

- a) Să se afle gradientul funcției $u = \sqrt{x} \sin\left(\frac{y}{z}\right)$ în punctul $M_0(4,0,1)$.
- b) Să se calculeze derivata funcției u după direcția vectorului $\vec{l} = \overrightarrow{M_0M_1}$, $M_1(0,2,3)$.
- c) Să se compare valoarea obținută cu valoarea derivatei acestei funcții după direcția gradientului său în punctul M_0 :

Rezolvare: a) Calculăm derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției u în punctul M_0 :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M_0) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin\left(\frac{y}{z}\right) \Big|_{M_0} = 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(M_0) = \sqrt{x} \cos\left(\frac{y}{z}\right) \cdot \frac{1}{z} \Big|_{M_0} = 2;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(M_0) = \sqrt{x} \cos\left(\frac{y}{z}\right) \cdot \left(-\frac{y}{z^2}\right) \Big|_{M_0} = 0$$

și înlocuim în formula $\overrightarrow{\text{grad } u} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(M_0), \frac{\partial u}{\partial y}(M_0), \frac{\partial u}{\partial z}(M_0) \right)$.

Deci: $\overrightarrow{\text{grad } u} = (0, 2, 0)$.

b) Expresia pentru derivata funcției u în punctul M_0 după direcția vectorului $\vec{l}$ este:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = u'_x(M_0) \cos \alpha + u'_y(M_0) \cos \beta + u'_z(M_0) \cos \gamma, \quad (1)$$

unde $\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ - sunt

cosinusurile directe ale vectorului $\vec{l} = (x, y, z)$.

Aflăm coordonatele vectorului $\vec{l} = \overrightarrow{M_0M_1}$: $\vec{l} = (-4, 2, 2)$. Calculăm valorile cosinusurilor

directori: $\cos \alpha = \frac{-4}{\sqrt{(-4)^2+2^2+2^2}} = \frac{-4}{\sqrt{24}} = \frac{-2}{\sqrt{6}}$, $\cos \beta = \frac{2}{\sqrt{(-4)^2+2^2+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{24}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$,

$\cos \gamma = \frac{2}{\sqrt{(-4)^2+2^2+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{24}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$ și înlocuim în formula (1) pentru a obține:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = 0 \cdot \left(\frac{-2}{\sqrt{6}}\right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + 0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{2}{\sqrt{6}}.$$

- c) Derivata funcției după direcția gradientului său în punct coincide cu modulul gradientului în acest punct. Astfel:

$$\frac{\partial u}{\partial \text{gradu}} = |\overrightarrow{\text{grad } u}| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 0^2} = 2.$$

Observăm că $\frac{\partial u}{\partial l} < \frac{\partial u}{\partial \text{gradu}}$, adică viteza creșterii funcției în direcția vectorului $\vec{l}$ este mai mică decât viteza creșterii funcției în direcția gradientului, ceea ce confirmă afirmațiile teoretice