СБОРНИК ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Под общей редакцией
доктора физико-математических наук,
профессора *А. П. Рябушко*

Часть 1

*Допущено Министерством
народного образования БССР
в качестве учебного пособия
для студентов инженерно-технических
специальностей вузов*

ББК 22.11я73
С23
УДК 51 (076.1) (075.8)

Авторы: А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть

Рецензенты: кафедра высшей математики Московского энергетического института; зав. кафедрой высшей математики Минского радиотехнического института, д-р физ.-мат. наук, проф. Л. А. Черкас

$$\text{С}\ \frac{1602010000-098}{\text{М}304(03)-90}\ 10-90$$

ISBN 5-339-00326-4 (ч. 1)
ISBN 5-339-00483-X

ПРЕДИСЛОВИЕ

В Основных направлениях перестройки высшего и среднего специального образования в стране, приказах Государственного комитета СССР по народному образованию и других документах подчеркивается необходимость перехода от пассивных форм обучения к активной творческой работе со студентами, от «валового» обучения к усилению индивидуального подхода, к развитию творческих способностей обучаемых путем расширения их самостоятельной работы. Такой путь развития и перестройки высшей школы предполагает новое методическое обеспечение учебного процесса: создание современных методик проведения лекционных, практических и лабораторных занятий, подкрепленных соответствующими методическими и учебными пособиями, разработку новых форм самостоятельной работы, методов ее контроля и т. д.

Имеющиеся в настоящее время сборники задач и упражнений по общему курсу высшей математики для втузов не дают возможности индивидуализировать обучение из-за своей структуры (малое количество однотипных задач и упражнений, неудачный с методической точки зрения подбор задач). Активизация познавательной деятельности студентов, выработка у них способности самостоятельно решать достаточно сложные проблемы может быть достигнута, по мнению авторов, при такой организации учебного процесса, когда каждому студенту выдаются индивидуальные домашние задания (ИДЗ) и достаточно часто проводятся самостоятельные (контрольные) работы во время аудиторных занятий (АЗ) с обязательным последующим контролем их выполнения и выставлением оценок. Это мнение подкрепляется личным опытом авторов и педагогическими экспериментами, проведенными в последние годы в ряде втузов, например в Белорусском институте механизации сельского хозяйства, Белорусском и Дальневосточном политехнических институтах.

Данная книга является первой частью комплекса учебных пособий под общим названием «Сборник индивидуальных заданий по высшей математике», написанного в соответствии с действующими программами курса высшей математики в объеме 380—450 часов для инженерно-технических специальностей вузов. Этот комплекс также может быть использован в вузах других профилей, в которых количество часов, отведенное на изучение высшей математики, значительно меньше. (Для этого из предлагаемого материала следует сделать необходимую выборку.) Кроме того, он вполне доступен для студентов вечерних и заочных отделений втузов.

Предлагаемое пособие адресовано преподавателям и студентам и предназначено для проведения практических занятий и самостоятельных (контрольных) работ в аудитории и выдачи ИДЗ по всем разделам курса высшей математики.

В первой части данного комплекса содержится материал по линейной и векторной алгебре, аналитической геометрии и дифференциальному исчислению функций одной переменной.

Авторы выражают искреннюю благодарность рецензентам — коллективу кафедры высшей математики Московского энергетического института, возглавляемой членом-корреспондентом АН СССР, доктором физико-математических наук, профессором С. И. Похожаевым, и заведующему кафедрой высшей математики Минского радиотехнического института, доктору физико-математических наук, профессору Л. А. Черкасу, а также сотрудникам этих кафедр кандидатам физико-математических наук, доцентам Л. А. Кузнецову, П. А. Шмелеву, А. А. Карпуку — за ценные замечания и советы, способствовавшие улучшению книги.

Все отзывы и пожелания просьба присылать по адресу: 220048, Минск, проспект Машерова, 11, издательство «Вышэйшая школа».

Авторы

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Охарактеризуем структуру пособия, методику его использования, организацию проверки и оценки знаний, навыков и умений студентов.

Весь практический материал по курсу высшей математики разделен на главы, в каждой из которых даются необходимые теоретические сведения (основные определения, понятия, формулировки теорем, формулы), используемые при решении задач и выполнении упражнений. Изложение этих сведений иллюстрируется решенными примерами. (Начало решения примеров обозначается символом ▶, а конец — ◀.) Затем даются подборки задач с ответами для всех практических аудиторных занятий (АЗ) и самостоятельных (мини-контрольных) работ на 10—15 минут во время этих занятий. И, наконец, приводятся недельные индивидуальные домашние задания (ИДЗ), каждое из которых содержит 30 вариантов и сопровождается решением типового варианта. Часть задач из ИДЗ снабжена ответами. В конце каждой главы помещены дополнительные задачи повышенной трудности и прикладного характера.

В приложении приведены одно- и двухчасовые контрольные работы (каждая по 30 вариантов) по важнейшим темам курса.

Нумерация АЗ сквозная и состоит из двух чисел: первое из них указывает на главу, а второе — на порядковый номер АЗ в этой главе. Например, шифр АЗ-2.1 означает, что АЗ относится ко второй главе и является первым по счету. В первой части пособия содержится 27 АЗ и 14 ИДЗ.

Для ИДЗ также принята нумерация по главам. Например, шифр ИДЗ-5.2 означает, что ИДЗ относится к пятой главе и является вторым. Внутри каждого ИДЗ принята следующая нумерация: первое число означает номер задачи в данном задании, а второе — номер варианта. Таким образом, шифр ИДЗ-5.2 : 16 означает, что студент должен выполнить 16-й вариант из ИДЗ-5.2, который содержит задачи 1.16, 2.16, 3.16, 4.16. При выдаче ИДЗ студентам номера́ выполняемых вариантов можно менять от задания к заданию по какой-либо системе или случайным образом. Более того, можно при выдаче ИДЗ любому студенту составить его вариант, комбинируя однотипные задачи из разных вариантов. Например, шифр ИДЗ-3.1 : 1.2; 2.4; 3.6 означает, что студенту следует решать в ИДЗ-3.1 первую задачу из варианта 2, вторую — из варианта 4 и третью — из варианта 6. Такой комбинированный метод выдачи ИДЗ позволяет из 30 вариантов получить большое количество новых вариантов.

Внедрение ИДЗ в учебный процесс некоторых втузов (Белорусский институт механизации сельского хозяйства, Белорусский политехнический институт, Дальневосточный политехнический институт и др.) показало, что целесообразнее выдавать ИДЗ не после каждого АЗ (которых, как правило, два в неделю), а одно недельное ИДЗ, включающее в себя основной материал двух АЗ данной недели.

Дадим некоторые общие рекомендации по организациям работы студентов в соответствии с настоящим пособием.

1. В вузе студенческие группы по 25 человек, проводятся два АЗ в неделю, планируются еженедельные необязательные для посещения студентами консультации, выдаются недельные ИДЗ. При этих условиях для систематического контроля с выставлением оценок, указанием ошибок и путей их исправления могут быть использованы выдаваемые каждому преподавателю матрицы ответов и банк листов решений, которые кафедра заготавливает для ИДЗ (студентам они не выдаются). Если матрицы ответов составляются для всех задач из ИДЗ, то листы решений разрабатываются только для тех задач и вариантов, где важно проверить правильность выбора метода, последовательности действий, навыков и умений при вычислениях. Кафедра определяет, для каких ИДЗ нужны листы решений. Листы решений (один вариант располагается на одном листе) используются при самоконтроле правильности выполнения заданий студентами, при взаимном студенческом контроле, а чаще всего при комбинированном контроле: преподаватель проверяет лишь правильность выбора метода, а студент по листу решений — свои вычисления. Эти методы позволяют проверить

ИДЗ 25 студентов за 15—20 минут с выставлением оценок в журнал.

2. Студенческие группы в вузе по 15 человек, проводятся по два АЗ в неделю, в расписание для каждой группы включены обязательные два часа в неделю самоподготовки под контролем преподавателя. При этих условиях (которые созданы, например, в Белорусском институте механизации сельского хозяйства) организация индивидуальной, самостоятельной, творческой работы студентов, оперативного контроля за качеством этой работы значительно улучшается. Рекомендованные выше методы пригодны и в данном случае, однако появляются новые возможности. На АЗ быстрее проверяются и оцениваются ИДЗ, во время обязательной самоподготовки можно проконтролировать проработку теории и решение ИДЗ, выставить оценки части студентов, принять задолженности по ИДЗ у отстающих.

Накапливание большого количества оценок за ИДЗ, самостоятельные и контрольные работы в аудитории позволяет контролировать учебный процесс, управлять им, оценивать качество усвоения изучаемого материала.

Все это дает возможность отказаться от традиционного итогового семестрового (годового) экзамена по материалу всего семестра (учебного года) и ввести так называемый блочно-цикловой (модульно-цикловой) метод оценки знаний и навыков студентов, состоящий в следующем. Материал семестра (учебного года) разделяется на 3—5 блоков (модулей), по каждому из которых выполняются АЗ, ИДЗ и в конце каждого цикла — двухчасовая письменная коллоквиум-контрольная работа, в которую входят 2—3 теоретических вопроса и 5—6 задач. Учет оценок по АЗ, ИДЗ и коллоквиуму-контрольной позволяет вывести объективную общую оценку за каждый блок (модуль) и итоговую оценку по всем блокам (модулям) семестра (учебного года). Подобный метод внедряется, например, в Белорусском институте механизации сельского хозяйства.

В заключение отметим, что пособие в основном ориентировано на студента средних способностей, и усвоение содержащегося в нем материала гарантирует удовлетворительные и хорошие знания по курсу высшей математики. Для одаренных и отлично успевающих студентов необходима подготовка заданий повышенной сложности (индивидуальный подход в обучении!) с перспективными поощрительными мерами. Например, можно разработать для таких студентов специальные задания на весь семестр, включающие задачи настоящего пособия и дополнительные более сложные задачи и теоретические упражнения (для этой цели, в частности, предназначены дополнительные задачи в конце каждой главы). Преподаватель может выдать эти задания в начале семестра, установить график их выполнения (под своим контролем), разрешить свободное посещение лекционных или практических занятий по высшей математике и в случае успешной работы выставить отличную оценку до экзаменационной сессии.

1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. МАТРИЦЫ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1.1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И ИХ СВОЙСТВА. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Определителем n-го порядка называется число Δ_n, записываемое в виде квадратной таблицы

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.1}$$

и вычисляемое, согласно указанному ниже правилу, по заданным числам a_{ij} $(i, j = \overline{1, n})$, которые называются *элементами определителя* (всего их n^2). Индекс i указывает номер строки, а j — номер столбца квадратной таблицы (1.1), на пересечении которых находится элемент a_{ij}. Любую строку или столбец этой таблицы будем называть *рядом.*

Главной диагональю определителя называется совокупность элементов $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} называется определнтель $(n-1)$-го порядка Δ_{n-1}, полученный из определителя n-го порядка Δ_n вычеркнванием i-й строки и j-го столбца.

Алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij} определяется равенством

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Значенне определителя Δ_n находнтся по следующему правилу. Для $n = 2$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1.2}$$

Для $n = 3$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}, \tag{1.3}$$

где

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Величины A_{11}, A_{12}, A_{13} — алгебраические дополнения, а M_{11}, M_{12}, M_{13} — миноры определителя Δ_3, соответствующие его элементам a_{11}, a_{12}, a_{13}. Эти миноры являются определителями второго порядка, получаемыми из определителя Δ_3 вычеркиванием соответствующих строки и столбца. Например, чтобы найти минор M_{12}, следует в определителе Δ_3 вычеркиуть первую строку и второй столбец.

Для произвольного n

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} A_{1k}, \tag{1.4}$$

где $A_{1k} = (-1)^{1+k} M_{1k}$, а миноры M_{1k}, являющиеся определителями $(n-1)$-го порядка, получаются из Δ_n вычеркнванием первой строки и k-го столбца.

Например,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot 5 - (-2)\cdot 1 = 17;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} =$$
$$= 4(-7) - 7(21-25) - 2\cdot 5 = -10;$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} -$$
$$-1\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$
$$= -(4(-4) + 3\cdot 4 - 2\cdot 0) - (0(-4) - 4 - 2\cdot 5) + 2(0(-12) -$$
$$- 4\cdot 4 - 2\cdot 15) = -74.$$

Замечание. Если элементами определителя являются некоторые функции, то данный определитель, вообще говоря, тоже функция (но может быть и числом). Например,

$$\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x;$$

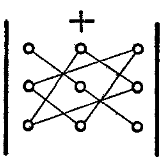
$$\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1;$$

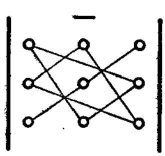
$$\begin{vmatrix} \operatorname{tg} x & 2 \\ 1/2 & \operatorname{ctg} x \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0.$$

Правило вычисления определителя Δ_3 равносильно *правилу треугольников (правилу Саррюса)*:

$$\Delta_3 = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$
$$- (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11}). \tag{1.5}$$

Схематическая запись этого правила приведена ниже:





Например,

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 6\cdot 1 + 2\cdot 5\cdot 2 + 4(-1)(-3) -$$

$$-((-3)\cdot 6\cdot 2 + 2\cdot 4\cdot 1 + 5(-1)1) = 71.$$

Перечислим *основные свойства определителей:*

1) сумма произведений элементов любого ряда определителя и их алгебраических дополнений не зависит от номера ряда и равяа этому определителю:

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}. \qquad 1.6)$$

Эти равенства можно было бы (как и формулу (1.4)) принять за правило вычисления определителя. Первое из них называется *разложением Δ_n по элементам i-й строки,* а второе — *разложением Δ_n по элементам j-го столбца;*

2) значение определителя не меняется после замены всех его строк соответствующими столбцами, и иаоборот;

3) если поменять местами два параллельных ряда определителя, то он измеиит зиак на противоположиый;

4) определитель с двумя одинаковыми параллельными рядами раввеи нулю;

5) если все элементы некоторого ряда определителя имеют общий множитель, то последний можно вынести за знак определителя. Отсюда следует, что если элементы какого-либо ряда умиожить на число λ, то определитель Δ_n умножится на это же число λ;

6) если все элементы какого-либо ряда определителя равиы иулю, то определитель также равеи нулю;

7) определитель, у которого элементы двух параллельных рядов соответствеино пропорциональны, равен нулю;

8) сумма всех произведений элемеятов какого-либо ряда определителя и алгебраических дополнений соответствующих элементов другого параллельного ряда равна нулю, т. е. верны равенства:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = 0 \ (i \neq j);$$

9) если каждый элемент какого-либо ряда определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то такой определитель равен сумме двух определителей, в первом из которых соответствующий ряд состоит из первых слагаемых, а во втором — из вторых слагаемых:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i}+b_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i}+b_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni}+b_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Например,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1+2 & 4 \\ 7 & 3-1 & 3 \\ 4 & 2+3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 7 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 7 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix};$$

10) определитель не изменится, если ко всем элементам какого-либо его ряда прибавить соответствующие элементы другого параллельного ряда, умноженные на одно и то же произвольное число λ. Например, для столбцов определителя это свойство выражается равенством

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1i} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2i} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{ni} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1i}+\lambda a_{1j} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2i}+\lambda a_{2j} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{ni}+\lambda a_{nj} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим *основные методы вычисления определителей.*

1. *Метод эффективного понижения порядка.* В соответствии со свойством 4 вычисление определителя n-го порядка сводится к вычислению n определителей $(n-1)$-го порядка. Этот метод понижения порядка не эффективен. Используя основные свойства определителей, вычисление $\Delta_n \neq 0$ всегда можно свести к вычислению одного определителя $(n-1)$-го порядка, сделав в каком-либо ряду Δ_n все элементы, кроме одного, равными нулю. Покажем это на примере.

Пример 1. Вычислить определитель

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 30 & -10 & 120 & 80 \\ -5 & 3 & -34 & -23 \\ 1 & 1 & 3 & -7 \\ -9 & 2 & 8 & -15 \end{vmatrix}.$$

► По свойству 5 определителей из первой строки вынесем множитель 10, а затем будем последовательно умножать полученную строку на 3, 1, 2 и складывать соответственно со второй, третьей и четвертой строками. Тогда, согласно свойству 10, имеем:

$$\Delta_4 = 10 \begin{vmatrix} 3 & -1 & 12 & 8 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 15 & 1 \\ -3 & 0 & 32 & 1 \end{vmatrix}.$$

По свойству 1 определителей (см. второе из равенств (1.6)) полученный определитель можно разложить по элементам второго столбца. Тогда

$$\Delta_4 = 10 \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 15 & 1 \\ -3 & 32 & 1 \end{vmatrix}.$$

Получили определитель третьего порядка, который можно вычислить по правилу Саррюса или подобным же приемом свести к вычислению одного определителя второго порядка. Действительно, вычитая из второй и третьей строк данного определителя первую строку, получаем

$$\Delta_4 = 10\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 13 & 0 \\ -7 & 30 & 0 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 0 & 13 \\ -7 & 30 \end{vmatrix} = 10 \cdot 7 \cdot 13 = 910. \blacktriangleleft$$

2. *Приведение определителя к треугольному виду.* Определитель, у которого все элементы, находящиеся выше или ниже главной диагонали, равны нулю, называется *определителем треугольного вида*. Очевидно, что в этом случае определитель равен произведению элементов его главной диагонали. Приведение любого определителя Δ_n к треугольному виду всегда возможно.

Пример 2. Вычислить определитель

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 5 & 8 & 7 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 9 & 27 & 6 & 10 & -9 \\ 3 & 9 & 6 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & 8 & -1 \end{vmatrix}.$$

▶ Выполним следующие операции. Пятый столбец определителя сложим с первым, этот же столбец, умноженный на 3,— со вторым, на 2 — с третьим, на 8 — с четвертым столбцом. В итоге получим определитель треугольного вида, который равен исходному:

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & -12 & -2 \\ 0 & 7 & 4 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & -12 & -62 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -22 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 \cdot 7 \cdot 12 \cdot 22 = -5544. \blacktriangleleft$$

Приведение определителей к треугольному виду будет использоваться в дальнейшем при решении систем линейных уравнений методом Жордана — Гаусса (его называют также методом Гаусса).

АЗ-1.1

1. С помощью правила треугольников (правила Саррюса) вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

(*Ответ:* а) -36; б) 0; в) 87.)

2. Методом понижения порядка вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 15\,325 & 15\,323 & 37\,527 \\ 23\,735 & 23\,735 & 17\,417 \\ 23\,737 & 23\,737 & 17\,418 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

(*Ответ:* а) $-22\,198$; б) 16.)

3. Вычислить определители методом приведения их к треугольному виду:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 9 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

(*Ответ:* а) 48; б) 20.)

4. Вычислить определители, предварительно упростив их:

а) $\begin{vmatrix} x^2+a^2 & ax & 1 \\ y^2+a^2 & ay & 1 \\ z^2+a^2 & az & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 7 & 8 & 5 & 5 & 3 \\ 10 & 11 & 6 & 7 & 5 \\ 5 & 3 & 6 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & 5 & 4 & 2 \\ 7 & 10 & 7 & 5 & 0 \end{vmatrix}$.

(*Ответ:* а) $a(x-y)(y-z)(x-z)$; б) 5.)

Самостоятельная работа

Вычислить определители.

1. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$. (*Ответ:* 54.)

2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$. (*Ответ:* 160.)

3. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & -6 & 9 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{vmatrix}$. (*Ответ:* -27.)

1.2. МАТРИЦЫ И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

Прямоугольная таблица, составленная из $m \times n$ элементов a_{ij} $(i=\overline{1, m},\ j=\overline{1, n})$ некоторого множества, называется *матрицей* и записывается в виде

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ или } A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

Элементы матрицы нумеруются 2 индексами. Первый индекс i элемента a_{ij} обозначает номер строки, а второй j — номер столбца, на пересечении которых находится этот элемент в матрице. Матрицы обычно обозначают прописными буквами латинского алфавита: $A, B, C, \dots$ Если у матрицы m строк и n столбцов, то по определению она имеет размерность $m \times n$. В случае необходимости это обозначается следующим образом: $A_{m\times n}$. Матрица называется *числовой*, если ее элементы a_{ij} — числа; *функциональной*, если a_{ij} — функции; *векторной*, если a_{ij} — векторы, и т. д. Матрицы A и B называются *равными*, если все их соответствующие элементы a_{ij} и b_{ij} равны, т. е. $a_{ij}=b_{ij}$. Следовательно, равными могут быть только матрицы одинаковой размерности. Матрицы, у которых $m=n$, называются *квадратными*. Если $i=1$, то получаем *матрицу-строку*; если $j=1$, имеем *матрицу-столбец*. Их также называют *вектор-строкой* и *вектор-столбцом* соответственно.

Перечислим *основные операции над матрицами*.

1. *Сложение и вычитание матриц*. Эти операции определяются только для матриц одинаковой размерности. *Суммой (разностью) матриц A и B*, обозначаемой $A+B$ $(A-B)$, называется матрица C, элементы которой $C_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij}$, где a_{ij} и b_{ij} — соответственно элементы матриц A и B. Например, пусть

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \\ -3 & 9 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 7 \\ 8 & -11 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$A+B=\begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 5 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix},\quad A-B=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -11 \\ -11 & 20 \end{bmatrix}.$$

2. *Умножение матрицы на число*. *Произведением матрицы A и числа λ*, обозначаемым λA, называется матрица B той же размерности, элементы которой $b_{ij}=\lambda a_{ij}$, где a_{ij} — элементы матрицы A, т. е. при умножении матрицы на число (числа на матрицу) надо все элементы матрицы умножить на это число. Например, пусть

$$\lambda=-2,\ A=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\lambda A=-2\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -6 & 0 \\ -14 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. *Умножение матриц. Произведением матриц* $A_{m\times n}$ *и* $B_{n\times p}$ называется матрица $C_{m\times p}=A\cdot B$ (или проще AB), элементы которой $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$, где a_{ik}, b_{kj} — элементы матриц A и B. Отсюда следует, что произведение AB существует только в случае, когда первый множитель A имеет число столбцов, равное числу строк второго множителя B. Далее, число строк матрицы AB равно числу строк A, а число столбцов — числу столбцов B. Из существования произведения AB не следует существование произведения BA. В случае его существования, как правило $BA\neq AB$. Если $AB=BA$, то матрицы A и B называются *перестановочными* (или *коммутирующими*). Известно, что всегда $(AB)C=A(BC)$.

Пример 1. Найти AB и BA, если:

$$A=\begin{bmatrix}4 & -5 & 8\\ 1 & 3 & -1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-1 & 5\\ -2 & -3\\ 3 & 4\end{bmatrix}.$$

▶ Имеем:

$$AB=C_{2\times 2}=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{bmatrix},$$

где $c_{11}=4(-1)+(-5)(-2)+8\cdot 3=30$; $c_{12}=4\cdot 5+(-5)(-3)+$ $+8\cdot 4=67$; $c_{21}=1(-1)+3(-2)+(-1)3=-10$; $c_{22}=1\cdot 5+$ $+3(-3)+(-1)4=-8$.

В результате $AB=\begin{bmatrix}30 & 67\\ -10 & -8\end{bmatrix}$.

Далее находим

$$BA=\tilde{C}_{3\times 3}=\begin{bmatrix}\tilde{c}_{11} & \tilde{c}_{12} & \tilde{c}_{13}\\ \tilde{c}_{21} & \tilde{c}_{22} & \tilde{c}_{23}\\ \tilde{c}_{31} & \tilde{c}_{32} & \tilde{c}_{33}\end{bmatrix},$$

где $\tilde{c}_{11}=(-1)4+5\cdot 1=1$; $\tilde{c}_{12}=(-1)(-5)+5\cdot 3=20$; $\tilde{c}_{13}=$ $=(-1)8+5(-1)=-13$; $\tilde{c}_{21}=(-2)4+(-3)1=-11$; $\tilde{c}_{22}=$ $=(-2)(-5)+(-3)3=1$; $\tilde{c}_{23}=(-2)8+(-3)(-1)=-13$; $\tilde{c}_{31}=$ $=3\cdot 4+4\cdot 1=16$; $\tilde{c}_{32}=3(-5)+4\cdot 3=-3$; $\tilde{c}_{33}=3\cdot 8+4(-1)=$ $=20$. Имеем:

$$BA=\begin{bmatrix}1 & 20 & -13\\ -11 & 1 & -13\\ 16 & -3 & 20\end{bmatrix}.$$

Итак, $AB\neq BA$. ◀

Пример 2. Даны матрицы: $A=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & -5\\ -1 & 2\end{bmatrix}$. Найти AB и BA.

▶ Имеем:

$$AB=\begin{bmatrix}3\cdot 1+5(-1) & 3(-5)+5\cdot 2\\ 1\cdot 1+2(-1) & 1(-5)+2\cdot 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -5\\ -1 & -1\end{bmatrix},$$

$$BA=\begin{bmatrix}1\cdot 3+(-5)1 & 1\cdot 5+(-5)2\\ (-1)3+2\cdot 1 & (-1)5+2\cdot 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -5\\ -1 & -1\end{bmatrix}.$$

Следовательно, $AB=BA$. ◀

Пример 3. Найти $(AB)C$ и $A(BC)$, если:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 1\\ 2 & 5\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2 & -6 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}-1\\ 2\\ 4\end{bmatrix}.$$

▶ Имеем:

$$AB=\begin{bmatrix}5 & 3 & -2\\ -1 & 9 & -2\\ 9 & 3 & -3\end{bmatrix},\quad (AB)C=\begin{bmatrix}-7\\ 11\\ -15\end{bmatrix},$$

$$BC=\begin{bmatrix}-10\\ 1\end{bmatrix},\quad A(BC)=\begin{bmatrix}-7\\ 11\\ -15\end{bmatrix},$$

т. е. $(AB)C=A(BC)$. ◀

АЗ-1.2

1. Даны матрицы A и B. Найти: $A+B$, $2A$, $A-3B$, если:

а) $A=\begin{bmatrix}1 & 8\\ 0 & 9\\ -7 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1 & -7\\ 0 & 1\\ 6 & -1\end{bmatrix}$;

б) $A=\begin{bmatrix}5 & 7 & 9 & 1\\ 4 & 3 & -1 & 0\\ -2 & 4 & 4 & -3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-4 & 1 & -8 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 3\\ 2 & 5 & 11 & 7\end{bmatrix}$

2. Даны матрицы A и B. Найти AB и BA, если:

а) $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 3\\ 4 & 0 & 5\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 7 & 1\\ 3 & 2 & -4\\ 1 & -3 & 5\end{bmatrix}$;

б) $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 5\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 7\\ 3 & 4\\ 1 & 0\end{bmatrix}$;

в) $A=\begin{bmatrix}3\\ 4\\ 2\end{bmatrix}$, $B=[5\quad -2\quad 3]$;

г) $A=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix}$;

д) $A=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \alpha\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}\beta & \gamma\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

(*Ответ:* а) $AB=\begin{bmatrix}4 & 1 & 11\\ 0 & -11 & 19\\ 13 & 13 & 29\end{bmatrix}$, $BA=\begin{bmatrix}6 & -7 & 30\\ -13 & -2 & -8\\ 21 & 3 & 18\end{bmatrix}$;

б) $AB=\begin{bmatrix}3 & 11\\ 2 & 17\end{bmatrix}$, $BA=\begin{bmatrix}21 & -7 & 35\\ 15 & -1 & 20\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$;

в) $BA=[13]$, $AB=\begin{bmatrix}15 & -6 & 9\\ 20 & -8 & 12\\ 10 & -4 & 6\end{bmatrix}$;

г) $AB=BA=\begin{bmatrix}10 & 14\\ 7 & 10\end{bmatrix}$;

д) $AB=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $BA=\begin{bmatrix}0 & \alpha\gamma\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.)

3. Для матрицы A найти все перестановочные (коммутирующие) с ней квадратные матрицы B. Проверить выполнимость равенства $AB=BA$, если:

а) $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$; б) $A=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{bmatrix}$.

(*Ответ:* а) $B=\begin{bmatrix}3b & -b\\ b & 2b\end{bmatrix}$; б) $B=\begin{bmatrix}a+b & 5a\\ a & b\end{bmatrix}$, где a, b — любые числа (параметры).)

4. Даны матрицы A, B и C. Найти $A(BC)$, $(AB)C$ и показать, что $(AB)C=A(BC)$, если:

а) $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 5 & -6\\ 7 & -8\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}5 & 14\\ -2 & -30\end{bmatrix}$;

б) $A=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 9 & -7 \\ 8 & 3 & 11 & 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix}$,

$C=[-1 \quad 9 \quad 3 \quad 6]$.

(*Ответ:* а) $ABC=\begin{bmatrix} 43 & 96 \\ 18 & 758 \\ 28 & 1030 \end{bmatrix}$;

б) $ABC=\begin{bmatrix} 52 & -468 & -156 & -312 \\ -19 & 171 & 57 & 114 \end{bmatrix}$.)

Самостоятельная работа

1. Даны матрицы:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Найти те из произведений AB, BA, AC, CA, BC, CB, которые имеют смысл.

(*Ответ:* $BA=\begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$, $AC=\begin{bmatrix} 4 & 5 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 6 & 0 \end{bmatrix}$.)

2. Для данных матриц A и B найти $(A+3B)^2$, если:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & -8 \\ -3 & 6 & 9 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(*Ответ:* $\begin{bmatrix} 96 & 12 & 8 \\ -18 & 54 & -8 \\ 51 & 85 & 111 \end{bmatrix}$.)

3. Найти $(AB)C$ и $A(BC)$, если:

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(*Ответ:* $\begin{bmatrix} -11 & 100 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$.)

1.3. ОБРАТНЫЕ МАТРИЦЫ. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ. РАНГ МАТРИЦЫ. ТЕОРЕМА КРОНЕКЕРА — КАПЕЛЛИ

Квадратная матрица порядка n

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

называется *невырожденной*, если ее определитель (детерминант)

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1.9}$$

В случае, когда $\det A=0$, матрица A называется *вырожденной*.

Только для квадратных невырожденных матриц A вводится понятие обратной матрицы A^{-1}. Матрица A^{-1} называется *обратной* для квадратной невырожденной матрицы A, если $AA^{-1}=A^{-1}A=E$, где E — единичная матрица порядка n:

$$E=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \tag{1.10}$$

Известно, что для A существует единствеииая обратиая матрица A^{-1}, которая определяется формулой

$$A^{-1}=\frac{A^*}{\det A},\ A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}. \tag{1.11}$$

Матрица A^* называется *присоединенной*, ее элементами являются алгебраические дополнения A_{ij} *транспонированной матрицы* A^T, т. е. матрицы, полученной из данной матрицы A заменой ее строк столбцами с теми же номерами:

$$A^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}. \tag{1.12}$$

Пример 1. Дана матрица A. Убедиться, что она невырождениая, найти обратную ей матрицу A^{-1} и проверить выполнимость равеиств $AA^{-1}=A^{-1}A=E$, если:

а) $A=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$; б) $A=\begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

▶ а) Имеем $\det A = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$. Далее находим алгебраические дополнения: $A_{11} = 3$, $A_{12} = -1$, $A_{21} = -2$, $A_{22} = -1$. Следовательно,

$$A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/5 & 2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{bmatrix}, \quad AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A^{-1}A;$$

б) Вычисляем $\det A = -8 \neq 0$ и алгебраические дополнения $A_{11} = -2$, $A_{12} = 2$, $A_{13} = 4$, $A_{21} = 3$, $A_{22} = 1$, $A_{23} = -2$, $A_{31} = -7$, $A_{32} = -5$, $A_{33} = -6$. Тогда

$$A^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{bmatrix}, \quad AA^{-1} = A^{-1}A = E. \blacktriangleleft$$

Введем понятие ранга матрицы. Выделим в матрице A k строк и k столбцов, где k — число, меньшее или равное меньшему из чисел m и n. Определитель порядка k, составленный из элементов, стоящих на пересечении выделенных k строк и k столбцов, называется *минором* или *определителем, порожденным матрицей* A. Например, для матрицы

$$\begin{bmatrix} 7 & -1 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

при $k = 2$ определители

$$\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -6 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -6 \end{vmatrix}$$

будут порожденными даниой матрицей.

Рангом матрицы A (обозначается $\operatorname{rang} A$) называется наибольший порядок порожденных ею определителей, отличных от нуля. Если равны нулю все определители порядка k, порожденные данной матрицей A, то $\operatorname{rang} A < k$.

Теорема 1. *Ранг матрицы не изменится, если:*

1) *поменять местами любые два параллельных ряда;*

2) *умножить каждый элемент ряда на один и тот же множитель* $\lambda \neq 0$;

3) *прибавить к элементам ряда соответствующие элементы любого другого параллельного ряда, умноженные на один и тот же множитель.*

Преобразования 1—3 называются *элементарными*. Две матрицы называются *эквивалентными*, если одна матрица получается из другой с помощью элементарных преобразований. Эквивалентность матриц A и B обозначается $A \sim B$.

Базисным минором матрицы называется всякий отличный от нуля минор, порядок которого равен рангу данной матрицы.

Рассмотрим *основные методы нахождения ранга матрицы.*

1. *Метод единиц и нулей.* С помощью элементарных преобразований любую матрицу можно привести к виду, когда каждый ее ряд будет состоять только из нулей или из нулей и одной единицы. Тогда число оставшихся единиц и определит ранг исходной матрицы, так как полученная матрица будет эквивалентна исходной.

Пример 2. Найти ранг матрицы

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 6 & 3 & 4 & 8 & -3 \end{bmatrix}.$$

▶ Умножим третий столбец матрицы A на $1/2$. Далее, полученную первую строку умножим на 2 и вычтем ее из четвертой строки. Теперь третий столбец содержит три нуля и единицу (в первой строке). Легко делаем нули в первой строке на первой, второй, четвертой и пятой позициях. Имеем

$$A\sim\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Теперь четвертую строку последней матрицы складываем со второй и третьей, получая при этом еще два нуля во втором столбце, после чего делаем нули в четвертой строке всюду, кроме единицы на пересечении четвертой строки и второго столбца. В результате этих элементарных преобразований имеем:

$$A\sim\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Получили три единицы. Следовательно, $\operatorname{rang} A = 3$.

За базисный минор можно взять, например, определитель третьего порядка, который находится на пересечении первой, третьей, четвертой строк и второго, третьего и четвертого столбцов (на пересечении этих строк и столбцов в последней матрице стоят единицы). Так как перестановка рядов матрицы не производилась, то один из базисных миноров матрицы A следующий:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 3 & 4 & 8 \end{vmatrix}\neq 0. \ ◀$$

2. *Метод окаймляющих миноров.* Минор M_{k+1} порядка $k+1$, содержащий в себе минор M_k порядка k, называется *окаймляющим* минор M_k. Если у матрицы A существует минор $M_k\neq 0$, а все окаймляющие его миноры $M_{k+1}=0$, то $\operatorname{rang} A = k$.

Пример 3. Найти ранг матрицы

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 4 & 3 \\ 3 & -9 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

▶ Имеем $M_2=\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -6 & 4 \end{vmatrix}\neq 0$. Для M_2 окаймляющими будут только два минора:

$$M_3=\begin{vmatrix}1 & -3 & 5\\ 2 & -6 & 4\\ 3 & -9 & 3\end{vmatrix},\quad M_3^*=\begin{vmatrix}-3 & 5 & 4\\ -6 & 4 & 3\\ -9 & 3 & 2\end{vmatrix},$$

каждый из которых равен нулю. Поэтому $\operatorname{rang} A=2$, а указанный минор M_2 может быть принят за базисный. ◀

Теорема 2 (Кронекера — Капелли). *Для того чтобы система m линейных алгебраических уравнений относительно n неизвестных x_1, x_2, ..., x_n*

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{array}\right\} \tag{1.13}$$

была совместна (имела решение), необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}\end{bmatrix} \tag{1.14}$$

системы (1.13) и ранг так называемой расширенной матрицы

$$B=\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c} & b_1\\ A & b_2\\ & \vdots\\ & b_m\end{array}\right] \tag{1.15}$$

системы (1.13) были равны, т. е. $\operatorname{rang} A=\operatorname{rang} B=r$. Далее, если $\operatorname{rang} A=\operatorname{rang} B$ и $r=n$, то система (1.13) имеет единственное решение; если $r<n$, то система (1.13) имеет бесконечное множество решений, зависящее от $n-r$ произвольных параметров.

Система (1.13) называется *однородной*, если все ее свободные члены b_i $(i=\overline{1, m})$ равны нулю. Если хотя бы одно из чисел отлично от нуля, то система называется *неоднородной*. Для однородной системы уравнений $\operatorname{rang} A=\operatorname{rang} B$, поэтому она всегда совместна.

Пример 4. Выяснить, совместна ли система уравнений

$$\left.\begin{array}{l} 4x_1+3x_2-3x_3-\ x_4=4,\\ 3x_1-\ x_2+3x_3-2x_4=1,\\ 3x_1+\ x_2\qquad\ \ -\ x_4=0,\\ 5x_1+4x_2-2x_3+\ x_4=3. \end{array}\right\}$$

▶ Выпишем расширенную матрицу данной системы и найдем ранги основной и расширенной матриц. Имеем:

$$B=\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & -3 & -1 & 4\\ 3 & -1 & 3 & -2 & 1\\ 3 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 5 & 4 & -2 & 1 & 3\end{array}\right].$$

Не будем переставлять столбец свободных членов с другими столбцами матрицы, чтобы сразу определить ранги основной и расширенной матриц. Второй столбец матрицы B умножим на 3 и вычтем из первого, а также сложим второй столбец с четвертым. В результате в третьей строке получим все нули, кроме единицы во втором столбце. Тогда легко можно обратить в нули все остальные элементы второго столбца. Получим

$$B \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} -5 & 0 & -3 & 2 & 4 \\ 6 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & -2 & 5 & 3 \end{array}\right].$$

Теперь вторую строку прибавим к первой и четвертой, а затем в полученной матрице первый столбец сложим с четвертым. Имеем:

$$B \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 6 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

Далее третий столбец последней матрицы вычтем из четвертого, равного ему, и прибавим к первому. Полученный первый столбец, умноженный на 5, вычтем из пятого. Тогда

$$B \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 3 & 0 & -44 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Получили $\operatorname{rang} A = 3$, $\operatorname{rang} B = 4$, откуда $\operatorname{rang} A \neq \operatorname{rang} B$, т. е. исходная система уравнений несовместна. ◀

АЗ-1.3

1. Найти матрицу A^{-1}, обратную данной матрице A, если:

а) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$; б) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -7 \\ 2 & 7 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(*Ответ:* а) $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -10 & -9 & 14 \\ 13 & 12 & -17 \\ -4 & -3 & 5 \end{bmatrix}$;

б) $A^{-1} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} -7 & 3 & -13 & 41 \\ -13 & -3 & 8 & -16 \\ 18 & 3 & -3 & 6 \\ -3 & -3 & 3 & -6 \end{bmatrix}$.)

2. Найти ранг матрицы A с помощью элементарных преобразований или методом окаймляющих миноров и указать какой-либо базисный минор, если:

$$\text{а) } A=\begin{bmatrix} -8 & 1 & -7 & -5 & -5 \\ -2 & 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\text{б) } A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & -4 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix};$$

$$\text{в) } A=\begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 8 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

(*Ответ:* а) 2; б) 2; в) 3.)

3. Зная основную матрицу A и расширенную матрицу B, записать соответствующую им систему линейных алгебраических уравнений и решить вопрос о ее совместности или несовместности, пользуясь теоремой Кронекера — Капелли:

$$\text{а) } A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 5 & -5 & 8 & -7 \end{bmatrix}, \quad B=\left[\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{array}\right];$$

$$\text{б) } A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B=\left[\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} 6 \\ 12 \\ -6 \\ 3 \\ 9 \end{matrix} \end{array}\right].$$

(*Ответ:* а) $\operatorname{rang} A=2$, $\operatorname{rang} B=3$, т. е. система несовместна; б) $\operatorname{rang} A=\operatorname{rang} B=3$, т. е. система совместна.)

Самостоятельная работа

1. 1) Найти матрицу A^{-1}, обратную матрице

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{bmatrix};$$

2) найти ранг матрицы A с помощью элементарных преобразований и указать какой-либо ее базисный минор, если

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & 5 \\ 15 & 7 & 11 \\ 11 & 5 & 8 \end{bmatrix}.$$

$$\left(\text{Ответ: 1) } A^{-1}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 15 & 3 & -8 \\ 25 & 9 & -14 \end{bmatrix};\ \text{2) } \operatorname{rang} A=2.\right)$$

2. 1) Для матрицы A найти матрицу A^{-1} и убедиться, что $AA^{-1}=E$, если

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix};$$

2) найти ранг матрицы A и указать какой-либо ее базисный минор, если

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\left(\text{Ответ: 1) } A^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix};\ \text{2) } \operatorname{rang} A=2.\right)$$

3. 1) Найти матрицу A^{-1}, если

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix};$$

2) найти ранг матрицы A и указать какой-либо ее базисный минор, если

$$A=\begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\left(\textit{Ответ: } 1)\ A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & 6 & 4 \end{bmatrix};\ 2)\ \operatorname{rang} A = 3. \right)$$

1.4. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Матричный метод. Пусть для системы (1.13) $m = n$ и основная матрица A вида (1.14) — невырожденная, т. е. $\det A \neq 0$. Тогда для A существует единственная обратная матрица A^{-1}, определяемая формулой (1.11). Введем в рассмотрение матрицы-столбцы для неизвестных и свободных членов:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}. \tag{1.16}$$

Тогда систему (1.13) можно записать в матричной форме: $AX = \tilde{B}$. Умножив это матричное уравнение слева на A^{-1}, получим $A^{-1}AX = A^{-1}\tilde{B}$, откуда $EX = X = A^{-1}\tilde{B}$. Следовательно, матрица-решение X легко находится как произведение A^{-1} и $\tilde{B}$.

Пример 1. Решить систему уравнений матричным методом:

$$\left.\begin{aligned} 2x - 4y + z &= 3, \\ x - 5y + 3z &= -1, \\ x - y + z &= 1. \end{aligned}\right\}$$

▶ Имеем:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \det A = -8.$$

Обратная матрица

$$A^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

(см. пример 2 из § 1.3). Находим:

$$X = -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -2\cdot 3 + 3(-1) - 7\cdot 1 \\ 2\cdot 3 + 1(-1) - 5\cdot 1 \\ 4\cdot 3 - 2(-1) - 6\cdot 1 \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -16 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

т. е. $x = 2$, $y = 0$, $z = -1$ — решение данной системы. ◀

Формулы Крамера. Если для системы (1.13) $m=n$ и $\det A \neq 0$, то верны *формулы Крамера* для вычисления неизвестных x_i $(i=\overline{1,\ n})$:

$$x_i = \Delta_n^{(i)}/\Delta_n \quad (i=\overline{1,\ n}), \qquad (1.17)$$

где $\Delta_n = \det A$, а $\Delta_n^{(i)}$ являются определителями n-го порядка, которые получаются из Δ_n путем замены в нем i-го столбца столбцом свободных членов исходной системы.

Пример 2. Решить систему уравнений с помощью формул Крамера:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 &= -8, \\ 2x_2 + 7x_3 &= 17. \end{aligned}\right\}$$

▶ Вычислим

$$\Delta_3 = \det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 56 - 18 + 20 + 21 = 79.$$

Последовательно заменив в Δ_3 первый, второй и третий столбцы столбцом свободных членов, получим:

$$\Delta_3^{(1)} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -8 & 4 & -5 \\ 17 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 395, \quad x_1 = \frac{\Delta_3^{(1)}}{\Delta_3} = \frac{395}{79} = 5,$$

$$\Delta_3^{(2)} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & -8 & -5 \\ 0 & 17 & 7 \end{vmatrix} = -158, \quad x_2 = \frac{\Delta_3^{(2)}}{\Delta_3} = -\frac{158}{79} = -2,$$

$$\Delta_3^{(3)} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -8 \\ 0 & 2 & 17 \end{vmatrix} = 237, \quad x_3 = \frac{\Delta_3^{(3)}}{\Delta_3} = \frac{237}{79} = 3. \blacktriangleleft$$

Метод последовательных исключений Жордана — Гаусса. Если основная матрица A системы (1.13) имеет ранг $r \leqslant n$, то расширенная матрица B этой системы с помощью элементарных преобразований строк и перестановок столбцов всегда может быть приведена к виду

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & \tilde{a}_{12} & \ldots & \tilde{a}_{1r} & \tilde{a}_{1r+1} & \ldots & \tilde{a}_{1n} & \tilde{b}_1 \\ 0 & 1 & \ldots & \tilde{a}_{2r} & \tilde{a}_{2r+1} & \ldots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \tilde{a}_{rr+1} & \ldots & \tilde{a}_{rn} & \tilde{b}_r \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \tilde{b}_{r+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \tilde{b}_m \end{array}\right]. \qquad (1.18)$$

Матрица (1.18) является расширенной матрицей системы

$$\left.\begin{aligned} x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \ldots + \tilde{a}_{1r}x_r + \tilde{a}_{1r+1}x_{r+1} + \ldots + \tilde{a}_{1n}x_n &= \tilde{b}_1, \\ x_2 + \ldots + \tilde{a}_{2r}x_r + \tilde{a}_{2r+1}x_{r+1} + \ldots + \tilde{a}_{2n}x_n &= \tilde{b}_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{array}{r}
x_r + \tilde{a}_{r\,r+1}x_{r+1} + \dots + \tilde{a}_{rn}x_n = \tilde{b}_r, \\
0 \quad = \tilde{b}_{r+1}, \\
\dots\dots\dots \\
0 \quad = \tilde{b}_m,
\end{array}\right\} \quad (1.19)$$

которая эквивалентна исходной системе (т. е. имеет те же самые решения, что и исходная система). Если хотя бы одно из чисел $\tilde{b}_{r+1}, \dots, \tilde{b}_m$ отлично от нуля, то система (1.19) и, следовательно, исходная система (1.13) несовместны. Если же $\tilde{b}_{r+1} = \dots = \tilde{b}_m = 0$, то система (1.13) совместна, а из системы (1.19) можно последовательно выразить в явном виде базисные неизвестные $x_r, x_{r-1}, \dots, x_2, x_1$ через свободные неизвестные $x_{r+1}, \dots, x_n$, т. е. решить систему (1.13). Если $r = n$, то решение этой системы единственно.

Пример 3. С помощью метода последовательных исключений Жордана — Гаусса решить вопрос о совместности данной системы и в случае совместности решить ее:

$$\left.\begin{array}{r}
2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\
x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\
3x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 5x_4 = -2, \\
2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\
x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3.
\end{array}\right\}$$

▶ Составим расширенную матрицу B и проведем необходимые элементарные преобразования строк:

$$B = \left[\begin{array}{cccc|c}
2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\
1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\
3 & 3 & 9 & 5 & -2 \\
2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\
1 & 1 & 3 & 4 & -3
\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\
1 & 1 & 3 & 4 & -3 \\
2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\
2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\
3 & 3 & 9 & 5 & -2
\end{array}\right] \sim$$

$$\sim -\frac{1}{2}\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\
0 & 0 & -2 & 2 & -4 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & -1 & -7 & -2 & -5 \\
0 & 0 & -6 & -1 & -5
\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & -7 & 7 \\
0 & 0 & -6 & -1 & -5
\end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & -7 & 7
\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right].$$

Последней матрице соответствует система, эквивалентная исходной:

$$\left.\begin{array}{r}
x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\
x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\
x_3 - x_4 = 2, \\
x_4 = -1.
\end{array}\right\}$$

Из нее, двигаясь снизу вверх, последовательно находим: $x_4 = -1$, $x_3 = 2 + x_4 = 2 - 1 = 1$, $x_2 = -x_3 - x_4 = -1 + 1 = 0$, $x_1 = 1 - x_2 - 5x_3 - 2x_4 = 1 - 5 + 2 = -2$.

Итак, система совместна, ее решение единственно ($r = n = 4$): $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$. Проверкой легко убедиться в правильности найденного решения. ◀

Пример 4. Методом Жордана — Гаусса показать, что данная система имеет бесчисленное множество решений, зависящих от двух параметров, и найти эти решения:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 5, \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 3, \\ x_1 + x_2 \qquad\qquad &= 2. \end{aligned}\right\}$$

▶ Составляем расширенную матрицу системы B и находим $\operatorname{rang} A$ и $\operatorname{rang} B$ с помощью элементарных преобразований строк:

$$B = [A|\tilde{B}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Следовательно, $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B = 2 < n = 4$. Поэтому система совместна и имеет бесчисленное множество решений, зависящих от двух ($n - r = 4 - 2 = 2$) параметров.

Последней матрице, эквивалентной данной матрице B, соответствует система уравнений

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 5, \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 3, \end{aligned}\right\}$$

эквивалентная исходной. Так как $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, то в качестве базисных неизвестных берем x_1 и x_2, а x_3 и x_4 принимаем за свободные неизвестные (параметры). Тогда из второго уравнения последней системы имеем $x_2 = 3 - x_3 - x_4$. Подставив выражение для x_2 в первое уравнение, найдем

$$x_1 = 5 - 2(3 - x_3 - x_4) - x_3 - x_4 = -1 + x_3 + x_4. \text{ ◀}$$

З а м е ч а н и е. За базисные неизвестные можно было бы принять также x_1, x_3, или x_1, x_4, или x_2, x_3, или x_2, x_4, но не x_3, x_4, так как определитель, составленный из коэффициентов при x_3 и x_4, равен нулю $\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0\right)$, и поэтому x_3 и x_4 невозможно выразить через x_1 и x_2.

АЗ-1.4

1. Доказать совместность систем с помощью теоремы Кронекера — Капелли, записать системы в матричной форме и решить их матричным способом:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -2, \\ x_2 + x_3 = -2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$

(*Ответ:* а) $x_1=x_2=x_3=-1$; б) $x_1=1, x_2=-1, x_3=2$.)

2. Решить системы уравнений, используя формулы Крамера:

$$\text{а)}\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=0, \\ 3x_2+4x_3=-6, \\ x_1+x_3=1; \end{cases} \quad \text{б)}\begin{cases} 2x_1+3x_2+8x_4=0, \\ x_2-x_3+3x_4=0, \\ x_3+2x_4=1, \\ x_1+x_4=-24. \end{cases}$$

(*Ответ:* а) $x_1=1$, $x_2=-2$, $x_3=0$; б) $x_1=-19$, $x_2=26$, $x_3=11$, $x_4=-5$.)

3. Решить системы методом Жордана — Гаусса:

$$\text{а)}\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3-x_4=0, \\ 3x_1-2x_2-x_3+x_4=0, \\ x_1-x_2+2x_3+5x_4=0; \end{cases}$$

$$\text{б)}\begin{cases} 4x_1+2x_2-3x_3+2x_4=3, \\ 2x_1+3x_2-2x_3+3x_4=2, \\ 3x_1+2x_2-3x_3+4x_4=1. \end{cases}$$

(*Ответ:* а) $x_1=14t, x_2=21t, x_3=x_4=t$ (t — любое число); б) $x_1=-10t+10$, $x_2=t$, $x_3=-16t+15$, $x_4=4-5t$ (t — любое число).)

4. Исследовать систему уравнений на совместность и в случае совместности решить ее:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+5x_2-8x_3&=8, \\ 4x_1+3x_2-9x_3&=9, \\ 2x_1+3x_2-5x_3&=7, \\ x_1+8x_2-7x_3&=12. \end{aligned}\right\}$$

(*Ответ:* $x_1=3$, $x_2=2$, $x_3=1$.)

5. Решить однородную систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x_1+2x_2+4x_3-3x_4&=0, \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4&=0, \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4&=0, \\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4&=0. \end{aligned}\right\}$$

(*Ответ*: $x_1=8x_3-7x_4$, $x_2=-6x_3+5x_4$.)

Самостоятельная работа

1. Решить систему уравнений матричным способом и сделать проверку:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1-x_2+5x_3&=4, \\ 3x_1-x_2+5x_3&=0, \\ 5x_1+2x_2+13x_3&=2. \end{aligned}\right\}$$

2. Решить систему по формулам Крамера и сделать проверку:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 - x_3 = -2, \\ 2x_1 - \ x_2 \qquad = -1, \\ x_2 \qquad + x_3 = -2. \end{array}\right\}$$

3. Решить систему методом Жордана — Гаусса и сделать проверку:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -22, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = \ \ 12, \\ 3x_1 - \ x_2 - 2x_3 = \ \ \ 0. \end{array}\right\}$$

1.5. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ К ГЛ. 1

ИДЗ-1.1

1. Для данного определителя Δ найти миноры и алгебраические дополнения элементов a_{i2}, a_{3j}. Вычислить определитель Δ: а) разложив его по элементам i-й строки; б) разложив его по элементам j-го столбца; в) получив предварительно нули в i-й строке.

1.1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$, $i=4$, $j=1$.

1.2. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$, $i=3$, $j=3$.

1.3. $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}$, $i=4$, $j=1$.

1.4. $\begin{vmatrix} 4 & -5 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 8 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{vmatrix}$, $i=1$, $j=3$.

1.5. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$, $i=2$, $j=4$.

1.6. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$, $i=1$, $j=2$.

1.7. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$, $i=2$, $j=3$.

1.8. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$, $i=3$, $j=1$.

1.9. $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}$, $i=4,\ j=3.$

1.10. $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & 7 \\ 4 & -8 & 2 & -3 \\ 10 & 1 & -5 & 4 \\ -8 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$, $i=4,\ j=2.$

1.11. $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -6 \\ 3 & -2 & 9 & 4 \end{vmatrix}$, $i=3,\ j=4.$

1.12. $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$, $i=1,\ j=2.$

1.13. $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$, $i=1,\ j=4.$

1.14. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$, $i=2,\ j=4.$

1.15. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$, $i=1,\ j=3.$

1.16. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -6 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, $i=3,\ j=2.$

1.17. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $i=3,\ j=1.$

1.18. $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $i=2,\ j=4.$

1.19. $\begin{vmatrix} 6 & 2 & -10 & 4 \\ -5 & -7 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix}$, $i=2,\ j=3.$

1.20. $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$, $i=4,\ j=3.$

1.21. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$, $i=1,\ j=2.$

1.22. $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$, $i=3,\ j=2.$

1.23. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, $i=4,\ j=4$.

1.24. $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$, $i=3,\ j=2$.

1.25. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$, $i=2,\ j=3$.

1.26. $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$, $i=4,\ j=1$.

1.27. $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -4 & 0 \end{vmatrix}$, $i=3,\ j=4$.

1.28. $\begin{vmatrix} 6 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$, $i=1,\ j=2$.

1.29. $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$, $i=4,\ j=4$.

1.30. $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$, $i=2,\ j=2$.

2. Даны две матрицы A и B. Найти: а) AB; б) BA; в) A^{-1}; г) AA^{-1}; д) $A^{-1}A$.

2.1. $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

2.2. $A=\begin{bmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{bmatrix}$.

2.3. $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

2.4. $A=\begin{bmatrix} -6 & 1 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$.

2.5. $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}$.

2.6. $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

2.7. $A=\begin{bmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 7 \end{bmatrix}$.

2.8. $A=\begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \end{bmatrix}$.

2.9. $A=\begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -4 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$.

2.10. $A=\begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix}$.

2.11. $A=\begin{bmatrix} 6 & 9 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & 7 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$.

2.12. $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & -4 \end{bmatrix}$.

2.13. $A=\begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}$.

2.14. $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

2.15. $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 5\\ 3 & 0 & 6\\ 4 & 3 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 3\\ 1 & -2 & -1\end{bmatrix}$.

2.16. $A=\begin{bmatrix}5 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 4\\ 3 & 0 & 5\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}5 & 4 & -5\\ 3 & -7 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}$.

2.17. $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 4 & 3 & 2\\ 2 & 2 & -7\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 7 & 0\\ 5 & 3 & 1\\ 1 & -6 & 1\end{bmatrix}$.

2.18. $A=\begin{bmatrix}8 & -1 & -1\\ 5 & -5 & -1\\ 10 & 3 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & 2 & 5\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$.

2.19. $A=\begin{bmatrix}3 & -7 & 2\\ 1 & -8 & 3\\ 4 & -2 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 5 & -3\\ 2 & 4 & 1\\ 2 & 1 & -5\end{bmatrix}$.

2.20. $A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ 3 & 5 & 1\\ 4 & -7 & 5\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & -8 & 5\\ 3 & 0 & 2\end{bmatrix}$.

2.21. $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & -4\\ 4 & -9 & 3\\ 2 & -7 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 0 & -4\\ 5 & -6 & 4\\ 7 & -4 & 1\end{bmatrix}$.

2.22. $A=\begin{bmatrix}8 & 5 & -1\\ 1 & 5 & 3\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4 & -7 & -6\\ 3 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$.

2.23. $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -4 & 1\\ 4 & -3 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & -4\\ 2 & 5 & -3\\ 4 & -3 & 2\end{bmatrix}$.

2.24. $A=\begin{bmatrix}5 & -8 & -4\\ 7 & 0 & -5\\ 4 & 1 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 5 & 5\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & -3\end{bmatrix}$.

2.25. $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 4\\ 3 & -5 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}7 & 5 & 1\\ 5 & 3 & -1\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$.

2.26. $A=\begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

2.27. $A=\begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

2.28. $A=\begin{bmatrix} -3 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

2.29. $A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

2.30. $A=\begin{bmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Решение типового варианта

1. Для данного определителя

$$\Delta_4=\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

найти миноры и алгебраические дополнения элементов a_{12}, a_{32}. Вычислить определитель Δ_4: а) разложив его по элементам первой строки; б) разложив его по элементам второго столбца; в) получив предварительно нули в первой строке.

▶ Находим:

$$M_{12}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}=-8-16+6+12+$$

$$+4-16=-18,$$

$$M_{32}=\begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}=-12+12-12-8=-20.$$

Алгебраические дополнения элементов a_{12} и a_{32} соответственно равны:

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-(-18)=18,$$
$$A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-(-20)=20.$$

а) Вычислим

$$\Delta_4=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+a_{14}A_{14}=$$
$$=-3\begin{vmatrix}-2&1&4\\0&-1&2\\1&-1&4\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}2&1&4\\4&-1&2\\3&-1&4\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}2&-2&4\\4&0&2\\3&1&4\end{vmatrix}=$$
$$=-3(8+2+4-4)-2(-8-16+6+12+4-16)+$$
$$+(16-12-4+32)=38;$$

б) Разложим определитель по элементам второго столбца:

$$\Delta_4=-2\begin{vmatrix}2&1&4\\4&-1&2\\3&-1&4\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}-3&1&0\\4&-1&2\\3&-1&4\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}-3&1&0\\2&1&4\\4&-1&2\end{vmatrix}=$$
$$=-2(-8+6-16+12+4-16)-2(12+6-$$
$$-6-16)+(-6+16-12-4)=38;$$

в) Вычислим Δ_4, получив предварительно нули в первой строке. Используем свойство 10 определителей (см. § 1.1). Умножим третий столбец определителя на 3 и прибавим к первому, затем умножим на -2 и прибавим ко второму. Тогда в первой строке все элементы, кроме одного, будут нулями. Разложим полученный таким образом определитель по элементам первой строки и вычислим его:

$$\Delta_4=\begin{vmatrix}-3&2&1&0\\2&-2&1&4\\4&0&-1&2\\3&1&-1&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&1&0\\5&-4&1&4\\1&2&-1&2\\0&3&-1&4\end{vmatrix}=$$
$$=\begin{vmatrix}5&-4&4\\1&2&2\\0&3&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-14&-6\\1&2&2\\0&3&4\end{vmatrix}=$$
$$=-(-56+18)=38.$$

В определителе третьего порядка получили нули в первом столбце по свойству 10 определителей. ◀

2. Даны две матрицы:

$$A=\begin{bmatrix}-4 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 3\end{bmatrix}.$$

Найти: а) AB; б) BA; в) A^{-1}; г) AA^{-1}; д) $A^{-1}A$.

▶ а) Произведение AB имеет смысл, так как число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. Находим матрицу $C=AB$, элементы которой $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+$ $+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+\ldots+a_{in}b_{nj}$. Имеем:

$$C=AB=\begin{bmatrix}-4 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 3\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-4+0-2 & -8+0+1 & 12+0+3\\ 2-2-6 & 4+0+3 & -6-1+9\\ 3+4-4 & 6+0+2 & -9+2+6\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-6 & -7 & 15\\ -6 & 7 & 2\\ 3 & 8 & -1\end{bmatrix};$$

б) Вычислим

$$BA=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-4+4-9 & 0-2-6 & 1+6-6\\ -8+0+3 & 0+0+2 & 2+0+2\\ 8+2+9 & 0-1+6 & -2+3+6\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-9 & -8 & 1\\ -5 & 2 & 4\\ 19 & 5 & 7\end{bmatrix}.$$

Очевидно, что $AB\neq BA$;

в) Обратная матрица A^{-1} матрицы A имеет вид (см. формулу (1.11))

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix},$$

где

$$\det A=\begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}=8+4+3+24=39\neq 0,$$

т. е. матрица A — невырожденная, и, значит, существует матрица A^{-1}. Находим:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=-8,\quad A_{21}=-\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=2,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=1,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=5,\quad A_{22}=\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-11,$$

$$A_{32}=-\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=14,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=7,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=8,$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=4.$$

Тогда

$$A^{-1}=\frac{1}{39}\begin{bmatrix} -8 & 2 & 1 \\ 5 & -11 & 14 \\ 7 & 8 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{8}{39} & -\frac{2}{39} & \frac{1}{39} \\ -\frac{5}{39} & -\frac{11}{39} & \frac{14}{39} \\ \frac{7}{39} & \frac{8}{39} & \frac{4}{39} \end{bmatrix};$$

г) Имеем:

$$AA^{-1}=\begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{8}{39} & \frac{2}{39} & \frac{1}{39} \\ \frac{5}{39} & -\frac{11}{39} & \frac{14}{39} \\ \frac{7}{39} & \frac{8}{39} & \frac{4}{39} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=E;$$

д) Имеем:

$$A^{-1}A = \frac{1}{39}\begin{bmatrix} -8 & 2 & 1 \\ 5 & -11 & 14 \\ 7 & 8 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

т. е. обратная матрица найдена верно. ◀

ИДЗ-1.2

1. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить ее: а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы (матричным методом); в) методом Гаусса.

1.1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$ **1.2.** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3. \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$ **1.4.** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7. \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9. \end{cases}$

1.6. $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5. \end{cases}$

1.7. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12. \end{cases}$

1.8. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 33, \\ 7x_1 - 5x_2 = 24, \\ 4x_1 + 11x_3 = 39. \end{cases}$

1.9. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12, \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 = -33, \\ 4x_1 + x_3 = -7. \end{cases}$

1.10. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 6, \\ 5x_2 + 4x_3 = -20, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -22. \end{cases}$

1.11. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$

1.12. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$

1.13. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 19, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$ **1.14.** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$

1.15. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 22. \end{cases}$

1.16. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 20, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15. \end{cases}$

1.17. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$

1.18. $\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -8, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -9. \end{cases}$

1.19. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 36, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -19. \end{cases}$

1.20. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -11, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16. \end{cases}$

1.21. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 9, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 19. \end{cases}$

1.22. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

1.23. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+\ \ x_3=12, \\ 2x_1+\ \ x_2+3x_3=16, \\ 3x_1+2x_2+\ \ x_3=8. \end{cases}$

1.24. $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=14, \\ 2x_1+3x_2-4x_3=-16, \\ 3x_1-2x_2-5x_3=-8. \end{cases}$

1.25. $\begin{cases} 3x_1+4x_2-2x_3=11, \\ 2x_1-\ \ x_2-\ \ x_3=\ \ 4, \\ 3x_1-2x_2+4x_3=11. \end{cases}$

1.26. $\begin{cases} x_1+5x_2-6x_3=-15, \\ 3x_1+\ \ x_2+4x_3=13, \\ 2x_1-3x_2+\ \ x_3=9. \end{cases}$

1.27. $\begin{cases} 4x_1-\ \ x_2 \qquad\quad =-6, \\ 3x_1+2x_3+5x_3=-14, \\ x_1-3x_2+4x_3=-19. \end{cases}$

1.28. $\begin{cases} 5x_1+2x_2-4x_3=-16, \\ x_1 \qquad\quad +3x_3=-6, \\ 2x_1-3x_2+\ \ x_3=9. \end{cases}$

1.29. $\begin{cases} x_1+4x_2-\ \ x_3=-9, \\ 4x_1-\ \ x_2+5x_3=-2, \\ \qquad\ \ 3x_2-7x_3=-6. \end{cases}$

1.30. $\begin{cases} 7x_1+4x_2-\ \ x_3=13, \\ 3x_1+2x_2+3x_3=3, \\ 2x_1-3x_2+\ \ x_3=-10. \end{cases}$

2. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить ее: а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы (матричным методом); в) методом Гаусса.

2.1. $\begin{cases} 3x_1+2x_2-4x_3=8, \\ 2x_1+4x_2-5x_3=11, \\ x_1-2x_2+\ \ x_3=1. \end{cases}$ 2.2. $\begin{cases} x_1+x_2+\ \ x_3=1, \\ x_1-x_2+2x_3=-5, \\ 2x_1 \qquad\ +3x_3=-2. \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} 2x_1-\ \ x_2+4x_3=15, \\ 3x_1-\ \ x_2+\ \ x_3=8, \\ 5x_1-2x_2+5x_3=0. \end{cases}$ 2.4. $\begin{cases} 3x_1-3x_2+2x_3=2, \\ 4x_1-5x_2+2x_3=1, \\ x_1-2x_2 \qquad\ =5. \end{cases}$

$$2.5.\ \begin{cases} 3x_1+2x_2-4x_3=8,\\ 2x_1+4x_2-5x_3=1,\\ 5x_1+6x_2-9x_3=2.\end{cases} \qquad 2.6.\ \begin{cases} 3x_1+x_2+2x_3=-3,\\ 2x_1+2x_2+5x_3=5,\\ 5x_1+3x_2+7x_3=1.\end{cases}$$

$$2.7.\ \begin{cases} 4x_1-7x_2-2x_3=0,\\ 2x_1-3x_2-4x_3=6,\\ 2x_1-4x_2+2x_3=2.\end{cases} \qquad 2.8.\ \begin{cases} 5x_1-9x_2-4x_3=6,\\ x_1-7x_2-5x_3=1,\\ 4x_1-2x_2+x_3=2.\end{cases}$$

$$2.9.\ \begin{cases} x_1-5x_2+x_3=3,\\ 3x_1+2x_2-x_3=7,\\ 4x_1-3x_2=1.\end{cases} \qquad 2.10.\ \begin{cases} 5x_1-5x_2-4x_3=-3,\\ x_1-x_2+5x_3=1,\\ 4x_1-4x_2-9x_3=0.\end{cases}$$

$$2.11.\ \begin{cases} 7x_1-2x_2-x_3=2,\\ 6x_1-4x_2-5x_3=3,\\ x_1+2x_2+4x_3=5.\end{cases} \qquad 2.12.\ \begin{cases} 4x_1-3x_2+x_3=3,\\ x_1+x_2-x_3=4,\\ 3x_1-4x_2+2x_3=2.\end{cases}$$

$$2.13.\ \begin{cases} 3x_1+x_2+2x_3=1,\\ 2x_1+2x_2-3x_3=9,\\ x_1-x_2+x_3=2.\end{cases} \qquad 2.14.\ \begin{cases} 6x_1+3x_2-5x_3=0,\\ 9x_1+4x_2-7x_3=3,\\ 3x_1+x_2-2x_3=5.\end{cases}$$

$$2.15.\ \begin{cases} 8x_1-x_2+3x_3=2,\\ 4x_1+x_2+6x_3=1,\\ 4x_1-2x_2-3x_3=7.\end{cases} \qquad 2.16.\ \begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3=5,\\ x_1+x_2+5x_3=6,\\ 3x_1+4x_2+9x_3=0.\end{cases}$$

$$2.17.\ \begin{cases} 2x_1-3x_2-4x_3=1,\\ 7x_1-9x_2-x_3=3,\\ 5x_1-6x_2+3x_3=7.\end{cases} \qquad 2.18.\ \begin{cases} 5x_1+6x_2-2x_3=2,\\ 2x_1+3x_2-x_3=9,\\ 3x_1+3x_2-x_3=1.\end{cases}$$

$$2.19.\ \begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3=6,\\ 5x_1-3x_2+2x_3=4,\\ -2x_1+5x_2-4x_3=0.\end{cases}$$

$$2.20.\ \begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=2,\\ 5x_1+x_2+3x_3=4,\\ 7x_1+2x_2+4x_3=1.\end{cases} \qquad 2.21.\ \begin{cases} x_1-2x_2-3x_3=3,\\ x_1+3x_2-5x_3=0,\\ 2x_1+x_2-8x_3=4.\end{cases}$$

$$2.22.\ \begin{cases} x_1-4x_2-2x_3=0,\\ 3x_1-5x_2-6x_3=2,\\ 4x_1-9x_2-8x_3=1.\end{cases} \qquad 2.23.\ \begin{cases} 4x_1+x_2-3x_3=1,\\ 3x_1+x_2-x_3=2,\\ x_1-2x_3=5.\end{cases}$$

$$2.24.\ \begin{cases} 3x_1-5x_2+3x_3=4,\\ x_1+2x_2+x_3=8,\\ 2x_1-7x_2+2x_3=1.\end{cases} \qquad 2.25.\ \begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=6,\\ 2x_1+3x_2-4x_3=2,\\ 3x_1+x_2-x_3=5.\end{cases}$$

$$2.26.\ \begin{cases} 5x_1-x_2-2x_3=1,\\ 3x_1-4x_2+x_3=7,\\ 2x_1+3x_2-3x_3=4.\end{cases} \qquad 2.27.\ \begin{cases} 2x_1+8x_2-7x_3=0,\\ 2x_1-5x_2+6x_3=1,\\ 4x_1+3x_2-x_3=7.\end{cases}$$

2.28. $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3=2, \\ x_1+5x_2-3x_3=4, \\ 2x_1-x_2+4x_3=5. \end{cases}$ **2.29.** $\begin{cases} 2x_1-3x_2+2x_3=5, \\ 3x_1+4x_2-7x_3=2, \\ 5x_1+x_2-5x_3=9. \end{cases}$

2.30. $\begin{cases} 4x_1-9x_2+5x_3=1, \\ 7x_1-4x_2+x_3=11, \\ 3x_1+5x_2-4x_3=5. \end{cases}$

3. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений.

3.1. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ 2x_1-3x_2+4x_3=0, \\ 4x_1-11x_2+10x_3=0. \end{cases}$ **3.2.** $\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3=0, \\ x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+3x_2+3x_3=0. \end{cases}$

3.3. $\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3=0, \\ 2x_1-x_2+3x_3=0, \\ 3x_1-5x_2+4x_3=0. \end{cases}$ **3.4.** $\begin{cases} 4x_1-x_2+10x_3=0, \\ x_1+2x_2-x_3=0, \\ 2x_1-3x_2+4x_3=0. \end{cases}$

3.5. $\begin{cases} 2x_1+5x_2+x_3=0, \\ 4x_1+6x_2+3x_3=0, \\ x_1-x_2-2x_3=0. \end{cases}$ **3.6.** $\begin{cases} 3x_1-x_2-3x_3=0, \\ 2x_1+3x_2+x_3=0, \\ x_1+x_2+3x_3=0. \end{cases}$

3.7. $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=0, \\ 2x_1+x_2-3x_3=0, \\ 3x_1+2x_3=0. \end{cases}$ **3.8.** $\begin{cases} 2x_1-x_2-5x_3=0, \\ x_1+2x_2-3x_3=0, \\ 5x_1+x_2+4x_3=0. \end{cases}$

3.9. $\begin{cases} 5x_1-5x_2+4x_3=0, \\ 3x_1+x_2+3x_3=0, \\ x_1+7x_2-x_3=0. \end{cases}$ **3.10.** $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3=0, \\ 2x_1+5x_2-2x_3=0, \\ x_1+x_2+5x_3=0. \end{cases}$

3.11. $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=0, \\ 3x_1-x_2+2x_3=0, \\ x_1+3x_2+4x_3=0. \end{cases}$ **3.12.** $\begin{cases} x_1-2x_2-x_3=0, \\ 2x_1+3x_2+2x_3=0, \\ 3x_1-2x_2+5x_3=0. \end{cases}$

3.13. $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=0, \\ 3x_1-2x_2+4x_3=0, \\ x_1-5x_2+3x_3=0. \end{cases}$ **3.14.** $\begin{cases} 4x_1+x_2+3x_3=0, \\ 8x_1-x_2+7x_3=0, \\ 2x_1+4x_2-5x_3=0. \end{cases}$

3.15. $\begin{cases} x_1+4x_2-3x_3=0, \\ 2x_1+5x_2+x_3=0, \\ x_1-7x_2+2x_3=0. \end{cases}$ **3.16.** $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=0, \\ 3x_1+x_2+2x_3=0, \\ 2x_1-3x_2+5x_3=0. \end{cases}$

3.17. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0, \\ 2x_1-x_2-x_3=0, \\ 3x_1+3x_2+2x_3=0. \end{cases}$ **3.18.** $\begin{cases} 3x_1+2x_2=0, \\ x_1-x_2+2x_3=0, \\ 4x_1-2x_2+5x_3=0. \end{cases}$

3.19. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$ 3.20. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

3.21. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0, \\ 5x_1 - 8x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$ 3.22. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

3.23. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$ 3.24. $\begin{cases} 7x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

3.25. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$ 3.26. $\begin{cases} 7x_1 - 6x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

3.27. $\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$ 3.28. $\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

3.29. $\begin{cases} 8x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$ 3.30. $\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

4. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений.

4.1. $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 8x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$ 4.2. $\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

4.3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$ 4.4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

4.5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$ 4.6. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0, \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

4.7. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$ 4.8. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

4.9. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$ 4.10. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ 7x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

4.11. $\begin{cases} 3x_1-2x_2+\ \ x_3=0, \\ 2x_1+3x_2-5x_3=0, \\ 5x_1+\ \ x_2-4x_3=0. \end{cases}$ **4.12.** $\begin{cases} 5x_1+\ \ x_2+2x_3=0, \\ 3x_1+2x_2-3x_3=0, \\ 2x_1-\ \ x_2+\ \ x_3=0. \end{cases}$

4.13. $\begin{cases} x_1+2x_2-5x_3=0, \\ x_1-2x_2-4x_3=0, \\ 2x_1 \qquad -9x_3=0. \end{cases}$ **4.14.** $\begin{cases} x_1-3x_2+5x_3=0, \\ x_1+2x_2-3x_3=0, \\ 2x_1-\ \ x_2+2x_3=0. \end{cases}$

4.15. $\begin{cases} 2x_1-\ \ x_2+2x_3=0, \\ 3x_1+2x_2-3x_3=0, \\ 5x_1+\ \ x_2-\ \ x_3=0. \end{cases}$ **4.16.** $\begin{cases} 2x_1-\ \ x_2+3x_3=0, \\ x_1-3x_2+2x_3=0, \\ x_1+2x_2+\ \ x_3=0. \end{cases}$

4.17. $\begin{cases} x_1-3x_2-2x_3=0, \\ 3x_1-\ \ x_2+4x_3=0, \\ 2x_1-2x_2+\ \ x_3=0. \end{cases}$ **4.18.** $\begin{cases} 5x_1+\ \ x_2-2x_3=0, \\ 3x_1-\ \ x_2+\ \ x_3=0, \\ 2x_1+2x_2-3x_3=0. \end{cases}$

4.19. $\begin{cases} 3x_1+2x_2-3x_3=0, \\ 2x_1-3x_2+\ \ x_3=0, \\ 5x_1-\ \ x_2-2x_3=0. \end{cases}$ **4.20.** $\begin{cases} 4x_1-\ \ x_2+5x_3=0, \\ 2x_1-3x_2+2x_3=0, \\ 2x_1+2x_2+3x_3=0. \end{cases}$

4.21. $\begin{cases} x_1+5x_2+\ \ x_3=0, \\ 2x_1-3x_2-7x_3=0, \\ 3x_1+2x_2-6x_3=0. \end{cases}$ **4.22.** $\begin{cases} 3x_1+4x_2-\ \ x_3=0, \\ x_1-5x_2+2x_3=0, \\ 4x_1-\ \ x_2+\ \ x_3=0. \end{cases}$

4.23. $\begin{cases} 2x_1+4x_2-3x_3=0, \\ x_1-3x_2+2x_3=0, \\ 3x_1+\ \ x_2-\ \ x_3=0. \end{cases}$ **4.24.** $\begin{cases} 7x_1-6x_2-\ \ x_3=0, \\ 3x_1-3x_2+4x_3=0, \\ 4x_1-3x_2-5x_3=0. \end{cases}$

4.25. $\begin{cases} 5x_1-3x_2+2x_3=0, \\ 2x_1+4x_2-3x_3=0, \\ 3x_1-7x_2+5x_3=0. \end{cases}$ **4.26.** $\begin{cases} x_1-8x_2+7x_3=0, \\ 3x_1+5x_2-4x_3=0, \\ 4x_1-3x_2+3x_3=0. \end{cases}$

4.27. $\begin{cases} 5x_1+8x_2-5x_3=0, \\ 7x_1+5x_2-\ \ x_3=0, \\ 2x_1-3x_2+4x_3=0. \end{cases}$ **4.28.** $\begin{cases} 5x_1+\ \ x_2-6x_3=0, \\ 4x_1+3x_2-7x_3=0, \\ x_1-2x_2+\ \ x_3=0. \end{cases}$

4.29. $\begin{cases} 2x_1-\ \ x_2+4x_3=0, \\ 7x_1-5x_2+3x_3=0, \\ 5x_1-4x_2-\ \ x_3=0. \end{cases}$ **4.30.** $\begin{cases} 2x_1+2x_2-\ \ x_3=0, \\ 5x_1+4x_2-6x_3=0, \\ 3x_1+2x_2-5x_3=0. \end{cases}$

Решение типового варианта

1. Дана система линейных неоднородных алгебраических уравнений

$$\left.\begin{aligned} x_1+5x_2-\ \ x_3&=3, \\ 2x_1+4x_2-3x_3&=2, \\ 3x_1-\ \ x_2-3x_3&=-7. \end{aligned}\right\}$$

Проверить, совместна ли эта система, и в случае совместности решить ее: а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы (матричным методом); в) методом Гаусса.

▶ Совместность данной системы проверим по теореме Кронекера — Капелли. С помощью элементарных преобразований найдем ранг матрицы

$$A=\begin{bmatrix}1 & 5 & -1\\ 2 & 4 & -3\\ 3 & -1 & -3\end{bmatrix}$$

данной системы и ранг расширенной матрицы

$$B=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 5 & -1 & 3\\ 2 & 4 & -3 & 2\\ 3 & -1 & -3 & -7\end{array}\right].$$

Для этого умножим первую строку матрицы B на -2 и сложим со второй, затем умножим первую строку на -3 и сложим с третьей, поменяем местами второй и третий столбцы. Получим

$$B=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 5 & -1 & 3\\ 2 & 4 & -3 & 2\\ 3 & -1 & -3 & -7\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 5 & -1 & 3\\ 0 & -6 & -1 & -4\\ 0 & -16 & 0 & -16\end{array}\right]\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 5 & 3\\ 0 & -1 & -6 & -4\\ 0 & 0 & -16 & -16\end{array}\right].$$

Следовательно, $\operatorname{rang} A=\operatorname{rang} B=3$ (т. е. числу неизвестных). Значит, исходная система совместна и имеет единственное решение.

а) По формулам Крамера (1.17)

$$x_1=\Delta_3^{(1)}/\Delta_3,\ x_2=\Delta_3^{(2)}/\Delta_3,\ x_3=\Delta_3^{(3)}/\Delta_3,$$

где

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & 5 & -1\\ 2 & 4 & -3\\ 3 & -1 & -3\end{vmatrix}=-16;$$

$$\Delta_3^{(1)}=\begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix}=64;$$

$$\Delta_3^{(2)}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & -7 & -3 \end{vmatrix}=-16;$$

$$\Delta_3^{(2)}=\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -7 \end{vmatrix}=32,$$

находим: $x_1=64/(-16)=-4$, $x_2=-16/(-16)=1$, $x_3=32/(-16)=-2$;

б) Для нахождения решения системы с помощью обратной матрицы запишем систему уравнений в матричной форме $AX=\tilde{B}$. Решение системы в матричной форме имеет вид $x=A^{-1}\tilde{B}$. По формуле (1.11) находим обратную матрицу A^{-1} (она существует, так как $\Delta_3=\det A=$ $=-16\neq 0$):

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}=-15,\quad A_{21}=-\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}=16,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}=-11,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}=-3,\quad A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}=0,$$

$$A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=1,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-14,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=16,$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=-6,$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-16}\begin{bmatrix} -15 & 16 & -11 \\ -3 & 0 & 1 \\ -14 & 16 & -6 \end{bmatrix}.$$

Решение системы:

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\frac{1}{-16}\begin{bmatrix} -15 & 16 & -11 \\ -3 & 0 & 1 \\ -14 & 16 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}=$$

$$= \begin{bmatrix} (-45+32+77)/(-16) \\ (-9-7)/(-16) \\ (-42+32+42)/(-16) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Итак, $x_1 = -4$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$;

в) Решим систему методом Гаусса. Исключим x_1 из второго и третьего уравнений. Для этого первое уравнение умножим на 2 и вычтем из второго, затем первое уравнение умножим на 3 и вычтем из третьего:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 5x_2 - x_3 &= 3, \\ -6x_2 - x_3 &= -4, \\ -16x_2 \quad &= -16. \end{aligned}\right\}$$

Из полученной системы находим $x_1 = -4$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$. ◀

2. Дана система линейных неоднородных алгебраических уравнений

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 2, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 &= 1, \\ 5x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= 4. \end{aligned}\right\}$$

Проверить, совместна ли эта система, и в случае совместности решить ее: а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы (матричным методом); в) методом Гаусса.

▶ Проверяем совместность системы с помощью теоремы Кронекера — Капелли. В расширенной матрице

$$B = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & -2 & 4 \end{array}\right]$$

меняем третий и первый столбцы местами, умножаем первую строку на 3 и прибавляем ко второй, умножаем первую строку на 2 и прибавляем к третьей, из второй строки вычитаем третью:

$$B = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & -2 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & 5 & 4 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & 9 & 7 \\ 0 & -8 & 9 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Теперь ясно, что $\operatorname{rang} A = 2$, $\operatorname{rang} B = 3$. Согласно теореме Кронекера — Капелли, из того, что $\operatorname{rang} A \neq \neq \operatorname{rang} B$, следует несовместность исходной системы. ◀

3. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

▶ Определитель системы

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 11 \neq 0,$$

поэтому система имеет единственное нулевое решение: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. ◀

4. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - x_3 &= 0, \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 0, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

▶ Так как

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

то система имеет бесчисленное множество решений. Поскольку $\operatorname{rang} A = 2$, $n = 3$, возьмем любые два уравнения системы (например, первое и второе) и найдем ее решение. Имеем:

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - x_3 &= 0, \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Так как определитель из коэффициентов при неизвестных x_1 и x_2 не равен нулю, то в качестве базисных неизвестных возьмем x_1 и x_2 (хотя можно брать и другие пары неизвестных) и переместим члены с x_3 в правые части уравнений:

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &= x_3, \\ x_1 - 3x_2 &= -5x_3. \end{aligned}\right\}$$

Решаем последнюю систему по формулам Крамера (1.17):

$$x_1 = \Delta_2^{(1)}/\Delta_2, \quad x_2 = \Delta_2^{(2)}/\Delta_2,$$

где

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 4 = -13;$$

$$\Delta_2^{(1)} = \begin{vmatrix} x_3 & 4 \\ -5x_3 & -3 \end{vmatrix} = -3x_3 + 20x_3 = 17x_3;$$

$$\Delta_2^{(2)} = \begin{vmatrix} 3 & x_3 \\ 1 & -5x_3 \end{vmatrix} = -16x_3.$$

Отсюда находим, что $x_1 = -17x_3/13$, $x_2 = 16x_3/13$. Полагая $x_3 = 13k$, где k — произвольный коэффициент пропорциональности, получаем решение исходной системы: $x_1 = -17k$, $x_2 = 16k$, $x_3 = 13k$. ◀

1.6. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ К ГЛ. 1

1. Доказать, что

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).$$

2. Вычислить определитель n-го порядка:

а) $$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1+a & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1+a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+a & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1+a \end{vmatrix};$$

б) $$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix};$$

в) $\begin{vmatrix} a+1 & x & x & \dots & x & x \\ 1 & a & x & \dots & x & x \\ 1 & 0 & a & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a & x \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ b & x & 0 & \dots & 0 \\ b & 0 & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 3 & 5 & 7 & -5 \\ 2 & 3 & 7 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

(*Ответ*: а) 1; б) $(x^{n+1}-1)(x-1)$; в) $a^n+(a-x)^{n-1}$; г) $x^n-(n-1)abx^{n-2}$; д) 42; е) 168.)

3. Решить данную систему уравнений при всех возможных значениях параметра t:

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + 3z &= -7, \\ x + 2y - 6z &= t, \\ tx + 5y - 15z &= 8. \end{aligned}\right\}$$

(*Ответ*: при $t \neq -1$ и $t \neq 5$ система несовместна; если $t=5$, то $x=-9/5$, $y=(15a+17)/5$, $z=a$; если $t=-1$, то $x=-3$, $y=3a+1$, $z=a$, где a — произвольное число.)

4. При каких значениях λ однородная система уравнений

$$\left.\begin{aligned} -\lambda x_1 + x_2 + \dots + x_n &= 0, \\ x_1 - \lambda x_2 + \dots + x_n &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ x_1 + x_2 + \dots - \lambda x_n &= 0 \end{aligned}\right\}$$

имеет ненулевые решения? (*Ответ*: $\lambda = n-1$, $\lambda=-1$.)

5. Показать, что если одна из квадратных матриц n-го порядка A и B — особенная, то их произведение AB — также особенная матрица.

6. Найти

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^2 \quad \left(\textit{Ответ}: \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}. \right)$$

7. Решить систему матричных уравнений

$$\left.\begin{aligned} X+\ \ Y&=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ 2X+3Y&=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}\right\}$$

$\left(\textit{Ответ}:\ X=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ Y=\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.\right)$

8. Установить число линейно независимых уравнений в данной системе и найти ее общее решение:

$$\left.\begin{aligned} x_1+\ x_2-\ x_3-2x_4-2x_5&=0, \\ 2x_1+3x_2-2x_3-5x_4-4x_5&=0, \\ x_1-\ x_2-\ x_3\qquad\ \ -2x_5&=0, \\ x_1-2x_2-\ x_3+\ x_4-2x_5&=0. \end{aligned}\right\}$$

(*Ответ*: $x_1=x_3+x_4+2x_5$, $x_2=x_4$.)

9. Привести к каноническому виду уравнение линии $x^2+y^2+3xy+x+4y=0$ и указать соответствующее преобразование системы координат. $\left(\textit{Ответ}:\ -\frac{5}{2}x'^2+\right.$ $\left.+\frac{1}{2}y'^2=1,\ x=-2+\frac{x'+y'}{\sqrt{2}},\ y=1+\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}.\right)$

10. Убедиться, что линия, определяемая уравнением $9x^2-6xy+y^2-x-2y-14=0$, является параболой.

11. Доказать справедливость равенства

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \operatorname{tg}\alpha & \operatorname{tg}\beta & \operatorname{tg}\gamma \\ \operatorname{tg}^2\alpha & \operatorname{tg}^2\beta & \operatorname{tg}^2\gamma \end{vmatrix}=\frac{\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma}.$$

12. Решить уравнения:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}=0$; б) $\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0.$

(*Ответ*: а) $=-3$; б) $x_1=-10$, $x_2=2$.)

13. Решить неравенства:

а) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}<1$; б) $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix}>0.$

(*Ответ*: а) $x>3{,}5$; б) $-6<x<-4$.)

14. Доказать, что если система уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,\\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0,\\ a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0,\\ a_4x+b_4y+c_4z+d_4=0 \end{aligned}\right\}$$

совместна, то

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3\\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}=0.$$

15. Исследовать данную систему уравнений и найти ее общее решение в зависимости от значения параметра λ:

$$\left.\begin{aligned} 5x_1-3x_2+2x_3+4x_4=3,\\ 4x_1-2x_2+3x_3+7x_4=1,\\ 3x_1-6x_2-x_3-5x_4=9,\\ 7x_1-3x_2+7x_3+17x_4=\lambda. \end{aligned}\right\}$$

(*Ответ*: при $\lambda\neq 0$ система несовместна; при $\lambda=0$ система совместна и ее общее решение: $x_1=(-5x_3-13x_4-$ $-3)/2$, $x_2=(-7x_3-19x_4-7)/2$.)

16. Указать, при каких λ данная система уравнений имеет решения или несовместна:

$$\left.\begin{aligned} \lambda x_1+x_2+x_3+x_4=1,\\ x_1+\lambda x_2+x_3+x_4=1,\\ x_1+x_2+\lambda x_3+x_4=1,\\ x_1+x_2+x_3+\lambda x_4=1. \end{aligned}\right\}$$

(*Ответ*: если $\lambda=-3$, то система несовместна; если $\lambda\neq 1$, $\lambda\neq -3$, то $x_1=x_2=x_3=x_4=1/(\lambda+3)$; если $\lambda=1$, то решения определяются одним уравнением $\sum\limits_{i=1}^{4} x_i=1$.)

17. Найти решения системы при всех значениях λ:

$$\left.\begin{aligned} \lambda x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0,\\ x_1+x_2+\lambda x_3=0. \end{aligned}\right\}$$

(*Ответ*: если $(\lambda+2)(\lambda-1)\neq 0$, то $x_1=x_2=x_3=0$; если $\lambda=-2$, то $x_1=x_2=x_3$; если $\lambda=1$, то решения определяются одним уравнением $x_1+x_2+x_3=0$.)

18. Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы сумма двух решений системы линейных уравнений также была ее решением. (*Ответ*: однородность системы.)

19. Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы произведение решения системы линейных уравнений и числа $\lambda \neq 1$ также было ее решением. (*Ответ*: однородность системы.)

20. При каком условии некоторая линейная комбинация любых решений данной неоднородной системы линейных уравнений будет решением этой системы? (*Ответ*: сумма коэффициентов линейной комбинации равна 1.)

2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

2.1. ВЕКТОРЫ. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ. ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА НА ОСЬ. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

Вектором называется направленный отрезок. Если начало вектора находится в точке A, а конец — в точке B, то вектор обозначается $\overrightarrow{AB}$. Если же начало и конец вектора не указываются, то его обозначают строчной буквой латинского алфавита $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, ... На рисунке направление вектора изображается стрелкой (рис. 2.1).

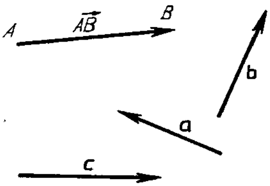


Рис. 2.1

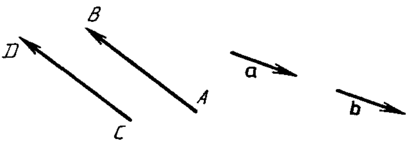


Рис. 2.2

Через $\overrightarrow{BA}$ обозначают вектор, направленный противоположно вектору $\overrightarrow{AB}$. Вектор, у которого начало и конец совпадают, называется *нулевым* и обозначается $\mathbf{0}$. Его направление является неопределенным. Другими словами, такому вектору можно приписать любое направление. *Длиной* или *модулем вектора* называется расстояние между его началом и концом. Записи $|\overrightarrow{AB}|$ (или AB) и $|\mathbf{a}|$ (или a) обозначают модули векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\mathbf{a}$ соответственно.

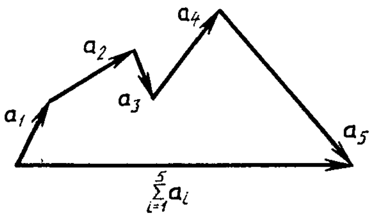
Векторы называются *коллинеарными*, если они параллельны одной прямой, и *компланарными*, если они параллельны одной плоскости.

Два вектора называются *равными*, если они коллинеарны, одинаково направлены и равны по длине. На рис. 2.2 изображены пары равных векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. Из определения равенства векторов следует, что векторы можно переносить параллельно самим себе, не нарушая их равенства. Такие векторы называются *свободными*.

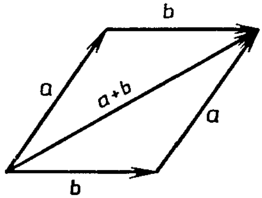
К линейным операциям над векторами относятся: умножение вектора на число и сложение векторов.

Произведением вектора $\mathbf{a}$ *и числа* α называется вектор, обозначаемый $\alpha\mathbf{a}$ (или $\mathbf{a}\alpha$), модуль которого равен $|\alpha||\mathbf{a}|$, а направление совпадает с направлением вектора $\mathbf{a}$, если $\alpha > 0$, и противоположно ему, если $\alpha < 0$.

Суммой векторов $\mathbf{a}_i$ $(i=\overline{1, n})$ называется вектор, обозначаемый $\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\ldots+\mathbf{a}_n=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{a}_i$, начало которого находится в начале первого вектора $\mathbf{a}_1$, а конец — в конце последнего вектора $\mathbf{a}_n$ ломаной лннии, составленной нз последовательностн слагаемых векторов (рнс. 2.3). Это



Р и с. 2.3

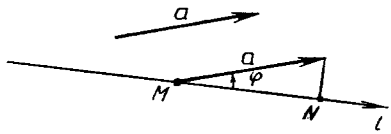


Р и с. 2.4

правнло сложения называется *правилом замыкания ломаной*. В случае суммы двух векторов оно равноснльно *правилу параллелограмма* (рнс. 2.4).

Прямая l с заданным на ней направлением, прнннмаемым за положнтельное, называется *осью* l.

Проекцией вектора $\mathbf{a}$ *на ось* l называется чнсло, обозначаемое $\text{пр}_l\,\mathbf{a}$ и равное $|\mathbf{a}|\cos\varphi$, где φ $(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$ — угол между положительным направлением оси l н направлением вектора $\mathbf{a}$, т. е. по определению $\text{пр}_l\,\mathbf{a}=|\mathbf{a}|\cos\varphi$. Геометрически проекцию вектора $\mathbf{a}$ можно охарактернзовать длиной отрезка MN, взятой со знаком «+», если $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$, и со знаком «—», если $\pi/2<\varphi\leqslant\pi$ (рнс. 2.5). Прн $\varphi=\pi/2$ отрезок MN превращается в точку н $\text{пр}_l\,\mathbf{a}=0$.



Р и с. 2.5

Координатами вектора $\mathbf{a}$ называются его проекцнн на осн коордннат Ox, Oy, Oz. Они обозначаются соответственно буквами x, y, z. Запнсь $\mathbf{a}=(x, y, z)$ означает, что вектор $\mathbf{a}$ нмеет координаты x, y, z.

Для равенства векторов необходнмо н достаточно, чтобы их соответствующие коордннаты былн равны. Если $M_1(x_1, y_1, z_1)$ н $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$.

Линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_i$ называется вектор $\mathbf{a}$, определяемый по формуле $\mathbf{a}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mathbf{a}_i$, где λ_i — некоторые числа. Если векторы $\mathbf{a}_i$ определиются коордннатамн x_i, y_i, z_i, то для коордннат вектора $\mathbf{a}$ имеем: $\mathbf{a}=\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i,\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i,\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i z_i\right)$.

Линейные операции над векторами удовлетворяют свойствам, по форме аналогичным свойствам умножения н сложения чнсел. Например,

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a},\ (\alpha+\beta)\mathbf{a}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{a},\ \alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\alpha\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b},$$
$$\mathbf{a}+(-1)\mathbf{a}=\mathbf{a}-\mathbf{a}=0,\ 1\mathbf{a}=\mathbf{a},\ 0\mathbf{a}=\mathbf{0}$$

н т. д.

Если для системы n векторов $\mathbf{a}_i$ равенство

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mathbf{a}_i=\mathbf{0} \qquad (2.1)$$

верно только в случае, когда $\lambda_i=0$, то эта система называется *линейно независимой*. Если же равенство (2.1) выполняется для λ_i, хотя бы одно из которых отлично от нуля, то система векторов $\mathbf{a}_i$ называется *линейно зависимой*. Например, любые коллинеарные векторы, три компланарных вектора, четыре и более векторов в трехмерном пространстве всегда линейно завнснмы.

Три упорядоченных лннейно незавнснмых вектора $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ в пространстве называются *базисом*. Упорядоченная тройка некомпланарных векторов всегда образует базис. Любой вектор $\mathbf{a}$ в пространстве можно разложить по базнсу $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, т. е. представить $\mathbf{a}$ в виде линейной комбннацин базисных векторов: $\mathbf{a}=x\mathbf{e}_1+y\mathbf{e}_2+z\mathbf{e}_3$, где x, y, z являются координатами вектора $\mathbf{a}$ в базнсе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Базис называется *ортонормированным*, еслн его векторы взанмно перпендикулярны и имеют еднннчную длину. Обозначают такой базнс $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$.

Пример 1. Даны векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ (рис. 2.6, *а*). Изобразнть на рисунке их линейную комбннацию $-2\mathbf{a}+\frac{1}{3}\mathbf{b}+4\mathbf{c}$.

▶ Выбираем на плоскостн пронзвольную точку O н откладываем от нее вектор $-2\mathbf{a}$ (рис. 2.6, б). Затем от конца вектора $-2\mathbf{a}$ откладываем

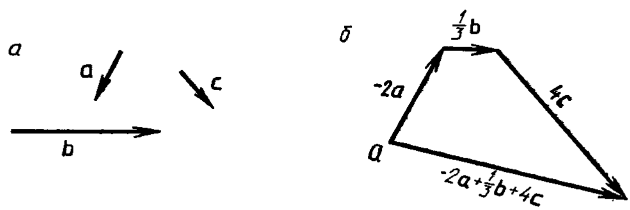


Рис. 2.6

вектор $\frac{1}{3}\mathbf{b}$ и, наконец, строим вектор $4\mathbf{c}$, выходящий нз конца вектора $\frac{1}{3}\mathbf{b}$. Искомая линейная комбинация изображается вектором, замыкающим полученную ломаную, начало которого находится в точке O. ◀

Пример 2. Векторы заданы в ортонормнроваином базисе $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ координатами: $\mathbf{a}=(2,\ -1,\ 8)$, $\mathbf{e}_1=(1,\ 2,\ 3)$, $\mathbf{e}_2=(1,\ -1,\ -2)$, $\mathbf{e}_3=(1,\ -6,\ 0)$. Убедиться, что тройка $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ образует базис, и найти координаты вектора $\mathbf{a}$ в этом базисе.

▶ Если определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -6 & 0 \end{vmatrix},$$

составленный из коордннат векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, не равен 0, то векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ линейно независнмы и, следовательно, образуют базис. Убеждаемся, что $\Delta = -6 - 4 + 3 - 12 = -19 \neq 0$. Такнм образом, тройка $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ — базис.

Обозначим координаты вектора $\mathbf{a}$ в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ через x, y, z. Тогда $\mathbf{a} = (x, y, z) = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$. Так как по условию $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 8\mathbf{k}$, $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{i} - 6\mathbf{j}$, то из равенства $\mathbf{a} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$ следует, что $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 8\mathbf{k} = x\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + 3x\mathbf{k} + y\mathbf{i} - y\mathbf{j} - 2y\mathbf{k} + z\mathbf{i} - 6z\mathbf{j} = (x + y + z)\mathbf{i} + (2x - y - 6z)\mathbf{j} + (3x - 2y)\mathbf{k}$. Как видно, вектор в левой части полученного равенства равен вектору в правой его части, а это возможно только в случае равенства их соответствующих координат. Отсюда получаем систему для нахождения неизвестных x, y, z:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 2, \\ 2x - y - 6z &= -1, \\ 3x - 2y \quad &= 8. \end{aligned}\right\}$$

Ее решенне: $x = 2$, $y = -1$, $z = 1$.

Итак, $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 = (2, -1, 1)$. ◀

АЗ-2.1

1. По данным векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ построить следующие их линейные комбинации: а) $2\mathbf{a} + \mathbf{b}$; б) $\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$; в) $\frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}$; г) $-3\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b}$.

2. Векторы $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{CA} = \mathbf{b}$ служат сторонами треугольника ABC. Выразить через $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ векторы $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CP}$, совпадающие с медианами треугольника ABC. (*Ответ*: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\mathbf{a} + \mathbf{c}$ или $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\mathbf{c} - \mathbf{b})$, $\overrightarrow{BN} = \mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}$ или $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{c})$, $\overrightarrow{CP} = \mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}$ или $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a})$.)

3. В треугольной пирамиде $SABC$ известны векторы $\overrightarrow{SA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{SB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{SC} = \mathbf{c}$. Найти вектор $\overrightarrow{SO}$, если точка O является центром масс треугольника ABC. (*Ответ*: $\overrightarrow{SO} = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$.)

4. Дана прямоугольная трапеция $ABCD$, длины оснований AD и BC которой соответственно равны 4 и 2, а угол D равен 45°. Найти проекции векторов $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ на ось l, определяемую вектором $\overrightarrow{CD}$. (*Ответ*: $\text{пр}_l\overrightarrow{AD}=2\sqrt{2}$, $\text{пр}_l\overrightarrow{AB}=-\sqrt{2}$, $\text{пр}_l\overrightarrow{BC}=\sqrt{2}$, $\text{пр}_l\overrightarrow{AC}=0$.)

5. Вектор $\mathbf{a}$ составляет с координатными осями Ox и Oy углы $\alpha=60°$, $\beta=120°$. Вычислить его координаты, если $|\mathbf{a}|=2$. (*Ответ*: $\mathbf{a}=(1,\ -1,\ \sqrt{2})$ или $\mathbf{a}=(1,\ -1,\ -\sqrt{2})$.)

6. Даны векторы $\mathbf{a}=(3,\ -2,\ 6)$ и $\mathbf{b}=(-2,\ 1,\ 0)$. Найти координаты векторов: $2\mathbf{a}-\frac{1}{3}\mathbf{b}$; $\frac{1}{3}\mathbf{a}-\mathbf{b}$; $2\mathbf{a}+3\mathbf{b}$. (*Ответ*: $(20/3,\ -13/3,\ 12)$; $(3,\ -5/3,\ 2)$; $(0,\ -1,\ 12)$.)

7. Найти координаты единичного вектора $\mathbf{e}$, направленного по биссектрисе угла, образуемого векторами $\mathbf{a}=(2,\ -3,\ 6)$ и $\mathbf{b}=(-1,\ 2,\ -2)$. $\left(\text{\textit{Ответ}: } \mathbf{e}=\left(-\frac{1}{\sqrt{42}},\ \frac{5}{\sqrt{42}},\ \frac{4}{\sqrt{42}}\right)\right.$.)

8. В некотором базисе векторы заданы координатами: $\mathbf{a}=(1,\ 1,\ 2)$, $\mathbf{e}_1=(2,\ 2,\ -1)$, $\mathbf{e}_2=(0,\ 4,\ 8)$, $\mathbf{e}_3=(-1,\ -1,\ 3)$. Убедиться, что векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ образуют базис, и найти в нем координаты вектора $\mathbf{a}$. (*Ответ:* $\mathbf{a}=(1,\ 0,\ 1)$.)

Самостоятельная работа

1. Найти длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}=(3,\ -5,\ 8)$ и $\mathbf{b}=(-1,\ 1,\ -4)$. (*Ответ:* $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=6$, $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|=14$.)

2. Векторы $\overrightarrow{AB}=(2,\ 6,\ -4)$ и $\overrightarrow{AC}=(4,\ 2,\ -2)$ определяют стороны треугольника ABC. Найти длину вектора $\overrightarrow{CD}$, совпадающего с медианой, проведенной из вершины C. (*Ответ*: $|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{10}$.)

3. Найти координаты вектора $\mathbf{c}$, направленного по биссектрисе угла между векторами $\mathbf{a}=(-3,\ 0,\ 4)$ и $\mathbf{b}=(5,\ 2,\ 14)$. (*Ответ*: $\mathbf{c}=\lambda(-2,\ 1,\ 13)$, $\lambda>0$.)

2.2. ДЕЛЕНИЕ ОТРЕЗКА В ДАННОМ ОТНОШЕНИИ. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Отношением, в котором точка M делит отрезок M_1M_2, называется число λ, удовлетворяющее равенству $\overrightarrow{M_1M}=\lambda\overrightarrow{MM_2}$. Связь между координатами делящей точки $M(x, y, z)$, точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и числом λ задается равенствами:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Деление отрезка M_1M_2 будет *внутренним*, если $\lambda>0$, и *внешним*, если $\lambda<0$. При $\lambda=1$ точка M будет серединой отрезка M_1M_2, $\lambda\neq-1$.

Пример 1. Концы однородного стержня находятся в точках $M_1(3, -5, 8)$ и $M_2(7, 13, -6)$. Найти координаты центра масс стержня.

▶ Центр масс $C(x, y, z)$ однородного стержня находится в его середине. Поэтому $\lambda=1$ и

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{3+7}{2}=5,\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{-5+13}{2}=4,$$

$$z=\frac{z_1+z_2}{2}=\frac{8-6}{2}=1. \blacktriangleleft$$

Скалярным произведением двух векторов **a** *и* **b** называется число, обозначаемое $\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ и равное произведению модулей данных векторов на косинус угла между ними:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}),$$

где $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$ обозначает меньший угол между направлениями векторов **a** и **b**. Отметим, что всегда $0\leqslant(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})\leqslant\pi$.

Перечислим *основные свойства скалярного произведения векторов:*

1) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$;
2) $(\lambda\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot(\lambda\mathbf{b})$;
3) $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$;
4) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}|\,\text{пр}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}=|\mathbf{b}|\,\text{пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$;
5) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=|\mathbf{a}|^2$;
6) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0\Leftrightarrow\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$.

Если $\mathbf{a}=(x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{b}=(x_2, y_2, z_2)$, то в базисе **i**, **j**, **k**:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2,$$

$$|\mathbf{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2},\quad |\mathbf{b}|=\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}.$$

Обозначим через α, β, γ углы, которые образует вектор $\mathbf{a}=(x_1, y_1, z_1)$ с осями координат Ox, Oy, Oz соответственно (или, что то же самое, с векторами **i**, **j**, **k**). Тогда справедливы следующие формулы:

$$\cos\alpha=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}}{|\mathbf{a}|}=\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}},\quad \cos\beta=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{j}}{|\mathbf{a}|}=\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{k}}{|\mathbf{a}|}=\frac{z_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}},\quad \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

Величины $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются *направляющими косинусами вектора* **a**.

Работа A силы **F**, произведенная этой силой при перемещении тела на пути $|\mathbf{s}|$, определяемом вектором **s**, вычисляется по формуле

$$A=\mathbf{F}\cdot\mathbf{s}=|\mathbf{F}||\mathbf{s}|\cos(\widehat{\mathbf{F}, \mathbf{s}}).$$

Пример 2. Вычислить работу равнодействующей $\mathbf{F}$ сил $\mathbf{F}_1 = (3, -4, 5)$, $\mathbf{F}_2 = (2, 1, -4)$, $\mathbf{F}_3 = (-1, 6, 2)$, приложенных к материальной точке, которая под их действием перемещается прямолинейно из точки $M_1(4, 2, -3)$ в точку $M_2(7, 4, 1)$.

▶ Так как $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = (4, 3, 3)$, $\overrightarrow{M_1M_2} = \mathbf{s} = (3, 2, 4)$, то $A = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = 4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 30$. ◀

АЗ-2.2

1. Даны две вершины $A(2, -3, -5)$, $B(-1, 3, 2)$ параллелограмма $ABCD$ и точка пересечения его диагоналей $E(4, -1, 7)$. Найти координаты остальных вершин параллелограмма. (*Ответ*: $C(6, 1, 19)$, $D(9, -5, 12)$.)

2. Отрезок, ограниченный точками $A(-1, 8, -3)$ и $B(9, -7, -2)$, разделен точками M_1, M_2, M_3, M_4 на пять равных частей. Найти координаты точек M_1 и M_3. (*Ответ*: $M_1(1, 5, -2)$, $M_3(5, -1, 0)$.)

3. Определить координаты концов A и B отрезка, который точками $C(2, 0, 2)$ и $D(5, -2, 0)$ разделен на три равные части. (*Ответ*: $A(-1, 2, 4)$, $B(8, -4, -2)$.)

4. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ образуют угол $\varphi = 2\pi/3$, и $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 4$. Вычислить: $\mathbf{a}^2$; $\mathbf{b}^2$; $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2$; $(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2$; $(3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + 2\mathbf{b})$. (*Ответ*: 9; 16; 13; 37; -61.)

5. Даны векторы $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, для которых $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 4$, $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = 60°$. Вычислить угол φ между медианой $\overrightarrow{OM}$ и стороной $\overrightarrow{OA}$ треугольника AOB. (*Ответ*: $\cos\varphi = 2/\sqrt{7}$, $\varphi \approx 41°$.)

6. Определить работу силы $\mathbf{F}$, $|\mathbf{F}| = 15$ Н, которая, действуя на тело, вызывает его перемещение на 4 м под углом $\pi/3$ к направлению действия силы. (*Ответ*: 30 Дж.)

7. Даны векторы $\mathbf{a} = (4, -2, -4)$, $\mathbf{b} = (6, -3, 2)$. Вычислить: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$; $\mathbf{a}^2$; $\mathbf{b}^2$; $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2$; $(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2$; $(2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + 2\mathbf{b})$. (*Ответ*: 22; 36; 49; 129; 41; -200.)

8. Даны вершины треугольника ABC: $A(-1, -2, 4)$, $B(-4, -2, 0)$, $C(3, -2, 1)$. Вычислить внешний угол при вершине B. (*Ответ*: $3\pi/4$.)

9. Под действием силы $\mathbf{F} = (5, 4, 3)$ тело переместилось из начала вектора $\mathbf{s} = (2, 1, -2)$ в его конец. Вычислить работу A силы $\mathbf{F}$ и угол φ между направлениями силы и перемещения. (*Ответ*: $A = 8$, $\cos\varphi \approx 0{,}38$, $\varphi \approx 1{,}18$ рад или $\varphi \approx 67°40'$.)

Самостоятельиая работа

1. Даны вершины четырехугольника $A(1,\ -2,\ 2)$, $B(1,\ 4,\ 0)$, $C(-4,\ 1,\ 1)$, $D(-5,\ -5,\ 3)$. Вычислить угол φ между его диагоналями. (*Ответ*: $\varphi = 90°$.)

2. При каком значении α векторы $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \alpha\mathbf{k}$ взаимно перпендикулярны? (*Ответ*: $\alpha = -6$.)

3. Найти координаты вектора $\mathbf{b}$, коллинеарного вектору $\mathbf{a} = (2,\ 1,\ -1)$, при условии $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3$. (*Ответ*: $\mathbf{b} = (1,\ 1/2,\ -1/2)$.)

2.3. ВЕКТОРНОЕ И СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ с общим началом в точке O называется *правой*, если кратчайший поворот от вектора $\mathbf{a}$ к вектору $\mathbf{b}$ наблюдается из конца вектора $\mathbf{c}$ происходящим против движения часовой стрелки (рис. 2.7, *а*). В противном случае данная тройка называется *левой* (рис. 2.7, *б*).

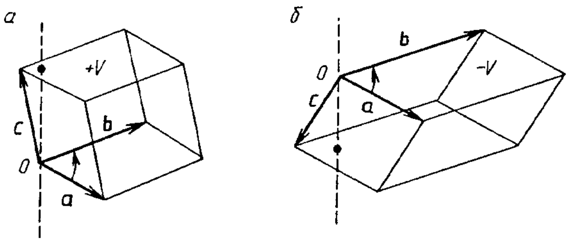


Рис. 2.7

Векторным произведением векторов $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ называется вектор $\mathbf{c}$, обозначаемый $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, который удовлетворяет следующим трем условиям:

1) $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \sin(\widehat{\mathbf{a},\ \mathbf{b}})$;
2) $\mathbf{c} \perp \mathbf{a}$, $\mathbf{c} \perp \mathbf{b}$;
3) тройка $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ — правая (рис. 2.8).

Перечислим *основные свойства векторного произведения векторов:*
1) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$;
2) $(\lambda\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (\lambda\mathbf{b})$;
3) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$;
4) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$;
5) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = S$, где S — площадь параллелограмма, построенного иа векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, имеющих общее начало в точке O (см. рис. 2.8).

Если $\mathbf{a} = (x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\mathbf{b} = (x_2,\ y_2,\ z_2)$, то векторное произведение $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ выражается через координаты данных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ следующим образом:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right).$$

С помощью векторного произведения можно вычислить *вращающий момент* **M** *силы* **F**, *приложенной к точке B тела, закрепленного в точке A*: $\mathbf{M}=\overrightarrow{AB}\times\mathbf{F}$ (рис. 2.9).

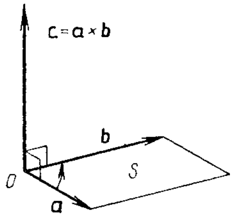


Рис. 2.8

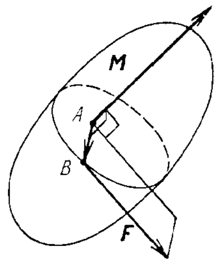


Рис. 2.9

Пример 1. Вычислить координаты вращающего момента **M** силы $\mathbf{F}=(3,\ 2,\ 1)$, приложенной к точке $A(-1,\ 2,\ 4)$, относительно начала координат O.

▶ Имеем

$$\mathbf{M}=\overrightarrow{OA}\times\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -1 & 2 & 4\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}=(-6,\ 13,\ -8).\ ◀$$

Смешанным произведением векторов **a**, **b**, **c** называется число $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$.

Перечислим *основные свойства смешанного произведения векторов:*

1) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$, поэтому смешанное произведение можно обозначать проще: **abc**;

2) $\mathbf{abc}=\mathbf{bca}=\mathbf{cab}=-\mathbf{bac}=-\mathbf{cba}=-\mathbf{acb}$;

3) геометрический смысл смешанного произведения заключается в следующем: $\mathbf{abc}=\pm V$, где V — объем параллелепипеда, построенного на перемножаемых векторах, взятый со знаком «+», если тройка векторов **a**, **b**, **c** — правая, или со знаком «—», если она левая (см. рис. 2.7);

4) $\mathbf{abc}=0\Leftrightarrow\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}$ компланарны.

Если $\mathbf{a}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\mathbf{b}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$, $\mathbf{c}=(x_3,\ y_3,\ z_3)$, то

$$\mathbf{abc}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}.$$

Пример 2. Даны векторы $\mathbf{a}=(1,\ 3,\ 1)$, $\mathbf{b}=(-2,\ 4,\ -1)$, $\mathbf{c}=(2,\ 4,\ -6)$. Требуется установить, компланарны ли данные векторы, в случае их некомпланарности выяснить, какую тройку (правую или левую) они образуют, и вычислить объем построенного на них параллелепипеда.

▶ Вычислим

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & -6 \end{vmatrix} = -78.$$

Из значения смешанного произведения следует, что векторы некомпланарны, образуют левую тройку и $V = 78$. ◀

АЗ-2.3

1. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ взаимно перпендикулярны, $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 4$. Вычислить: $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$; $|(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b})|$; $|(3\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - 2\mathbf{b})|$. (*Ответ:* 12; 24; 60.)

2. Даны векторы $\mathbf{a} = (3, -1, -2)$, $\mathbf{b} = (1, 2, -1)$. Найти координаты векторов: $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$; $(2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{b}$; $(2\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (2\mathbf{a} + \mathbf{b})$. (*Ответ:* (5, 1, 7); (10, 2, 14); (20, 4, 28).)

3. Вычислить площадь треугольника ABC, если известно, что: $A(1, 2, 0)$, $B(3, 0, 3)$, $C(5, 2, 6)$. (*Ответ:* $2\sqrt{13}$.)

4. Сила $\mathbf{F} = (2, 2, 9)$ приложена к точке $A(4, 2, -3)$. Вычислить величину и направляющие косинусы момента M этой силы относительно точки $B(2, 4, 0)$. (*Ответ:* $|\mathbf{M}| = 28$, $\cos\alpha = 3/7$, $\cos\beta = 6/7$, $\cos\gamma = -2/7$.)

5. Даны вершины пирамиды $A(2, 0, 4)$, $B(0, 3, 7)$, $C(0, 0, 6)$, $S(4, 3, 5)$. Вычислить ее объем V и высоту H, опущенную на грань ACS. (*Ответ:* $V = 2$, $H = 2/\sqrt{3}$.)

6. Лежат ли точки $A(1, 2, -1)$, $B(4, 1, 5)$, $C(-1, 2, 1)$, $D(2, 1, 3)$ в одной плоскости? (*Ответ:* лежат.)

7. Компланарны ли следующие векторы: а) $\mathbf{a} = (2, 3, 1)$, $\mathbf{b} = (1, -1, 3)$, $\mathbf{c} = (-1, 9, -11)$; б) $\mathbf{a} = (3, -2, 1)$, $\mathbf{b} = (2, 1, 2)$, $\mathbf{c} = (3, -1, -2)$? (*Ответ:* а) компланарны; б) не компланарны.)

8. Выяснить, правой или левой будет тройка векторов $\mathbf{a} = (3, 4, 0)$, $\mathbf{b} = (0, -4, 1)$, $\mathbf{c} = (0, 2, 5)$. (*Ответ:* левой.)

Самостоятельная работа

1. 1) Дано: $|\mathbf{a}| = 10$, $|\mathbf{b}| = 2$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 12$. Вычислить $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ (Ответ: 16.)

2) Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = (0, -1, 1)$ и $\mathbf{b} = (1, 1, 1)$. (*Ответ:* 6.)

2. Сила $\mathbf{F} = (3, 2, -4)$ приложена к точке $A(2, -1, 1)$. Найти вращающий момент $\mathbf{M}$ этой силы относительно начала координат. (*Ответ:* $\mathbf{M} = (2, 11, 7)$.)

3. Вычислить объем V треугольной призмы, построенной на векторах $\mathbf{a}=(7,\ 6,\ 1)$, $\mathbf{b}=(4,\ 0,\ 3)$, $\mathbf{c}=(3,\ 6,\ 4)$. (*Ответ*: $V=24$.)

2.4. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ К ГЛ. 2

Решения всех вариантов тут >>>

ИДЗ-2.1

1. Даны векторы $\mathbf{a}=\alpha\mathbf{m}+\beta\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}=\gamma\mathbf{m}+\delta\mathbf{n}$, где $|\mathbf{m}|=k$; $|\mathbf{n}|=l$; $(\widehat{\mathbf{m},\mathbf{n}})=\varphi$. Найти: а) $(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b})\cdot(\nu\mathbf{a}+\tau\mathbf{b})$; б) $\text{пр}_{\text{в}}(\nu\mathbf{a}+\tau\mathbf{b})$; в) $\cos(\widehat{\mathbf{a},\ \tau\mathbf{b}})$.

1.1. $\alpha=-5$, $\beta=-4$, $\gamma=3$, $\delta=6$, $k=3$, $l=5$, $\varphi=5\pi/3$, $\lambda=-2$, $\mu=1/3$, $\nu=1$, $\tau=2$. (*Ответ*: а) 2834.)

1.2. $\alpha=-2$, $\beta=3$, $\gamma=4$, $\delta=-1$, $k=1$, $l=3$, $\varphi=\pi$, $\lambda=3$, $\mu=2$, $\nu=-2$, $\tau=4$. (*Ответ*: а) -950.)

1.3. $\alpha=5$, $\beta=-2$, $\gamma=-3$, $\delta=-1$, $k=4$, $l=5$, $\varphi=4\pi/3$, $\lambda=2$, $\mu=3$, $\nu=-1$, $\tau=5$. (*Ответ*: а) -1165.)

1.4. $\alpha=5$, $\beta=2$, $\gamma=-6$, $\delta=-4$, $k=3$, $l=2$, $\varphi=5\pi/3$, $\lambda=-1$, $\mu=1/2$, $\nu=2$, $\tau=3$. (*Ответ*: а) 416.)

1.5. $\alpha=3$, $\beta=-2$, $\gamma=-4$, $\delta=5$, $k=2$, $l=3$, $\varphi=\pi/3$, $\lambda=2$, $\mu=-3$, $\nu=5$, $\tau=1$. (*Ответ*: а) 750.)

1.6. $\alpha=2$, $\beta=-5$, $\gamma=-3$, $\delta=4$, $k=2$, $l=4$, $\varphi=2\pi/3$, $\lambda=3$, $\mu=-4$, $\nu=2$, $\tau=3$. (*Ответ*: а) -2116.)

1.7. $\alpha=3$, $\beta=2$, $\gamma=-4$, $\delta=-2$, $k=2$, $l=5$, $\varphi=4\pi/3$, $\lambda=1$, $\mu=-3$, $\nu=0$, $\tau=-1/2$. (*Ответ*: а) 165.)

1.8. $\alpha=5$, $\beta=2$, $\gamma=1$, $\delta=-4$, $k=3$, $l=2$, $\varphi=\pi$, $\lambda=1$, $\mu=-2$, $\nu=3$, $\tau=-4$. (*Ответ*: а) -583.)

1.9. $\alpha=-3$, $\beta=-2$, $\gamma=1$, $\delta=5$, $k=3$, $l=6$, $\varphi=4\pi/3$, $\lambda=-1$, $\mu=2$, $\nu=1$, $\tau=1$. (*Ответ*: а) 1287.)

1.10. $\alpha=5$, $\beta=-3$, $\gamma=4$, $\delta=2$, $k=4$, $l=1$, $\varphi=2\pi/3$, $\lambda=2$, $\mu=-1/2$, $\nu=3$, $\tau=0$. (*Ответ*: а) 2337.)

1.11. $\alpha=-2$, $\beta=3$, $\gamma=3$, $\delta=-6$, $k=6$, $l=3$, $\varphi=5\pi/3$, $\lambda=3$, $\mu=-1/3$, $\nu=1$, $\tau=2$. (*Ответ*: а) -936.)

1.12. $\alpha=-2$, $\beta=-4$, $\gamma=3$, $\delta=1$, $k=3$, $l=2$, $\varphi=7\pi/3$, $\lambda=-1/2$, $\mu=3$, $\nu=1$, $\tau=2$. (*Ответ*: а) 320.)

1.13. $\alpha=4$, $\beta=3$, $\gamma=-1$, $\delta=2$, $k=4$, $l=5$, $\varphi=3\pi/2$, $\lambda=2$, $\mu=-3$, $\nu=1$, $\tau=2$. (*Ответ*: а) 352.)

1.14. $\alpha=-2$, $\beta=3$, $\gamma=5$, $\delta=1$, $k=2$, $l=5$, $\varphi=2\pi$, $\lambda=-3$, $\mu=4$, $\nu=2$, $\tau=3$. (*Ответ*: а) 1809.)

1.15. $\alpha=4$, $\beta=-3$, $\gamma=5$, $\delta=2$, $k=4$, $l=7$, $\varphi=4\pi/3$, $\lambda=-3$, $\mu=2$, $\nu=2$, $\tau=-1$.. (*Ответ*: а) -5962.)

1.16. $\alpha=-5$, $\beta=3$, $\gamma=2$, $\delta=4$, $k=5$, $l=4$, $\varphi=\pi$, $\lambda=-3$, $\mu=1/2$, $\nu=-1$, $\tau=1$. (*Ответ*: а) 3348.)

1.17. $\alpha=5$, $\beta=-2$, $\gamma=3$, $\delta=4$, $k=2$, $l=5$, $\varphi=\pi/2$, $\lambda=2$, $\mu=3$, $\nu=1$, $\tau=-2$. (*Ответ*: а) -2076.)

1.18. $\alpha=7$, $\beta=-3$, $\gamma=2$, $\delta=6$, $k=3$, $l=4$, $\varphi=5\pi/3$, $\lambda=3$, $\mu=-1/2$, $\nu=2$, $\tau=1$. (*Ответ*: а) 1728.)

1.19. $\alpha=4$, $\beta=-5$, $\gamma=-1$, $\delta=3$, $k=6$, $l=3$, $\varphi=2\pi/3$, $\lambda=2$, $\mu=-5$, $\nu=1$, $\tau=2$. (*Ответ*: а) 1044.)

1.20. $\alpha=3$, $\beta=-5$, $\gamma=-2$, $\delta=3$, $k=1$, $l=6$, $\varphi=3\pi/2$, $\lambda=4$, $\mu=5$, $\nu=1$, $\tau=-2$. (*Ответ*: а) 1994.)

1.21. $\alpha=-5$, $\beta=-6$, $\gamma=2$, $\delta=7$, $k=2$, $l=7$, $\varphi=\pi$, $\lambda=-2$, $\mu=5$, $\nu=1$, $\tau=3$. (*Ответ*: а) 29 767.)

1.22. $\alpha=-7$, $\beta=2$, $\gamma=4$, $\delta=6$, $k=2$, $l=9$, $\varphi=\pi/3$, $\lambda=1$, $\mu=2$, $\nu=-1$, $\tau=3$. (*Ответ*: а) 20 758.)

1.23. $\alpha=5$, $\beta=4$, $\gamma=-6$, $\delta=2$, $k=2$, $l=9$, $\varphi=2\pi/3$, $\lambda=3$, $\mu=2$, $\nu=1$, $\tau=-1/2$. (*Ответ*: а) 2751.)

1.24. $\alpha=-5$, $\beta=-7$, $\gamma=-3$, $\delta=2$, $k=2$, $l=11$, $\varphi=3\pi/2$, $\lambda=-3$, $\mu=4$, $\nu=-1$, $\tau=2$. (*Ответ*: а) 38 587.)

1.25. $\alpha=5$, $\beta=-8$, $\gamma=-2$, $\delta=3$, $k=4$, $l=3$, $\varphi=4\pi/3$, $\lambda=2$, $\mu=-3$, $\nu=1$, $\tau=2$. (*Ответ*: а) 1048.)

1.26. $\alpha=-3$, $\beta=5$, $\gamma=1$, $\delta=7$, $k=4$, $l=6$, $\varphi=5\pi/3$, $\lambda=-2$, $\mu=3$, $\nu=3$, $\tau=-2$. (*Ответ*: а) -2532.)

1.27. $\alpha=-3$, $\beta=4$, $\gamma=5$, $\delta=-6$, $k=4$, $l=5$, $\varphi=\pi$, $\lambda=2$, $\mu=3$, $\nu=-3$, $\tau=-1$. (*Ответ*: а) 21 156.)

1.28. $\alpha=6$, $\beta=-7$, $\gamma=-1$, $\delta=-3$, $k=2$, $l=6$, $\varphi=4\pi/3$, $\lambda=3$, $\mu=-2$, $\nu=1$, $\tau=4$. (*Ответ*: а) $-12 200$.)

1.29. $\alpha=5$, $\beta=3$, $\gamma=-4$, $\delta=-2$, $k=6$, $l=3$, $\varphi=5\pi/3$, $\lambda=-2$, $\mu=-1/2$, $\nu=3$, $\tau=2$. (*Ответ*: а) -2916.)

1.30. $\alpha=4$, $\beta=-3$, $\gamma=-2$, $\delta=6$, $k=4$, $l=7$, $\varphi=\pi/3$, $\lambda=2$, $\mu=-1/2$, $\nu=3$, $\tau=2$. (*Ответ*: а) -801.)

2. По координатам точек A, B и C для указанных векторов найти: а) модуль вектора **a**; б) скалярное произведение векторов **a** и **b**; в) проекцию вектора **c** на вектор **d**; г) координаты точки M, делящей отрезок l в отношении $\alpha:\beta$.

2.1. $A(4, 6, 3)$, $B(-5, 2, 6)$, $C(4, -4, -3)$, $\mathbf{a}=4\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AC}$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{AB}$, $\mathbf{c}=\overrightarrow{CB}$, $\mathbf{d}=\overrightarrow{AC}$, $l=AB$, $\alpha=5$, $\beta=4$. (*Ответ*: а) $\sqrt{4216}$; б) 314; г) $(-1, 34/9, 14/3)$.)

2.2. $A(4, 3, -2)$, $B(-3, -1, 4)$, $C(2, 2, 1)$, $\mathbf{a}=-5\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{CB}$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{AB}$, $\mathbf{c}=\overrightarrow{AC}$, $\mathbf{d}=\overrightarrow{CB}$, $l=BC$, $\alpha=2$, $\beta=3$. (*Ответ*: а) $\sqrt{82}$; б) -50; г) $(-1, 1/5, 14/5)$.)

2.3. $A(-2, -2, 4)$, $B(1, 3, -2)$, $C(1, 4, 2)$, $\mathbf{a}=2\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{BA}$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{BC}$, $\mathbf{c}=\overrightarrow{BC}$, $\mathbf{d}=\overrightarrow{AC}$, $l=BA$, $\alpha=2$, $\beta=1$. (*Ответ*: а) $\sqrt{1750}$; б) -53; г) $(-1, -1/3, 2)$.)

2.4. $A(2, 4, 3)$, $B(3, 1, -4)$, $C(-1, 2, 2)$, $\mathbf{a}=2\overrightarrow{BA}+4\overrightarrow{AC}$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{BA}$, $\mathbf{c}=\mathbf{b}$, $\mathbf{d}=\overrightarrow{AC}$, $l=BA$, $\alpha=1$, $\beta=4$. (*Ответ*: а) $\sqrt{300}$; б) 78; г) $(14/5, 8/5, -13/5)$.)

2.5. $A(2, 4, 5)$, $B(1, -2, 3)$, $C(-1, -2, 4)$, $\mathbf{a}=3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AC}$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{BC}$, $\mathbf{c}=\mathbf{b}$, $\mathbf{d}=\overrightarrow{AB}$, $l=AB$, $\alpha=2$, $\beta=3$. (*Ответ*: а) 11; б) -20; г) $(8/5, 8/5, 21/5)$.)

2.6. $A(-1, -2, 4)$, $B(-1, 3, 5)$, $C(1, 4, 2)$, $\mathbf{a}=3\overrightarrow{AC}-7\overrightarrow{BC}$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{AB}$, $\mathbf{c}=\mathbf{b}$, $\mathbf{d}=\overrightarrow{AC}$, $l=AC$, $\alpha=1$, $\beta=7$. (*Ответ*: а) $\sqrt{410}$; б) 70, г) $(-3/4, -5/4, 15/4)$.)

2.7. $A(1, 3, 2)$, $B(-2, 4, -1)$, $C(1, 3, -2)$, $\mathbf{a}=2\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{CB}$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{AC}$, $\mathbf{c}=\mathbf{b}$, $\mathbf{d}=\overrightarrow{AB}$, $l=AB$, $\alpha=2$, $\beta=4$. (*Ответ*: а) $\sqrt{491}$, б) 4; г) $(0, 10/3, 1)$.)

2.8. $A(2, -4, 3)$, $B(-3, -2, 4)$, $C(0, 0, -2)$, $\mathbf{a}=3\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{CB}$, $\mathbf{b}=\mathbf{c}=\overrightarrow{AB}$, $\mathbf{d}=\overrightarrow{CB}$, $l=AC$, $\alpha=2$, $\beta=1$. (*Ответ*: а) $\sqrt{1957}$; б) -29; г) $(2/3, -4/5, -1/3)$.)

2.9. $A(3, 4, -4)$, $B(-2, 1, 2)$, $C(2, -3, 1)$, $\mathbf{a}=5\overrightarrow{CB}+4\overrightarrow{AC}$, $\mathbf{b}=\mathbf{c}=\overrightarrow{BA}$, $\mathbf{d}=\overrightarrow{AC}$, $l=BA$, $\alpha=2$, $\beta=5$. (*Ответ*: а) $\sqrt{1265}$; б) -294; г) $(-4/7, 13/7, 2{,}7)$.)

2.10. $A(0, 2, 5)$, $B(2, -3, 4)$, $C(3, 2, -5)$, $\mathbf{a}=-3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{CB}$, $\mathbf{b}=\mathbf{c}=\overrightarrow{AC}$, $\mathbf{d}=\overrightarrow{AB}$, $l=AC$, $\alpha=3$, $\beta=2$. (*Ответ*: а) $\sqrt{1646}$; б) -420; г) $(9/5, 2, -1)$.)

2.11. $A(-2, -3, -4)$, $B(2, -4, 0)$, $C(1, 4, 5)$, $\mathbf{a}=4\overrightarrow{AC}-8\overrightarrow{BC}$, $\mathbf{b}=\mathbf{c}=\overrightarrow{AB}$, $\mathbf{d}=\overrightarrow{BC}$, $l=AB$, $\alpha=4$, $\beta=2$. (*Ответ*: а) $\sqrt{1777}$; б) 80; г) $(2/3, -11/3, -4/3)$.)

2.12. $A(-2, -3, -2)$, $B(1, 4, 2)$, $C(1, -3, 3)$, $\mathbf{a}=2\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{BC}$, $\mathbf{b}=\mathbf{c}=\overrightarrow{AB}$, $\mathbf{d}=\overrightarrow{AC}$, $l=BC$, $\alpha=3$, $\beta=1$. (*Ответ*: а) $\sqrt{856}$; б) 238; г) $(1, -5/4, 11/4)$.)

2.13. $A(5, 6, 1)$, $B(-2, 4, -1)$, $C(3, -3, 3)$, $\mathbf{a}=3\overrightarrow{AB}-$

$-4\overrightarrow{BC}$, $\mathbf{b}=\mathbf{c}=\overrightarrow{AC}$, $\mathbf{d}=\overrightarrow{AB}$, $l=BC$, $\alpha=3$, $\beta=2$. (*Ответ*: а) $\sqrt{2649}$; б) -160; г) $(1,\ -1/5,\ 7/5)$.)

2.14. $A(10,\ 6,\ 3)$, $B(-2,\ 4,\ 5)$, $C(3,\ -4,\ -6)$, $\mathbf{a}=5\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{CB}$, $\mathbf{b}=\mathbf{c}=\overrightarrow{BA}$, $\mathbf{d}=\overrightarrow{AC}$, $l=CB$, $\alpha=1$, $\beta=5$. (*Ответ*: а) $\sqrt{9470}$; б) -298; г) $(13/6,\ -8/3,\ -25{,}6)$.)

2.15. $A(3,\ 2,\ 4)$, $B(-2,\ 1,\ 3)$, $C(2,\ -2,\ -1)$, $\mathbf{a}=4\overrightarrow{BC}-3\overrightarrow{AC}$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{BA}$, $\mathbf{c}=\overrightarrow{AC}$, $\mathbf{d}=\overrightarrow{BC}$, $l=AC$, $\alpha=2$, $\beta=4$. (*Ответ*: а) $\sqrt{362}$; б) 94; г) $(8/3,\ 2/3,\ 7/3)$.)

2.16. $A(-2,\ 3,\ -4)$, $B(3,\ -1,\ 2)$, $C(4,\ 2,\ 4)$, $\mathbf{a}=7\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{CB}$, $\mathbf{b}=\mathbf{c}=\overrightarrow{AB}$, $\mathbf{d}=\overrightarrow{CB}$, $l=AB$, $\alpha=2$, $\beta=5$. (*Ответ*: а) $\sqrt{4109}$; б) 554; г) $(-4/7,\ 13/7,\ -16/7)$.)

2.17. $A(4,\ 5,\ 3)$, $B(-4,\ 2,\ 3)$, $C(5,\ -6,\ -2)$, $\mathbf{a}=9\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{BC}$, $\mathbf{b}=\mathbf{c}=\overrightarrow{AC}$, $\mathbf{d}=\overrightarrow{AB}$, $l=BC$, $\alpha=5$, $\beta=1$. (*Ответ*: а) $\sqrt{12\,089}$; б) -263; г) $(7/2,\ -14/3,\ -7/6)$.)

2.18. $A(2,\ 4,\ 6)$, $B(-3,\ 5,\ 1)$, $C(4,\ -5,\ -4)$, $\mathbf{a}=-6\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{BA}$, $\mathbf{b}=\mathbf{c}=\overrightarrow{CA}$, $\mathbf{d}=\overrightarrow{BA}$, $l=BC$, $\alpha=1$, $\beta=3$. (*Ответ*: а) $\sqrt{5988}$; б) 986; г) $(-5/4,\ 5/2,\ -1/4)$.)

2.19. $A(-4,\ -2,\ -5)$, $B(3,\ 7,\ 2)$, $C(4,\ 6,\ -3)$, $\mathbf{a}=9\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{BC}$, $\mathbf{b}=\mathbf{c}=\overrightarrow{AC}$, $\mathbf{d}=\overrightarrow{BC}$, $l=BA$, $\alpha=4$, $\beta=3$. (*Ответ*: а) $\sqrt{16\,740}$; б) -1308; г) $(-1,\ 13/7,\ -2)$.)

2.20. $A(5,\ 4,\ 4)$, $B(-5,\ 2,\ 3)$, $C(4,\ 2,\ -5)$, $\mathbf{a}=11\overrightarrow{AC}-6\overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{BC}$, $\mathbf{c}=\overrightarrow{AB}$, $\mathbf{d}=\overrightarrow{AC}$, $l=BC$, $\alpha=3$, $\beta=1$. (*Ответ*: а) $\sqrt{11\,150}$; б) 1185; г) $(7/4,\ 2,\ -3)$.)

2.21. $A(3,\ 4,\ 6)$, $B(-4,\ 6,\ 4)$, $C(5,\ -2,\ -3)$, $\mathbf{a}=-7\overrightarrow{BC}+4\overrightarrow{CA}$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{BA}$, $\mathbf{c}=\overrightarrow{CA}$, $\mathbf{d}=\overrightarrow{BC}$, $l=BA$, $\alpha=5$. $\beta=3$. (*Ответ*: а) $\sqrt{18\,666}$; б) -487; г) $(3/8,\ 19/4,\ 21/4)$.)

2.22. $A(-5,\ -2,\ -6)$, $B(3,\ 4,\ 5)$, $C(2,\ -5,\ 4)$, $\mathbf{a}=8\overrightarrow{AC}-5\overrightarrow{BC}$, $\mathbf{b}=\mathbf{c}=\overrightarrow{AB}$, $\mathbf{d}=\overrightarrow{BC}$, $l=AC$, $\alpha=3$, $\beta=4$, (*Ответ*: а) $\sqrt{11\,387}$; б) 1549; г) $(-2,\ -23/7,\ -12/7)$.)

2.23. $A(3,\ 4,\ 1)$, $B(5,\ -2,\ 6)$, $C(4,\ 2,\ -7)$, $\mathbf{a}=-7\overrightarrow{AC}+5\overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b}=\mathbf{c}=\overrightarrow{BC}$, $\mathbf{d}=\overrightarrow{AC}$, $l=AB$, $\alpha=2$, $\beta=3$. (*Ответ*: а) $\sqrt{6826}$; б) -1120; г) $(19/5,\ 8/5,\ 3)$.)

2.24. $A(4, 3, 2)$, $B(-4, -3, 5)$, $C(6, 4, -3)$, $\mathbf{a} = 8\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{BC}$, $\mathbf{b} = \mathbf{c} = \overrightarrow{BA}$, $\mathbf{d} = \overrightarrow{AC}$, $l = BC$, $\alpha = 2$, $\beta = 5$. (*Ответ*: а) $\sqrt{1885}$; б) -434; г) $(-8/7, -1, 19/7)$.)

2.25. $A(-5, 4, 3)$, $B(4, 5, 2)$, $C(2, 7, -4)$, $\mathbf{a} = 3\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b} = \mathbf{c} = \overrightarrow{CA}$, $\mathbf{d} = \overrightarrow{AB}$, $l = BC$, $\alpha = 3$, $\beta = 4$. (*Ответ*: а) $\sqrt{608}$; б) -248; г) $(22/7, 41/7, -4/7)$.)

2.26. $A(6, 4, 5)$, $B(-7, 1, 8)$, $C(2, -2, -7)$, $\mathbf{a} = 5\overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{AC}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{CB}$, $\mathbf{d} = \overrightarrow{AC}$, $l = AB$, $\alpha = 3$, $\beta = 2$. (*Ответ*: а) $\sqrt{11\,899}$; б) 697; г) $(-9/5, 11/5, 34/5)$.)

2.27. $A(6, 5, -4)$, $B(-5, -2, 2)$, $C(3, 3, 2)$, $\mathbf{a} = 6\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CB}$, $\mathbf{b} = \mathbf{c} = \overrightarrow{AC}$, $\mathbf{d} = \overrightarrow{CB}$, $l = BC$, $\alpha = 1$, $\beta = 5$. (*Ответ*: а) $\sqrt{3789}$; б) 396; г) $(-11/3, -7/6, 2)$.)

2.28. $A(-3, -5, 6)$, $B(3, 5, -4)$, $C(2, 6, 4)$, $\mathbf{a} = 4\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{BA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{CB}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{BA}$, $\mathbf{d} = \overrightarrow{AC}$, $l = BA$, $\alpha = 4$, $\beta = 2$. (*Ответ*: а) $\sqrt{14\,700}$; б) 470; г) $(-1, -5/3, 8/3)$.)

2.29. $A(3, 5, 4)$, $B(4, 2, -3)$, $C(-2, 4, 7)$, $\mathbf{a} = 3\overrightarrow{BA} - 4\overrightarrow{AC}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{BA}$, $\mathbf{d} = \overrightarrow{AC}$, $l = BA$, $\alpha = 2$, $\beta = 5$. (*Ответ*: а) $\sqrt{539}$; б) -85; г) $(26/7, 20/7, -1)$.)

2.30. $A(4, 6, 7)$, $B(2, -4, 1)$, $C(-3, -4, 2)$, $\mathbf{a} = 5\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$, $\mathbf{b} = \mathbf{c} = \overrightarrow{BC}$, $\mathbf{d} = \overrightarrow{AB}$, $l = AB$, $\alpha = 3$, $\beta = 4$. (*Ответ*: а) $\sqrt{1316}$; б) -40; г) $(22/7, 12/7, 31/7)$.)

3. Доказать, что векторы **a**, **b**, **c** образуют базис, и найти координаты вектора **d** в этом базисе.

3.1. $\mathbf{a} = (5, 4, 1)$, $\mathbf{b} = (-3, 5, 2)$, $\mathbf{c} = (2, -1, 3)$, $\mathbf{d} = (7, 23, 4)$. (*Ответ*: $(3, 2, -1)$.)

3.2. $\mathbf{a} = (2, -1, 4)$, $\mathbf{b} = (-3, 0, -2)$, $\mathbf{c} = (4, 5, -3)$, $\mathbf{d} = (0, 11, -14)$. (*Ответ*: $(-1, 2, 2)$.)

3.3. $\mathbf{a} = (-1, 1, 2)$, $\mathbf{b} = (2, -3, -5)$, $\mathbf{c} = (-6, 3, -1)$, $\mathbf{d} = (28, -19, -7)$. (*Ответ*: $(2, 3, -4)$.)

3.4. $\mathbf{a} = (1, 3, 4)$, $\mathbf{b} = (-2, 5, 0)$, $\mathbf{c} = (3, -2, -4)$, $\mathbf{d} = (13, -5, -4)$. (*Ответ*: $(2, -1, 3)$.)

3.5. $\mathbf{a} = (1, -1, 1)$, $\mathbf{b} = (-5, -3, 1)$, $\mathbf{c} = (2, -1, 0)$, $\mathbf{d} = (-15, -10, 5)$. (*Ответ*: $(2, 3, -1)$.)

3.6. $\mathbf{a} = (3, 1, 2)$, $\mathbf{b} = (-7, -2, -4)$, $\mathbf{c} = (-4, 0, 3)$, $\mathbf{d} = (16, 6, 15)$. (*Ответ*: $(2, -2, 1)$.)

3.7. $\mathbf{a}=(-3,\ 0,\ 1)$, $\mathbf{b}=(2,\ 7,\ -3)$, $\mathbf{c}=(-4,\ 3,\ 5)$, $\mathbf{d}=(-16,\ 33,\ 13)$. (*Ответ*: $(2,\ 3,\ 4)$.)

3.8. $\mathbf{a}=(5,\ 1,\ 2)$, $\mathbf{b}=(-2,\ 1,\ -3)$, $\mathbf{c}=(4,\ -3,\ 5)$, $\mathbf{d}=(15,\ -15,\ 24)$. (*Ответ*: $(-1,\ 28,\ 4)$.)

3.9. $\mathbf{a}=(0,\ 2,\ -3)$, $\mathbf{b}=(4,\ -3,\ -2)$, $\mathbf{c}=(-5,\ -4,\ 0)$, $\mathbf{d}=(-19,\ -5,\ -4)$. (*Ответ*: $(2,\ -1,\ 3)$.)

3.10. $\mathbf{a}=(3,\ -1,\ 2)$, $\mathbf{b}=(-2,\ 3,\ 1)$, $\mathbf{c}=(4,\ -5,\ -3)$, $\mathbf{d}=(-3,\ 2,\ -3)$. (*Ответ*: $(-1,\ 2,\ 1)$.)

3.11. $\mathbf{a}=(5,\ 3,\ 1)$, $\mathbf{b}=(-1,\ 2,\ -3)$, $\mathbf{c}=(3,\ -4,\ 2)$, $\mathbf{d}=(-9,\ 34,\ -20)$. (*Ответ*: $(2,\ 4,\ -5)$.)

3.12. $\mathbf{a}=(3,\ 1,\ -3)$, $\mathbf{b}=(-2,\ 4,\ 1)$, $\mathbf{c}=(1,\ -2,\ 5)$, $\mathbf{d}=(1,\ 12,\ -20)$. (*Ответ*: $(2,\ 1,\ -3)$.)

3.13. $\mathbf{a}=(6,\ 1,\ -3)$, $\mathbf{b}=(-3,\ 2,\ 1)$, $\mathbf{c}=(-1,\ -3,\ 4)$, $\mathbf{d}=(15,\ 6,\ -17)$. (*Ответ*: $(1,\ -2,\ -3)$.)

3.14. $\mathbf{a}=(4,\ 2,\ 3)$, $\mathbf{b}=(-3,\ 1,\ -8)$, $\mathbf{c}=(2,\ -4,\ 5)$, $\mathbf{d}=(-12,\ 14,\ -31)$. (*Ответ*: $(0,\ 2,\ -3)$.)

3.15. $\mathbf{a}=(-2,\ 1,\ 3)$, $\mathbf{b}=(3,\ -6,\ 2)$, $\mathbf{c}=(-5,\ -3,\ -1)$, $\mathbf{d}=(31,\ -6,\ 22)$. (*Ответ*: $(3,\ 4,\ -5)$.)

3.16. $\mathbf{a}=(1,\ 3,\ 6)$, $\mathbf{b}=(-3,\ 4,\ -5)$, $\mathbf{c}=(1,\ -7,\ 2)$, $\mathbf{d}=(-2,\ 17,\ 5)$. (*Ответ*: $(12,\ 1,\ -1)$.)

3.17. $\mathbf{a}=(7,\ 2,\ 1)$, $\mathbf{b}=(5,\ 1,\ -2)$, $\mathbf{c}=(-3,\ 4,\ 5)$, $\mathbf{d}=(26,\ 11,\ 1)$. (*Ответ*: $(2,\ 3,\ 1)$.)

3.18. $\mathbf{a}=(3,\ 5,\ 4)$, $\mathbf{b}=(-2,\ 7,\ -5)$, $\mathbf{c}=(6,\ -2,\ 1)$, $\mathbf{d}=(6,\ -9,\ 22)$. (*Ответ*: $(2,\ -3,\ -1)$.)

3.19. $\mathbf{a}=(5,\ 3,\ 2)$, $\mathbf{b}=(2,\ -5,\ 1)$, $\mathbf{c}=(-7,\ 4,\ -3)$, $\mathbf{d}=(36,\ 1,\ 15)$. (*Ответ*: $(5,\ 2,\ -1)$.)

3.20. $\mathbf{a}=(11,\ 1,\ 2)$, $\mathbf{b}=(-3,\ 3,\ 4)$, $\mathbf{c}=(-4,\ -2,\ 7)$, $\mathbf{d}=(-5,\ 11,\ -15)$. (*Ответ*: $(-1,\ 2,\ -3)$.)

3.21. $\mathbf{a}=(9,\ 5,\ 3)$, $\mathbf{b}=(-3,\ 2,\ 1)$, $\mathbf{c}=(4,\ -7,\ 4)$, $\mathbf{d}=(-10,\ -13,\ 8)$. (*Ответ*: $(-1,\ 3,\ 2)$.)

3.22. $\mathbf{a}=(7,\ 2,\ 1)$, $\mathbf{b}=(3,\ -5,\ 6)$, $\mathbf{c}=(-4,\ 3,\ -4)$, $\mathbf{d}=(-1,\ 18,\ -16)$. (*Ответ*: $2,\ -1,\ 3)$.)

3.23. $\mathbf{a}=(1,\ 2,\ 3)$, $\mathbf{b}=(-5,\ 3,\ -1)$, $\mathbf{c}=(-6,\ 4,\ 5)$, $\mathbf{d}=(-4,\ 11,\ 20)$. (*Ответ*: $(3,\ -1,\ 2)$.)

3.24. $\mathbf{a}=(-2,\ 5,\ 1)$, $\mathbf{b}=(3,\ 2,\ -7)$, $\mathbf{c}=(4,\ -3,\ 2)$, $\mathbf{d}=(-4,\ 22,\ -13)$. (*Ответ*: $(3,\ 2,\ -1)$.)

3.25. $\mathbf{a}=(3,\ 1,\ 2)$, $\mathbf{b}=(-4,\ 3,\ -1)$, $\mathbf{c}=(2,\ 3,\ 4)$, $\mathbf{d}=(14,\ 14,\ 20)$. (*Ответ*: $(2,\ 0,\ 4)$.)

3.26. $\mathbf{a}=(3,\ -1,\ 2)$, $\mathbf{b}=(-2,\ 4,\ 1)$, $\mathbf{c}=(4,\ -5,\ -1)$, $\mathbf{d}=(-5,\ 11,\ 1)$. (*Ответ*: $(-1,\ 5,\ 2)$.)

3.27. $\mathbf{a}=(4,\ 5,\ 1)$, $\mathbf{b}=(1,\ 3,\ 1)$, $\mathbf{c}=(-3,\ -6,\ 7)$, $\mathbf{d}=(19,\ 33,\ 0)$. (*Ответ*: $(3,\ 4,\ -1)$.)

3.28. $\mathbf{a}=(1,\ -3,\ 1)$, $\mathbf{b}=(-2,\ -4,\ 3)$, $\mathbf{c}=(0,\ -2,\ 3)$, $\mathbf{d}=(-8,\ -10,\ 13)$. (*Ответ*: $(-2,\ 3,\ 2)$.)

3.29. $\mathbf{a}=(5,\ 7,\ -2)$, $\mathbf{b}=(-3,\ 1,\ 3)$, $\mathbf{c}=(1,\ -4,\ 6)$, $\mathbf{d}=(14,\ 9,\ -1)$. (*Ответ*: $(2,\ -1,\ 1)$.)

3.30. $\mathbf{a}=(-1,\ 4,\ 3)$, $\mathbf{b}=(3,\ 2,\ -4)$, $\mathbf{c}=(-2,\ -7,\ 1)$, $\mathbf{d}=(6,\ 20,\ -3)$. (*Ответ*: $(1,\ 1,\ -2)$.)

Решение типового варианта

1. Даны векторы $\mathbf{a}=-\mathbf{m}+6\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}=3\mathbf{m}+4\mathbf{n}$, где $|\mathbf{m}|=2$; $|\mathbf{n}|=5$; $(\widehat{\mathbf{m},\ \mathbf{n}})=2\pi/3$. Найти: а) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$; б) $\text{пр}_{\mathbf{b}}(4\mathbf{a}-5\mathbf{b})$; в) $\cos(\widehat{2\mathbf{b}-\mathbf{a},\ 4\mathbf{b}})$.

▶ а) Вычисляем

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=(-\mathbf{m}+6\mathbf{n})\cdot(3\mathbf{m}+4\mathbf{n})=$$
$$=-3\mathbf{m}^2+14|\mathbf{m}|\ |\mathbf{n}|\cos(\widehat{\mathbf{m},\ \mathbf{n}})+24\mathbf{n}^2=$$
$$=-3\cdot 2^2+14\cdot 2\cdot 5(-1/2)+24\cdot 5^2=518;$$

б) Пусть $\mathbf{c}=4\mathbf{a}-5\mathbf{b}=-19\mathbf{m}+4\mathbf{n}$. Тогда

$$\text{пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{c}=\frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|},$$

$$\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}=(-19\mathbf{m}+4\mathbf{n})\cdot(3\mathbf{m}+4\mathbf{n})=$$
$$=-57\mathbf{m}^2-64|\mathbf{m}|\ |\mathbf{n}|\cos(\widehat{\mathbf{m},\ \mathbf{n}})+16\mathbf{n}^2=-148,$$
$$|\mathbf{b}|=\sqrt{\mathbf{b}^2}=\sqrt{(3\mathbf{m}+4\mathbf{n})^2}=$$
$$=\sqrt{9\mathbf{m}^2+24|\mathbf{m}|\ |\mathbf{n}|\cos(\widehat{\mathbf{m},\ \mathbf{n}})+16\mathbf{n}^2}=\sqrt{316}.$$

Окончательно получаем

$$\text{пр}_{\mathbf{b}}(4\mathbf{a}-5\mathbf{b})=-148/\sqrt{316};$$

в) Пусть $\mathbf{d}=2\mathbf{b}-\mathbf{a}=7\mathbf{m}+2\mathbf{n}$, $\mathbf{e}=4\mathbf{b}=12\mathbf{m}+16\mathbf{n}$. Тогда

$$\cos(\widehat{\mathbf{d},\ \mathbf{e}})=\frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{e}}{|\mathbf{d}|\ |\mathbf{e}|},$$
$$\mathbf{d}\cdot\mathbf{e}=(7\mathbf{m}+2\mathbf{n})\cdot(12\mathbf{m}+16\mathbf{n})=$$
$$=84\mathbf{m}^2+136|\mathbf{m}|\ |\mathbf{n}|\cos(\widehat{\mathbf{m},\ \mathbf{n}})+32|\mathbf{n}|^2=456,$$
$$|\mathbf{d}|=\sqrt{(7\mathbf{m}+2\mathbf{n})^2}=$$
$$=\sqrt{49\mathbf{m}^2+28|\mathbf{m}|\ |\mathbf{n}|\cos(\widehat{\mathbf{m},\ \mathbf{n}})+4\mathbf{n}^2}=\sqrt{156},$$
$$|\mathbf{e}|=\sqrt{(12\mathbf{m}+16\mathbf{n})^2}=$$

$$=\sqrt{144\mathbf{m}^2+384|\mathbf{m}|\,|\mathbf{n}|\cos(\widehat{\mathbf{m},\mathbf{n}})+256\mathbf{n}^2}=\sqrt{5056}.$$

В результате имеем:

$$\cos(\widehat{2\mathbf{b}-\mathbf{a},\ 4\mathbf{b}})=456/\sqrt{788736}\approx 0{,}5. \blacktriangleleft$$

2. По координатам точек $A(-5,\ 1,\ 6)$, $B(1,\ 4,\ 3)$ и $C(6,\ 3,\ 9)$ найти: а) модуль вектора $\mathbf{a}=4\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; б) скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}=\overrightarrow{BC}$; в) проекцию вектора $\mathbf{c}=\mathbf{b}$ на вектор $\mathbf{d}=\overrightarrow{AB}$; г) координаты точки M, делящей отрезок $l=AB$ в отношении $1:3$.

▶ а) Последовательно находим $\overrightarrow{AB}=(6,\ 3,\ -3)$, $\overrightarrow{BC}=(5,\ -1,\ 6)$, $4\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(29,\ 11,\ -6)$,

$$|4\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|=\sqrt{29^2+11^2+(-6)^2}=\sqrt{998};$$

б) Имеем $\mathbf{a}=(29,\ 11,\ -6)$, $\mathbf{b}=(5,\ -1,\ 6)$. Тогда

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=29\cdot 5+11(-1)+(-6)6=98;$$

в) Так как

$$\text{пр}_{\mathbf{d}}\mathbf{c}=\frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|},\quad \mathbf{d}=(6,\ 3,\ -3),$$

$$\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}=30-3-18=9,\quad |\mathbf{d}|=\sqrt{36+9+9}=\sqrt{54},$$

то

$$\text{пр}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{BC}=9/\sqrt{54};$$

г) Имеем: $\lambda=1/3$, $\mathbf{r}_M=\dfrac{\mathbf{r}_A+\lambda\mathbf{r}_B}{1+\lambda}$. Следовательно,

$$x_M=\frac{-5+1/3\cdot 1}{1+1/3}=-\frac{7}{2},\quad y_M=\frac{1+4\cdot 1/3}{1+1/3}=\frac{7}{4},$$

$$z_M=\frac{6+1/3\cdot 3}{1+1/3}=\frac{21}{4},\quad M(-7/2,\ 7/4,\ 21/4). \blacktriangleleft$$

3. Доказать, что векторы $\mathbf{a}=(3,\ -1,\ 0)$, $\mathbf{b}=(2,\ 3,\ 1)$, $\mathbf{c}=(-1,\ 4,\ 3)$ образуют базис, и найти координаты вектора $\mathbf{d}=(2,\ 3,\ 7)$ в этом базисе.

▶ Вычисляем

$$\mathbf{abc}=\begin{vmatrix}3 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 1\\ -1 & 4 & 3\end{vmatrix}=22\neq 0.$$

Следовательно, векторы **a**, **b**, **c** образуют базис, и вектор **d** линейно выражается через базисные векторы:

$$\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$$

или в координатной форме

$$\left.\begin{aligned} 3\alpha + 2\beta - \gamma &= 2, \\ -\alpha + 3\beta + 4\gamma &= 3, \\ \beta + 3\gamma &= 7. \end{aligned}\right\}$$

Решаем полученную систему по формулам Крамера. Находим: $\Delta = 22$,

$$\Delta(\alpha) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 66, \quad \Delta(\beta) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 3 \end{vmatrix} = -44,$$

$$\Delta(\gamma) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 7 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 66,$$

$$\alpha = \Delta(\alpha)/\Delta = 3, \quad \beta = \Delta(\beta)/\Delta = -2, \quad \gamma = \Delta(\gamma)/\Delta = 3,$$

поэтому $\mathbf{d} = (3,\ -2,\ 3) = 3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$. ◀

ИДЗ-2.2

1. Даны векторы **a**, **b** и **c**. Необходимо: а) вычислить смешанное произведение трех векторов; б) найти модуль векторного произведения; в) вычислить скалярное произведение двух векторов; г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора; д) проверить, будут ли компланарны три вектора.

1.1. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$; а) **a**, 3**b**, **c**; б) 3**a**, 2**c**; в) **b**, -4**c**; г) **a**, **c**; д) **a**, 2**b**, 3**c**. (*Ответ*: а) -261; б) $\sqrt{19\,116}$; в) 40.)

1.2. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 21\mathbf{k}$; а) 5**a**, 2**b**, **c**; б) 4**b**, 2**c**; в) **a**, **c**; г) **b**, **c**; д) 2**a**, -3**b**, **c**. (*Ответ*: а) 0; б) 0; в) 6.)

1.3. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 7\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$; а) **a**, 2**b**, 3**c**; б) 3**a**, -7**b**; в) **c**, -2**a**; г) **a**, **c**; д) 3**a**, 2**b**, 3**c**. (*Ответ*: а) -1840; б) $\sqrt{612\,108}$; в) 0.)

1.4. $\mathbf{a} = -7\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$; а) **a**, -2**b**, -7**c**; б) 4**b**, 3**c**; в) 2**a**, -7**c**; г) **b**, **c**; д) 2**a**, 4**b**, 3**c**. (*Ответ*: а) 0; б) 0; в) 42.)

1.5. $\mathbf{a} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$;

а) $\mathbf{a}$, $6\mathbf{b}$, $3\mathbf{c}$; б) $2\mathbf{b}$, $\mathbf{a}$; в) $\mathbf{a}$, $-4\mathbf{c}$; г) $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$; д) $\mathbf{a}$, $6\mathbf{b}$, $3\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) -2538; б) $\sqrt{3192}$; в) 12.)

1.6. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$; а) $\mathbf{a}$, $-3\mathbf{b}$, $2\mathbf{c}$; б) $5\mathbf{a}$, $3\mathbf{c}$; в) $-2\mathbf{a}$, $4\mathbf{b}$; г) $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$; д) $5\mathbf{a}$, $4\mathbf{b}$, $3\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) 0; б) 0; в) 56.)

1.7. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 7\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$; а) $7\mathbf{a}$, $-4\mathbf{b}$, $2\mathbf{c}$; б) $3\mathbf{a}$, $5\mathbf{c}$; в) $2\mathbf{b}$, $4\mathbf{c}$; г) $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$; д) $7\mathbf{a}$, $2\mathbf{b}$, $5\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) -4480; б) $\sqrt{78750}$; в) 0.)

1.8. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = -12\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$; а) $2\mathbf{a}$, $3\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$; б) $4\mathbf{a}$, $3\mathbf{b}$; в) $\mathbf{b}$, $-4\mathbf{c}$; г) $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$; д) $2\mathbf{a}$, $3\mathbf{b}$, $-4\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) 0; б) $\sqrt{17\,280}$; в) 60.)

1.9. $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = -2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$; а) $3\mathbf{a}$, $-4\mathbf{b}$, $2\mathbf{c}$; б) $7\mathbf{a}$, $-3\mathbf{c}$; в) $2\mathbf{b}$, $3\mathbf{a}$; г) $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$; д) $7\mathbf{a}$, $2\mathbf{b}$, $-3\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) -1680; б) $\sqrt{219177}$; в) 78.)

1.10. $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 9\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} - 8\mathbf{k}$; а) $2\mathbf{a}$, $-4\mathbf{b}$, $3\mathbf{c}$; б) $3\mathbf{b}$, $-9\mathbf{c}$; в) $3\mathbf{a}$, $-5\mathbf{c}$; г) $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$; д) $3\mathbf{a}$, $-4\mathbf{b}$, $-9\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) 0; б) $\sqrt{6488829}$; в) 630.)

1.11. $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$; а) $\mathbf{a}$, $-4\mathbf{b}$, $2\mathbf{c}$; б) $-2\mathbf{b}$, $4\mathbf{c}$; в) $-3\mathbf{a}$, $6\mathbf{c}$; г) $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$; д) $\mathbf{a}$, $-2\mathbf{b}$, $6\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) -464; б) $\sqrt{127488}$; в) 504.)

1.12. $\mathbf{a} = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 6\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$; а) $-2\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $-2\mathbf{c}$; б) $4\mathbf{b}$, $7\mathbf{c}$; в) $5\mathbf{a}$, $-3\mathbf{b}$; г) $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$; д) $-2\mathbf{a}$, $4\mathbf{b}$, $7\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) 0; б) 0; в) -240.)

1.13. $\mathbf{a} = -5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 7\mathbf{i} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$; а) $2\mathbf{a}$, $4\mathbf{b}$, $-5\mathbf{c}$; б) $-3\mathbf{b}$, $11\mathbf{c}$; в) $8\mathbf{a}$, $-6\mathbf{c}$; г) $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$; д) $8\mathbf{a}$, $-3\mathbf{b}$, $11\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) 4360; б) $33\sqrt{682}$; в) 0.)

1.14. $\mathbf{a} = -4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$; а) $5\mathbf{a}$, $7\mathbf{b}$, $2\mathbf{c}$; б) $-4\mathbf{b}$, $11\mathbf{a}$; в) $3\mathbf{a}$, $-7\mathbf{c}$; г) $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$; д) $3\mathbf{a}$, $7\mathbf{b}$, $-2\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) 0; б) 0; в) 672.)

1.15. $\mathbf{a} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 6\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$; а) $5\mathbf{a}$, $-\mathbf{b}$, $3\mathbf{c}$; б) $-7\mathbf{a}$, $4\mathbf{c}$; в) $3\mathbf{a}$, $9\mathbf{b}$; г) $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$; д) $3\mathbf{a}$, $-9\mathbf{b}$, $4\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) -1170; б) $56\sqrt{638}$; в) 567.)

1.16. $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 8\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$; а) $4\mathbf{a}$, $-6\mathbf{b}$, $5\mathbf{c}$; б) $-7\mathbf{a}$, $9\mathbf{c}$; в) $3\mathbf{b}$, $-8\mathbf{c}$; г) $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$; д) $4\mathbf{a}$, $-6\mathbf{b}$, $9\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) 0; б) $252\sqrt{917}$; в) -1632.)

1.17. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -9\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$; а) $7\mathbf{a}$, $5\mathbf{b}$, $-\mathbf{c}$; б) $-5\mathbf{a}$, $4\mathbf{b}$; в) $3\mathbf{b}$, $-8\mathbf{c}$; г) $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$; д) $7\mathbf{a}$, $5\mathbf{b}$, $-\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) -10430; б) $\sqrt{40389}$; в) 984.)

1.18. $\mathbf{a} = 9\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 15\mathbf{j} + 21\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} +$

$+7\mathbf{k}$; а) $2\mathbf{a}, -7\mathbf{b}, 3\mathbf{c}$; б) $-6\mathbf{a}, 4\mathbf{c}$; в) $5\mathbf{b}, 7\mathbf{a}$; г) $\mathbf{b}, \mathbf{c}$; д) $2\mathbf{a}, -7\mathbf{b}, 4\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) 0; б) $\sqrt{3365604}$; в) 3255.)

1.19. $\mathbf{a} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 7\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$; а) $\mathbf{a}, -6\mathbf{b}, 2\mathbf{c}$; б) $-8\mathbf{b}, 5\mathbf{c}$; в) $-9\mathbf{a}, 7\mathbf{c}$; г) $\mathbf{a}, \mathbf{b}$; д) $\mathbf{a}, -6\mathbf{b}, 5\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) 1068; б) $\sqrt{478400}$; в) -315.)

1.20. $\mathbf{a} = -9\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = -5\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 20\mathbf{k}$; а) $-2\mathbf{a}, 7\mathbf{b}, 5\mathbf{c}$; б) $-6\mathbf{b}, 7\mathbf{c}$; в) $9\mathbf{a}, 4\mathbf{c}$; г) $\mathbf{b}, \mathbf{c}$; д) $-2\mathbf{a}, 7\mathbf{b}, 4\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) 0; б) $\sqrt{52611300}$; в) 6660.)

1.21. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$; а) $-3\mathbf{a}, 6\mathbf{b}, -\mathbf{c}$; б) $5\mathbf{b}, 3\mathbf{c}$; в) $7\mathbf{a}, -4\mathbf{b}$; г) $\mathbf{b}, \mathbf{c}$; д) $7\mathbf{a}, -4\mathbf{b}, 3\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) 2196; б) $\sqrt{126900}$; в) 1288.)

1.22. $\mathbf{a} = 7\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 11\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 5\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; а) $3\mathbf{a}, -7\mathbf{b}, 2\mathbf{c}$; б) $2\mathbf{b}, 6\mathbf{c}$; в) $-4\mathbf{a}, -5\mathbf{c}$; г) $\mathbf{a}, \mathbf{c}$; д) $-4\mathbf{a}, 2\mathbf{b}, 6\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) 28728; б) $\sqrt{870912}$; в) 0.)

1.23. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$; а) $6\mathbf{a}, 3\mathbf{b}, 8\mathbf{c}$; б) $-7\mathbf{b}, 6\mathbf{a}$; в) $-5\mathbf{a}, 4\mathbf{c}$; г) $\mathbf{a}, \mathbf{b}$; д) $-5\mathbf{a}, 3\mathbf{b}, 4\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) 0; б) 0; в) -560.)

1.24. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$; а) $4\mathbf{a}, -7\mathbf{b}, -2\mathbf{c}$; б) $6\mathbf{a}, -4\mathbf{c}$; в) $-2\mathbf{a}, 5\mathbf{b}$; г) $\mathbf{a}, \mathbf{c}$; д) $6\mathbf{a}, -7\mathbf{b}, -2\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) 0; б) 0; в) 160.)

1.25. $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - \mathbf{k}$; а) $2\mathbf{a}, -\mathbf{b}, 3\mathbf{c}$; б) $-9\mathbf{a}, 4\mathbf{c}$; в) $5\mathbf{b}, -6\mathbf{c}$; г) $\mathbf{b}, \mathbf{c}$; д) $2\mathbf{a}, 5\mathbf{b}, -6\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) 0; б) $\sqrt{2519424}$; в) 900.)

1.26. $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$; а) $-2\mathbf{a}, \mathbf{b}, 7\mathbf{c}$; б) $5\mathbf{a}, -2\mathbf{c}$; в) $3\mathbf{b}, \mathbf{c}$; г) $\mathbf{a}, \mathbf{c}$; д) $-2\mathbf{a}, 3\mathbf{b}, 7\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) 1260; б) $10\sqrt{2997}$; в) 33.)

1.27. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; а) $-3\mathbf{a}, 4\mathbf{b}, -5\mathbf{c}$; б) $6\mathbf{b}, 3\mathbf{c}$; в) $\mathbf{a}, 4\mathbf{c}$; г) $\mathbf{b}, \mathbf{c}$; д) $-3\mathbf{a}, 4\mathbf{b}, -5\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) 0; б) 0; в) 80.)

1.28. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$; а) $\mathbf{a}, 7\mathbf{b}, -2\mathbf{c}$; б) $-5\mathbf{a}, 4\mathbf{b}$; в) $8\mathbf{c}, -3\mathbf{a}$; г) $\mathbf{a}, \mathbf{c}$; д) $-3\mathbf{a}, 4\mathbf{b}, 8\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) 2114; б) $20\sqrt{857}$; в) 0.)

1.29. $\mathbf{a} = -9\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$; а) $3\mathbf{a}, -5\mathbf{b}, -4\mathbf{c}$; б) $6\mathbf{b}, 2\mathbf{c}$; в) $-2\mathbf{a}, 8\mathbf{c}$; г) $\mathbf{b}, \mathbf{c}$; д) $3\mathbf{a}, 6\mathbf{b}, -4\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) 0; б) 0; в) -144.)

1.30. $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$; а) $5\mathbf{a}, 3\mathbf{b}, -4\mathbf{c}$; б) $4\mathbf{b}, \mathbf{a}$; в) $7\mathbf{a}, -2\mathbf{c}$; г) $\mathbf{a}, \mathbf{b}$; д) $5\mathbf{a}, 4\mathbf{b}, -2\mathbf{c}$. (*Ответ*: а) 11 940; б) $4\sqrt{9933}$; в) 28.)

2. Вершины пирамиды находятся в точках A, B, C и D. Вычислить: а) площадь указанной грани; б) площадь сечения, проходящего через середину ребра l и две вершины пирамиды; в) объем пирамиды $ABCD$.

2.1. $A(3, 4, 5)$, $B(1, 2, 1)$, $C(-2, -3, 6)$, $D(3, -6, -3)$; а) ACD; б) $l=AB$, C и D. (*Ответ*: а) $\sqrt{2114}$; б) $\sqrt{4426}/2$; в) 42.)

2.2. $A(-7, -5, 6)$, $B(-2, 5, -3)$, $C(3, -2, 4)$, $D(1, 2, 2)$; а) BCD; б) $l=CD$, A и B. (*Ответ*: а) $\sqrt{1350}$; б) $\sqrt{8937}/2$; в) 77/3.)

2.3. $A(1, 3, 1)$, $B(-1, 4, 6)$, $C(-2, -3, 4)$, $D(3, 4, -4)$; а) ACD; б) $l=BC$, A и D. (*Ответ*: а) $\sqrt{891}/2$; б) $3\sqrt{2}/2$; в) 3.)

2.4. $A(2, 4, 1)$, $B(-3, -2, 4)$, $C(3, 5, -2)$, $D(4, 2, -3)$; а) ABD; б) $l=AC$, B и D. (*Ответ*: а) $\sqrt{395}$; б) $\sqrt{205}/2$; в) 25/3.)

2.5. $A(-5, -3, -4)$, $B(1, 4, 6)$, $C(3, 2, -2)$, $D(8, -2, 4)$; а) ACD; б) $l=BC$, A и D. (*Ответ*: а) $\sqrt{6137}/2$; б) $\sqrt{7289}/2$; в) 304/3.)

2.6. $A(3, 4, 2)$, $B(-2, 3, -5)$, $C(4, -3, 6)$, $D(6, -5, 3)$; а) ABD; б) $l=BD$, A и C. (*Ответ*: а) $8\sqrt{26}$; б) $\sqrt{1826}/2$; в) 40.)

2.7. $A(-4, 6, 3)$, $B(3, -5, 1)$, $C(2, 6, -4)$, $D(2, 4, -5)$; а) ACD; б) $l=AD$, B и C. (*Ответ*: а) $\sqrt{94}$; б) $\sqrt{1554}/2$; в) 100/3.)

2.8. $A(7, 5, 8)$, $B(-4, -5, 3)$, $C(2, -3, 5)$, $D(5, 1, -4)$; а) BCD; б) $l=BC$, A и D. (*Ответ*: а) $\sqrt{1150}$; б) $\sqrt{4101}$; в) 202/3.)

2.9. $A(3, -2, 6)$, $B(-6, -2, 3)$, $C(1, 1, -4)$, $D(4, 6, -7)$; а) ABD; б) $l=BD$, A и C. (*Ответ*: а) $\sqrt{5040}$; б) $\sqrt{212}$; в) 52.)

2.10. $A(-5, -4, -3)$, $B(7, 3, -1)$, $C(6, -2, 0)$, $D(3, 2, -7)$; а) BCD; б) $l=AD$, B и C. (*Ответ*: а) $\sqrt{1422}/2$; б) $\sqrt{504}$; в) 44.)

2.11. $A(3, -5, -2)$, $B(-4, 2, 3)$, $C(1, 5, 7)$, $D(-2,$

-4, 5); а) ACD; б) $l=BD$, A и C. (*Ответ*: а) $\sqrt{6986}/2$; б) $\sqrt{1261}$; в) 202/3.)

2.12. $A(7, 4, 9)$, $B(1, -2, -3)$, $C(-5, -3, 0)$, $D(1, -3, 4)$; а) ABD; б) $l=AB$, C и D. (*Ответ*: а) $\sqrt{1179}$; б) 17; в) 50.)

2.13. $A(-4, -7, -3)$, $B(-4, -5, 7)$, $C(2, -3, 3)$, $D(3, 2, 1)$; а) BCD; б) $l=BC$, A и D. (*Ответ*: а) $\sqrt{276}$; б) $\sqrt{1393}$; в) 148/3.)

2.14. $A(-4, -5, -3)$, $B(3, 1, 2)$, $C(5, 7, -6)$, $D(6, -1, 5)$; а) ACD; б) $l=BC$, A и D. (*Ответ*: а) $\sqrt{7281}$; б) $\sqrt{2726}$; в) 46.)

2.15. $A(5, 2, 4)$, $B(-3, 5, -7)$, $C(1, -5, 8)$, $D(9, -3, 5)$; а) ABD; б) $l=BD$, A и C. (*Ответ*: а) $2\sqrt{266}$; б) $\sqrt{1405}/2$; в) 286/3.)

2.16. $A(-6, 4, 5)$, $B(5, -7, 3)$, $C(4, 2, -8)$, $D(2, 8, -3)$; а) ACD; б) $l=AD$, B и C. (*Ответ*: а) $2\sqrt{251}$; б) $25\sqrt{38}/2$; в) 150.)

2.17. $A(5, 3, 6)$, $B(-3, -4, 4)$, $C(5, -6, 8)$, $D(4, 0, -3)$; а) BCD; б) $l=BC$, A и D. (*Ответ*: а) $\sqrt{2294}$; б) $2\sqrt{406}$; в) 332/3.)

2.18. $A(5, -4, 4)$, $B(-4, -6, 5)$, $C(3, 2, -7)$, $D(6, 2, -9)$; а) ABD; б) $l=BD$, A и C. (*Ответ*: а) $\sqrt{4140}$; б) $\sqrt{405}$; в) 82/3.)

2.19. $A(-7, -6, -5)$, $B(5, 1, -3)$, $C(8, -4, 0)$, $D(3, 4, -7)$; а) BCD; б) $l=AD$, B и C. (*Ответ*: а) $\sqrt{158}/2$; б) $\sqrt{2266}/2$; в) 86/3.)

2.20. $A(7, -1, -2)$, $B(1, 7, 8)$, $C(3, 7, 9)$, $D(-3, -5, 2)$; а) ACD; б) $l=BD$, A и C. (*Ответ*: а) $\sqrt{5957}$; б) $\sqrt{1361}$; в) 124/3.)

2.21. $A(5, 2, 7)$, $B(7, -6, -9)$, $C(-7, -6, 3)$, $D(1, -5, 2)$; а) ABD; б) $l=AB$, C и D. (*Ответ*: а) $\sqrt{3194}$; б) $19\sqrt{2}/2$; в) 76.)

2.22. $A(-2, -5, -1)$, $B(-6, -7, 9)$, $C(4, -5, 1)$,

$D(2,\ 1,\ 4)$; а) BCD; б) $l=BC$, A и D. (*Ответ*: а) $\sqrt{1802}$; б) $\sqrt{2142}/2$; в) $226/3$.)

2.23. $A(-6,\ -3,\ -5)$, $B(5,\ 1,\ 7)$, $C(3,\ 5,\ -1)$, $D(4,\ -2,\ 9)$; а) ACD; б) $l=BC$, A и D. (*Ответ*: а) $\sqrt{24101}/2$; б) $\sqrt{2969}$; в) $4/3$.)

2.24. $A(7,\ 4,\ 2)$, $B(-5,\ 3,\ -9)$, $C(1,\ -5,\ 3)$, $D(7,\ -9,\ 1)$; а) ABD; б) $l=BD$, A и C. (*Ответ*: а) $\sqrt{11161}$; б) $\sqrt{5629}/2$; в) 186.)

2.25. $A(-8,\ 2,\ 7)$, $B(3,\ -5,\ 9)$, $C(2,\ 4,\ -6)$, $D(4,\ 6,\ -5)$; а) ACD; б) $l=AD$, B и C. (*Ответ*: а) $\sqrt{584}$; б) $\sqrt{9754}/2$; в) $296/3$.)

2.26. $A(4,\ 3,\ 1)$, $B(2,\ 7,\ 5)$, $C(-4,\ -2,\ 4)$, $D(2,\ -3,\ -5)$; а) ACD; б) $l=AB$, C и D. (*Ответ*: а) $\sqrt{1666}$; б) $\sqrt{9746}/2$; в) $80/3$.)

2.27. $A(-9,\ -7,\ 4)$, $B(-4,\ 3,\ -1)$, $C(5,\ -4,\ 2)$, $D(3,\ 4,\ 4)$; а) BCD; б) $l=CD$, A и B. (*Ответ*: а) $\sqrt{1346}$; б) $\sqrt{13250}/2$; в) 120.)

2.28. $A(3,\ 5,\ 3)$, $B(-3,\ 2,\ 8)$, $C(-3,\ -2,\ 6)$, $D(7,\ 8,\ -2)$; а) ACD; б) $l=BD$, A и C. (*Ответ*: а) $\sqrt{785}/2$; б) $\sqrt{58}/2$; в) $26/3$.)

2.29. $A(4,\ 2,\ 3)$, $B(-5,\ -4,\ 2)$, $C(5,\ 7,\ -4)$, $D(6,\ 4,\ -7)$; а) ABD; б) $l=AD$, B и C. (*Ответ*: а) $\sqrt{3086}$; б) $\sqrt{501}$; в) $178/3$.)

2.30. $A(-4,\ -2,\ -3)$, $B(2,\ 5,\ 7)$, $C(6,\ 3,\ -1)$, $D(6,\ -4,\ 1)$; а) ACD; б) $l=BC$, A и D. (*Ответ*: а) $\sqrt{1469}$; б) $\sqrt{1964}$; в) 116.)

3. Сила $\mathbf{F}$ приложена к точке A. Вычислить: а) работу силы $\mathbf{F}$ в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку B; б) модуль момента силы $\mathbf{F}$ относительно точки B.

3.1. $\mathbf{F}=(5,\ -3,\ 9)$, $A(3,\ 4,\ -6)$, $B(2,\ 6,\ 5)$. (*Ответ*: а) 88; б) $\sqrt{6746}$.)

3.2. $\mathbf{F}=(-3,\ 1,\ -9)$, $A(6,\ -3,\ 5)$, $B(9,\ 5,\ -7)$. (*Ответ*: а) 107; б) $\sqrt{8298}$.)

3.3. $\mathbf{F}=(2, 19, -4)$, $A(5, 3, 4)$, $B(6, -4, -1)$. (*Ответ*: а) 111; б) $\sqrt{16254}$.)

3.4. $\mathbf{F}=(-4, 5, -7)$, $A(4, -2, 3)$, $B(7, 0, -3)$. (*Ответ*: а) 40; б) $\sqrt{2810}$.)

3.5. $\mathbf{F}=(4, 11, -6)$, $A(3, 5, 1)$, $B(4, -2, -3)$. (*Ответ*: а) 49; б) $\sqrt{9017}$.)

3.6. $\mathbf{F}=(3, -5, 7)$, $A(2, 3, -5)$, $B(0, 4, 3)$. (*Ответ*: а) 45; б) $\sqrt{2819}$.)

3.7. $\mathbf{F}=(5, 4, 11)$, $A(6, 1, -5)$, $B(4, 2, -6)$. (*Ответ*: а) 17; б) $\sqrt{683}$.)

3.8. $\mathbf{F}=(-9, 5, 7)$, $A(1, 6, -3)$, $B(4, -3, 5)$. (*Ответ*: а) 16; б) $\sqrt{23614}$.)

3.9. $\mathbf{F}=(6, 5, -7)$, $A(7, -6, 4)$, $B(4, 9, -6)$. (*Ответ*: а) 127; б) $\sqrt{20611}$.)

3.10. $\mathbf{F}=(-5, 4, 4)$, $A(3, 7, -5)$, $B(2, -4, 1)$. (*Ответ*: а) 15; б) $\sqrt{8781}$.)

3.11. $\mathbf{F}=(4, 7, -3)$, $A(5, -4, 2)$, $B(8, 5, -4)$. (*Ответ*: а) 93; б) $15\sqrt{3}$.)

3.12. $\mathbf{F}=(2, 2, 9)$, $A(4, 2, -3)$, $B(2, 4, 0)$. (*Ответ*: а) 27; б) 28.)

Даны три силы **P**, **Q**, **R**, приложенные к точке A. Вычислить: а) работу, производимую равнодействующей этих сил, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку B; б) величину момента равнодействующей этих сил относительно точки B.

3.13. $\mathbf{P}=(9, -3, 4)$, $\mathbf{Q}=(5, 6, -2)$, $\mathbf{R}=(-4, -2, 7)$, $A(-5, 4, -2)$, $B(4, 6, -5)$. (*Ответ*: а) 65; б) $\sqrt{12883}$.)

3.14. $\mathbf{P}=(5, -2, 3)$, $\mathbf{Q}=(4, 5, -3)$, $\mathbf{R}=(-1, -3, 6)$, $A(7, 1, -5)$, $B(2, -3, -6)$. (*Ответ*: а) 46; б) $2\sqrt{521}$.)

3.15. $\mathbf{P}=(3, -5, 4)$, $\mathbf{Q}=(5, 6, -3)$, $\mathbf{R}=(-7, -1, 8)$, $A(-3, 5, 9)$, $B(5, 6, -3)$. (*Ответ*: а) 100; б) $\sqrt{1306}$.)

3.16. $\mathbf{P}=(-10, 6, 5)$, $\mathbf{Q}=(4, -9, 7)$, $\mathbf{R}=(5, 3, -3)$, $A(4, -5, 9)$, $B(4, 7, -5)$. (*Ответ*: а) 126; б) $2\sqrt{3001}$.)

3.17. $\mathbf{P}=(5, -3, 1)$, $\mathbf{Q}=(4, 2, -6)$, $\mathbf{R}=(-5, -3, 7)$, $A(-5, 3, 7)$, $B(3, 8, -5)$. (*Ответ*: а) 4; б) $\sqrt{12389}$.)

3.18. $\mathbf{P}=(-5,\ 8,\ 4)$. $\mathbf{Q}=(6,\ -7,\ 3)$, $\mathbf{R}=(3,\ 1,\ -5)$, $A(2,\ -4,\ 7)$, $B(0,\ 7,\ 4)$. (*Ответ*: а) 8; б) $4\sqrt{197}$.)

3.19. $\mathbf{P}=(7,\ -5,\ 2)$, $\mathbf{Q}=(3,\ 4,\ -8)$, $\mathbf{R}=(-2,\ -4,\ 3)$, $A(-3,\ 2,\ 0)$, $B(6,\ 4,\ -3)$. (*Ответ*: а) 71; б) $\sqrt{4171}$.)

3.20. $\mathbf{P}=(3,\ -4,\ 2)$, $\mathbf{Q}=(2,\ 3,\ -5)$, $\mathbf{R}=(-3,\ -2,\ 4)$, $A(5,\ 3,\ -7)$, $B(4,\ -1,\ -4)$. (*Ответ*: а) 13; б) $\sqrt{195}$.)

3.21. $\mathbf{P}=(4,\ -2,\ -5)$, $\mathbf{Q}=(5,\ 1,\ -3)$, $\mathbf{R}=(-6,\ 2,\ 5)$, $A(-3,\ 2,\ -6)$, $B(4,\ 5,\ -3)$. (*Ответ*: а) 15; б) $2\sqrt{262}$.)

3.22. $\mathbf{P}=(7,\ 3,\ -4)$, $\mathbf{Q}=(9,\ -4,\ 2)$, $\mathbf{R}=(-6,\ 1,\ 4)$, $A(-7,\ 2,\ 5)$, $B(4,\ -2,\ 11)$. (*Ответ*: а) 122; б) $\sqrt{3108}$.)

3.23. $\mathbf{P}=(9,\ -4,\ 4)$, $\mathbf{Q}=(-4,\ 6,\ -3)$, $\mathbf{R}=(3,\ 4,\ 2)$, $A(5,\ -4,\ 3)$, $B(4,\ -5,\ 9)$. (*Ответ*: а) 4; б) $\sqrt{4126}$.)

3.24. $\mathbf{P}=(6,\ -4,\ 5)$, $\mathbf{Q}=(-4,\ 7,\ 8)$, $\mathbf{R}=(5,\ 1,\ -3)$, $A(-5,\ -4,\ 2)$, $B(7,\ -3,\ 6)$. (*Ответ*: а) 128; б) $\sqrt{10\,181}$.)

3.25. $\mathbf{P}=(5,\ 5,\ -6)$, $\mathbf{Q}=(7,\ -6,\ 6)$, $\mathbf{R}=(-4,\ 3,\ 4)$, $A(-9,\ 4,\ 7)$, $B(8,\ -1,\ 7)$. (*Ответ*: а) 126; б) $10\sqrt{105}$.)

3.26. $\mathbf{P}=(7,\ -6,\ 2)$, $\mathbf{Q}=(-6,\ 2,\ -1)$, $\mathbf{R}=(1,\ 6,\ 4)$, $A(3,\ -6,\ 1)$, $B(6,\ -2,\ 7)$. (*Ответ*: а) 44; б) $\sqrt{77}$.)

3.27. $\mathbf{P}=(4,\ -2,\ 3)$, $\mathbf{Q}=(-2,\ 5,\ 6)$, $\mathbf{R}=(7,\ 3,\ -1)$, $A(-3,\ -2,\ 5)$, $B(9,\ -5,\ 4)$. (*Ответ*: а) 82; б) $\sqrt{21\,150}$.)

3.28. $\mathbf{P}=(7,\ 3,\ -4)$, $\mathbf{Q}=(3,\ -2,\ 2)$, $\mathbf{R}=(-5,\ 4,\ 3)$, $A(-5,\ 0,\ 4)$, $B(4,\ -3,\ 5)$. (*Ответ*: а) 31; б) $4\sqrt{230}$.)

3.29. $\mathbf{P}=(3,\ -2,\ 4)$, $\mathbf{Q}=(-4,\ 4,\ -3)$, $\mathbf{R}=(3,\ 4,\ 2)$, $A(1,\ -4,\ 3)$, $B(4,\ 0,\ -2)$. (*Ответ*: а) 15; б) $5\sqrt{89}$.)

3.30. $\mathbf{P}=(2,\ -1,\ -3)$, $\mathbf{Q}=(3,\ 2,\ -1)$, $\mathbf{R}=(-4,\ 1,\ 3)$, $A(-1,\ 4,\ -2)$, $B(2,\ 3,\ -1)$. (*Ответ*: а) 0; б) $\sqrt{66}$.)

Решение типового варианта

1. Даны векторы $\mathbf{a}=4\mathbf{i}+4\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=-\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ и $\mathbf{c}=3\mathbf{i}+5\mathbf{j}$. Необходимо: а) вычислить произведение векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $5\mathbf{c}$; б) найти модуль векторного произведения $3\mathbf{c}$ и $\mathbf{b}$; в) вычислить скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $3\mathbf{b}$; г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$; д) проверить, будут ли компланарны векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.

▶ а) Так как $5\mathbf{c} = 15\mathbf{i} + 25\mathbf{j}$, то

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot 5\mathbf{c} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 15 & 25 & 0 \end{vmatrix} = -100 - 180 - 200 = -480;$$

б) Поскольку $3\mathbf{c} = 9\mathbf{i} + 15\mathbf{j}$, то

$$3\mathbf{c} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 9 & 15 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 30\mathbf{i} + 27\mathbf{k} + 15\mathbf{k} - 18\mathbf{j} =$$

$$= 30\mathbf{i} - 18\mathbf{j} + 42\mathbf{k},$$

$$|3\mathbf{c} \times \mathbf{b}| = \sqrt{30^2 + (-18)^2 + 42^2} = \sqrt{2988};$$

в) Находим: $3\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\mathbf{a} \cdot 3\mathbf{b} = 4(-3) + 0 \cdot 9 + 4 \cdot 6 = 12$;

г) Так как $\mathbf{a} = (4, 0, 4)$, $\mathbf{b} = (-1, 3, 2)$ и $\frac{4}{-1} \neq \frac{0}{3} \neq \frac{4}{2}$, то векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны. Поскольку

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 4(-1) + 0 \cdot 3 + 4 \cdot 2 \neq 0,$$

то векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не ортогональны;

д) векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ компланарны, если $\mathbf{abc} = 0$. Вычисляем

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -20 - 36 - 40 \neq 0,$$

т. е. векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ не компланарны. ◀

2. Вершины пирамиды находятся в точках $A(2, 3, 4)$, $B(4, 7, 3)$, $C(1, 2, 2)$ и $D(-2, 0, -1)$. Вычислить: а) площадь грани ABC; б) площадь сечения, проходящего через середину ребер AB, AC, AD; в) объем пирамиды $ABCD$.

▶ а) Известно, что $S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$. Находим: $\overrightarrow{AB} = (2, 4, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, -1, -2)$,

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -9\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

Окончательно имеем:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{9^2 + 5^2 + 2^2} = \frac{1}{2}\sqrt{110};$$

б) Середины ребер AB, BC и AD находятся в точках $K(3;\ 5;\ 3{,}5)$, $M(1{,}5;\ 2{,}5;\ 3)$, $N(0;\ 1{,}5;\ 1{,}5)$. Далее имеем:

$$S_{\text{сеч}} = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{KM} \times \overrightarrow{KN}|,\quad \overrightarrow{KM} = (-1{,}5;\ -2{,}5;\ -0{,}5),$$

$$\overrightarrow{KN} = (-3;\ -3{,}5;\ -2),$$

$$\overrightarrow{KM} \times \overrightarrow{KN} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1{,}5 & -2{,}5 & -0{,}5 \\ -3 & -3{,}5 & -2 \end{vmatrix} = 3{,}25\mathbf{i} - 1{,}5\mathbf{j} - 2{,}25\mathbf{k},$$

$$S_{\text{сеч}} = \frac{1}{2}\sqrt{3{,}25^2 + 1{,}5^2 + 2{,}25^2} = \frac{1}{2}\sqrt{17{,}875};$$

в) Поскольку $V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}\,|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}|$, $\overrightarrow{AD} = (-4,\ -3,\ -5)$,

$$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -4 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 11,$$

то $V = 11/6$. ◀

3. Сила $\mathbf{F} = (2,\ 3,\ -5)$ приложена к точке $A(1,\ -2,\ 2)$. Вычислить: а) работу силы $\mathbf{F}$ в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения A в положение $B(1,\ 4,\ 0)$; б) модуль момента силы $\mathbf{F}$ относительно точки B.

▶ а) Так как $A = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$, $\mathbf{s} = \overrightarrow{AB} = (0,\ 6,\ -2)$, то

$$\mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 6 + (-5)(-2) = 28,\quad A = 28;$$

б) Момент силы $\mathbf{M} = \overrightarrow{BA} \times \mathbf{F}$, $\overrightarrow{BA} = (0,\ -6,\ 2)$,

$$\overrightarrow{BA} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -6 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 24\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k}.$$

Следовательно, $|\mathbf{M}| = \sqrt{24^2 + 4^2 + 12^2} = 4\sqrt{46}$. ◀

2.5. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ К ГЛ. 2

1. Даны три вектора: $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$. Найти вектор $\mathbf{x}$, удовлетворяющий следующим условиям: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = -5$, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{b} = -11$, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{c} = 20$. (*Ответ*: $\mathbf{x} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.)

2. Вектор $\mathbf{x}$, перпендикулярный к оси Oz и вектору $\mathbf{a}=(8, -15, 3)$, образует острый угол с осью Ox. Зная, что $|\mathbf{x}|=51$, найти координаты $\mathbf{x}$. (*Ответ*: $\mathbf{x}=(45, 24, 0)$.)

3. Два трактора, идущие с постоянной скоростью по берегам прямого канала, тянут барку при помощи двух канатов. Силы натяжения канатов $|\mathbf{F}_1|=800$ Н и $|\mathbf{F}_2|=960$ Н, угол между канатами равен $60°$. Определить сопротивление воды, испытываемое баркой, если она движется параллельно берегам, и углы α, β между канатами и направлением движения. (*Ответ*: $|\mathbf{s}|\approx 1530$ Н, $\alpha\approx 33°$, $\beta\approx 27°$.)

4. Даны три силы $\mathbf{F}=(2, -1, -3)$, $\mathbf{Q}=(3, 2, -1)$ и $\mathbf{P}=(-4, 1, 3)$, приложенные к точке $C(-1, 4, -2)$. Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки $A(2, 3, -1)$. (*Ответ*: $\sqrt{66}$; $\cos\alpha=1/\sqrt{66}$, $\cos\beta=-4/\sqrt{66}$, $\cos\gamma=-7/\sqrt{66}$.)

5. Объем тетраэдра $V=5$, три его вершины находятся в точках $A(2, 1, -1)$, $B(3, 0, 1)$, $C(2, -1, 3)$. Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси Oy. (*Ответ*: $D_1(0, 8, 0)$, $D_2(0, -7, 0)$.)

6. Стороны ромба лежат на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, выходящих из общей вершины. Доказать, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

7. Даны разложения векторов, служащих сторонами треугольника, по двум взаимно перпендикулярным ортам: $\overrightarrow{AB}=5\mathbf{a}+2\mathbf{b}$, $\overrightarrow{BC}=2\mathbf{a}-4\mathbf{b}$ и $\overrightarrow{CA}=-7\mathbf{a}+2\mathbf{b}$. Вычислить длины медианы $\overrightarrow{AM}$ и высоты $\overrightarrow{AD}$ треугольника ABC. (*Ответ*: $|\overrightarrow{AM}|=6$, $|\overrightarrow{AD}|=12\sqrt{5}/5$.)

8. Доказать компланарность векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, зная, что $\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}=\mathbf{0}$.

9. В трапеции $ABCD$ отношение основания $|\overrightarrow{AD}|$ к основанию $|\overrightarrow{BC}|$ равно λ. Полагая $\overrightarrow{AC}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{BD}=\mathbf{b}$, выразить через $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ векторы $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DA}$. $\left(\text{Ответ: } \overrightarrow{AB}=\frac{\lambda\mathbf{a}-\mathbf{b}}{1+\lambda},\ \overrightarrow{BC}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{1+\lambda},\ \overrightarrow{CD}=\frac{\lambda\mathbf{b}-\mathbf{a}}{1+\lambda},\ \overrightarrow{DA}=-\frac{\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})}{1+\lambda}.\right)$

10. Дан тетраэдр $OABC$. Выразить через векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ вектор $\overrightarrow{EF}$ с началом в середине E ребра $\overrightarrow{OA}$

и концом в точке F пересечения медиан треугольника ABC. (*Ответ*: $\overrightarrow{EF}=(2\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})/6$.)

11. Даны четыре вектора $\mathbf{a}=(1, 2, 3)$, $\mathbf{b}=(2, -2, 1)$, $\mathbf{c}=(4, 0, 3)$, $\mathbf{d}=(16, 10, 18)$. Найти вектор $\mathbf{x}$, являющийся проекцией вектора $\mathbf{d}$ на плоскость, определяемую векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, при направлении проектирования, параллельном вектору $\mathbf{c}$. (*Ответ*: $\mathbf{x}=(-4, 10, 3)$.)

12. В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузу $\overrightarrow{AB}$ опущен перпендикуляр $\overrightarrow{CH}$. Выразить вектор $\overrightarrow{CH}$ через векторы $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ и длины катетов $|\overrightarrow{BC}|=a$, $|\overrightarrow{CA}|=$ $=b$. (*Ответ*: $\overrightarrow{CH}=(a^2\overrightarrow{CA}+b^2\overrightarrow{CB})/(a^2+b^2)$.)

13. Даны две точки $A(1, 2, 3)$ и $B(7, 2, 5)$. На прямой AB найти такую точку M, чтобы точки B и M были расположены по разные стороны от точки A и отрезок AM был в два раза длиннее отрезка AB. (*Ответ*: $M(-11, 2, -1)$.)

14. Векторы $\mathbf{a}=(-3, 0, 4)$ и $\mathbf{b}=(5, -2, -14)$ отложены из одной точки. Найти координаты единичного вектора $\mathbf{e}$, который, будучи отложен от той же точки, делит пополам угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. (*Ответ*: $\mathbf{e}=$ $=(-2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6})$.)

15. Три последовательные вершины трапеции находятся в точках $A(-3, -2, -1)$, $B(1, 2, 3)$, $C(9, 6, 4)$. Найти четвертую вершину D этой трапеции, точку M пересечения ее диагоналей и точку N пересечения боковых сторон, зная, что длина основания AD равна 15. (*Ответ*: $D(31/3, 14/3, 2/3)$, $M(9/2, 3, 17/8)$, $N(7, 8, 9)$.)

16. К вершине куба приложены три силы, равные по величине соответственно 1, 2, 3 и направленные по диагоналям граней куба, выходящих из данной вершины. Найти величину равнодействующей этих трех сил и углы, образуемые ею с составляющими силами. $\left(\text{\textit{Ответ}: } 5;\ \arccos\frac{7}{10},\ \arccos\frac{8}{10},\ \arccos\frac{9}{10}.\right)$

17. Даны два вектора $\mathbf{a}=(8, 4, 1)$, $\mathbf{b}=(2, -2, 1)$. Найти вектор $\mathbf{c}$, компланарный векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, перпендикулярный к вектору $\mathbf{a}$, равный ему по длине и образующий с вектором $\mathbf{b}$ тупой угол. (*Ответ*: $\mathbf{c}=(-5/\sqrt{2}, 11/\sqrt{2}, -4/\sqrt{2})$.)

18. Убедившись, что векторы $\mathbf{a}=7\mathbf{i}+6\mathbf{j}-6\mathbf{k}$ и $\mathbf{b}=$

$=6\mathbf{i}+2\mathbf{j}+9\mathbf{k}$ можно рассматривать как ребра куба, найти его третье ребро. (*Ответ*: $\pm(6\mathbf{i}-9\mathbf{j}-2\mathbf{k})$.)

19. Даны три вектора $\mathbf{a}=(8,\ 4,\ 1)$, $\mathbf{b}=(2,\ -2,\ 1)$, $\mathbf{c}=(4,\ 0,\ 3)$. Найти единичный вектор $\mathbf{d}$, перпендикулярный к векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и направленный так, чтобы упорядоченные тройки векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{d}$ имели одинаковую ориентацию. $\left(\textit{Ответ}\text{: } \mathbf{d}=\left(-\frac{1}{3\sqrt{2}},\ \frac{1}{3\sqrt{2}},\ \frac{4}{3\sqrt{2}}\right).\right)$

20. Даны три некомпланарных вектора $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$, отложенные от одной точки O. Найти вектор $\overrightarrow{OD}=\mathbf{d}$, отложенный от той же точки и образующий с векторами $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ равные между собой острые углы. (*Ответ*: $\mathbf{d}=\pm(|\mathbf{a}|(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+|\mathbf{b}|(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+|\mathbf{c}|(\mathbf{a}\times\mathbf{b}))$.)

3. ПЛОСКОСТИ И ПРЯМЫЕ

3.1. ПЛОСКОСТЬ

Основная теорема. *В декартовых прямоугольных координатах уравнение любой плоскости приводится к виду*

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{3.1}$$

где A, B, C, D — заданные числа, причем $A^2 + B^2 + C^2 > 0$, и обратно, уравнение (3.1) всегда является уравнением некоторой плоскости.

Уравнение (3.1) называется *общим уравнением плоскости.* Коэффициенты A, B, C являются координатами вектора $\mathbf{n}$, перпендикулярного к плоскости, заданной уравнением (3.1). Он называется *нормальным вектором* этой плоскости и определяет ориентацию плоскости в пространстве относнтельно системы координат.

Существуют различные способы задания плоскости и соответствующие им виды ее уравнения.

1. *Уравнение плоскости по точке и нормальному вектору.* Если плоскость проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярна к вектору $\mathbf{n} = (A, B, C)$, то ее уравнение записывается в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{3.2}$$

2. *Уравнение плоскости в «отрезках».* Если плоскость пересекает оси координат Ox, Oy, Oz в точках $M_1(a, 0, 0)$, $M_2(0, b, 0)$, $M_3(0, 0, c)$ соответственно, то ее уравнение можно записать в виде

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \tag{3.3}$$

где $a \neq 0$; $b \neq 0$; $c \neq 0$.

3. *Уравнение плоскости по трем точкам.* Если плоскость проходит через точки $M_i(x_i, y_i, z_i)$ $(i = \overline{1, 3})$, не лежащие на одной прямой, то ее уравнение можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.4}$$

Раскрыв данный определитель по элементам первой строки, придем к уравнению вида (3.2).

Уравнения (3.2) — (3.4) всегда можно привести к виду (3.1). Рассмотрим простейшие задачи.

1°. Величина угла φ между плоскостями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ вычисляется на основании формулы

$$\cos\varphi = \cos(\widehat{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2}) = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1|\,|\mathbf{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\,\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}, \tag{3.5}$$

где $\mathbf{n}_1=(A_1, B_1, C_1)$, $\mathbf{n}_2=(A_2, B_2, C_2)$ — нормальные векторы данных плоскостей. С помощью формулы (3.5) можно получить *условие перпендикулярности* данных *плоскостей:*

$$\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2=0 \text{ или } A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

Условие параллельности рассматриваемых *плоскостей* имеет вид

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}.$$

2°. Расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости, заданной уравнением (3.1), вычисляется по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

АЗ-3.1

1. Записать уравнение и построить плоскость:

а) параллельную плоскости Oxz и проходящую через точку $M_0(7, -3, 5)$;

б) проходящую через ось Oz и точку $A(-3, 1, -2)$;

в) параллельную оси Ox и проходящую через две точки $M_1(4, 0, -2)$ и $M_2(5, 1, 7)$;

г) проходящую через точку $B(2, 1, -1)$ и имеющую нормальный вектор $\mathbf{n}=(1, -2, 3)$;

д) проходящую через точку $C(3, 4, -5)$ параллельно двум векторам $\mathbf{a}=(3, 1, -1)$ и $\mathbf{b}=(1, -2, 1)$.
(*Ответ:* а) $y+3=0$; б) $x+3y=0$; в) $9y-z-2=0$; г) $x-2y+3z+3=0$; д) $x+4y+7z+16=0$.)

2. Составить уравнение одной из граней тетраэдра, заданного вершинами $A(5, 4, 3)$, $B(2, 3, -2)$, $C(3, 4, 2)$, $D(-1, 2, 1)$. Проверить правильность полученного уравнения.

3. Составить уравнение плоскости:

а) проходящей через точки $M_1(1, 1, 1)$ и $M_2(2, 3, 4)$ перпендикулярно к плоскости $2x-7y+5z+9=0$;

б) проходящей через точку $M_0(7, -5, 1)$ и отсекающей на осях координат равные положительные отрезки.
(*Ответ:* а) $31x+y-11z-21=0$; б) $x+y+z-3=0$.)

4. Вычислить угол между плоскостями $x-2y+2z-3=0$ и $3x-4y+5=0$. (*Ответ:* $\cos\varphi=11/15$, $\varphi\approx 42°51'$.)

5. Вычислить расстояние между параллельными плоскостями $3x+6y+2z-15=0$ и $3x+6y+2z+13=0$. (*Ответ:* 4.)

6. Записать уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями $3x - y + 7z - 4 = 0$ и $5x + 3y - 5z + 2 = 0$. (*Ответ:* $x + 2y - 6z + 3 = 0$, $4x + y + z - 1 = 0$.)

Самостоятельиая работа

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $P(1, 0, 2)$ перпендикулярно к двум плоскостям $2x - y + 3z - 1 = 0$ и $3x + 6y + 3z - 5 = 0$. (*Ответ:* $7x - y - 5z + 3 = 0$.)

2. Составить уравнение плоскости, параллельной вектору $\mathbf{s} = (2, 1, -1)$ и отсекающей на осях Ox и Oy отрезки $a = 3$, $b = -2$. (*Ответ:* $2x - 3y + z - 6 = 0$.)

3. Составить уравнение плоскости, перпендикулярной к плоскости $2x - 2y + 4z - 5 = 0$ и отсекающей на осях Ox и Oy отрезки $a = -2$, $b = 2/3$ соответственно. (*Ответ:* $x - 3y - 2z + 2 = 0$.)

4. Найти координаты точки Q, симметричной точке $P(-3, 1, -9)$ относительно плоскости $4x - 3y - z - 7 = 0$. (*Ответ:* $Q(1, -2, -10)$.)

3.2. ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ

В зависимости от способа задания прямой в пространстве можно рассматривать различные ее уравнения.

1. *Векторно-параметрическое уравнение прямой.* Пусть прямая проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельио вектору $\mathbf{s} = (m, n, p)$,

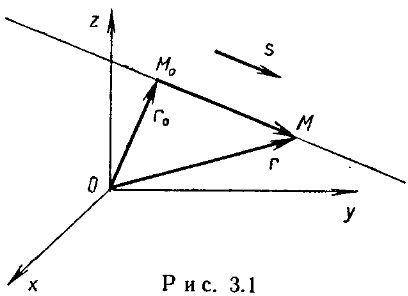


Рис. 3.1

а $M(x, y, z)$ — любая точка этой прямой. Если $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}$ — радиусы-векторы точек M_0 и M (рис. 3.1), то справедливо векторное равенство

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{s} \quad (-\infty < t < +\infty), \tag{3.6}$$

которое получается по правилу сложения векторов. Уравнение (3.6) называется ***векторно-параметрическим уравнением прямой,*** $\mathbf{s}$ — ***направляющим вектором прямой (3.6),*** t — ***параметром.***

2. *Параметрические уравнения прямой.* Из уравнения (3.6) получаем три скалярных уравнения:

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \end{array}\right\} \qquad (3.7)$$

которые называются *параметрическими уравнениями прямой.*

3. *Канонические уравнения прямой.* Разрешая уравнения в системе (3.7) относительно t и приравнивая полученные отношения, приходим к *каноническим уравнениям прямой:*

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \qquad (3.8)$$

Отметим, что, зная одио из уравнений (3.6) — (3.8), легко получить другие уравиеиия.

4. *Уравнения прямой в пространстве, проходящей через две точки.* Если прямая проходит через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то ее уравнения можно записать в виде

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (3.9)$$

5. *Общие уравнения прямой в пространстве.* Две пересекающиеся плоскости

$$\left.\begin{array}{l} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \mathbf{n}_1 = (A_1,\ B_1,\ C_1), \\ \mathbf{n}_2 = (A_2,\ B_2,\ C_2), \end{array} \qquad (3.10)$$

где $\mathbf{n}_1 \nparallel \mathbf{n}_2$, определяют прямую. Уравнения (3.10) называются *общими уравнениями прямой в пространстве.*

Направляющий вектор $\mathbf{s}$ прямой, заданной уравнениями (3.10), определяется по формуле

$$\mathbf{s} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix},$$

а координаты какой-либо точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, лежащей на этой прямой, можио найти как решение системы (3.10). Тогда уравнения данной прямой можно записать в канонической форме (3.8).

Пример 1. Прямая задана общимн уравнениями

$$\left.\begin{array}{r} x - y + 2z + 4 = 0, \\ 3x + y - 5z - 8 = 0. \end{array}\right\}$$

Записать ее канонические уравнения.

▶ Находим

$$\mathbf{s} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = (3,\ 11,\ 4).$$

Полагая в нсходной системе $z = 0$ н складывая данные уравнения, получаем $x = 1$, $y = 5$. Точка $M_0(1, 5, 0)$ лежит на данной прямой. Ее канонические уравнения имеют вид

$$\frac{x - 1}{3} = \frac{y - 5}{11} = \frac{z}{4}. \blacktriangleleft$$

Рассмотрим случаи взаимного расположения двух прямых в пространстве. Две прямые в пространстве или скрещиваются, или пересекаются, или параллельны, или совпадают. В любом случае они образуют некоторый угол (между их направляющими векторами s_1 и s_2). Если прямые заданы каноническими уравнениями:

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \text{ и } \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}, \quad (3.11)$$

то величина угла φ между ними определяется из формулы

$$\cos\varphi=\cos(\widehat{s_1,\ s_2})=\frac{s_1\cdot s_2}{|s_1|\,|s_2|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\,\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}. \quad (3.12)$$

Теперь можно записать *условие перпендикулярности прямых:*

$$s_1\cdot s_2=0 \text{ или } m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0.$$

Условие параллельности прямых (3.11) имеет вид $s_1\parallel s_2 \nparallel \overrightarrow{M_1M_2}$, а *условие* их *совпадения* — $s_1\parallel s_2\parallel\overrightarrow{M_1M_2}$, где точки $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ и $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ принадлежат прямым (3.11).

Запишем *необходимое и достаточное условие пересечения непараллельных прямых* ($s_1\nparallel s_2$), заданных уравнениями (3.11):

$$\overrightarrow{M_1M_2}\cdot s_1\cdot s_2=0 \text{ или } \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ m_1 & n_1 & p_1\\ m_2 & n_2 & p_2\end{vmatrix}=0. \quad (3.13)$$

Если условие (3.13) не выполняется, то прямые (3.11) — скрещивающиеся.

Расстояние h от точки $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ до прямой (3.8), проходящей через точку $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ в направлении вектора $s=(m,\ n,\ p)$, вычисляется по формуле

$$h=\frac{|s\times\overrightarrow{M_0M_1}|}{|s|}. \quad (3.14)$$

Рассмотрим случаи взаимного расположения прямой и плоскости. Прямая (3.8) и плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ могут пересекаться, быть параллельными либо прямая может лежать в плоскости.

Перейдем от канонических уравнений (3.8) к параметрическим (3.7) и подставим значения x, y, z из уравнений (3.7) в уравнение плоскости. Получим уравнение относительно неизвестного параметра t:

$$(Am+Bn+Cp)t+(Ax_0+By_0+Cz_0+D)=0. \quad (3.15)$$

Возможны три случая.

1. При $Am+Bn+Cp\neq0$ уравнение (3.15) имеет единственное решение: $t=-(Ax_0+By_0+Cz_0+D)/(Am+Bn+Cp)$. Подставив это значение t в параметрические уравнения прямой (3.7), найдем координаты точки пересечения M (рис. 3.2).

2. При

$$Am+Bn+Cp=0,\ Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq0 \quad (3.16)$$

уравнение (3.15) не имеет решения, и прямая не имеет общих точек с плоскостью. Формулы (3.16) являются *условиями параллельности прямой и плоскости.*

3. При

$$Am+Bn+Cp=0,\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \quad (3.17)$$

любое значение t является решением уравнения (3.15), т. е. любая точка прямой принадлежит плоскости. Равенства (3.17) называются *условиями принадлежности прямой плоскости.*

Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее ортогональной проекцией на плоскость.

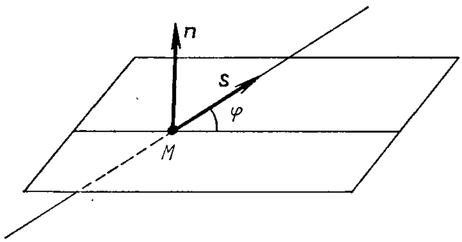


Рис. 3.2

Величина угла φ между прямой и плоскостью вычисляется по формуле

$$|\cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{s}})| = \sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \qquad (3.18)$$

АЗ-3.2

1. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2, 0, -3)$:

а) параллельно вектору $\mathbf{s} = (2, -3, 5)$;

б) параллельно прямой $\left.\begin{aligned} 2x - y + 3z - 11 = 0, \\ 5x + 4y - z + 8 = 0. \end{aligned}\right\}$

$\left(\textit{Ответ:}\ \text{а)}\ \frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{5};\ \text{б)}\ \frac{x-2}{11} = \frac{y}{-17} = \frac{z+3}{-13}.\right)$

2. Установить взаимное расположение прямой и плоскости и в случае их пересечения найти координаты точки пересечения:

а) $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3}$ и $3x - 3y + 2z - 5 = 0$;

б) $\frac{x-13}{8} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{3}$ и $x + 2y - 4z + 1 = 0$;

в) $\frac{x-7}{5} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{4}$ и $3x - y + 2z - 5 = 0$.

(*Ответ:* а) параллельны; б) прямая лежит в плоскости; в) пересекается в точке $M(2, 3, 1)$.)

3. Найти координаты точки Q, симметричной точке

$P(2, -5, 7)$ относительно прямой, проходящей через точки $M_1(5, 4, 6)$ и $M_2(-2, -17, -8)$. (*Ответ:* $Q(4, -1, -3)$.)

4. Вычислить угол между прямой

$$\left.\begin{aligned} x - 2y + 3 = 0, \\ 3y + z - 1 = 0 \end{aligned}\right\}$$

и плоскостью $2x + 3y - z + 1 = 0$. (*Ответ:* $\sin\varphi = 5/7$, $\varphi \approx 45°36'$.)

Самостоятельная работа

1. Записать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{2}$ перпендикулярно к плоскости $x + 4y - 3z + 7 = 0$. (*Ответ:* $11x - 17y - 19z + 10 = 0$.)

2. Вычислить расстояние между прямыми $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2}$ и $\frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2}$. (*Ответ:* $d = 3$.)

3. Пересекаются ли прямые $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{3}$ и $\frac{x}{3} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-3}{5}$? (*Ответ:* нет.)

3.3. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

Основная теорема. *В декартовой прямоугольной системе координат Oxy на плоскости любая прямая может быть задана уравнением первой степени относительно x и y:*

$$Ax + By + C = 0, \tag{3.19}$$

где A, B, C — некоторые действительные числа, причем $A^2 + B^2 > 0$, и обратно, всякое уравнение вида (3.19) определяет прямую.

Вектор $\mathbf{n} = (A, B)$ перпендикулярен к прямой (3.19) и называется *нормальным вектором прямой.* Уравнение (3.19) называется *общим уравнением прямой.*

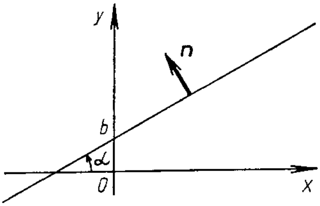


Рис. 3.3

Если $B \neq 0$, то уравнение (3.19) можно разрешить относительно y и представить в виде

$$y = kx + b \quad (k = \operatorname{tg}\alpha). \tag{3.20}$$

Последнее уравнение называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом k.* Угол α, отсчитываемый от положительного направления оси Ox до прямой против хода часовой стрелки, называется *углом наклона прямой*, число b определяет величину отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy (рис. 3.3).

Существуют и другие виды уравнений прямой на плоскости:

1) *уравнение по точке* $M_0(x_0, y_0)$ *и угловому коэффициенту* k

$$y - y_0 = k(x - x_0); \tag{3.21}$$

2) *параметрические уравнения*

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + mt, \\ y &= y_0 + nt, \end{aligned}\right\} \tag{3.22}$$

где $\mathbf{s} = (m, n)$ — направляющий вектор прямой, а точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит на прямой;

3) *каноническое уравнение прямой* (получаем его из уравнений (3.22))

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}; \tag{3.23}$$

4) *уравнение прямой в «отрезках»*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{3.24}$$

Рассмотрим случаи взаимного расположения двух прямых на плоскости.

1. Если прямые заданы общимн уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z = 0$, то угол φ между ними находится из формулы

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1|\,|\mathbf{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\,\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \tag{3.25}$$

Условие перпендикулярности этих *прямых* имеет вид

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0, \tag{3.26}$$

а *условие* их *параллельности*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}. \tag{3.27}$$

2. Если прямые заданы уравнениями вида (3.20) $y_1 = k_1x + b_1$ и $y_2 = k_2x + b_2$, то угол φ между ними находится по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \tag{3.28}$$

Для того чтобы прямые были параллельны, необходимо, чтобы выполнялось равенство $k_1 = k_2$, а для их перпендикулярности необходимо и достаточно, чтобы $k_1k_2 = -1$.

Расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой (3.19) вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{3.29}$$

АЗ-3.3

1. По данным уравнениям построить прямые, найти их угловые коэффициенты и отрезки, отсекаемые ими на осях координат: а) $2x - y + 3 = 0$; б) $5x + 2y - 8 = 0$; в) $3x + 8y + 16 = 0$; г) $3x - y = 0$.

2. Записать уравнения прямых, на которых лежат стороны равнобедренной трапеции, зная, что основания ее равны 10 и 6, а боковые стороны образуют с бо́льшим основанием угол 60°. Большее основание лежит на оси абсцисс, а ось симметрии трапеции — на оси ординат. (*Ответ:* $y = 0$, $y = 2\sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}x + 5\sqrt{3}$, $y = -\sqrt{3}x + 5\sqrt{3}$.)

3. Сила $\mathbf{F} = (m, n)$ приложена к точке $M_0(x_0, y_0)$. Записать уравнение прямой, вдоль которой направлена эта сила. (*Ответ:* $nx - my + my_0 - nx_0 = 0$.)

4. Записать уравнения прямых, которые проходят через точку $A(3, -1)$ и параллельны: а) оси абсцисс; б) оси ординат; в) биссектрисе первого координатного угла; г) прямой $y = 3x + 9$. (*Ответ:* а) $y = -1$; б) $x = 3$; в) $y = x - 4$; г) $y = 3x - 10$.)

5. Записать уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1, 3)$ и $B(4, 5)$. (*Ответ:* $2x - 5y + 17 = 0$.)

6. Луч света направлен по прямой $y = \frac{2}{3}x - 4$. Найти координаты точки M встречи луча с осью Ox и уравнение отраженного луча. (*Ответ:* $M(6, 0)$, $y = -\frac{2}{3}x + 4$.)

7. Точка $A(-2, 3)$ лежит на прямой, перпендикулярной к прямой $2x - 3y + 8 = 0$. Записать уравнение этой прямой. (*Ответ:* $3x + 2y = 0$.)

8. Точка $A(2, -5)$ является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $x - 2y - 7 = 0$. Вычислить площадь квадрата. (*Ответ:* 5.)

Самостоятельная работа

1. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $P(5, 2)$ и отсекающей равные отрезки на осях координат. (*Ответ:* $x + y - 7 = 0$.)

2. Найти уравнение прямой, параллельной прямой $12x + 5y - 52 = 0$ и отстоящей от нее на расстоянии 2. (*Ответ:* $12x + 5y - 26 = 0$ или $12x + 5y - 78 = 0$.)

3. Найти уравнение прямой, проходящей через точку

$M_0(4;\ -3)$ и образующей с осями координат треугольник площадью 3. $\left(\textit{Ответ: } \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1 \text{ или } \frac{x}{4}+\frac{y}{3/2}=-1.\right)$

4. Записать уравнение прямой, проходящей через начало координат и образующей угол 45° с прямой $y = 2x+5$. (*Ответ*: $3x+y=0$.)

5. Вычислить величину меньшего угла φ между прямыми $3x+4y-2=0$ и $8x+6y+5=0$. Доказать, что точка $A(13/14,\ -1)$ лежит на биссектрисе этого угла, и сделать рисунок. (*Ответ*: $\cos\varphi = 24/25 = 0{,}96$, $\varphi \approx 16°15'$.)

3.4. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ К ГЛ. 3

ИДЗ-3.1

1. Даны четыре точки $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$ и $A_4(x_4, y_4)$. Составить уравнения:

а) плоскости $A_1A_2A_3$; б) прямой A_1A_2;

в) прямой A_4M, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$;

г) прямой A_3N, параллельной прямой A_1A_2;

д) плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2.

Вычислить:

е) синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$;

ж) косинус угла между координатной поскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

1.1. $A_1(3,\ 1,\ 4)$, $A_2(-1,\ 6,\ 1)$, $A_3(-1,\ 1,\ 6)$, $A_4(0,\ 4,\ -1)$.

1.2. $A_1(3,\ -1,\ 2)$, $A_2(-1,\ 0,\ 1)$, $A_3(1,\ 7,\ 3)$, $A_4(8,\ 5,\ 8)$.

1.3. $A_1(3,\ 5,\ 4)$, $A_2(5,\ 8,\ 3)$, $A_3(1,\ 2,\ -2)$, $A_4(-1,\ 0,\ 2)$.

1.4. $A_1(2,\ 4,\ 3)$, $A_2(1,\ 1,\ 5)$, $A_3(4,\ 9,\ 3)$, $A_4(3,\ 6,\ 7)$.

1.5. $A_1(9,\ 5,\ 5)$, $A_2(-3,\ 7,\ 1)$, $A_3(5,\ 7,\ 8)$, $A_4(6,\ 9,\ 2)$.

1.6. $A_1(0,\ 7,\ 1)$, $A_2(2,\ -1,\ 5)$, $A_3(1,\ 6,\ 3)$, $A_4(3,\ -9,\ 8)$.

1.7. $A_1(5,\ 5,\ 4)$, $A_2(1,\ -1,\ 4)$, $A_3(3,\ 5,\ 1)$, $A_4(5,\ 8,\ -1)$.

1.8. $A_1(6,\ 1,\ 1)$, $A_2(4,\ 6,\ 6)$, $A_3(4,\ 2,\ 0)$, $A_4(1,\ 2,\ 6)$.

1.9. $A_1(7,\ 5,\ 3)$, $A_2(9,\ 4,\ 4)$, $A_3(4,\ 5,\ 7)$, $A_4(7,\ 9,\ 6)$.

1.10. $A_1(6,\ 8,\ 2)$, $A_2(5,\ 4,\ 7)$, $A_3(2,\ 4,\ 7)$, $A_4(7,\ 3,\ 7)$.

1.11. $A_1(4,\ 2,\ 5)$, $A_2(0,\ 7,\ 1)$, $A_3(0,\ 2,\ 7)$, $A_4(1,\ 5,\ 0)$.

1.12. $A_1(4,\ 4,\ 10)$, $A_2(7,10,\ 2)$, $A_3(2,\ 8,\ 4)$, $A_4(9,\ 6,\ 9)$.

1.13. $A_1(4,\ 6,\ 5)$, $A_2(6,\ 9,\ 4)$, $A_3(2,\ 10,\ 10)$, $A_4(7,\ 5,\ 9)$.

1.14. $A_1(3,\ 5,\ 4)$, $A_2(8,\ 7,\ 4)$, $A_3(5,\ 10,\ 4)$, $A_4(4,\ 7,\ 8)$.

1.15. $A_1(10,\ 9,\ 6)$, $A_2(2,\ 8,\ 2)$, $A_3(9,\ 8,\ 9)$, $A_4(7,\ 10,\ 3)$.

1.16. $A_1(1,\ 8,\ 2)$, $A_2(5,\ 2,\ 6)$, $A_3(5,\ 7,\ 4)$, $A_4(4,\ 10,\ 9)$.

1.17. $A_1(6, 6, 5)$, $A_2(4, 9, 5)$, $A_3(4, 6, 11)$, $A_4(6, 9, 3)$.
1.18. $A_1(7, 2, 2)$, $A_2(-5, 7, -7)$, $A_3(5, -3, 1)$, $A_4(2, 3, 7)$.
1.19. $A_1(8, -6, 4)$, $A_2(10, 5, -5)$, $A_3(5, 6, -8)$, $A_4(8, 10, 7)$.
1.20. $A_1(1, -1, 3)$, $A_2(6, 5, 8)$, $A_3(3, 5, 8)$, $A_4(8, 4, 1)$.
1.21. $A_1(1, -2, 7)$, $A_2(4, 2, 10)$, $A_3(2, 3, 5)$, $A_4(5, 3, 7)$.
1.22. $A_1(4, 2, 10)$, $A_2(1, 2, 0)$, $A_3(3, 5, 7)$, $A_4(2, -3, 5)$.
1.23. $A_1(2, 3, 5)$, $A_2(5, 3, -7)$, $A_3(1, 2, 7)$, $A_4(4, 2, 0)$.
1.24. $A_1(5, 3, 7)$, $A_2(-2, 3, 5)$, $A_3(4, 2, 10)$, $A_4(1, 2, 7)$.
1.25. $A_1(4, 3, 5)$, $A_2(1, 9, 7)$, $A_3(0, 2, 0)$, $A_4(5, 3, 10)$.
1.26. $A_1(3, 2, 5)$, $A_2(4, 0, 6)$, $A_3(2, 6, 5)$, $A_4(6, 4, -1)$.
1.27. $A_1(2, 1, 6)$, $A_2(1, 4, 9)$, $A_3(2, -5, 8)$, $A_4(5, 4, 2)$.
1.28. $A_1(2, 1, 7)$, $A_2(3, 3, 6)$, $A_3(2, -3, 9)$, $A_4(1, 2, 5)$.
1.29. $A_1(2, -1, 7)$, $A_2(6, 3, 1)$, $A_3(3, 2, 8)$, $A_4(2, -3, 7)$.
1.30. $A_1(0, 4, 5)$, $A_2(3, -2, 1)$, $A_3(4, 5, 6)$, $A_4(3, 3, 2)$.

2. Решить следующие задачи.

2.1. Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью, проходящей через точку $M(-2, 7, 3)$ параллельно плоскости $x - 4y + 5z - 1 = 0$. (*Ответ*: $-1/15$, $4/15$, $-1/3$.)

2.2. Составить уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка M_1M_2 перпендикулярно к этому отрезку, если $M_1(1, 5, 6)$, $M_2(-1, 7, 10)$. (*Ответ*: $x - y - 2z + 22 = 0$.)

2.3. Найти расстояние от точки $M(2;\ 0;\ -0{,}5)$ до плоскости $4x - 4y + 2z + 17 = 0$. (*Ответ*: $d = 4$.)

2.4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2, -3, 5)$ параллельно плоскости Oxy. (*Ответ*: $z - 5 = 0$.)

2.5. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и точку $A(2, 5, -1)$. (*Ответ*: $y + 5z = 0$.)

2.6. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2, 5, -1)$, $B(-3, 1, 3)$ параллельно оси Oy. (*Ответ*: $4x + 5z - 3 = 0$.)

2.7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3, 4, 0)$ и прямую $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{2}$. (*Ответ*: $y - z - 4 = 0$.)

2.8. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ и $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$. (*Ответ*: $x + 2y - 2z - 1 = 0$.)

2.9. Составить общие уравнения прямой, образованной пересечением плоскости $3x-y-7z+9=0$ с плоскостью, проходящей через ось Ox и точку $A(3,\ 2,\ -5)$. (*Ответ:* $3x-y-7z+9=0,\ 5y+2z=0$.)

2.10. Составить уравнение плоскости в «отрезках», если она проходит через точку $M(6,\ -10,\ 1)$ и отсекает на оси Ox отрезок $a=-3$, а на оси Oz — отрезок $c=2$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{x}{-3}+\frac{y}{-4}+\frac{z}{2}=1.\right)$

2.11. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2,\ 3,\ -4)$ параллельно двум векторам $\mathbf{a}=(4,\ 1,\ -1)$ и $\mathbf{b}=(2,\ -1,\ 2)$. (*Ответ:* $x-10y-6z+4=0$.)

2.12. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1,\ 1,\ 0)$, $B(2,\ -1,\ -1)$ перпендикулярно к плоскости $5x+2y+3z-7=0$. (*Ответ:* $x+2y-3z-3=0$.)

2.13. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярио к двум плоскостям $2x-3y+z-1=0$ и $x-y+5z+3=0$. (*Ответ:* $14x+9y-z=0$.)

2.14. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(3,\ -1,\ 2)$, $B(2,\ 1,\ 4)$ параллельно вектору $\mathbf{a}=(5,\ -2,\ -1)$. (*Ответ:* $2x+9y-8z+19=0$.)

2.15. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно к вектору $\overrightarrow{AB}$, если $A(5,\ -2,\ 3)$, $B(1,\ -3,\ 5)$. (*Ответ:* $4x+y-2z=0$.)

2.16. Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью, проходящей через точку $M(2,\ -3,\ 3)$ параллельно плоскости $3x+y-3z=0$. (*Ответ:* -2, -6, 2.)

2.17. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1,\ -1,\ 2)$ перпендикулярно к отрезку M_1M_2, если $M_1(2,\ 3,\ -4)$, $M_2(-1,\ 2,\ -3)$. (*Ответ:* $3x+y-z=0$.)

2.18. Показать, что прямая $\frac{x}{6}=\frac{y-3}{8}=\frac{z-1}{-9}$ параллельна плоскости $x+3y-2z-1=0$, а прямая $x=t+7$, $y=t-2$, $z=2t+1$ лежит в этой плоскости.

2.19. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3,\ -4,\ 1)$ параллельно координатной плоскости Oxz. (*Ответ:* $y+4=0$.)

2.20. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oy и точку $M(3,\ -5,\ 2)$. (*Ответ:* $2x-3z=0$.)

2.21. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(1, 2, 3)$ и $N(-3, 4, -5)$ параллельно оси Oz. (*Ответ:* $x+2y-5=0$.)

2.22. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2, 3, -1)$ и прямую $x=t-3$, $y=2t+5$, $z=-3t+1$. (*Ответ:* $10x+13y+12z-47=0$.)

2.23. Найти проекцию точки $M(4, -3, 1)$ на плоскость $x-2y-z-15=0$. (*Ответ:* $M_1(5, -5, 0)$.)

2.24. Определить, при каком значении B плоскости $x-4y+z-1=0$ и $2x+By+10z-3=0$ будут перпендикулярны. (*Ответ:* $B=3$.)

2.25. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(2, -3, -4)$ и отсекает на осях координат отличные от нуля отрезки одинаковой величины. (*Ответ:* $x+y+z+5=0$.)

2.26. При каких значениях n и A прямая $\frac{x}{3}=\frac{y-5}{n}=\frac{z+5}{6}$ перпендикулярна к плоскости $Ax+2y-2z-7=0$? (*Ответ:* $A=-1$, $n=-6$.)

2.27. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2, 3, -1)$, $B(1, 1, 4)$ перпендикулярно к плоскости $x-4y+3z+2=0$. (*Ответ:* $7x+4y+3z-23=0$.)

2.28. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно к плоскостям $x+5y-z+7=0$ и $3x-y+2z-3=0$. (*Ответ:* $9x-5y-16z=0$.)

2.29. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(2, 3, -5)$ и $N(-1, 1, -6)$ параллельно вектору $\mathbf{a}=(4, 4, 3)$. (*Ответ:* $2x-5y+4z+31=0$.)

2.30. Определить, при каком значении C плоскости $3x-5y+Cz-3=0$ и $x-3y+2z+5=0$ будут перпендикулярны. (*Ответ:* $C=-9$.)

3. Решить следующие задачи.

3.1. Доказать параллельность прямых $\frac{x-1}{6}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-1}$ и $x-2y+2z-8=0$, $x+6z-6=0$.

3.2. Доказать, что прямая $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{3}$ параллельна плоскости $2x+y-z=0$, а прямая $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-4}{3}$ лежит в этой плоскости.

3.3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(1, -3, 3)$ и образующей с осями координат углы, соответственно равные 60°, 45° и 120°. $\left(\text{Ответ: } \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{\sqrt{2}} = \frac{z-3}{-1}.\right)$

3.4. Доказать, что прямая $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{6}$ перпендикулярна к прямой

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y-4z+2=0, \\ 4x-y-5z+4=0. \end{array}\right\}$$

3.5. Составить параметрические уравнения медианы треугольника с вершинами $A(3, 6, -7)$, $B(-5, 1, -4)$, $C(0, 2, 3)$, проведенной из вершины C. (*Ответ*: $x = 2t$, $y = -3t + 2$, $z = 17t + 3$.)

3.6. При каком значении n прямая $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{n} = \frac{z}{1}$ параллельна прямой

$$\left.\begin{array}{l} x+y-z=0, \\ x-y-5z-8=0 \end{array}\right\} \quad (\text{Ответ: } n=-2.)$$

3.7. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$ и плоскости $2x + 3y + z - 1 = 0$. (*Ответ*: $M(2, -3, 6)$.)

3.8. Найти проекцию точки $P(3, 1, -1)$ на плоскость $x + 2y + 3z - 30 = 0$. (*Ответ*: $P_1(5, 5, 5)$.)

3.9. При каком значении C плоскости $3x - 5y + Cz - 3 = 0$ и $x + 3y + 2z + 5 = 0$ перпендикулярны? (*Ответ*: $C = 6$.)

3.10. При каком значении A плоскость $Ax + 3y - 5z + 1 = 0$ параллельна прямой $\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{1}$? (*Ответ*: $A = -1$.)

3.11. При каких значениях m и C прямая $\frac{x-2}{m} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{-3}$ перпендикулярна к плоскости $3x - 2y + Cz + 1 = 0$? (*Ответ*: $m = -6$, $C = 1{,}5$.)

3.12. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат параллельно прямой $x = 2t + 5$, $y = -3t + 1$, $z = -7t - 4$. $\left(\text{Ответ: } \frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{-7}.\right)$

3.13. Проверить, лежат ли на одной прямой точки $A(0,\ 0,\ 2)$, $B(4,\ 2,\ 5)$ и $C(12,\ 6,\ 11)$. (*Ответ*: лежат.)

3.14. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2,\ -5,\ 3)$ параллельно прямой $2x-y+3z-1=0,\ 5x+4y-z-7=0$. $\left(\text{\textit{Ответ}: } \frac{x-2}{-11}=\frac{y+5}{17}=\frac{z-3}{13}.\right)$

3.15. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2,\ -3,\ 4)$ перпендикулярно к прямым $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{1}$ и $\frac{x+4}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-4}{-3}$. $\left(\text{\textit{Ответ}: } \frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{5}=\frac{z-4}{3}.\right)$

3.16. При каких значениях A и B плоскость $Ax+By+6z-7=0$ перпендикулярна к прямой $\frac{x-2}{2}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z+1}{3}$? (*Ответ*: $A=4$, $B=-8$.)

3.17. Показать, что прямая $\frac{x}{6}=\frac{y-3}{-8}=\frac{z-1}{-9}$ параллельна плоскости $x+3y-2z+1=0$, а прямая $x=t+7$, $y=t-2$, $z=2t+1$ лежит в этой плоскости.

3.18. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oz и точку $K(-3,\ 1,\ -2)$. (*Ответ*: $x+3y=0$.)

3.19. Показать, что прямые $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{3}$ и $3x+y-5z+1=0,\ 2x+3y-8z+3=0$ перпендикулярны.

3.20. При каком значении D прямая $3x-y+2z-6=0,\ x+4y-z+D=0$ пересекает ось Oz? (*Ответ*: $D=3$.)

3.21. При каком значении p прямые

$$\left.\begin{aligned} x&=2t+5,\\ y&=-t+2,\\ z&=pt-7\end{aligned}\right\} \quad \text{и} \quad \left.\begin{aligned} x+3y+z+2&=0,\\ x-y-3z-2&=0\end{aligned}\right\}$$

параллельны? (*Ответ*: $p=-5$.)

3.22. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-7}{5}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-5}{4}$ и плоскости $3x-y+2z-8=0$. (*Ответ*: $M(2,\ 0,\ 1)$.)

3.23. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $K(2, -5, 3)$ параллельно плоскости Oxz. (*Ответ*: $y+5=0$.)

3.24. Составить общие уравнения прямой, образованной пересечением плоскости $x+2y-z+5=0$ с плоскостью, проходящей через ось Oy и точку $M(5, 3, 2)$. (*Ответ*: $x+2y-z+5=0$, $2x-5z=0$.)

3.25. При каких значениях B и D прямая $x-2y+z-9=0$, $3x+By+z+D=0$ лежит в плоскости Oxy? (*Ответ*: $B=-6$, $D=-27$.)

3.26. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2, 3, 3)$ параллельно двум векторам $\mathbf{a}=(-1, -3, 1)$ и $\mathbf{b}=(4, 1, 6)$. (*Ответ*: $19x-10y-11z+25=0$.)

3.27. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $E(3, 4, 5)$ параллельно оси Ox. $\left(\textit{Ответ}: \frac{x-3}{1}=\frac{y-4}{0}=\frac{z-5}{0}.\right)$

3.28. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M(2, 3, 1)$ перпендикулярно к прямой $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{3}$. $\left(\textit{Ответ}: \frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-1}{-1}.\right)$

3.29. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(1, -5, 3)$ перпендикулярно к прямым $\frac{x}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{-1}$ и $x=3t+1$, $y=-t-5$, $z=2t+3$. $\left(\textit{Ответ}: \frac{x-1}{5}=\frac{y+5}{-7}=\frac{z-3}{-11}.\right)$

3.30. Найти точку, симметричную точке $M(4, 3, 10)$ относительно прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}$. (*Ответ*: $M_1(2, 9, 6)$.)

Решение типового варианта

1. Даны четыре точки $A_1(4, 7, 8)$, $A_2(-1, 13, 0)$, $A_3(2, 4, 9)$, $A_4(1, 8, 9)$. Составить уравнения:

а) плоскости $A_1A_2A_3$; б) прямой A_1A_2;

в) прямой A_4M, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$;

г) прямой A_4N, параллельной прямой A_1A_2.

Вычислить:

д) синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$;

е) косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

▶ а) Используя формулу (3.4), составляем уравнение плоскости $A_1A_2A_3$:

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-7 & z-8 \\ -5 & 6 & -8 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда $6x-7y-9z+97=0$;

б) Учитывая уравнения прямой, проходящей через две точки (см. формулу (3.9)), уравнения прямой A_1A_2 можно записать в виде

$$\frac{x-4}{5}=\frac{y-7}{-6}=\frac{z-8}{8};$$

в) Из условия перпендикулярности прямой A_4M и плоскости $A_1A_2A_3$ следует, что в качестве направляющего вектора прямой $\mathbf{s}$ можно взять нормальный вектор $\mathbf{n}=$ $=(6, -7, -9)$ плоскости $A_1A_2A_3$. Тогда уравнение прямой A_4M с учетом уравнений (3.8) запишется в виде

$$\frac{x-1}{6}=\frac{y-8}{-7}=\frac{z-9}{-9};$$

г) Так как прямая A_4N параллельна прямой A_1A_2, то их направляющие векторы $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$ можно считать совпадающими: $\mathbf{s}_1=\mathbf{s}_2=(5, -6, 8)$. Следовательно, уравнение прямой A_4N имеет вид

$$\frac{x-1}{5}=\frac{y-8}{-6}=\frac{z-9}{8};$$

д) По формуле (3.18)

$$\sin\varphi=\frac{|6\cdot5+(-7)(-6)+(-9)8|}{\sqrt{6^2+(-7)^2+(-9)^2}\,\sqrt{5^2+(6)^2+8^2}}=$$

$$=\frac{34}{\sqrt{11}\sqrt{166}}\approx 0{,}8;$$

е) В соответствии с формулой (3.5)

$$\cos\varphi=\frac{\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1|\,|\mathbf{n}_2|}=\frac{0\cdot6+0\cdot(-7)+1\cdot(-9)}{\sqrt{1}\,\sqrt{6^2+(-7)^2+(-9)^2}}=$$

$$=\frac{-9}{\sqrt{166}}\approx -0{,}7. \blacktriangleleft$$

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(4, 3, 1)$ и $N(-2, 0, -1)$ параллельно прямой, проведенной через точки $A(1, 1, -1)$ и $B(-3, 1, 0)$.

▶ Согласно формуле (3.9), уравнение прямой AB имеет вид

$$\frac{x-1}{-4}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+1}{1}.$$

Если плоскость проходит через точку $M(4, 3, 1)$, то ее уравнение можно записать в виде $A(x-4)+B(y-3)+C(z-1)=0$. Так как эта плоскость проходит и через точку $N(-2, 0, -1)$, то выполняется условие

$$A(-2-4)+B(0-3)+C(-1-1)=0 \text{ или}$$
$$6A+3B+2C=0.$$

Поскольку искомая плоскость параллельна найденной прямой AB, то с учетом условия параллельности (3.16) имеем:

$$-4A+OB+1C=0 \text{ или } 4A-C=0.$$

Решая систему

$$\left.\begin{aligned} 6A+3B+2C&=0,\\ 4A\qquad -C&=0,\end{aligned}\right\}$$

находим, что $C=4A$, $B=-\frac{14}{3}A$. Подставив полученные значения C и B в уравнение искомой плоскости, имеем

$$A(x-4)-\frac{14}{3}A(y-3)+4A(z-1)=0.$$

Так как $A\neq 0$, то полученное уравнение эквивалентно уравнению

$$3(x-4)-14(y-3)+12(z-1)=0. ◀$$

3. Найти координаты x_2, y_2, z_2 точки M_2, симметричной точке $M_1(6, -4, -2)$ относительно плоскости $x+y+z-3=0$.

▶ Запишем параметрические уравнения прямой M_1M_2, перпендикулярной к данной плоскости: $x=6+t$, $y=-4+t$, $z=-2+t$. Решив их совместно с уравнением данной плоскости, найдем $t=1$ и, следовательно, точку M пересечения прямой M_1M_2 с данной плоскостью: $M(7, -3, -1)$. Так как точка M является серединой отрезка M_1M_2, то верны равенства (см. пример 1 из § 2.2):

$$7=\frac{6+x_2}{2},\quad -3=\frac{-4+y_2}{2},\quad -1=\frac{-2+z_2}{2},$$

из которых иаходим координаты точки M_2: $x_2=8$, $y_2=-2$, $z_2=0$. ◀

ИДЗ-3.2

1. Даны вершины треугольника ABC: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Найти:

а) уравнение стороны AB;

б) уравнение высоты CH;

в) уравнение медианы AM;

г) точку N пересечения медианы AM и высоты CH;

д) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB;

е) расстояние от точки C до прямой AB.

1.1.	$A(-2, 4)$,	$B(3, 1)$,	$C(10, 7)$,
1.2.	$A(-3, -2)$,	$B(14, 4)$,	$C(6, 8)$,
1.3.	$A(1, 7)$,	$B(-3, -1)$,	$C(11, -3)$,
1.4.	$A(1, 0)$,	$B(-1, 4)$,	$C(9, 5)$,
1.5.	$A(1, -2)$,	$B(7, 1)$,	$C(3, 7)$,
1.6.	$A(-2, -3)$,	$B(1, 6)$,	$C(6, 1)$,
1.7.	$A(-4, 2)$,	$B(-6, 6)$,	$C(6, 2)$,
1.8.	$A(4, -3)$,	$B(7, 3)$,	$C(1, 10)$,
1.9.	$A(4, -4)$,	$B(8, 2)$,	$C(3, 8)$,
1.10.	$A(-3, -3)$,	$B(5, -7)$,	$C(7, 7)$,
1.11.	$A(1, -6)$,	$B(3, 4)$,	$C(-3, 3)$,
1.12.	$A(-4, 2)$,	$B(8, -6)$,	$C(2, 6)$,
1.13.	$A(-5, 2)$,	$B(0, -4)$,	$C(5, 7)$,
1.14.	$A(4, -4)$,	$B(6, 2)$,	$C(-1, 8)$,
1.15.	$A(-3, 8)$,	$B(-6, 2)$,	$C(0, -5)$,
1.16.	$A(6, -9)$,	$B(10, -1)$,	$C(-4, 1)$,
1.17.	$A(4, 1)$,	$B(-3, -1)$,	$C(7, -3)$,
1.18.	$A(-4, 2)$,	$B(6, -4)$,	$C(4, 10)$,
1.19.	$A(3, -1)$,	$B(11, 3)$,	$C(-6, 2)$,
1.20.	$A(-7, -2)$,	$B(-7, 4)$,	$C(5, -5)$,
1.21.	$A(-1, -4)$,	$B(9, 6)$,	$C(-5, 4)$,
1.22.	$A(10, -2)$,	$B(4, -5)$,	$C(-3, 1)$,
1.23.	$A(-3, -1)$,	$B(-4, -5)$,	$C(8, 1)$,
1.24.	$A(-2, -6)$,	$B(-3, 5)$,	$C(4, 0)$,
1.25.	$A(-7, -2)$,	$B(3, -8)$,	$C(-4, 6)$,
1.26.	$A(0, 2)$,	$B(-7, -4)$,	$C(3, 2)$,
1.27.	$A(7, 0)$,	$B(1, 4)$,	$C(-8, -4)$,
1.28.	$A(1, -3)$,	$B(0, 7)$,	$C(-2, 4)$,

1.29. $A(-5,\ 1)$, $B(8,\ -2)$, $C(1,\ 4)$,
1.30. $A(2,\ 5)$, $B(-3,\ 1)$, $C(0,\ 4)$.

2. Решить следующие задачи.

2.1. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x-2y-7=0$ и $x+3y-6=0$ и отсекающей на оси абсцисс отрезок, равный 3. (*Ответ*: $x=3$.)

2.2. Найти проекцию точки $A(-8,\ 12)$ на прямую, проходящую через точки $B(2,\ -3)$ и $C(-5,\ 1)$. (*Ответ*: $A_1(-12,\ 5)$.)

2.3. Даны две вершины треугольника ABC: $A(-4,\ 4)$, $B(4,\ -12)$ и точка $M(4,\ 2)$ пересечения его высот. Найти вершину C. (*Ответ*: $C(8,\ 4)$.)

2.4. Найти уравнение прямой, отсекающей на оси ординат отрезок, равный 2, и проходящей параллельно прямой $2y-x=3$. (*Ответ*: $x-2y+4=0$.)

2.5. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,\ -3)$ и точку пересечения прямых $2x-y=5$ и $x+y=1$. (*Ответ*: $x=2$.)

2.6. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ — трапеция, если $A(3,\ 6)$, $B(5,\ 2)$, $C(-1,\ -3)$, $D(-5,\ 5)$.

2.7. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $A(3,\ 1)$ перпендикулярно к прямой BC, если $B(2,\ 5)$, $C(1,\ 0)$. (*Ответ*: $x+5y-8=0$.)

2.8. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2,\ 1)$ параллельно прямой MN, если $M(-3,\ -2)$, $N(1,\ 6)$. (*Ответ*: $2x-y+5=0$.)

2.9. Найти точку, симметричную точке $M(2,\ -1)$ относительно прямой $x-2y+3=0$. (*Ответ*: $M_1(-4/5,\ 23/5)$.)

2.10. Найти точку O пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, если $A(-1,\ -3)$, $B(3,\ 5)$, $C(5,\ 2)$, $D(3,\ -5)$. (*Ответ*: $O(3,\ 1/3)$.)

2.11. Через точку пересечения прямых $6x-4y+5=0$, $2x+5y+8=0$ провести прямую, параллельную оси абсцисс. (*Ответ*: $y=-1$.)

2.12. Известны уравнения стороны AB треугольника ABC $4x+y=12$, его высот BH $5x-4y=12$ и AM $x+y=6$. Найти уравнения двух других сторон треугольника ABC. (*Ответ*: $7x-7y-16=0$, $4x+5y-28=0$.)

2.13. Даны две вершины треугольника ABC: $A(-6,\ 2)$, $B(2,\ -2)$ и точка пересечения его высот $H(1,\ 2)$. Найти координаты точки M пересечения стороны AC и высоты BH. (*Ответ*: $M(10/17,\ 62/17)$.)

2.14. Найти уравнения высот треугольника ABC, проходящих через вершины A и B, если $A(-4,\ 2)$, $B(3,\ -5)$, $C(5,\ 0)$. (*Ответ*: $3x+5y+2=0$, $9x+2y-28=0$.)

2.15. Вычислить координаты точки пересечения перпендикуляров, проведенных через середины сторон треугольника, вершинами которого служат точки $A(2,\ 3)$, $B(0,\ -3)$, $C(6,\ -3)$. (*Ответ*: $M(3,\ -2/3)$.)

2.16. Составить уравнение высоты, проведенной через вершину A треугольника ABC, зная уравнения его сторон: $AB - 2x-y-3=0$, $AC - x+5y-7=0$, $BC - 3x-2y+13=0$. (*Ответ*: $2x+3y-7=0$.)

2.17. Дан треугольник с вершинами $A(3,\ 1)$, $B(-3,\ -1)$ и $C(5,\ -12)$. Найти уравнение и вычислить длину его медианы, проведенной из вершины C. (*Ответ*: $2x+y+2=0$, $d=54/\sqrt{17}\approx 13{,}1$.)

2.18. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку пересечения прямых $2x+5y-8=0$ и $2x+3y+4=0$. (*Ответ*: $6x+11y=0$.)

2.19. Найти уравнения перпендикуляров к прямой $3x+5y-15=0$, проведенных через точки пересечения данной прямой с осями координат. (*Ответ*: $5x-3y-25=0$, $5x-3y+9=0$.)

2.20. Даны уравнения сторон четырехугольника: $x-y=0$, $x+3y=0$, $x-y-4=0$, $3x+y-12=0$. Найти уравнения его диагоналей. (*Ответ*: $y=0$, $x=3$.)

2.21. Составить уравнения медианы CM и высоты CK треугольника ABC, если $A(4,\ 6)$, $B(-4,\ 0)$, $C(-1,\ -4)$. (*Ответ*: $7x-y+3=0$ (CM), $4x+3y+16=0$ (CK).)

2.22. Через точку $P(5,\ 2)$ провести прямую: а) отсекающую равные отрезки на осях координат; б) параллельную оси Ox; в) параллельную оси Oy. (*Ответ*: $x+y-7=0$, $y=2$, $x=5$.)

2.23. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2,\ 3)$ и составляющей с осью Ox угол: а) $45°$, б) $90°$, в) $0°$. (*Ответ*: $x-y+5=0$, $x+2=0$, $y-3=0$.)

2.24. Какую ординату имеет точка C, лежащая на одной прямой с точками $A(-6,\ -6)$ и $B(-3,\ -1)$ и имеющая абсциссу, равную 3? (*Ответ*: $y=9$.)

2.25. Через точку пересечения прямых $2x-5y-1=0$ и $x+4y-7=0$ провести прямую, делящую отрезок между точками $A(4,\ -3)$ и $B(-1,\ 2)$ в отношении $\lambda=2/3$. (*Ответ*: $2x-y-5=0$.)

2.26. Известны уравнения двух сторон ромба $2x-5y-1=0$ и $2x-5y-34=0$ и уравнение одной из его диагоналей $x+3y-6=0$. Найти уравнение второй диагонали. (*Ответ*: $3x-y-23=0$.)

2.27. Найти точку E пересечения медиан треугольника, вершинами которого являются точки $A(-3,\ 1)$, $B(7,\ 5)$ и $C(5,\ -3)$. (*Ответ*: $E(3,\ 1)$.)

2.28. Записать уравнения прямых, проходящих через точку $A(-1,\ 1)$ под углом 45° к прямой $2x+3y=6$. (*Ответ*: $x-5y+6=0$, $5x+y+4=0$.)

2.29. Даны уравнения высот треугольника ABC $2x-3y+1=0$, $x+2y+1=0$ и координаты его вершины $A(2,\ 3)$. Найти уравнения сторон AB и AC треугольника. (*Ответ*: $2x-y-1=0$ (AB), $3x+2y-12=0$ (AC).)

2.30. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $x-2y=0$, $x-y-1=0$ и точка пересечения его диагоналей $M(3,\ -1)$. Найти уравнения двух других сторон. (*Ответ*: $x-y-7=0$, $x-2y-10=0$.)

Решение типового варианта

1. Даны вершины треугольника ABC: $A(4,\ 3)$, $B(-3,\ -3)$, $C(2,\ 7)$. Найти:

а) уравнение стороны AB;

б) уравнение высоты CH;

в) уравнение медианы AM;

г) точку N пересечения медианы AM и высоты CH;

д) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB;

е) расстояние от точки C до прямой AB.

▶ а) Воспользовавшись уравнением прямой, проходящей через две точки (см. формулу (3.9)), получим уравнение стороны AB:

$$\frac{x-4}{-3-4}=\frac{y-3}{-3-3},$$

откуда

$$6(x-4)=7(y-3) \text{ или } 6x-7y-3=0;$$

б) Согласно уравнению (3.20), угловой коэффициент прямой AB $k_1=6/7$. С учетом условия перпендикулярности прямых AB и CH (см. формулу (3.28)) угловой коэффициент высоты CH $k_2=-7/6$ $(k_1k_2=-1)$. По точке $C(2,\ 7)$ и угловому коэффициенту $k_2=-7/6$ составляем уравнение высоты CH (см. уравнение (3.21)):

$$y-7=-\frac{7}{6}(x-2) \text{ или } 7x+6y-56=0;$$

в) По известным формулам (см. § 2.2) находим координаты x, y середины M отрезка BC:

$$x = (-3 + 2)/2 = -1/2, \quad y = (-3 + 7)/2 = 2.$$

Теперь по двум известным точкам A и M составляем уравнение медианы AM:

$$\frac{x-4}{-1/2-4} = \frac{y-3}{2-3} \quad \text{или} \quad 2x - 9y + 19 = 0;$$

г) Для нахождения координат точки N пересечения медианы AM и высоты CH составляем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 7x + 6y - 56 = 0, \\ 2x - 9y + 19 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Решая ее, получаем $N(26/5, 49/15)$;

д) Так как прямая, проходящая через вершину C, параллельна стороне AB, то их угловые коэффициенты равны $k_1 = 6/7$. Тогда, согласно уравнению (3.21), по точке C и угловому коэффициенту k_1 составляем уравнение прямой CD:

$$y - 7 = \frac{6}{7}(x - 2) \quad \text{или} \quad 6x - 7y + 37 = 0;$$

е) Расстояние от точки C до прямой AB вычисляем по формуле (3.29):

$$d = |CH| = \frac{|6 \cdot 2 - 7 \cdot 7 - 3|}{\sqrt{6^2 + (-7)^2}} = \frac{40}{\sqrt{85}} \approx 4{,}4.$$

Решение данной задачи проиллюстрировано на рис. 3.4. ◁

2. Известны вершины $O(0, 0)$, $A(-2, 0)$ параллелограмма $OACD$ и точка пересечения его диагоналей $B(2, -2)$. Записать уравнения сторон параллелограмма.

▶ Уравнение стороны OA можно записать сразу: $y = 0$. Далее, так как точка B является серединой диагонали AD (рис. 3.5), то по формулам деления отрезка пополам (см. § 2.2) можно вычислить координаты вершины $D(x, y)$:

$$2 = \frac{-2 + x}{2}, \quad -2 = \frac{0 + y}{2},$$

откуда $x = 6$, $y = -4$.

Теперь можно найти уравнения всех остальных сторон. Учитывая параллельность сторон OA и CD, составляем уравнение стороны CD: $y = -4$. Уравнение стороны OD составляем по двум известным точкам:

$$\frac{x-0}{6-0}=\frac{y-0}{-4-0},$$

откуда $y=-\frac{2}{3}x$, $2x+3y=0$.

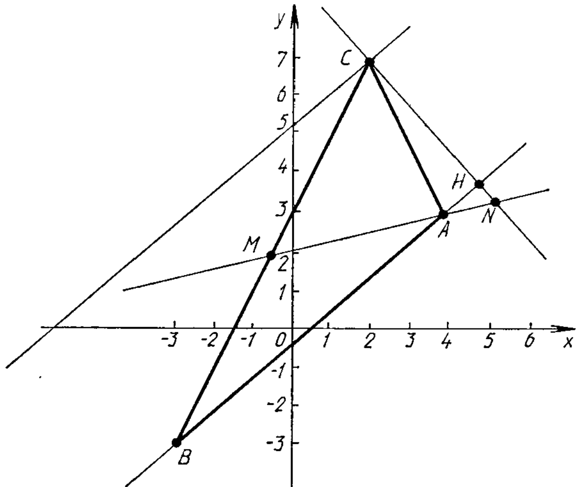


Рис. 3.4

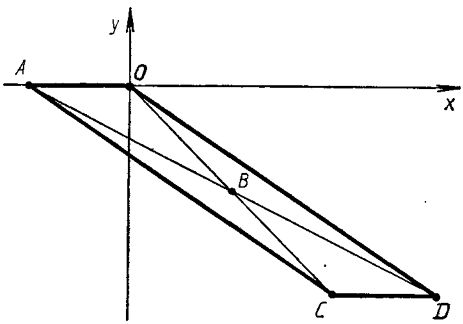


Рис. 3.5

Наконец, уравнение стороны AC находим, учитывая тот факт, что она проходит через известную точку $A(-2, 0)$ параллельно известной прямой OD (см. уравнение (3.21)):

$$y-0=-\frac{2}{3}(x+2) \text{ или } 2x+3y+4=0. \blacktriangleleft$$

3.5. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ К ГЛ. 3

1. Составить уравнение биссектрисы того угла между прямыми $x-7y=1$ и $x+y=-7$, внутри которого лежит точка $A(1, 1)$. (*Ответ*: $3x-y+17=0$.)

2. Составить уравнения сторон параллелограмма $ABCD$, зная, что его диагонали пересекаются в точке $M(1, 6)$, а стороны AB, BC, CD и DA проходят соответственно через точки $P(3, 0)$, $Q(6, 6)$, $R(5, 9)$, $S(-5, 4)$. (*Ответ*: $x+2y-3=0$, $2x-y-6=0$, $x+2y-23=0$, $2x-y+14=0$.)

3. Дано уравнение стороны ромба $x+3y-8=0$ и уравнение его диагонали $2x+y+4=0$. Записать уравнения остальных сторон ромба, зная, что точка $A(-9, -1)$ лежит на стороне, параллельной данной. (*Ответ*: $x+3y+12=0$, $3x-y-4=0$, $3x-y+16=0$.)

4. Зная уравнения двух сторон треугольника ABC $2x+3y-6=0$ (AB), $x+2y-5=0$ (AC) и внутренний угол при вершине B, равный $\pi/4$, записать уравнение высоты, опущенной из вершины A на сторону BC. (*Ответ*: $x-5y+23=0$.)

5. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $A(2, -4)$ и уравнения биссектрис двух его углов: $x+y-2=0$ и $x-3y-6=0$. (*Ответ*: $x+7y-6=0$, $x-y-6=0$, $7x+y-10=0$.)

6. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $A(-4, 2)$ и уравнения двух медиан: $3x-2y+2=0$ и $3x+5y-12=0$. (*Ответ*: $2x+y-8=0$, $x-3y+10=0$, $x+4y-4=0$.)

7. В треугольнике с вершинами $A(-3, -1)$, $B(1, -5)$, $C(9, 3)$ стороны AB и AC разделены в отношении $\lambda=3$, считая от общей вершины A. Доказать, что прямые, соединяющие точки деления с противоположными вершинами, и медиана пересекаются в одной точке.

8. Прямые $3x+4y-30=0$ и $3x-4y+12=0$ касаются окружности, радиус которой $R=5$. Вычислить площадь четырехугольника, образованного этими касательными и радиусами круга, проведенными в точки касания. (*Ответ*: $S\approx 1{,}68$.)

9. Даны две точки $A(-3, 8)$ и $B(2, 2)$. На оси Ox найти такую точку M, чтобы ломаная линия AMB имела наименьшую длину. (*Ответ*: $M(1, 0)$.)

10. Показать, что прямые $\frac{x+3}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+1}{1}$

и $x=3z-4$, $y=z+2$ пересекаются, и найти точку A их пересечения. (*Ответ*: $A(-1, 3, 1)$.)

11. Найти расстояние от точки $P(7, 9, 7)$ до прямой $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{2}$. (*Ответ*: $\sqrt{22}$.)

12. Найти кратчайшее расстояние между двумя непересекающимися прямыми: $\frac{x-9}{4}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{1}$ и $\frac{x}{-2}=$ $=\frac{y+7}{9}=\frac{z-2}{2}$. (*Ответ*: 7.)

13. Даны вершины треугольника $A(4, 1, -2)$, $B(2, 0, 0)$, $C(-2, 3, -5)$. Составить уравнения его высоты, опущенной из вершины B на противолежащую сторону. $\Big($*Ответ*: $\frac{x-2}{74}=\frac{y}{57}=\frac{z}{-110}$.$\Big)$

14. Дан куб, длина ребра которого равна единице. Вычислить расстояние от вершины куба до его диагонали, не проходящей через эту вершину. (*Ответ*: $d=\sqrt{2/3}$.)

15. На плоскости Oxy найти такую точку M, сумма расстояний которой до точек $A(-1, 2, 5)$ и $B(11, -16, 10)$ была бы наименьшей. (*Ответ*: $M(3, -4, 0)$.)

16. Точка $M(x, y, z)$ движется прямолинейно и равномерно из начального положения $M_0(15, -24, -16)$ со скоростью $v=12$ в направлении вектора $\mathbf{s}=(-2, 2, 1)$. Убедившись, что траектория движения точки M пересекает плоскость $3x+4y+7z-17=0$, найти координаты точки M_1 их пересечения. (*Ответ*: $M_1(-25, 16, 4)$.)

17. Доказать, что прямые $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-5}{4}$ и $\frac{x-7}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{-2}$ лежат в одной плоскости, и составить уравнение этой плоскости. (*Ответ*: $2x-16y-13z+$ $+31=0$.)

18. Найти проекцию точки $C(3, -4, -2)$ на плоскость, проходящую через параллельные прямые $\frac{x-5}{13}=$ $=\frac{y-6}{1}=\frac{z+3}{-4}$, $\frac{x-2}{13}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+3}{-4}$. (*Ответ*: $C_1(2,$ $-3, -5)$.)

19. На плоскости Oxy через точку $M(4, -3)$ провести прямую так, чтобы площадь треугольника, образованного ею и осями координат, была равна 3. (*Ответ*: $3x+2y-$ $-6=0$ или $3x+8y+12=0$.)

20. Нужно восстановить границы квадратного участка земли по трем сохранившимся столбам: один — в центре участка, остальные—на двух противоположных границах. На плане положение центрального столба определено точкой $M(1,\ 6)$, а боковых — точками $A(5,\ 9)$ и $B(3,\ 0)$. Составить уравнения прямых, изображающих границы участка. (*Ответ*: $x+2y-23=0$, $x+2y-3=0$, $2x-y-6=0$, $2x-y+14=0$.)

21. Доказать, что уравнение плоскости, проходящей через прямую $x=x_0+lt$, $y=y_0+mt$, $z=z_0+nt$ перпендикулярно к плоскости $Ax+By+Cz+D=0$, может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l & m & n \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0.$$

22. Составить параметрические уравнения прямой, которая проходит параллельно плоскостям $3x+12y-3z-5=0$, $3x-4y+9z+7=0$ и пересекает прямые $\frac{x+5}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+1}{3}$, $\frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{4}$. (*Ответ*: $x=8t-3$, $y=-3t-1$, $z=-4t+2$.)

4. ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ

4.1. ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Линией (кривой) второго порядка называется множество M точек плоскости, декартовы координаты x, y которых удовлетворяют алгебраическому уравнению второй степени

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0, \tag{4.1}$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a_0 — постоянные действительные числа. Уравнение (4.1) называется *общим уравнением линии второго порядка.*

Рассмотрим частные случаи уравнения (4.1).

1. Окружность радиусом R с центром в точке $C(x_0, y_0)$ задается уравнением

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \tag{4.2}$$

2. Эллипс с полуосями a и b, центром в начале координат и вершинами A, A', B, B', расположенными на осях координат, определяется простейшим (каноническим) уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{4.3}$$

На рис. 4.1, *а* изображен эллипс, у которого $a > b$ (a — большая полуось, b — малая), а на рис. 4.1, *б* — эллипс, у которого $a < b$ (a —

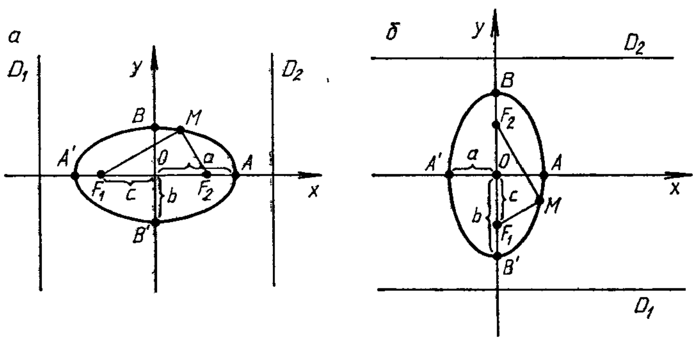


Рис. 4.1

малая полуось, b — большая). Точки F_1 и F_2 называют *фокусами.* По определению любая точка эллипса M удовлетворяет условию $F_1M + F_2M = 2a$ в случае $a > b$ или $F_1M + F_2M = 2b$ в случае $a < b$. Если обозначить $c = OF_1 = OF_2$, то в первом случае $b^2 = a^2 - c^2$, а во втором

$a^2 = b^2 - c^2$. Прямые D_1 и D_2 называются *директрисами эллипса*; их уравнения по определению имеют вид

$$x = \pm a/\varepsilon = \pm a^2/c,$$

если $a > b$, или

$$y = \pm b/\varepsilon = \pm b^2/c,$$

если $a < b$ (см. рис. 4.1). Оси координат являются осями симметрии эллипса.

Число ε, равное отношению расстояния между фокусами F_1F_2 к длине большой оси, называется *эксцентриситетом эллипса:*

$$\varepsilon = c/a \ (a > b) \ \text{и} \ \varepsilon = c/b \ (a < b).$$

В любом случае $0 \leqslant \varepsilon < 1$.

3. Гипербола с действительной полуосью a, мнимой полуосью b, центром в начале координат и вершинами A и A' на оси Ox имеет следующее каноническое уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (4.4)$$

На рис. 4.2 изображена гипербола с асимптотами C_1 и C_2 $\left(y = \pm \dfrac{b}{a} x\right)$, эксцентриситетом $\varepsilon = c/a$, директрисами D_1 и D_2 ($x = \pm a/\varepsilon$), фокусами $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$. Для гиперболы всегда справедливо равенство $b^2 = c^2 - a^2$, и поэтому $\varepsilon = \sqrt{1 + b^2/a^2} > 1$. Для любой точки M выполняется условие $|F_1M - F_2M| = 2a$, которое может служить определением гиперболы.

Гипербола, уравнение которой имеет вид

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (4.5)$$

называется *сопряженной с гиперболой (4.4)*. Ее вершины находятся в точках B и B' на оси Oy, асимптоты совпадают с асимптотами гиперболы (4.4), $\varepsilon = c/b$ (см. рис. 4.2). Как и в случае эллипса, оси координат являются осями симметрии гиперболы.

4. Парабола с вершиной в начале координат, симметричная относительно оси Ox, имеет следующее каноническое уравнение:

$$y^2 = 2px.$$

Она изображена на рис. 4.3. Точка $F(p/2, 0)$ называется *фокусом*, а прямая D, задаваемая уравнением $x = -p/2$,— *директрисой параболы*. Для любой точки M параболы верно равенство $FM = MN$. Число $p > 0$ называется *параметром параболы*. Ось Ox является ее осью симметрии.

Уравнения $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$, $x^2 = -2py$ определяют параболы, иначе ориентированные относительно осей координат (рис. 4.4, *а—в*).

Замечание. Уравнения вида

$$\frac{(x - x_0)^2}{2} \pm \frac{(y - y_0)^2}{2} = 1, \ (y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$

определяют соответственно эллипс, гиперболу и параболу, которые параллельно смещены относительно системы координат Oxy таким образом, что центр эллипса и гиперболы и вершина параболы находятся в точке $C(x_0, y_0)$.

Директрисы, фокусы и точки эллипса, гиперболы и параболы обладают одним замечательным свойством: отношение расстояния от любой точки M кривой до фокуса к расстоянию от этой точки до соответствующей выбранному фокусу директрисы есть величина постоянная, равная

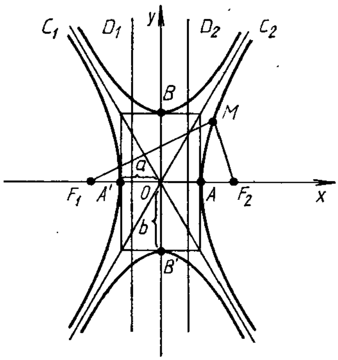


Рис. 4.2

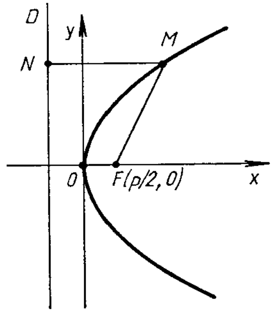


Рис. 4.3

эксцентриситету кривой. У параболы эксцентриситет следует считать равным 1. Это свойство можно принять за определение кривых второго порядка.

Пример 1. Даны точка $A(1, 0)$ и прямая $x = 2$. В декартовых координатах составить уравнение линии, каждая точка $M(x, y)$ которой: а) в два раза ближе к точке A, чем к данной прямой; б) в два раза дальше от точки A, чем от данной прямой; в) равноудалена от точки A и прямой $x = 2$.

▶ а) По условию $2MA = MN$ (рис. 4.5). Отсюда, так как $N(2, y)$, то

$$2\sqrt{(x-1)^2+y^2} = \sqrt{(x-2)^2}, \quad 4(x^2-2x+1+y^2) = x^2-4x+4,$$
$$3x^2+4y^2-4x=0, \quad 3(x^2-(4/3)x+4/9)+4y^2=4/3,$$
$$3(x-2/3)^2+4y^2=4/3, \quad \frac{(x-2/3)^2}{4/9}+\frac{y^2}{1/3}=1.$$

Следовательно, искомая линия — эллипс. Точка A совпадает с правым его фокусом, а прямая $x = 2$ — правая директриса;

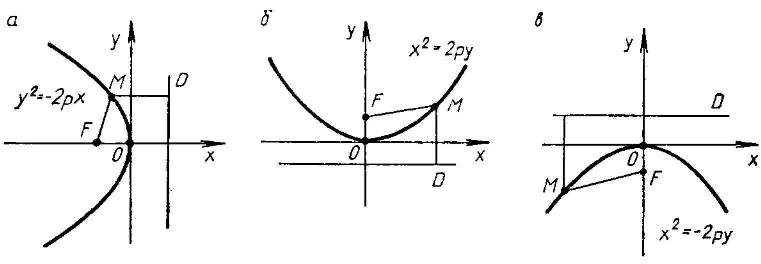


Рис. 4.4

б) По условию $MA = 2MN$ (рис. 4.6). Следовательно,

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2} = 2\sqrt{(x-2)^2},$$
$$x^2-2x+1+y^2 = 4x^2-16x+16,\ 3x^2-y^2-14x+15=0,$$
$$3(x^2-(14/3)x+49/9)-y^2 = 49/3-15 = 4/3,$$
$$\frac{(x-7/3)^2}{4/9} - \frac{y^2}{4/3} = 1,$$

т. е. данная линия — гипербола. Точка A совпадает с ее левым фокусом, $x=2$ — левая директриса;

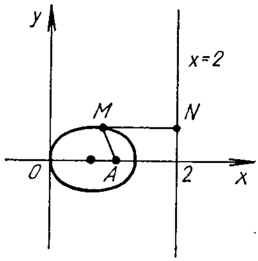


Рис. 4.5

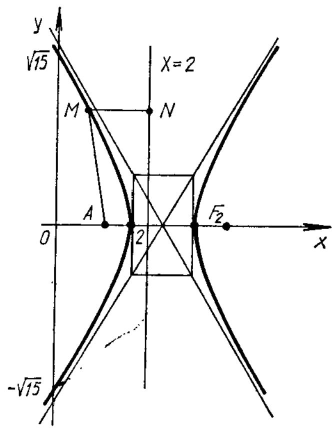


Рис. 4.6

в) По условию $MA = MN$ (рис. 4.7). Следовательно,

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2} = \sqrt{(x-2)^2},\ x^2-2x+1+y^2 = x^2-4x+4,$$
$$y^2 = -2x+3,\ y^2 = -2(x-3/2).$$

Получили уравнение параболы (см. рис. 4.7). Точка A совпадает с фокусом, прямая $x=2$ — директриса. ◀

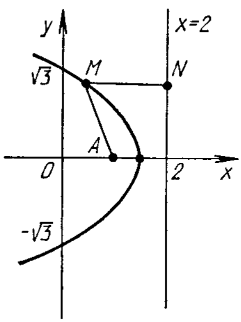


Рис. 4.7

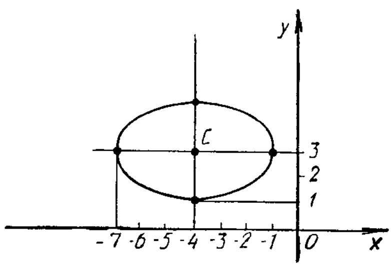


Рис. 4.8

Если общее уравнение (4.1) определяет эллипс, гиперболу или параболу, то поворотом около начала координат осей координат на угол α, определяемый из уравнения $\operatorname{tg} 2\alpha = 2a_{12}/(a_{11} - a_{22})$, и параллельным переносом этих осей всегда можно добиться того, чтобы в новой системе координат уравнения данных кривых стали каноническими.

Особенно простым является приведение уравнения (4.1) к каноническому виду в случае $a_{12} = 0$, когда можно применить *метод выделения полных квадратов.*

Пример 2. Привести к каноническому виду уравнение линии $4x^2 + 9y^2 + 32x - 54y + 109 = 0$ и построить ее.

▶ Дополним члены, содержащие x, и члены, содержащие y, до полных квадратов. Получим

$$4(x^2 + 8x + 16) + 9(y^2 - 6y + 9) = 64 + 81 - 109 = 36,$$

$$4(x + 4)^2 + 9(y - 3)^2 = 36, \quad \frac{(x+4)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1,$$

т. е. имеем эллипс, центр которого лежит в точке $C(-4, 3)$, большая полуось $a = 3$, малая полуось $b = 2$ (рис. 4.8). ◀

АЗ-4.1

1. Дан эллипс, каноническое уравнение которого имеет вид $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. Найти координаты его фокусов, эксцентриситет, уравнения директрис. Сделать рисунок. (*Ответ:* $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$, $\varepsilon = 0{,}8$, $x = \pm 25/4$.)

2. По каноническому уравнению гиперболы $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{64} = 1$ найти ее полуоси, фокусы, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис. Сделать рисунок.

3. Построить параболу, ее директрису и фокус, зная каноническое уравнение параболы: $x^2 = 6y$.

4. Составить каноническое уравнение эллипса, если известно, что:

а) его малая ось равна 24, расстояние между фокусами равно 10;

б) расстояние между фокусами равно 6, эксцентриситет равен 3/5;

в) расстояние между фокусами равно 4, расстояние между директрисами равно 5;

г) расстояние между директрисами равно 32, эксцентриситет равен 0,5.

5. Составить каноническое уравнение гиперболы, если известно, что:

а) расстояние между вершинами равно 8, расстояние между фокусами равно 10;

б) действительная полуось равна 5, вершины делят расстояние между центром и фокусом пополам;

в) действительная ось равна 6, гипербола проходит через точку $A(9, -4)$;

г) точки $P(-5, 2)$ и $Q(2\sqrt{5}, 2)$ лежат на гиперболе.

6. Составить каноническое уравнение параболы, если известно, что:

а) парабола имеет фокус $F(0, 2)$ и вершину в точке $O(0, 0)$;

б) парабола симметрична относительно оси абсцисс и проходит через точки $O(0, 0)$ и $M(1, -4)$;

в) парабола симметрична относительно оси ординат Oy и проходит через точки $O(0, 0)$ и $N(6, -2)$.

7. С помощью выделения полных квадратов и переноса начала координат упростить уравнения линий, определить их тип, размеры и расположение на плоскости (сделать рисунок):

а) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$;
б) $2x^2 + 5y^2 + 8x - 10y - 17 = 0$;
в) $x^2 - 6y^2 - 12x + 36y - 48 = 0$;
г) $x^2 - 8x + 2y + 18 = 0$.

Самостоятельная работа

1. Найти уравнение окружности, если концы одного из ее диаметров находятся в точках $A(3, 9)$ и $B(7, 3)$. (*Ответ:* $(x-5)^2 + (y-6)^2 = 13$.)

2. Составить уравнение гиперболы, имеющей вершины в фокусах эллипса $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{144} = 1$, а фокусы в его вершинах. $\left(\textit{Ответ: } \frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{144} = 1.\right)$

3. Составить уравнение траектории движения точки $M(x, y)$, если в любой момент времени она остается равноудаленной от точки $A(8, 4)$ и оси ординат. (*Ответ:* $(y - 4)^2 = 16(x - 4)$ — парабола.)

4. Записать уравнение траектории движения точки $M(x, y)$, если в любой момент времени она находится в 1,25 раза дальше от точки $A(5, 0)$, чем от прямой $5x - 16 = 0$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.\right)$

5. Ракета, пуск которой произведен под острым углом к горизонту, описала дугу параболы и упала на расстоянии 60 км от места старта. Зная, что наибольшая высота, достигнутая ракетой, равна 18 км, записать уравнение параболической траектории, приняв место старта за начало координат, а место падения — лежащим на положительной полуоси Ox, и определить параметр траектории. (*Ответ:* $(x-30)^2 = -50(y-18)$, $p=25$ км.)

4.2. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Поверхностью второго порядка называется множество точек пространства, декартовы координаты x, y которых удовлетворяют алгебраическому уравнению второй степени

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + \\ + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0,$$

где коэффициенты a_{11}, a_{22}, ..., a_0 — постоянные числа. Это уравнение называется *общим уравнением поверхности второго порядка.*

Существует девять классов невырожденных поверхностей второго порядка, канонические уравнения которых можно получить из общего уравнения с помощью преобразований системы координат (параллельного переноса и поворота в пространстве осей координат). В результате этих преобразований получаем следующие канонические уравнения:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{(эллипсоиды)}, \tag{4.6}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{(однополостные гиперболоиды)}, \tag{4.7}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad \text{(двуполостные гиперболоиды)}, \tag{4.8}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \text{(конусы второго порядка)}, \tag{4.9}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z \quad \text{(эллиптические параболоиды)}, \tag{4.10}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \quad \text{(гиперболические параболоиды)}, \tag{4.11}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{(эллиптические цилиндры)}, \tag{4.12}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{(гиперболические цилиндры)}, \tag{4.13}$$

$$x^2 = 2py \quad \text{(параболические цилиндры)}. \tag{4.14}$$

Здесь параметры a, b, c, p — постоянные и положительные числа, характеризующие в определенном смысле свойства поверхностей.

Получение канонического уравнения из общего является довольно сложной процедурой, но в случае отсутствия членов с xy, xz, yz ($a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$) приведение общего уравнения к каноническому виду достигается (как и в случае линий второго порядка) методом выделения полных квадратов и параллельным переносом осей координат.

Пример 1. Привести к каноническому виду уравнение $x^2 - 2y^2 + 4z^2 + 2x - 12y - 8z - 3 = 0$, выяснить тип, свойства и расположение заданной этим уравнением поверхности относительно системы координат $Oxyz$.

▶ Выделив полные квадраты при входящих в уравнение переменных (т. е. сгруппировав члены уравнения указанным ниже образом), имеем:

$$(x^2+2x+1-1)-2(y^2+6y+9-9)+4(z^2-2z+1-1)-3=0,$$
$$(x+1)^2-2(y+3)^2+4(z-1)^2=3+1-18+4=-10,$$
$$\frac{(x+1)^2}{10}-\frac{(y+3)^2}{5}+\frac{(z-1)^2}{5/2}=-1.$$

При параллельном переносе осей координат, задаваемом формулами: $x'=x+1$, $y'=y+3$, $z'=z-1$, начало координат новой си-

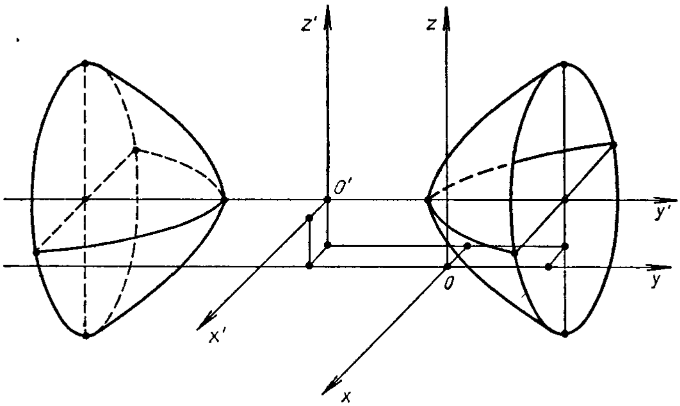


Рис. 4.9

стемы окажется в точке $O'(-1,\ -3,\ 1)$, а уравнение поверхности примет канонический вид

$$\frac{x'^2}{10}-\frac{y'^2}{5}+\frac{z'^2}{5/2}=-1.$$

Следовательно, данная поверхность — двуполостный гиперболоид, который имеет $a=\sqrt{10}$, $b=\sqrt{5}$, $c=\sqrt{5/2}$, вытянут вдоль новой оси $O'y'$, а центр его находится в точке $O'(-1,\ -3,\ 1)$ (рис. 4.9). ◀

Форма и свойства всех перечисленных выше поверхностей второго порядка (4.6) — (4.14) устанавливаются с помощью *метода параллельных сечений*. Суть метода состоит в том, что поверхности пересекаются плоскостями, параллельными координатным плоскостям, а затем по виду и свойствам получаемых в сечениях линий делается вывод о форме и свойствах самой поверхности.

Пример 2. Установить форму и свойства однополостного гиперболоида $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{9}=1$. Сделать рисунок.

▶ Будем пересекать поверхность горизонтальными плоскостями $z=h$. Из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1+\frac{h^2}{9},\\ &z=h \end{aligned}\right\}$$

видно, что в любом таком сечении получается эллипс с полуосями $a_1=4\sqrt{1+h^2/9}$, $b_1=2\sqrt{1+h^2/9}$. Сечение плоскостями $x=h$ дает гиперболы:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{9}=1-\frac{h^2}{4},\\ &x=h, \end{aligned}\right\}$$

а сечение плоскостями $y=h$ — гиперболы:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x^2}{16}-\frac{z^2}{9}=1-\frac{h^2}{4},\\ &y=h \end{aligned}\right\}$$

(только с другими полуосями).

При $h=0$ получим сечения поверхности (однополостного гиперболоида) координатными плоскостями $z=0$, или $x=0$, или $y=0$. Эти сечения называются *главными* (рис. 4.10). Размеры главных сечений очевидны: в плоскости $z=0$ эллипс имеет полуоси $a=4$, $b=2$; в плоскости $x=0$ гипербола имеет действительную полуось $b=2$, мнимую $c=3$; в плоскости $y=0$ гипербола имеет действительную полуось $a=4$, мнимую $c=3$. Координатные плоскости являются плоскостями симметрии поверхности. ◀

В инженерных задачах часто встречаются различные *поверхности вращения*, т. е. поверхности, получаемые вращением некоторой плоской линии вокруг заданной прямой (называемой *осью поверхности вращения*), лежащей с этой линией в одной плоскости.

Если линия лежит в плоскости Oyz и имеет уравнения $F(y, z)=0$, $x=0$, то при вращении ее вокруг оси Oz получаем поверхность вращения, уравнение которой имеет вид $F(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$; если вращение совершать вокруг оси Oy, то уравнение поверхности вращения (другой!) запишется в виде $F(y, \pm\sqrt{x^2+z^2})=0$.

Пример 3. Записать уравнение поверхности вращения, полученной при вращении гиперболы $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{b^2}=1$: а) вокруг оси Oz; б) вокруг оси Oy.

▶ а) Согласно изложенному выше правилу, в уравнении гиперболы заменяем y на $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ и получаем уравнение поверхности вращения:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1.$$

Это однополостный гиперболоид вращения, у которого в горизонтальных сечениях вместо эллипсов лежат окружности (см. пример 2);

б) При вращении данной гиперболы вокруг оси Oy следует в ее уравнении заменить z на $\pm\sqrt{x^2+z^2}$. Тогда имеем:

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2+z^2}{b^2}=1 \text{ или } \frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=-1.$$

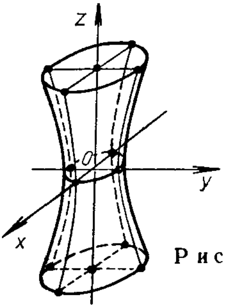


Рис. 4.10

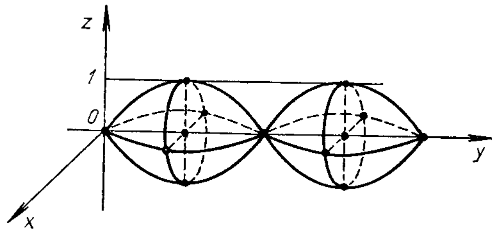


Рис. 4.11

Это двуполостный гиперболоид вращения, вытянутый вдоль оси Oy (см. пример 1), сечения которого плоскостями $y = h > a$ представляют собой окружности, а не эллипсы, как в примере 1. ◀

Пример 4. Составить уравнение поверхности, полученной вращением дуги синусоиды $z = \sin y$, $x = 0$ $(0 \leqslant y \leqslant 2\pi)$ вокруг оси Oy.

▶ Имеем:

$$z = \sin\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}\right),\quad z = \pm\sin\sqrt{x^2+y^2}$$

(рис. 4.11). ◀

АЗ-4.2

1. Методом параллельных сечений исследовать форму поверхности и построить ее:

а) $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 2$; б) $2x^2 - 9y^2 - z^2 = 36$;
в) $-2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 0$; г) $2y^2 + z^2 = 2x$;
д) $z^2 - y^2 = x$; е) $2x^2 + 4z^2 = 4$; ж) $y^2 - 6z = 0$.

2. Определить вид поверхности и построить ее:

а) $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 5y - 4z = 0$;
б) $36x^2 + 16y^2 - 9z^2 + 18z = 9$;
в) $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$;
г) $5x^2 + y^2 + 10x - 6y - 10z + 14 = 0$;
д) $x^2 + 3z^2 - 8x + 18z + 34 = 0$.

3. Построить тело, ограниченное поверхностями:

а) $x^2 = z$, $z = 0$, $2x - y = 0$, $x + y = 9$;
б) $z^2 = 4 - y$, $x^2 + y^2 = 4y$;
в) $z = y^2$, $x^2 + y^2 = 9$, $z = 0$;
г) $z = y$, $z = 0$, $y = \sqrt{4 - x}$, $y = \frac{1}{2}(x - 1)$.

Самостоятельная работа

Построить тело, ограниченное указанными поверхностями.

1. $z=4-x^2$, $z=0$, $x^2+y^2=4$.
2. $z=2x^2+y^2$, $z=0$, $x=0$, $y=0$, $x+y=1$.
3. $x^2+y^2+z^2=9$, $z+1=x^2+y^2$ $(z\geqslant -1)$.
4. $x^2+y^2=z$, $x^2+y^2=4$, $z=0$.

4.3. ЛИНИИ, ЗАДАННЫЕ УРАВНЕНИЯМИ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ

Полярные координаты точки и уравнение линии в полярных координатах. Положение некоторой точки M на плоскости в прямоугольной декартовой системе координат Oxy определяется числами x и y, т. е. $M(x, y)$ (рис. 4.12). Эту точку можно задать и другим способом,

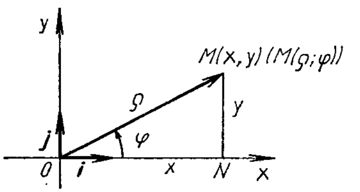


Рис. 4.12

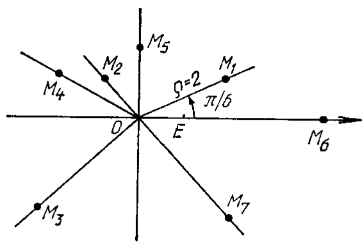


Рис. 4.13

например с помощью расстояния $\rho=|\overrightarrow{OM}|$ и угла φ, отсчитываемого против хода часовой стрелки от оси Ox, называемой *полярной осью*, до радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$. В этом случае используется запись $M(\rho;\ \varphi)$. Расстояние ρ называется *полярным радиусом*, φ — *полярным углом* точки M, а точка O — *полюсом*.

Связь между декартовыми x, y и полярными ρ, φ координатами точки M при указанном расположении осей Ox и Oy, вектора $\overrightarrow{OM}$ и угла φ выражается формулами:

$$\left.\begin{aligned} x&=\rho\cos\varphi,\ \rho\geqslant 0,\\ y&=\rho\sin\varphi,\ 0\leqslant\varphi<2\pi \end{aligned}\right\} \tag{4.15}$$

(см. рис. 4.12). С помощью формул (4.15) можно находить декартовы координаты точки M по ее полярным координатам. Если эти формулы разрешить относительно ρ и φ, то получим формулы:

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2},\quad \cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \tag{4.16}$$

с помощью которых по декартовым координатам точки M легко найти ее полярные координаты.

Формулы (4.15) и (4.16) дают также возможность переходить от уравнений линий, заданных в декартовых координатах, к их уравнениям в полярных координатах, и наоборот.

Пример 1. Построить точки, заданные полярными координатами: $M_1(2;\ \pi/6)$, $M_2(1;\ 3\pi/4)$, $M_3(3;\ 5\pi/4)$, $M_4(2;\ 5\pi/6)$, $M_5(3/2;\ \pi/2)$, $M_6(4;\ 0)$, $M_7(3;\ 7\pi/4)$.

▶ Вначале проведем луч под углом φ к полярной оси Ox, затем на построенном луче отложим от полюса O отрезок длиной ρ. В итоге найдем все семь точек (рис. 4.13). Отрезок OE определяет единицу длины. ◀

Пример 2. Найти декартовы координаты точек M_1, ..., M_7, заданных в примере 1.

▶ В соответствии с формулами (4.15) имеем: $M_1(\sqrt{3},\ 1)$, $M_2(-\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/2)$, $M_3(-3\sqrt{2}/2,\ -3\sqrt{2}/2)$, $M_4(-\sqrt{3},\ 1)$, $M_5(0, 3/2)$, $M_6(4,\ 0)$, $M_7(3\sqrt{2}/2,\ -3\sqrt{2}/2)$. ◀

Пример 3. Точки заданы декартовыми координатами: $A(\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$, $B(0,\ -3)$, $C(\sqrt{3},\ 1)$. Построить эти точки и найти их полярные координаты.

▶ Согласно формулам (4.16), получаем: для точки A $\rho = 2$, $\operatorname{tg}\varphi = -1$, $\varphi = 7\pi/4$, т. е. $A(2;\ 7\pi/4)$; для точки B $\rho = 3$, $\sin\varphi = -1$, $\varphi = 3\pi/2$, значит, $B(3;\ 3\pi/2)$; для точки C $\rho = 2$, $\operatorname{tg}\varphi = 1/\sqrt{3} = \sqrt{3}/3$, $\varphi = \pi/6$, т. е. $C(2;\ \pi/6)$ (рис. 4.14). ◀

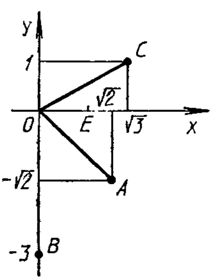


Рис. 4.14

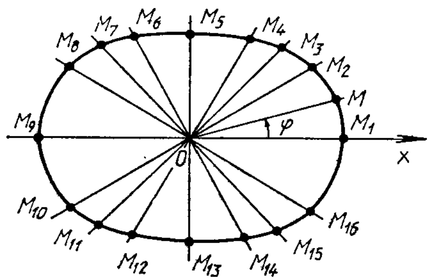


Рис. 4.15

Пример 4. Записать уравнение линии $(x^2 + y^2)^{3/2} = 4(x^2 - 3y^2)$ в полярных координатах.

▶ Воспользовавшись формулами (4.15), подставим в данное уравнение вместо x и y их выражения. Получим

$$\rho^3 = 4(\rho^2 \cos^2\varphi - 3\rho^2 \sin^2\varphi).$$

Считая $\rho \neq 0$, преобразуем последнее уравнение:

$$\rho = 4(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi - 2\sin^2\varphi),$$
$$\rho = 4(\cos 2\varphi - 1 + \cos 2\varphi),\ \rho = 4(2\cos 2\varphi - 1). \ ◀$$

Пример 5. Записать уравнение линии $\rho^2 = 8\sin^2 2\varphi$ в декартовых координатах.

▶ Так как $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$, данное уравнение можно переписать в виде $\rho^2 = 32\sin^2\varphi\cos^2\varphi$ и заменить ρ, $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ их выражениями (см. формулы (4.16)). Тогда найдем:

$$(\sqrt{x^2+y^2})^2 = 32\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2,$$

$$(x^2+y^2)^2 = 32x^2y^2. \blacktriangleleft$$

Пример 6. Построить кривую, заданную уравнением $\rho = 2 + \cos^2\varphi$.

▶ Составим таблицу, в которой указаны значения φ_i и соответствующие им значения ρ_i $(i = \overline{1, 16})$:

φ_i	ρ_i	φ_i	ρ_i	φ_i	ρ_i	φ_i	ρ_i	φ_i	ρ_i	φ_i	ρ_i
0	3	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{11}{4}$	$\frac{3}{2}\pi$	2	$\frac{11}{6}\pi$	$\frac{11}{4}$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	2	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{11}{4}$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{9}{4}$	2π	3
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{9}{4}$	π	3	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{9}{4}$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{5}{2}$		

Построив найденные точки $M_i(\rho_i, \varphi_i)$ (см. пример 1) и соединив их плавной линией, получим достаточно точный график искомой кривой (рис. 4.15). ◀

Параметрические уравнения линии. Уравнения вида

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(t), \\ y &= f_2(t), \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2, \\ z &= f_3(t), \end{aligned}\right\} \tag{4 17}$$

где $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ — некоторые функции параметра t, называются *параметрическими уравнениями линии в пространстве.* В частном случае, когда $f_3(t) \equiv 0$ (или $f_1(t) \equiv 0$, или $f_2(t) \equiv 0$), получаем параметрические уравнения линии на плоскости $z = 0$ (или $x = 0$, или $y = 0$). Следует отметить, что уравнения (4.17) задают не только линию, но и «закон движения» точки $M(x, y, z)$ по этой линии: каждому значению параметра t соответствует определенное положение точки на линии.

Пример 7. Выяснить, какая линия определяется параметрическими уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x &= at\cos t, \\ y &= at\sin t, \quad a > 0, \ b > 0, \ t \geqslant 0. \\ z &= bt, \end{aligned}\right\}$$

▶ Это спиральная винтовая линия, проекция которой на плоскость $z = 0$ является спиралью Архимеда $\rho = a\varphi$ (рис. 4.16). ◀

Пример 8. Выяснить, какую линию задают указанные параметрические уравнения

$$\left.\begin{aligned} &x = a\sin^2 t, \quad a>0,\\ &y = b\cos^2 t, \quad b>0, \quad -\infty<t<\infty.\\ &z=0, \end{aligned}\right\}$$

▶ Это отрезок прямой, концы которого лежат на осях координат в точках $A(a,\ 0)$ и $B(0,\ b)$. При изменении t в интервале $(-\infty;\ +\infty)$ точка $M(t)$ отрезка AB бесчисленное множество раз «пробегает» этот отрезок (рис. 4.17). ◀

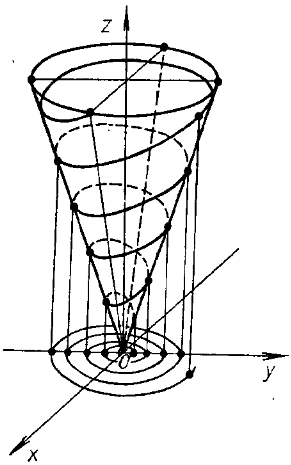


Рис. 4.16

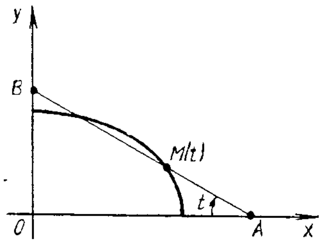


Рис. 4.17

Если из параметрических уравнений (4.17) удается исключить параметр t, получают уравнения линии в декартовых координатах. Для пространственной линии имеем пару уравнений, каждое из которых определяет цилиндрическую поверхность, а их пересечение дает саму линию. Например, спиральную винтовую линию (см. пример 7) можно представить следующей парой уравнений цилиндрических поверхностей $(t = z/b)$:

$$x = \frac{a}{b} z \cos\frac{z}{b}, \quad y = \frac{a}{b} z \sin\frac{z}{b}, \quad z \geqslant 0.$$

Для плоской линии, лежащей в некоторой координатной плоскости, исключение параметра t также приводит к паре уравнений в декартовых координатах, но одно из них всегда является уравнением координатной плоскости, в которой лежит сама линия. Уравнение координатной плоскости часто опускают. Так, в примере 8 уравнение отрезка AB можно представить следующей парой уравнений в декартовых координатах:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad z = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0 \leqslant y \leqslant b.$$

Пример 9. Построить линию, задаииую параметрнческими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x &= 0, \\ y &= t - 1/t + 2, \\ z &= t + 1/t - 3. \end{aligned}\right\}$$

▶ Данная линия лежит в координатной плоскости Oyz. Придавая различные значения параметру t, можно получить достаточное количество точек линии, по которым она строится. Чтобы более точно изучить эту линию, воспользуемся методом исключеиия параметра. Перенесем числа 2 и —3 во втором и третьем уравнениях системы в левую часть. Возведем обе части уравиений в квадрат и из $(z+3)^2$ вычтем $(y-2)^2$. Тогда:

$$(z+3)^2 - (y-2)^2 = (t + 1/t)^2 - (t - 1/t)^2 = 4,$$

$$\frac{(z+3)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1.$$

Следовательно, в координатной плоскости $x = 0$ имеем равнобочную гиперболу ($a = b = 2$) с центром в точке $C(0,\ 2,\ -3)$, изображенную на рис. 4.18. ◀

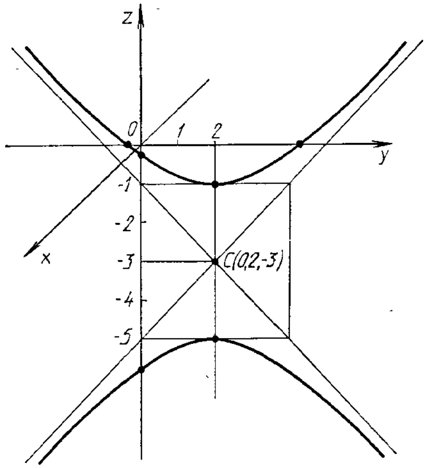


Рис. 4.18

АЗ-4.3

1. Построить линии, заданные уравнениями в полярных координатах. Записать их в декартовых координатах:

1) $\rho = 5$; 2) $\varphi = \pi/3$;

3) $\rho = a\varphi$ (*спираль Архимеда*);

4) $\rho = 6 \cos \varphi$; 5) $\rho = 10 \sin \varphi$;

6) $\rho \cos \varphi = 2$; 7) $\rho \sin \varphi = 1$;

8) $\rho=\dfrac{4}{1-\cos\varphi}$ (*парабола*);

9) $\rho=a(1-\cos\varphi)$ (*кардиоида*);

10) $\rho=3/\varphi$ (*гиперболическая спираль*);

11) $\rho=2^{\varphi}$, $\rho=(1/2)^{\varphi}$ (*логарифмические спирали*);

12) $\rho=a\sin 3\varphi$ (*трехлепестковая роза*);

13) $\rho=a\sin^2 2\varphi$ (*четырехлепестковая роза*);

14) $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$ (*лемниската Бернулли*).

2. Составить в полярных координатах уравнения следующих линий:

а) прямой, перпендикулярной к полярной оси и отсекающей на ней отрезок, равный 3;

б) прямых, параллельных полярной оси и отстоящих от нее на расстоянии 5;

в) окружности радиусом $R=4$ с центром на полярной оси и проходящей через полюс;

г) окружностей радиусом $R=3$, касающихся полярной оси в полюсе.

(*Ответ*: а) $\rho\cos\varphi=3$; б) $\rho\sin\varphi=\pm5$; в) $\rho=8\cos\varphi$; г) $\rho=\pm6\sin\varphi$.)

3. Построить следующие линии, заданные параметрическими уравнениями:

1) $x=3t-1,\ y=-2t+5$;

2) $x=3\cos t+3,\ y=3\sin t-2$;

3) $x=5+4\cos t,\ y=-1+\sin t$;

4) $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$ (*циклоида*);

5) $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t$ (*астроида*);

6) $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt$ (*винтовая линия*);

7) $x=\dfrac{a}{2}\left(t+\dfrac{1}{t}\right),\ y=\dfrac{b}{2}\left(t-\dfrac{1}{t}\right)$.

Самостоятельная работа

1. Исключив параметр t из данных параметрических уравнений линий на плоскости, записать их уравнения в декартовых координатах $F(x,y)=0$, определить тип каждой линии и ее расположение на плоскости:

1) $x=a/\cos t,\ y=b\operatorname{tg} t$ (гипербола);

2) $x=2a\cos^2 t,\ y=a\sin 2t$ (окружность);

3) $x=a\sin 2t,\ y=2a\sin^2 t$ (окружность);

4) $x=-2+3\sin 2t,\ y=1+\cos 2t$ (эллипс);

5) $x=4(1-t),\ y=2\sqrt{t}$ (часть параболы, для которой $y\geqslant 0$).

2. Построить линии, записав их уравнения в полярных координатах:

1) $x^2+y^2=5(\sqrt{x^2+y^2}-x)$;
2) $x^4-y^4=(x^2+y^2)^3$; 3) $(x^2+y^2)^2=y^2$;
4) $3x^2-y^2=(x^2+y^2)^{3/2}$; 5) $(x^2+y^2)^3=4x^2y^2$.

4.4. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ К ГЛ. 4

ИДЗ-4.1

1. Составить канонические уравнения: а) эллипса; б) гиперболы; в) параболы (A, B — точки, лежащие на кривой, F — фокус, a — большая (действительная) полуось, b — малая (мнимая) полуось, ε — эксцентриситет, $y=\pm kx$ — уравнения асимптот гиперболы, D — директриса кривой, $2c$ — фокусное расстояние).

1.1. а) $b=15$, $F(-10,\ 0)$; б) $a=13$, $\varepsilon=14/13$; в) D: $x=-4$.

1.2. а) $b=2$, $F(4\sqrt{2},\ 0)$; б) $a=7$, $\varepsilon=\sqrt{85}/7$; в) D: $x=5$.

1.3. а) $A(3,\ 0)$, $B(2,\ \sqrt{5}/3)$; б) $k=3/4$, $\varepsilon=5/4$; в) D: $y=-2$.

1.4. а) $\varepsilon=\sqrt{21}/5$, $A(-5,\ 0)$; б) $A(\sqrt{80},\ 3)$, $B(4\sqrt{6},\ 3\sqrt{2})$; в) D: $y=1$.

1.5. а) $2a=22$, $\varepsilon=\sqrt{57}/11$; б) $k=2/3$, $2c=10\sqrt{13}$; в) ось симметрии Ox и $A(27,\ 9)$.

1.6. а) $b=\sqrt{15}$, $\varepsilon=\sqrt{10}/25$; б) $k=3/4$, $2a=16$; в) ось симметрии Ox и $A(4,\ -8)$.

1.7. а) $a=4$, $F=(3,\ 0)$; б) $b=2\sqrt{10}$, $F(-11,\ 0)$; в) D: $x=-2$.

1.8. а) $b=4$, $F=(9,\ 0)$; б) $a=5$, $\varepsilon=7/5$; в) D: $x=6$.

1.9. а) $A(0,\ \sqrt{3})$, $B(\sqrt{14/3},\ 1)$; б) $k=\sqrt{21}/10$, $\varepsilon=11/10$; в) D: $y=-4$.

1.10. а) $\varepsilon=7/8$, $A(8,0)$; б) $A(3,\ -\sqrt{3/5})$, $B(\sqrt{13/5},6)$; в) D: $y=4$.

1.11. а) $2a=24$, $\varepsilon=\sqrt{22}/6$; б) $k=\sqrt{2/3}$, $2c=10$; в) ось симметрии Ox и $A(-7,\ -7)$.

1.12. а) $b=2$, $\varepsilon=5\sqrt{29}/29$; б) $k=12/13$, $2a=26$; в) ось симметрии Ox и $A(-5,\ 15)$.

1.13. а) $a=6$, $F(-4,\ 0)$; б) $b=3$, $F(7,\ 0)$; в) D: $x=-7$.

1.14. а) $b=7$, $F(5,\ 0)$; б) $a=11$, $\varepsilon=12/11$; в) D: $x=10$.

1.15. а) $A(-\sqrt{17/3},\ 1/3)$, $B(\sqrt{21}/2,\ 1/2)$; б) $k=1/2$, $\varepsilon=\sqrt{5}/2$; в) D: $y=-1$.

1.16. а) $\varepsilon=3/5$, $A(0,\ 8)$; б) $A(\sqrt{6},\ 0)$, $B(-2\sqrt{2},\ 1)$; в) D: $y=9$.

1.17. а) $2a=22$, $\varepsilon=10/11$; б) $k=\sqrt{11}/5$, $2c=12$; в) ось симметрии Ox и $A(-7,\ 5)$.

1.18. а) $b=5$, $\varepsilon=12/13$; б) $k=1/3$, $2a=6$; в) ось симметрии Oy и $A(-9,\ 6)$.

1.19. а) $a=9$, $F(7,\ 0)$; б) $b=6$, $F(12,\ 0)$; в) D: $x=-1/4$.

1.20. а) $b=5$, $F(-10,\ 0)$; б) $a=9$, $\varepsilon=4/3$; в) D: $x=12$.

1.21. а) $A(0,\ -2)$, $B(\sqrt{15}/2,\ 1)$; б) $k=2\sqrt{10}/9$, $\varepsilon=11/9$; в) D: $y=5$.

1.22. а) $\varepsilon=2/3$, $A(-6,\ 0)$; б) $A(\sqrt{8},\ 0)$, $B(\sqrt{20}/3,\ 2)$; в) D: $y=1$.

1.23. а) $2a=50$, $\varepsilon=3/5$; б) $k=\sqrt{29}/14$, $2c=30$; в) ось симметрии Oy и $A(4,\ 1)$.

1.24. а) $b=2\sqrt{15}$, $\varepsilon=7/8$; б) $k=5/6$, $2a=12$; в) ось симметрии Oy и $A(-2,\ 3\sqrt{2})$.

1.25. а) $a=13$, $F(-5,\ 0)$; б) $b=44$, $F(-7,\ 0)$; в) D: $x=-3/8$.

1.26. а) $b=7$, $F(13,\ 0)$; б) $b=4$, $F(-11,\ 0)$; в) D: $x=13$.

1.27. а) $A(-3,\ 0)$, $B(1,\ \sqrt{40}/3)$; б) $k=\sqrt{2/3}$, $\varepsilon=\sqrt{15}/3$; в) D: $y=4$.

1.28. а) $\varepsilon=5/6$, $A(0,\ -\sqrt{11})$; б) $A(\sqrt{32/3},\ 1)$, $B(\sqrt{8},\ 0)$; в) D; $y=-3$.

1.29. а) $2a=30$, $\varepsilon=17/15$; б) $k=\sqrt{17}/8$, $2c=18$; в) ось симметрии Oy и $A(4,\ -10)$.

1.30. а) $b=2\sqrt{2}$, $\varepsilon=7/9$; б) $k=\sqrt{2}/2$, $2a=12$; в) ось симметрии Oy и $A(-45,\ 15)$.

2. Записать уравнение окружности, проходящей через указанные точки и имеющей центр в точке A.

2.1. Вершины гиперболы $12x^2 - 13y^2 = 156$, $A(0, -2)$.

2.2. Вершины гиперболы $4x^2 - 9y^2 = 36$, $A(0, 4)$.

2.3. Фокусы гиперболы $24y^2 - 25x^2 = 600$, $A(0, -8)$.

2.4. $O(0, 0)$, A — вершина параболы $y^2 = 3(x - 4)$.

2.5. Фокусы эллипса $9x^2 + 25y^2 = 1$, $A(0, 6)$.

2.6. Левый фокус гиперболы $3x^2 - 4y^2 = 12$, $A(0, -3)$.

2.7. Фокусы эллипса $3x^2 + 4y^2 = 12$, A — его верхняя вершиа.

2.8. Вершину гиперболы $x^2 - 16y^2 = 64$, $A(0, -2)$.

2.9. Фокусы гиперболы $4x^2 - 5y^2 = 80$, $A(0, -4)$.

2.10. $O(0, 0)$, A — вершина параболы $y^2 = -(x + 5)/2$.

2.11. Правый фокус эллипса $33x^2 + 49y^2 = 1617$, $A(1, 7)$.

2.12. Левый фокус гиперболы $3x^2 - 5y^2 = 30$, $A(0, 6)$.

2.13. Фокусы эллипса $16x^2 + 41y^2 = 656$, A — его нижняя вершина.

2.14. Вершину гиперболы $2x^2 - 9y^2 = 18$, $A(0, 4)$.

2.15. Фокусы гиперболы $5x^2 - 11y^2 = 55$, $A(0, 5)$.

2.16. $B(1, 4)$, A — вершина параболы $y^2 = (x - 4)/3$.

2.17. Левый фокус эллипса $3x^2 + 7y^2 = 21$, $A(-1, -3)$.

2.18. Левую вершину гиперболы $5x^2 - 9y^2 = 45$, $A(0, -6)$.

2.19. Фокусы эллипса $24x^2 - 25y^2 = 600$, A — его верхняя вершина.

2.20. Правую вершину гиперболы $3x^2 - 16y^2 - 48$, $A(1, 3)$.

2.21. Левый фокус гиперболы $7x^2 - 9y^2 = 63$, $A(-1, -2)$.

2.22. $B(2, -5)$, A — вершина параболы $x^2 = -2(y + 1)$.

2.23. Правый фокус эллипса $x^2 + 4y^2 = 12$, $A(2, -7)$.

2.24. Правую вершину гиперболы $40x^2 - 81y^2 = 3240$, $A(-2, 5)$.

2.25. Фокусы эллипса $x^2 + 10y^2 = 90$, A — его нижняя вершина.

2.26. Правую вершину гиперболы $3x^2 - 25y^2 = 75$, $A(-5, -2)$.

2.27. Фокусы гиперболы $4x^2 - 5y^2 = 20$, $A(0, -6)$.

2.28. $B(3, 4)$, A — вершина параболы $y^2 = (x + 7)/4$.

2.29. Левый фокус эллипса $13x^2 + 49y^2 = 837$, $A(1, 8)$.

2.30. Правый фокус гиперболы $57x^2 - 64y^2 = 3648$, $A(2, 8)$.

3. Составить уравнение линии, каждая точка M которой удовлетворяет заданным условиям.

3.1. Отстоит от прямой $x = -6$ на расстоянии, в два раза большем, чем от точки $A(1, 3)$.

3.2. Отстоит от прямой $x = -2$ на расстоянии, в два раза большем, чем от точки $A(4, 0)$.

3.3. Отстоит от прямой $y = -2$ на расстоянии, в три раза большем, чем от точки $A(5, 0)$.

3.4. Отношение расстояний от точки M до точек $A(2, 3)$ и $B(-1, 2)$ равно $3/4$.

3.5. Сумма квадратов расстояний от точки M до точек $A(4, 0)$ и $B(-2, 2)$ равна 28.

3.6. Отстоит от точки $A(1, 0)$ на расстоянии, в пять раз меньшем, чем от прямой $x = 8$.

3.7. Отстоит от точки $A(4, 1)$ на расстоянии, в четыре раза большем, чем от точки $B(-2, -1)$.

3.8. Отстоит от прямой $x = -5$ на расстоянии, в три раза большем, чем от точки $A(6, 1)$.

3.9. Отстоит от прямой $y = 7$ на расстоянии, в пять раз большем, чем от точки $A(4, -3)$.

3.10. Отношение расстояний от точки M до точек $A(-3, 5)$ и $B(4, 2)$ равно $1/3$.

3.11. Сумма квадратов расстояний от точки M до точек $A(-5, -1)$ и $B(3, 2)$ равна 40,5.

3.12. Отстоит от точки $A(2, 1)$ на расстоянии, в три раза большем, чем от прямой $x = -5$.

3.13. Отстоит от точки $A(-3, 3)$ на расстоянии, в три раза большем, чем от точки $B(5, 1)$.

3.14. Отстоит от прямой $x = 8$ на расстоянии, в два раза большем, чем от точки $A(-1, 7)$.

3.15. Отстоит от прямой $x = 9$ на расстоянии, в четыре раза меньшем, чем от точки $A(-1, 2)$.

3.16. Отношение расстояний от точки M до точек $A(2, -4)$ и $B(3, 5)$ равно $2/3$.

3.17. Сумма квадратов расстояний от точки M до точек $A(-3, 3)$ и $B(4, 1)$ равна 31.

3.18. Отстоит от точки $A(0, -5)$ на расстоянии, в два раза меньшем, чем от прямой $x = 3$.

3.19. Отстоит от точки $A(4, -2)$ на расстоянии, в два раза меньшем, чем от точки $B(1, 6)$.

3.20. Отстоит от прямой $x = -7$ на расстоянии, в три раза меньшем, чем от точки $A(1, 4)$.

3.21. Отстоит от прямой $x = 14$ на расстоянии, в два раза меньшем, чем от точки $A(2, 3)$.

3.22. Отношение расстояний от точки M до точек $A(3, -2)$ и $B(4, 6)$ равно $3/5$.

3.23. Сумма квадратов расстояний от точки M до точек $A(-5, 3)$ и $B(2, -4)$ равна 65.

3.24. Отстоит от точки $A(3, -4)$ на расстоянии, в три раза большем, чем от прямой $x=5$.

3.25. Отстоит от точки $A(5, 7)$ на расстоянии, в четыре раза большем, чем от точки $B(-2, 1)$.

3.26. Отстоит от прямой $x=2$ на расстоянии, в пять раз большем, чем от точки $A(4, -3)$.

3.27. Отстоит от прямой $x=-7$ на расстоянии, в три раза меньшем, чем от точки $A(3, 1)$.

3.28. Отношение расстояний от точки M до точек $A(3, -5)$ и $B(4, 1)$ равно $1/4$.

3.29. Сумма квадратов расстояний от точки M до точек $A(-1, 2)$ и $B(3, -1)$ равна 18,5.

3.30. Отстоит от точки $A(1, 5)$ на расстоянии, в четыре раза меньшем, чем от прямой $x=-1$.

4. Построить кривую, заданную уравнением в полярной системе координат.

4.1. $\rho=2\sin 4\varphi$. **4.2.** $\rho=2(1-\sin 2\varphi)$.
4.3. $\rho=2\sin 2\varphi$. **4.4.** $\rho=3\sin 6\varphi$.
4.5. $\rho=2/(1+\cos\varphi)$. **4.6.** $\rho=3(1+\sin\varphi)$.
4.7. $\rho=2(1-\cos\varphi)$. **4.8.** $\rho=3(1-\cos 2\varphi)$.
4.9. $\rho=4\sin 3\varphi$. **4.10.** $\rho=4\sin 4\varphi$.
4.11. $\rho=3(\cos\varphi+1)$. **4.12.** $\rho=1/(2-\sin\varphi)$.
4.13. $\rho=5(1-\sin 2\varphi)$. **4.14.** $\rho=3(2-\cos 2\varphi)$.
4.15. $\rho=6\sin 4\varphi$. **4.16.** $\rho=2\cos 6\varphi$.
4.17. $\rho=3/(1-\cos 2\varphi)$. **4.18.** $\rho=2(1-\cos 3\varphi)$.
4.19. $\rho=3(1-\cos 4\varphi)$. **4.20.** $\rho=5(2-\sin\varphi)$.
4.21. $\rho=3\sin 4\varphi$. **4.22.** $\rho=2\cos 4\varphi$.
4.23. $\rho=4(1+\cos 2\varphi)$. **4.24.** $\rho=1/(2-\cos 2\varphi)$.
4.25. $\rho=4(1-\sin\varphi)$. **4.26.** $\rho=3(1+\cos 2\varphi)$.
4.27. $\rho=3\cos 2\varphi$. **4.28.** $\rho=2\sin 3\varphi$.
4.29. $\rho=2/(2-\cos\varphi)$. **4.30.** $\rho=2-\cos 2\varphi$.

5. Построить кривую, заданную параметрическими уравнениями ($0\leqslant t\leqslant 2\pi$).

5.1. $\begin{cases} x=4\cos^3 t, \\ y=4\sin^3 t. \end{cases}$ **5.2.** $\begin{cases} x=2\cos^3 t, \\ y=2\sin^3 t. \end{cases}$

5.3. $\begin{cases} x=4\cos 2t, \\ y=3\sin 2t. \end{cases}$ **5.4.** $\begin{cases} x=2\sin t, \\ y=3(1-\cos t). \end{cases}$

5.5. $\begin{cases} x=4\cos t, \\ y=5\sin t. \end{cases}$ **5.6.** $\begin{cases} x=\cos^3 t, \\ y=4\sin^3 t. \end{cases}$

5.7. $\begin{cases} x = 4\cos t, \\ y = 5\sin t. \end{cases}$

5.8. $\begin{cases} x = 5\cos^3 t, \\ y = 5\sin^3 t. \end{cases}$

5.9. $\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = 3\sin 2t. \end{cases}$

5.10. $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 1 - \sin t. \end{cases}$

5.11. $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 4\sin t. \end{cases}$

5.12. $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 5\sin^3 t. \end{cases}$

5.13. $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 5\sin t. \end{cases}$

5.14. $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t. \end{cases}$

5.15. $\begin{cases} x = 3\cos 2t, \\ y = 2\sin 2t. \end{cases}$

5.16. $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2(1 - \sin t). \end{cases}$

5.17. $\begin{cases} x = 5\cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$

5.18. $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 5\sin^3 t. \end{cases}$

5.19. $\begin{cases} x = 4\cos 2t, \\ y = \sin 2t. \end{cases}$

5.20. $\begin{cases} x = 6\cos^3 t, \\ y = 6\sin^3 t. \end{cases}$

5.21. $\begin{cases} x = 4\cos 3t, \\ y = 2\sin 3t. \end{cases}$

5.22. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 3(2 - \sin t). \end{cases}$

5.23. $\begin{cases} x = 9\cos t, \\ y = 5\sin t. \end{cases}$

5.24. $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t. \end{cases}$

5.25. $\begin{cases} x = 3\cos 2t, \\ y = 3\sin 2t. \end{cases}$

5.26. $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$

5.27. $\begin{cases} x = 5\cos 3t, \\ y = \sin 3t. \end{cases}$

5.28. $\begin{cases} x = 4\cos t, \\ y = 4(1 - \sin t). \end{cases}$

5.29. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 3\sin t. \end{cases}$

5.30. $\begin{cases} x = 3\cos^3 t. \\ y = 4\sin^3 t. \end{cases}$

Решение типового варианта

1. Составить канонические уравнения: а) эллипса, большая полуось которого равна 3, а фокус находится в точке $F(\sqrt{5}, 0)$; б) гиперболы с мнимой полуосью, равной 2, и фокусом $F(-\sqrt{13}, 0)$; в) параболы, имеющей директрису $x = -3$.

▶ а) Каноническое уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. По условию задачи большая полуось $a = 3$, $c = \sqrt{5}$. Для эллипса выполняется равенство $b^2 = a^2 - c^2$. Подставив в него значения a и c, найдем $b^2 = 3^2 - (\sqrt{5})^2 = 4$. Искомое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1;$$

б) Каноническое уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. По условию мнимая полуось $b=2$, а $c=\sqrt{13}$. Для гиперболы справедливо равенство $b^2=c^2-a^2$. Поэтому $a^2=c^2-b^2=(\sqrt{13})^2-2^2=9$. Записываем искомое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1;$$

в) Каноническое уравнение параболы в данном случае должно иметь вид $y^2=2px$, а уравнение ее директрисы $x=-p/2$. Но по условию задачи уравнение директрисы $x=-3$. Поэтому $-p/2=-3$, $p=6$ и искомое каноническое уравнение параболы имеет вид

$$y^2=12x. \blacktriangleleft$$

2. Записать уравнение окружности, проходящей через фокусы эллипса $x^2+4y^2=4$ и имеющей центр в его верхней вершине.

$\blacktriangleright$ Для данного эллипса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ верхняя вершина $A(0,\ 1)$, $a=2$, $b=1$. Поэтому

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$$

и фокусы находятся в точках $F_1(-\sqrt{3},\ 0)$, $F_2(\sqrt{3},\ 0)$. Радиус R искомой окружности вычисляем по формуле расстояния между двумя точками:

$$R=|AF_1|=|AF_2|=\sqrt{(\mp\sqrt{3}-0)^2+(0-1)^2}=$$
$$=\sqrt{3+1}=2.$$

В соответствии с уравнением (4.2) записываем искомое уравнение окружности:

$$(x-0)^2+(y-1)^2=2^2 \text{ или } x^2+(y-1)^2=4. \blacktriangleleft$$

3. Составить уравнение линии, каждая точка M которой отстоит от точки $A(3,\ 2)$ на расстоянии, в три раза большем, чем от точки $B(-1,\ 0)$.

$\blacktriangleright$ Пусть $M(x,\ y)$ — любая точка искомой линии (рис. 4.19). Тогда по условию задачи $|AM|=3|BM|$. Так как

$$|AM|=\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2},\quad |BM|=\sqrt{(x+1)^2+y^2},$$

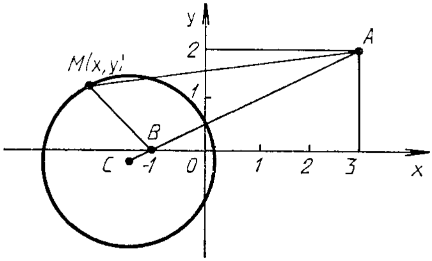


Рис. 4.19

то уравнение искомой линии

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}=3\sqrt{(x+1)^2+y^2}.$$

Преобразуем его, возведя обе части в квадрат. Имеем:

$$x^2-6x+9+y^2-4y+4=9x^2+18x+9+9y^2,$$
$$8x^2+24x+8y^2+4y-4=0.$$

Выделив полные квадраты в последнем уравнении, придем к уравнению вида

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{45}{16},$$

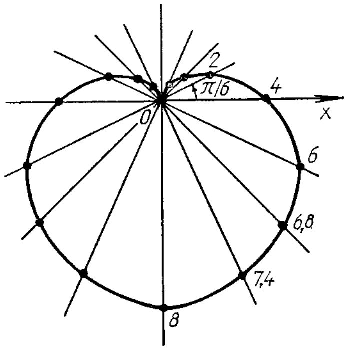
которое является уравнением окружности с центром в точке $C(-3/2,\ -1/4)$ и радиусом $R=3\sqrt{5}/4$. ◀

4. Построить кардиоиду, заданную уравнением в полярных координатах $\rho=4(1-\sin\varphi)$.

▶ Составим таблицу, в которой приведены значения полярного угла φ_i ($i=\overline{1,16}$) и соответствующие им значения полярного радиуса ρ_i:

φ_i	ρ_i	φ_i	ρ_i	φ_i	ρ_i	φ_i	ρ_i
0	4	$\pi/2$	0	π	4	$3\pi/2$	8
$\pi/6$	2	$2\pi/3$	$\approx 0{,}6$	$7\pi/6$	6	$5\pi/3$	$\approx 7{,}4$
$\pi/4$	$\approx 1{,}2$	$3\pi/4$	$\approx 1{,}2$	$5\pi/4$	$\approx 6{,}8$	$7\pi/4$	$\approx 6{,}8$
$\pi/3$	$\approx 0{,}6$	$5\pi/6$	2	$4\pi/3$	$\approx 7{,}4$	$11\pi/6$	6

Построив найденные точки $M_i(\rho_i,\ \varphi_i)$ в полярной системе координат (см. пример 1 из § 4.3) и соединив их плавной линией, получим достаточно точное представление о кардиоиде (рис. 4.20.). ◀



Р и с. 4.20

5. Построить кривую, заданную параметрическими уравнениями:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 + 3\cos t, \\ y = 2 - 2\sin t, \end{array} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.\right\}$$

▶ Выберем достаточное количество значений параметра t_i, вычислим соответствующие значения x_i, y_i и построим точки $M_i(x_i, y_i)$ в декартовых координатах. Соединим их плавной линией. Очевидно, что полученная кривая очень похожа на эллипс с полуосями $a = 3$, $b = 2$ и центром в точке $C(1, 2)$. Для строгого доказательства того, что данные параметрические уравнения определяют эллипс с указанными осями и центром, избавимся от параметра t:

$$\frac{x-1}{3} = \cos t, \quad \frac{y-2}{-2} = \sin t,$$

откуда $\dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{(y-2)^2}{4} = 1$. ◀

ИДЗ-4.2

1. Построить поверхности и определить их вид (название).

1.1. а) $4x^2 - y^2 - 16z^2 + 16 = 0$; б) $x^2 + 4z = 0$.
1.2. а) $3x^2 + y^2 + 9z^2 - 9 = 0$; б) $x^2 + 2y^2 - 2z = 0$.
1.3. а) $-5x^2 + 10y^2 - z^2 + 20 = 0$; б) $y^2 + 4z^2 = 5x^2$.
1.4. а) $4x^2 - 8y^2 + z^2 + 24 = 0$; б) $x^2 - y = -9z^2$.
1.5. а) $x^2 - 6y^2 + z^2 = 0$; б) $7x^2 - 3y^2 - z^2 = 21$.
1.6. а) $z = 8 - x^2 - 4y^2$; б) $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 72$.
1.7. а) $4x^2 + 6y^2 - 24z^2 = 96$; б) $y^2 + 8z^2 = = 20x^2$
1.8. а) $4x^2 - 5y^2 - 5z^2 + 40 = 0$; б) $y = 5x^2 + 3z^2$.

1.9. а) $x^2=8(y^2+z^2)$; б) $2x^2+3y^2-z^2=18$.
1.10. а) $5z^2+2y^2=10x$; б) $4z^2-3y^2-5x^2+60=0$.
1.11. а) $x^2-7y^2-14z^2-21=0$; б) $2y=x^2+4z^2$.
1.12. а) $6x^2-y^2+3z^2-12=0$; б) $8y^2+2z^2=x$.
1.13. а) $-16x^2+y^2+4z^2-32=0$; б) $6x^2+y^2-3z^2=0$.
1.14. а) $5x^2-y^2-15z^2+15=0$; б) $x^2+3z=0$.
1.15. а) $6x^2+y^2+6z^2-18=0$; б) $3x^2+y^2-3z=0$.
1.16. а) $-7x^2+14y^2-z^2+21=0$; б) $y^2+2z^2=6x^2$.
1.17. а) $-3x^2+6y^2-z^2-18=0$; б) $x^2-2y=-z^2$.
1.18. а) $4x^2-6y^2+3z^2=0$; б) $4x^2-y^2-3z^2=12$.
1.19. а) $z=4-x^2-y^2$; б) $3x^2+12y^2+4z^2=48$.
1.20. а) $4x^2+5y^2-10z^2=60$; б) $7y^2+z^2=14x^2$.
1.21. а) $9x^2-6y^2-6z^2+1=0$; б) $15y=10x^2+6y^2$.
1.22. а) $x^2=5(y^2+z^2)$; б) $2x^2+3y^2-z^2=36$.
1.23. а) $4x^2+3y^2=12x$; б) $3x^2-4y^2-2z^2+12=0$.
1.24. а) $8x^2-y^2-2z^2-32=0$; б) $y-4z^2=3x^2$.
1.25. а) $x^2-6y^2+z^2-12=0$; б) $x-3z^2=9y^2$.
1.26. а) $2x^2-3y^2-5z^2+30=0$; б) $2x^2+3z=0$.
1.27. а) $7x^2+2y^2+6z^2-42=0$; б) $2x^2+4y^2-5z=0$.
1.28. а) $-4x^2+12y^2-3z^2+24=0$; б) $2y^2+6z^2=3x$.
1.29. а) $3x^2-9y^2+z^2+27=0$; б) $z^2-2y=-4x^2$.
1.30. а) $27x^2-63y^2+21z^2=0$; б) $3x^2-7y^2-2z^2=42$.

2. Записать уравнение и определить вид поверхности, полученной при вращении данной линии вокруг указанной оси координат, сделать рисунок.

2.1. а) $y^2=2z$, Oz; б) $9y^2+4z^2=36$; Oy.
2.2. а) $4x^2-3y^2=12$, Ox; б) $x=1$, $y=2$, Oz.
2.3. а) $x^2=-3z$, Oz; б) $3x^2+5z^2=15$, Ox.
2.4. а) $3y^2-4z^2=12$, Oz; б) $y=4$, $z=2$, Ox.
2.5. а) $x^2=3y$, Oy; б) $3x^2+4z^2=24$, Oz.
2.6. а) $2x^2-6y^2=12$, Ox; б) $y^2=4z$, Oz.
2.7. а) $x^2+3z^2=9$, Oz; б) $x=4$, $z=6$, Oy.
2.8. а) $3x^2-5z^2=15$, Oz; б) $z=-1$, $y=3$, Ox.
2.9. а) $y^2=3z$, Oz; б) $2x^2+3z^2=6$, Ox.
2.10. а) $y^2-5x^2=5$, Oy; б) $y=3$, $z=1$, Ox.
2.11. а) $x^2=-4z$, Oz; б) $y^2+4z^2=4$, Oy.
2.12. а) $5x^2-6z^2=30$, Ox; б) $x=3$, $z=-2$, Oy.
2.13. а) $z^2=2y$, Oy; б) $2x^2+3z^2=6$, Oz.
2.14. а) $y^2=-4z$, Oz; б) $3y^2+z^2=6$, Oy.
2.15. а) $7x^2-5y^2=35$, Ox; б) $x=-1$, $y=-3$, Oz.
2.16. а) $2x^2=z$, Oz; б) $x^2+4z^2=4$, Ox.
2.17. а) $2y^2-5z=10$, Oz; б) $y=2$, $z=6$, Ox.
2.18. а) $x^2=-5y$, Oy; б) $2x^2+3z=6$, Oz.
2.19. а) $x^2-9y^2=9$, Ox; б) $3y^2=z$, Oz.

2.20. а) $x^2+2z=4$, Oz; б) $x=3$, $z=-1$, Oy.
2.21. а) $15x^2-3y^2=1$, Ox; б) $x=3$, $y=4$, Oz.
2.22. а) $y^2=5z$, Oz; б) $3x^2+7y^2=21$, Ox.
2.23. а) $15y^2-x^2=6$, Oy; б) $y=5$, $z=2$, Oy.
2.24. а) $5z=-x^2$, Oz; б) $3y^2+18z^2=1$, Oy.
2.25. а) $3x^2-8y^2=288$, Ox; б) $x=5$, $z=-3$, Oy.
2.26. а) $2y^2=72$, Oz; б) $6y^2+5z^2=30$, Oy.
2.27. а) $5x^2-7y^2=35$, Ox; б) $x=2$, $y=-4$, Oz.
2.28. а) $3x^2=-2z$, Oz; б) $8x^2+11z^2=88$, Ox.
2.29. а) $5y^2-8z^2=40$, Oz; б) $y=3$, $z=1$, Ox.
2.30. а) $3x^2=-4y$, Oz; б) $4x^2+3z^2=12$, Oz.

3. Построить тело, ограниченное указанными поверхностями.

3.1. а) $z=x^2+y^2$, $z=0$, $x=1$, $y=2$, $x=0$, $y=0$; б) $x^2+y^2=2x$, $z=0$, $z=x$.

3.2. а) $x^2+y^2=z^2, z=0, y=2x, y=4x, x=3$ $(z>0)$; б) $x^2+y^2=4y$, $z=0$, $y+z=5$.

3.3. а) $y^2+3z^2=6$, $3x^2-25y^2=75$, $z\geqslant 0$; б) $x=4$, $y=2$, $x+2y+3z=12$, $x=0$, $y=0$, $z\geqslant 0$.

3.4. а) $z=5y$, $x^2+y^2=16$, $z=0$; б) $x+y+z=5$, $3x+y=5$, $2x+y=5$, $y=0$, $z=0$.

3.5. а) $y=3x$, $y=0$, $x=2$, $z=xy$, $z=0$; б) $8(x^2+y^2)=z^2$, $x^2+y^2=1$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$.

3.6. а) $y=x$, $y=0$, $x=1$, $z=x^2+5y^2$, $z=0$; б) $x^2+y^2+z^2=9$, $x^2+y^2\leqslant 1$, $x\geqslant 0$.

3.7. а) $y=x$, $y=0$, $x=1$, $z=\sqrt{xy}$, $z=0$; б) $x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2=z^2$, $x\geqslant 0$, $z\geqslant 0$.

3.8. а) $y=2x$, $y=0$, $x=2$, $z=xy$, $z=0$; б) $x^2+y^2=z^2$, $x^2+y^2=1$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$.

3.9. а) $z=x^2+3y^2$, $z=0$, $y=x$, $y=0$, $x=1$; б) $z=8(x^2+y^2)+3$, $z=16x+3$.

3.10. а) $y=4x$, $y=0$, $x=1$, $z=\sqrt{xy}$, $z=0$; б) $z=3\sqrt{x^2+y^2}$, $z=2-x^2-y^2$.

3.11. а) $y=x, y=0, x=1, z=3x^2+2y^2, z=0$; б) $z=10(x^2+y^2)+1$, $z=1-20y$.

3.12. а) $y=x$, $y=0$, $x=1$, $z=\sqrt{xy}$, $z=0$; б) $y=16\sqrt{2x}$, $y=\sqrt{2x}$, $z=0$, $x+z=2$.

3.13. а) $y=x$, $y=0$, $x=2$, $z=0$; б) $x+y=2$, $x=\sqrt{y}$, $z=2x$, $z=0$.

3.14. а) $2z=x^2+y^2$, $z=0$, $x=2$, $y=3$, $x=0$, $y=0$; б) $x^2+y^2=4x$, $z=0$, $z=x$.

3.15. а) $x^2+y^2=4z^2$, $z=0$, $y=x$, $y=8x$, $x=2$, $z>0$; б) $x^2+y^2=8y$, $z=0$, $y+z=6$.

3.16. а) $y^2+4z^2=8$, $16x^2-49y^2=784$, $z\geqslant 0$; б) $x=1$, $y=3$, $x+5y+10z=20$, $x=0$, $y=0$, $z\geqslant 0$.

3.17. а) $z=3y^2$, $x^2+y^2=4$, $z=0$; б) $x+2y+3z=6$, $2x=y$, $2x+3y=6$, $y=0$, $z=0$.

3.18. а) $y=4x$, $y=0$, $x=1$, $z=xy$, $z=0$; б) $4(x^2+y^2)=z^2$, $x^2+y^2=4$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$.

3.19. а) $y=2x$, $y=0$, $x=2$, $z=2x^2+y^2$, $z=0$; б) $x^2+y^2+z^2=16$, $x^2+y^2\leqslant 4$, $x\geqslant 0$.

3.20. а) $y=4x$, $y=0$, $x=4$, $z=\sqrt{xy}$, $z=0$; б) $x^2+y^2+z^2=9$, $x^2+z^2=y^2$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$.

3.21. а) $y=3x$, $y=0$, $x=3$, $z=xy$, $z=0$; б) $4(x^2+y^2)=z^2$, $4(x^2+y^2)=1$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$.

3.22. а) $z=16x^2+y^2$, $z=0$, $y=2x$, $y=0$, $x=1$; б) $z-4=6(x^2+y^2)$, $z=4x+1$.

3.23. а) $y=3x$, $y=0$, $x=3$, $z=\sqrt{xy}$, $z=0$; б) $z=4\sqrt{x^2+y^2}$, $z=5-x^2-y^2$.

3.24. а) $y=3x$, $y=0$, $x=2$, $z=x^2+y^2$, $z=0$; б) $z-2=6(x^2+y^2)$, $z=1-4y$.

3.25. а) $y=2x$, $y=0$, $x=4$, $z=\sqrt{xy}$, $z=0$; б) $x+y=2$, $y=\sqrt{x}$, $z=12y$, $z=0$, $x=0$.

3.26. а) $z=2x^2+3y^2$, $z=0$, $x=2$, $y=1$, $x=0$, $y=0$; б) $x^2+y^2=6x$, $z=0$, $z=2x$.

3.27. а) $4(x^2+y^2)=z^2$, $z=0$, $y=x$, $y=4x$, $x=2(z>0)$; б) $x^2+y^2=4y$, $z=0$, $y+z=6$.

3.28. а) $2y^2+z^2=4$, $3x^2-8y^2=48$, $z\geqslant 0$; б) $x=1$, $y=3$, $x+2y+4z=24$, $x=0$, $y=0$, $z\geqslant 0$.

3.29. а) $z=3y^2$, $x^2+y^2=9$, $z=0$; б) $x+y+z=8$, $x+2y=4$, $x+4y=4$, $y=0$, $z=0$.

3.30. а) $y=5x$, $y=0$, $x=3$, $z=0$; б) $4(x^2+y^2)=z^2$, $x^2+y^2=4$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$.

Решение типового варианта

1. Построить данные поверхности и определить их вид (название):

а) $-\frac{x^2}{6}+4y^2+\frac{1}{2}z^2-2=0$; б) $3x^2+\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{4}=0$.

▶ а) Приведем уравнение к каноническому виду

$$-\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{1/2}+\frac{z^2}{4}=1.$$

Получили уравнение гиперболоида, расположенного так, как показано на рис. 4.21; полуоси его «горлового» эллипса $OB=\sqrt{2}/2$, $OC=2$;

б) Приведем уравнение к каноническому виду

$$\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{6}-\frac{z^2}{12}=0.$$

Это уравнение конуса второго порядка, ориентированного указанным на рис. 4.22 образом. Его сечения плоскостями $z=\mathrm{const}$ являются эллипсами. ◀

2. Записать уравнение поверхности, полученной при вращении:

1) параболы $z=-\frac{1}{2}y^2$: а) вокруг оси Oy; б) вокруг оси Oz;

2) эллипса $\frac{y^2}{64}+\frac{z^2}{4}=1$: а) вокруг оси Oz; б) вокруг оси Oy.

▶ 1. В соответствии с общим правилом получения уравнения поверхности вращения (см. § 4.2) находим:

а) $\pm\sqrt{x^2+z^2}=-\frac{1}{2}y^2$, $4x^2-y^4+4z^2=0$

(алгебраическая поверхность четвертого порядка (рис. 4.23));

б) $z=-\frac{1}{2}(\pm\sqrt{x^2+y^2})^2$, $z=-\frac{1}{2}(x^2+y^2)$

(параболоид вращения (рис. 4.24)).

2. Имеем:

а) $\frac{(\pm\sqrt{x^2+y^2})^2}{64}+\frac{z^2}{4}=1$, $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{64}+\frac{z^2}{4}=1$.

Получили сплюснутый вдоль оси Oz эллипсоид вращения (сфероид), полуоси его главных сечений $OA=OB=8$, $OC=2$ (рис. 4.25);

б) $\frac{y^2}{64}+\frac{(\pm\sqrt{x^2+z^2})^2}{4}=1$, $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{64}+\frac{z^2}{4}=1$

(вытянутый вдоль оси Oy эллипсоид вращения (рис. 4.26): $OA=OC=2$, $OB=8$). ◀

3. Построить тело, ограниченное данными поверхностями:

а) $y=x$, $x=1$, $z=0$, $z=xy$;

б) $x+y=4$, $x=\sqrt{2y}$, $3x=2z$, $z=0$.

▶ а) Построение выполнено на рис. 4.27: OC — дуга

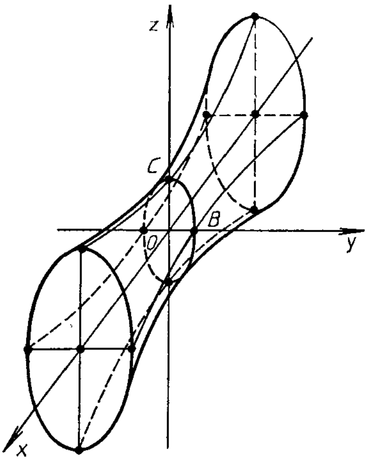


Рис. 4.21

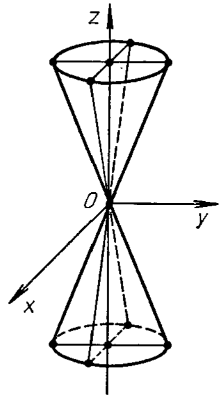


Рис. 4.22

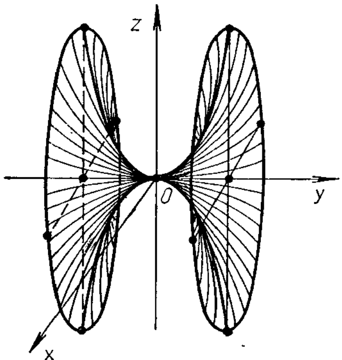


Рис. 4.23

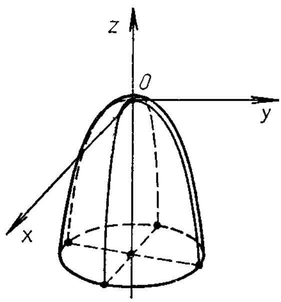


Рис. 4.24

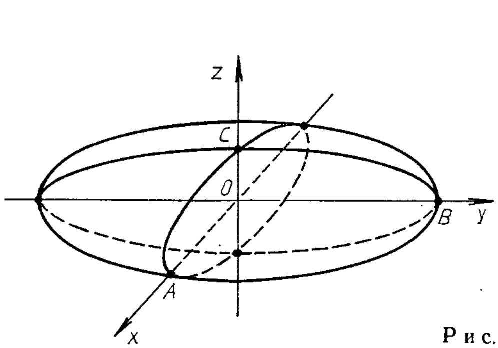


Рис. 4.25

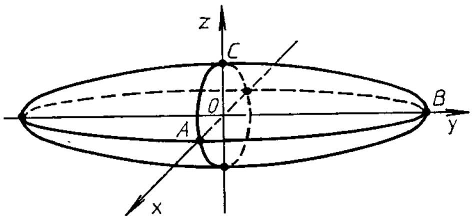


Рис. 4.26

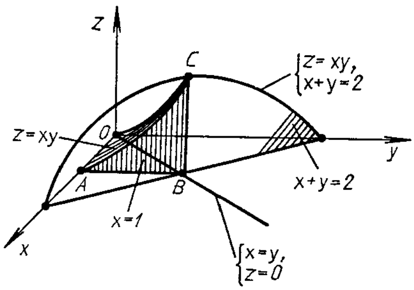


Рис. 4.27

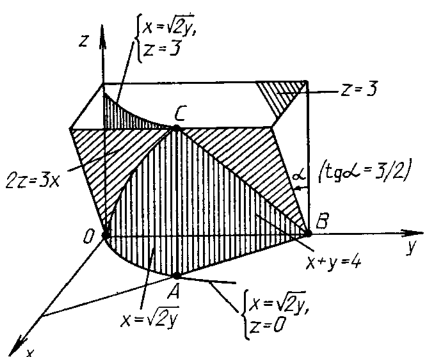


Рис. 4.28

параболы, являющейся пересечением гиперболического параболоида $z=xy$ с плоскостью $x=y$; $\breve{AC}$ — пересечение поверхности $z=xy$ с плоскостью $x=1$; $A(1,\ 0,\ 0)$, $B(1,\ 1,\ 0)$, $C(1,\ 1,\ 1)$ — характерные точки тела;

б) Построение выполнено на рис. 4.28: OC — дуга параболы, являющейся пересечением параболического цилиндра с плоскостью $2z = 3x$; $A(2, 2, 0)$, $B(0, 4, 0)$, $C(2, 2, 3)$ — характерные точки тела. ◀

4.5. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ К ГЛ. 4

1. Через точку $A(7/2, 7/4)$ провести хорду эллипса $x^2 + 4y^2 = 25$, делящуюся в этой точке пополам. (*Ответ*: $x + 2y - 7 = 0$.)

2. Доказать, что парабола обладает так называемым оптическим свойством: луч света, выйдя из фокуса и отразившись от параболы, пойдет по прямой, параллельной оси параболы.

3. Через точку $A(4, 4)$ провести хорду гиперболы $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$, делящуюся в этой точке пополам. (*Ответ*: $4x - 3y - 4 = 0$.)

4. Найти радиус наибольшей окружности, лежащей внутри параболы $y^2 = 2px$ и касающейся этой параболы в ее вершине. (*Ответ*: $R = p$.)

5. Составить уравнение гиперболы с асимптотами $\sqrt{3}x \pm y = 0$, касающейся прямой $2x - y - 3 = 0$. $\left(\textit{Ответ}: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1.\right)$

6. Составить уравнение касательной к параболе $y^2 = -8x$, отрезок которой между точкой касания и директрисой делится осью Oy пополам. (*Ответ*: $x + y - 2 = 0$ или $x - y - 2 = 0$.)

7. Доказать, что все треугольники, образованные асимптотами гиперболы и произвольной касательной к ней, имеют одну и ту же площадь; выразить эту площадь через полуоси гиперболы. (*Ответ*: ab.)

8. Составить уравнения касательных к параболе $y^2 = 16x$, проходящих через точку $A(1, 5)$, и вычислить площадь треугольника, образованного касательными и директрисой параболы. (*Ответ*: $x - y + 4 = 0$, $4x - y + 1 = 0$, $S = 37{,}5$.)

9. Источник короткоинтервального звука находится в неизвестном пункте M. Звук достиг трех наблюдательных пунктов неодновременно: пункта A — на t_1 с позже, а пункта C — на t_2 с позже, чем пункта B. Определить местонахождение пункта M, приняв скорость звука равной 330 м/с. (*Ответ*: M находится на пересечении правой ветви гиперболы $|AM|-|BM|=330t_1$ м с фокусами A и B и левой ветви гиперболы $|BM|-|CM|=-330t_2$ м с фокусами B и C.)

10. Цепь подвесного моста имеет форму параболы $y=px^2$. Длина пролета моста — 50 м, а прогиб цепи — 5 м. Определить величину угла α прогиба в крайней точке моста. (*Ответ*: $\operatorname{tg}\alpha=0{,}4$, $\alpha\approx 21°50'$.)

11. Зеркальная поверхность прожектора образована вращением параболы вокруг ее оси симметрии. Диаметр зеркала 80 см, а глубина его 20 см. На каком расстоянии от вершины параболы нужно поместить источник света, если для отражения лучей параллельным пучком он должен быть в фокусе параболы? (*Ответ*: 40 см.)

12. Даны точка O и прямая l, находящаяся от точки O на расстоянии $|OA|=a$. Вокруг точки O вращается луч, пересекающий прямую l в переменной точке P. На этом луче от точки O откладывается отрезок OM так, что $|OP|\cdot|OM|=b^2$. Найти уравнение линии, которая описывается точкой M при вращении луча. Уравнение записать в полярных и декартовых координатах. (*Ответ*: окружность: $\rho=\frac{b^2}{a}\cos\varphi$, $x^2+y^2=\frac{b^2}{a}x$.)

13. Записать параметрические уравнения линии пересечения сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$ и круглого цилиндра $x^2+y^2-2x=0$, выбирая в качестве параметра угол φ, образованный проекцией радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ произвольной точки M линии на плоскость Oxy с положительным направлением оси Ox. (*Ответ*: $x=R\cos^2\varphi$, $y=R\sin\varphi\cos\varphi$, $z=R\sin\varphi$, $0\leqslant\varphi<2\pi$.)

14. Найти уравнение проекции линии пересечения поверхностей $x^2+2y^2=2z$ и $x+2y+z=1$ на плоскость Oxy. (*Ответ*: $x^2+2y^2+2x+4y-2=0$.)

15. Найти центр сечения гиперболоида $x^2+2y^2-4z^2=-4$ плоскостью $x+y+2z=2$. (*Ответ*: (4, 2, -2).)

16. Найти уравнение плоскости, пересекающей эллипсоид $x^2+2y^2+4z^2=9$ по эллипсу, центр которого находится в точке $C(3, 2, 1)$. (*Ответ*: $3x+4y+4z-21=0$.)

17. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $M(1, 1, 1)$ и $N(2, 0, 2)$ и пересекающей параболоид $x^2-y^2=2z$ по паре прямых. (*Ответ*: $3x+y-2z-2=0$.)

18. Найти уравнение эллипсоида, содержащего точку $M(3, 1, 1)$ и окружность $x^2+y^2+z^2=9$, $x-z=0$, плоскости симметрии которого совпадают с плоскостями координат. (*Ответ*: $3x^2+4y^2+5z^2=36$.)

19. Найти координаты центра и радиус окружности $x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z+24=0$, $2x+2y+z+1=0$. (*Ответ*: $(10/3,\ 14/3,\ 5/3)$, $R=3$.)

20. Доказать, что линия пересечения параболоида $x^2+2y^2=4z+10$ и сферы $x^2+y^2+z^2=6$ состоит из двух окружностей. Найти точки пересечения этих окружностей и их радиусы. (*Ответ*: $M_1(\sqrt{2},\ 0,\ -2)$, $M_2(-\sqrt{2},\ 0,\ -2)$, $R=2$.)