$, $\beta\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$. Отложим от точки $A$ вектор $\alpha\vec{a}$: $\overrightarrow{AB} = \alpha\vec{a}$, затем от точки $B$ отложим вектор $\beta\vec{a}$: $\overrightarrow{BC} = \beta\vec{a}$ (рис. 12, *в*). $\overrightarrow{AC} = \alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$. Так как $|\alpha| > |\beta|$, то точка $C$ лежит между $A$ и $B$. Поэтому $\overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow \vec{a}$,

$$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| - |\overrightarrow{BC}| = |\alpha||\vec{a}| - |\beta||\vec{a}| = (|\alpha| - |\beta|)|\vec{a}| = |\alpha+\beta||\vec{a}|.$$

В то же время, $\alpha + \beta > 0$, следовательно, $(\alpha+\beta)\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$, причем $|(\alpha+\beta)\vec{a}| = |\alpha+\beta||\vec{a}|$. Векторы $\overrightarrow{AC}$ и $(\alpha+\beta)\vec{a}$ имеют одинаковые длины и направления. Равенство (2.2) для этого случая также доказано.

4. Пусть $\alpha > 0$, $\beta < 0$, и $|\alpha| < |\beta|$. Отложим от точки $A$ вектор $\alpha\vec{a}$: $\overrightarrow{AB} = \alpha\vec{a}$, затем от точки $B$ отложим вектор $\beta\vec{a}$: $\overrightarrow{BC} = \beta\vec{a}$ (рис. 12, *г*). $\overrightarrow{AC} = \alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$. В этом случае точка $A$ лежит между точками $B$ и $C$. Поэтому $\overrightarrow{AC} \uparrow\downarrow \vec{a}$,

$$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| - |\overrightarrow{AB}| = (|\beta| - |\alpha|)\vec{a} = |\alpha+\beta||\vec{a}|.$$

Но в рассматриваемом случае $\alpha + \beta < 0$. Следовательно, $(\alpha+\beta)\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$ Так как $|(\alpha+\beta)\vec{a}| = |\alpha+\beta||\vec{a}|$, то длины и направления векторов $\overrightarrow{AC}$ и $(\alpha+\beta)\vec{a}$ совпадают. Таким образом, для данного случая $(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$.

5. В последнем случае осталось лишь предположить, что $\alpha > 0$, $\beta < 0$ и $\alpha + \beta = 0$. Тогда $(\alpha+\beta)\vec{a} = \vec{0}$. Покажем, что $\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$ также совпадает с нулевым вектором. Действительно, $\alpha = -\beta$, поэтому векторы $\alpha\vec{a}$ и $\beta\vec{b}$ противоположные, а их сумма равна нулевому вектору. Таким образом, и в этом последнем случае равенство (2.2) доказано.

Прежде чем приступить к изложению последнего, четвертого свойства операции произведения вектора на число, докажем теорему о коллинеарных векторах.

**Теорема 1 (о коллинеарных векторах).** *Пусть даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, причем $\vec{a} \neq \vec{0}$. Они коллинеарны в том и только в том случае, когда существует единственное число $\lambda$, для которого $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.*

**Доказательство.** Пусть $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Докажем, что существует требуемое число $\lambda$. В случае сонаправленности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ положим $\lambda = \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. В частности, если $\vec{b} = \vec{0}$, то $\lambda = 0$. Если $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$, то будем считать, что $\lambda = -\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. Легко показать, что $\lambda$ удовлетворяет требуемому условию. Действительно, $|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}| = \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}|\vec{a}|$. Если $\lambda = 0$, то $0\vec{a} = \vec{0} = \vec{b}$. Если $\lambda > 0$, то $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, поэтому векторы $\lambda\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены и имеют одинаковую длину, следовательно, они совпадают. Если $\lambda < 0$, то $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$. Но $\lambda\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$, отсюда вытекает, что $\lambda\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. В этом случае векторы $\lambda\vec{a}$ и $\vec{b}$ также имеют одинаковые длины и направления. Таким образом, $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Докажем единственность числа $\lambda$. Пусть существуют два числа $\lambda_1$ и $\lambda_2$, удовлетворяющие условию $\vec{b} = \lambda_1\vec{a}$ и $\vec{b} = \lambda_2\vec{a}$. Тогда $\lambda_1\vec{a} - \lambda_2\vec{a} = \vec{0}$. Используя соотношения (2.1) и (2.2), получаем: $\lambda_1\vec{a} - \lambda_2\vec{a} = \lambda_1\vec{a} + (-1)\lambda_2\vec{a} = (\lambda_1 - \lambda_2)\vec{a}$. Таким образом, $(\lambda_1 - \lambda_2)\vec{a} = \vec{0}$. Так как $\vec{a} \neq \vec{0}$, то $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, т. е. $\lambda_1 = \lambda_2$.

Если $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, то коллинеарность векторов непосредственно следует из определения 3. Теорема доказана.

Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — нулевые векторы, то при любом $\lambda$ справедливо равенство $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Докажем последнее свойство операции умножения вектора на число.

**Свойство 4.** *Для любого числа* $\alpha$ *и любых векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *справедливо равенство*

$$\alpha(\vec{a}+\vec{b}) = \alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}. \qquad (2.3)$$

**Доказательство.** Если $\alpha = 0$, то равенство (2.3) очевидно. В дальнейшем будем предполагать, что $\alpha \neq 0$. Пусть $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Тогда из теоремы о коллинеарных векторах следует, что $\vec{b} = \lambda\vec{a}$. Используя соотношения (2.1) и (2.2), преобразуем правую и левую части равенства (2.3):

$$\alpha(\vec{a}+\vec{b}) = \alpha(\vec{a}+\lambda\vec{a}), \quad \alpha\vec{a}+\alpha\vec{b} = \alpha\vec{a}+\alpha\lambda\vec{a} = (\alpha+\alpha\lambda)\vec{a} = \alpha(\lambda+1)\vec{a}.$$

В этом случае $\alpha(\vec{a}+\vec{b}) = \alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$.

Далее будем предполагать, что вектор $\vec{a}$ не коллинеарен $\vec{b}$. Пусть $\alpha > 0$. Тогда векторы $\alpha\vec{a}$ и $\alpha\vec{b}$ сонаправлены с $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно. Отложим от точки $A$ векторы $\vec{a}$ и $\alpha\vec{a}$: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB'} = \alpha\vec{a}$, а от точек $B$ и $B'$ векторы $\vec{b}$ и $\alpha\vec{b}$: $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{B'C'} = \alpha\vec{b}$ (рис. 13, *а*). Докажем, что треугольники $ABC$ и $A'B'C'$ подобны между собой. Действительно, $\angle ABC = \angle AB'C'$, вектор $\vec{b}$ сонаправлен с $\alpha\vec{b}$, значит, $|AB'| : |AB| = |B'C'| : |BC| = \alpha$. Треугольники подобны, так как равны их углы и прилежащие стороны пропорциональны. Отсюда следует, что $\angle BAC = \angle B'AC'$, т. е. точки $A$, $C$ и $C'$ лежат на одной прямой, и поэтому $\overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AC'}$. Кроме того, из подобия треугольников вытекает $|AC'| : |AC| = \alpha$. Таким образом, $\overrightarrow{AC'} = \alpha\overrightarrow{AC}$. Но $\overrightarrow{AC} = \vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{AC'} = \alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$, поэтому

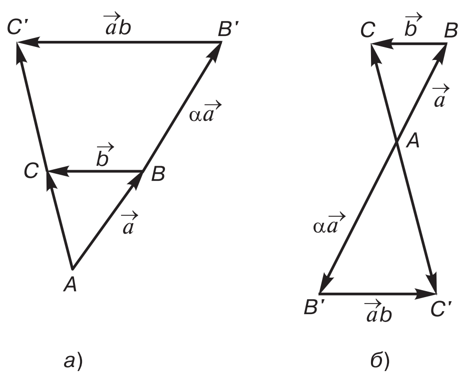


**Рис. 13**

$\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$. Для рассматриваемого случая равенство (2.3) доказано.

Предположим теперь, что $\alpha < 0$. Тогда $\alpha\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{a}$, $\alpha\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{b}$. Отложим векторы $\vec{a}$ и $\alpha\vec{a}$ от точек $A$ и $A'$: $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB'}=\alpha\vec{a}$, а от точек $B$ и $B'$ векторы $\vec{b}$ и $\alpha\vec{b}$: $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{B'C'}=\alpha\vec{b}$ (рис. 13, *б*). Так же как и в предыдущем случае, доказывается подобие треугольников $ABC$ и $AB'C'$. Из подобия следует, что $\angle BAC = \angle B'AC'$. Так как векторы $\vec{b}$ и $\alpha\vec{b}$ противоположно направлены, то углы $BAC$ и $B'AC'$ вертикальные. Поэтому точки $C'$, $A$ и $C$ лежат на одной прямой. Из подобия треугольников следует, что $|AC'|:|AC|=|\alpha|$. Векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AC'}$ противоположно направлены, следовательно, $\overrightarrow{AC'}=\alpha\overrightarrow{AC}$. В то же время, $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}, \overrightarrow{AC'}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$. Таким образом, $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$. Равенство (2.3) доказано полностью.

-