Криволинейные и поверхностные интегралы

□ Вычисление криволинейных интегралов 1-го рода

$$\int_L f(x,y,z)\,dl =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt$$

$$\int_L f(x,y)\,dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$$

$$\int_L f(x,y)\,dl = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$$

□ Вычисление криволинейных интегралов 2-го рода

$$\int_L P(x;y;z)\,dx + Q(x;y;z)\,dy + R(x;y;z)\,dz =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} (Px'(t)+Qy'(t)+Rz'(t))\,dt;\ P = P(x(t);y(t);z(t));$$

$$Q = Q(x(t);y(t);z(t));\ R = R(x(t);y(t);z(t))$$

$$\int_L P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(P(x(t);y(t))\,x'(t) + Q(x(t);y(t))\,y'(t)\right)dt$$

$$\int_L P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy = \int_a^b \left(P(x;y(x)) + Q(x;y(x))\,y'(x)\right)dx$$

□ Формула Грина

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint_L P\,dx + Q\,dy$$

□ Вычисление поверхностных интегралов 1-го рода

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

□ Вычисление поверхностных интегралов 2-го рода

$$\iint_S P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS;$$

$$\vec{n} = (\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$$

❑ **Формула Стокса**

$$\int_L P(x;y;z)\,dx + Q(x;y;z)\,dy + R(x;y;z)\,dz =$$

$$= \iint_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\gamma \right) dS$$

$$\oint_L \vec{a} \cdot d\vec{r} = \iint_S \vec{n} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{a}\, dS$$

❑ **Формула Гаусса–Остроградского**

$$\iint_S P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz$$

$$\oiint_S \vec{a} \cdot \vec{n}\,dS = \iiint_V \mathrm{div}\,\vec{a}\, dV$$

Дифференциальные операции векторного анализа

❑ **Оператор Гамильтона**

$$\nabla = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

❑ **Градиент функции**

$$\mathrm{grad}\, f = \nabla f = \vec{i}\,\frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial f}{\partial z}$$

❑ **Производная функции по направлению**

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \vec{l} \cdot \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

❑ **Дивергенция вектор-функции** $\vec{a}(x, y, z) = \left\{ a_x; a_y; a_z \right\}$

$$\mathrm{div}\,\vec{a} = \nabla \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

❑ **Ротор вектор-функции** $\vec{a}(x, y, z) = \left\{ a_x; a_y; a_z \right\}$

$$\mathrm{rot}\,\vec{a} = \nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$