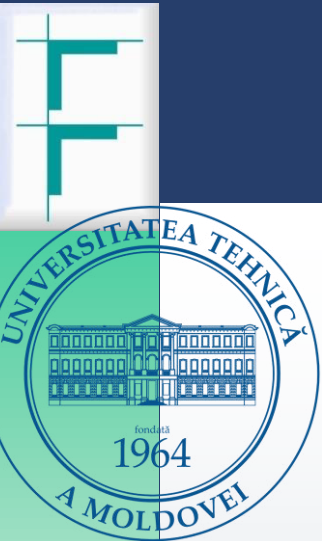




INFORMATICA CUANTICĂ

Acad. AȘM, Profesor univ. Sidorenko Anatolie

**Institutul de Inginerie Electronica
și Nanotehnologii al UTM**

**E-mail: sidorenko.anatoli@gmail.com
anatolie.sidorenko@mib.utm.md**

Tel./viber +37369513294

Тема 4. Смешанные и запутанные состояния квантовых систем

4.1. Смешанные состояния квантовых систем

В экспериментах часто имеют дело с ансамблями квантовых систем, приготовленных определенным способом. С точки зрения описания состояния частиц в ансамбле приготовление систем можно осуществить двумя способами: 1) с получением полной информации о состоянии квантовой системы; 2) с получением только вероятностной информации о состоянии квантовой системы. Пример таких способов приготовления приведен на рис. 8. Печь создает поток атомов (кубитов) со спином $I = 1/2$; состояния $|0\rangle$ (спин вверх) и $|1\rangle$ (спин вниз) встречаются в ансамбле атомов с вероятностями больцмановского распределения.

В первом способе приготовления ансамбль атомов проходит через сепаратор (прибор Штерна-Герлаха), который пространственно разделяет его на два потока, соответствующие состояниям $|0\rangle$ и $|1\rangle$. Ансамбль атомов в состоянии $|1\rangle$ поглощается адсорбером; оставшийся ансамбль атомов находится в чистом состоянии $|0\rangle$. Таким образом, мы имеем полную информацию о состоянии атомов в ансамбле. Во втором способе сепаратор отсутствует; ансамбль атомов состоит из атомов в состояниях $|0\rangle$ или $|1\rangle$ с вероятностями $p_{|0\rangle}$ или $P|p$. Такое состояние представляет собой смесь чистых состояний $|0\rangle$ и $|1\rangle$.

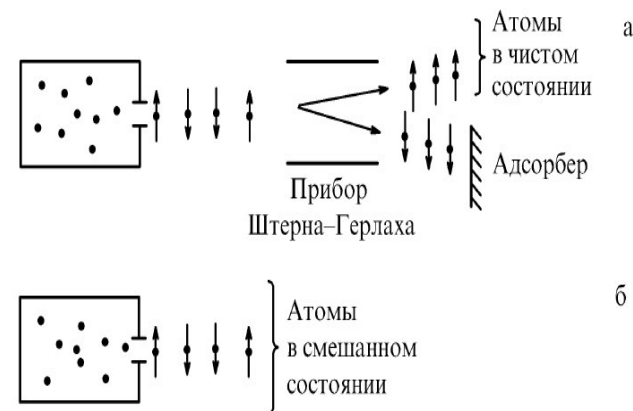


Рис. 8. Схема приготовления атомов в чистом (а) и смешанном (б) состояниях.

Математически смешанное состояние квантовой системы можно описать только матрицей плотности:

$$\rho = p_{|0\rangle} |0\rangle\langle 0| + p_{|1\rangle} |1\rangle\langle 1|. \quad (39)$$

Здесь

$$|0\rangle\langle 0| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad |1\rangle\langle 1| = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

— проекторы на состояния $|0\rangle$ и $|1\rangle$. Можно также сказать, что квантовая система в смешанном состоянии не обладает волновой функцией.



Тема 4. Смешанные и запутанные состояния квантовых систем

4.2. Смешанные состояния квантовых систем

Смешанные состояния можно классифицировать как близкие к классическим состояниям, поскольку их описание матрицей плотности близко к статистическому описанию классических систем.

Процессы перехода от чистых состояний к смешанным состояниям рассматривают как процессы классицизации (classicization) квантово-когерентных систем. Однако состояния, составляющие смесь, являются квантово-когерентными; в частности, они могут быть запутанными, и эта запутанность может быть извлечена из смешанного состояния (entanglement purification) и передана другой квантовой системе в чистом состоянии.

Процесс перехода системы от квантово-когерентного чистого состояния, описываемого волновой функцией, к некогерентному состоянию, описываемому матрицей плотности, называется также процессом декогерентизации (decoherence) системы.



Тема 4. Смешанные и запутанные состояния квантовых систем

4.3. Запутанные состояния квантовых систем

Теория запутанных состояний композитных квантовых систем находится в состоянии разработки. В отношении систем, состоящих из двух частей (A и B) достигнуто более или менее полное понимание и описание запутанности. В классической физике информация, дающая полное описание системы как целого, достаточна для полного описания и частей целого. В квантовой механике это правило не выполняется, если целое находится в так называемом запутанном состоянии: информация, дающая полное описание целого, недостаточна для полного описания частей, из которых состоит целое.

Запутанность является сердцевинным свойством квантовых систем. Из существования запутанных систем вытекает нелокальность квантового описания природы.

Запутанность служит важнейшим ресурсом в квантовой информатике: использование запутанных состояний обеспечивает выполнение протоколов квантовой телепортации, криптографии и квантовых вычислений. Запутанные состояния были обнаружены еще в 1935 г. в основополагающих работах Шрёдингера и Эйнштейна с сотрудниками.



Тема 4. Смешанные и запутанные состояния квантовых систем

4.3. Запутанные состояния квантовых систем

Рассмотрим двухкомпонентную квантовую систему A и B в чистом состоянии $|\psi_{AB}\rangle$. Пусть A и B различимы (не тождественные частицы) и пусть размерности подсистем A и B равны M и N ($M \leq N$).

Вектор состояния $|\psi_{AB}\rangle$ может быть разложен по базисным функциям u_i и v_i подсистем A и B (разложение Шмидта):

$$|\psi_{AB}\rangle = \sum_{i=1}^M c_i |u_i\rangle |v_i\rangle. \quad (43)$$

Тождественность частиц вносит новые элементы в теорию запутанности для фермионов и бозонов.

Число не равных нулю коэффициентов c_i в разложении есть число Шмидта Sch . Если $Sch = 1$, состояние $|\psi_{AB}\rangle = |u\rangle |v\rangle$ не запутано, так как представляет собой произведение состояний u и v подсистем. Если $Sch \geq 2$, состояние $|\psi_{AB}\rangle = |u\rangle |v\rangle$ запутано.

Для системы, описываемой матрицей плотности ρ , энтропия фон Неймана:

$$S(\rho) = -Tr(\rho \log_2 \rho) \quad (44)$$

Дает меру (количество) запутанности в двухкомпонентной системе.



Тема 4. Смешанные и запутанные состояния квантовых систем

4.3. Запутанные состояния квантовых систем

Чистое состояние $|\psi_{AB}\rangle$ определено полностью, так что энтропия Шеннона $S(\rho_{AB}) = 0$. Однако состояния подсистем A и B по отдельности характеризуются с неопределенностью, выраженной вероятностями $|c_i|^2$ в матрицах плотности:

$$\rho_A = \text{Tr}_B \rho_{AB} = \sum_i \langle v_i | \rho_{AB} | v_i \rangle = \sum_i |c_i|^2 |u_i\rangle \langle u_i|, \quad (45)$$

$$\rho_B = \sum_i |c_i|^2 |v_i\rangle \langle v_i|$$

Значения энтропии фон Неймана для подсистем A и B положительны:

$$S(\rho_A) = S(\rho_B) = -\sum_i |c_i|^2 \log_2 |c_i|^2 > 0. \quad (46)$$

Неопределенность в состояниях, описываемых матрицами плотности ρ_A и ρ_B **существует до измерения состояний подсистем A и B** . Чем больше эта неопределенность, тем больше запутанность в состоянии $|\psi_{AB}\rangle$ композитной системы AB .

Тема 4. Смешанные и запутанные состояния квантовых систем

4.3. Запутанные состояния квантовых систем

Для кубита в состоянии, описываемом матрицей плотности

$$\rho_A = |c_0|^2 |0\rangle\langle 0| + |c_1|^2 |1\rangle\langle 1|,$$

максимум $S(\rho_A) = 1$ достигается при $|c_0|^2 = |c_1|^2 = 1/2$. Это соответствует чистому состоянию

$$|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle)$$

двухкубитовой композитной системы, имеющему максимальную запутанность в системе кубитов A и B .

Таким образом, мерой запутанности в чистом состоянии $|\psi_{AB}\rangle$ композитной системы AB служит мера неопределенности состояний подсистем A и B — энтропия фон Неймана. Для различимых подсистем вся неопределенность в ρ_A и ρ_B обусловлена запутанностью в состоянии $|\psi_{AB}\rangle$.



Тема 4. Смешанные и запутанные состояния квантовых систем

4.4. Запутанные состояния квантовых систем

Рассматривая запутанность кубитов как ресурс, мы должны уметь ее создавать (генерировать), хранить, преобразовывать, использовать. Перейдем к вопросу о преобразованиях запутанных состояний.

При рассмотрении запутанных состояний трех и более частиц возникает вопрос: в какой мере объект (кубит) может быть запутан одновременно с двумя (и более) другими объектами? Оказывается, что квантовая запутанность (квантовые корреляции) не может свободно возникать (создаваться) между одним объектом и многими другими - в отличие от классических корреляций. Например, в системе из трех частиц A, B, C наличие запутанности A и B ограничивает сверху запутанность A с C .

Обобщая состояние запутанности на случай $n \gg 1$ кубитов, получаем состояние типа "шрёдингеровского кота":

$$|\psi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_1 \dots 0_n\rangle + |1_1 \dots 1_n\rangle)$$

- являющееся моделью состояния макроскопического тела в суперпозиционном квантовом состоянии. Исследуя процессы декогерентизации состояния $|\psi_n\rangle$, удастся ответить на вопрос кардинальной важности: почему макроскопические тела ведут себя как классические, тогда как по существу они квантовые - в том смысле, что нет запрета на квантовое описание тел большого размера.



Тема 4. Смешанные и запутанные состояния квантовых систем

4.5. Экспериментальные методы получения запутанных состояний

Запутанность как ресурс является расходуемым фактором. Следовательно, необходимы методы ”изготовления” запутанных пар. Используя унитарное двухкубитовое преобразование CNOT, из начального незапутанного состояния двух кубитов

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|0_A\rangle + |1_A\rangle) |0_B\rangle$$

получаем максимально запутанную пару кубитов:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|0_A\rangle |0_B\rangle + |1_A\rangle |0_B\rangle) \xrightarrow{\text{CNOT}_{AB}} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_A\rangle |0_A\rangle + |1_A\rangle |1_B\rangle) \quad (52)$$

Такой способ можно назвать **алгоритмическим**, так как используемые операции взяты из универсального набора, предназначенного для выполнения квантовых алгоритмов. Алгоритмическим способом получены запутанные кубиты на ионах в ловушке и ядерных спинах в ЯМР-квантовом компьютере.

В большинстве экспериментов с запутанностью используют пары фотонов, получаемые в результате спонтанного распада ультрафиолетового фотона накачки в нелинейном кристалле, — так называемую «вниз-конверсию» (down-conversion).