❑ **Производные основных элементарных функций (таблица производных)**

$c' = 0$, c — постоянная

$x' = 1$

$$\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1},\ \ \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$$

$$\left(e^x\right)' = e^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

❑ Производные гиперболических функций

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x; \ \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x; \ \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}; \ \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

$$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}; \ \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

❑ Правила дифференцирования ($u = u(x), v = v(x)$)

$(cu)' = cu'$, c — постоянная

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(f^2(x)\right)' = 2f(x)f'(x)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad v \neq 0$$

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}, \quad f(x) \neq 0$$

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$$

❑ **Производная сложной функции** $h(x) = f(g(x))$

$$h'(x) = \left(f(g(x))\right)' = f'_g(g) \cdot g'_x(x); \quad h'_x = f'_g \cdot g'_x$$

❑ **Производная обратной функции**

Если $y = f(x); x = f^{-1}(y)$, то $\left(f^{-1}(y)\right)'_y = \dfrac{1}{f'(x)}; \quad x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$

❑ **Производная функции, заданной параметрически**

Если $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a < t < b$, то $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$

❑ **Производная функции, заданной неявно**

Если функция $y(x)$, $a < x < b$, задана в виде $F(x, y) = 0$, то $y'_x(x)$ находят из уравнения $F'_x(x, y(x)) = 0$

❑ **Формулы Тейлора и Маклорена**

$f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x)$ – формула Тейлора;

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}\left(x_0 + \theta(x - x_0)\right)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}; 0 < \theta < 1$$

$f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_n(x)$ – формула Маклорена;

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}; 0 < \theta < 1$$

❑ **Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей**

Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в окрестности $\dot{U}(x_0)$, $g(x) \neq 0, g'(x) \neq 0$ в этой окрестности и $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ и выполнено равенство $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Аналогичное правило применяется при
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$

- **Уравнение касательной к графику функции**

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

- **Уравнение нормали к графику функции**

$$(y - y_0) f'(x_0) + (x - x_0) = 0$$

Дифференциал функции

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ — приращение функции

Если $\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$, где A — число, $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \alpha(\Delta x) = 0$, то функцию называют дифференцируемой в точке

$f'(x)$ существует и конечна $\Leftrightarrow f(x)$ дифференцируема

$dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx$ — дифференциал функции

$dx = \Delta x$

$$d(\alpha u) = \alpha \cdot du$$

$$d(u \pm v) = du \pm dv$$

$$d(uv) = udv + vdu$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}; \quad v \neq 0$$

Инвариантность формы дифференциала первого порядка: если
$y = f(u);\ u = \varphi(x)$, то $dy = y'_x dx = y'_u u'_x dx = y'_u du$