Integrale triple

Exemplul 1. *Să se calculeze integrala triplă* $I = \iiint\limits_T x dx dy dz$, *unde* T *este domeniul mărginit de suprafeţele* $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x + y + z = 1.$

Rezolvare. Domeniul de integrare T este un tetraedru (fig.6.3), care poate fi scris în forma analitică

$$T = \{(x, y, z): \qquad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1 - x, \quad 0 \le z \le 1 - x - y\},$$

adică are forma (3.7.5). Deci avem:

$$\iiint\limits_T x dx dy dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} x dz = \int\limits_0^1 x dx \int\limits_0^{1-x} \left[z\Big|_0^{1-x-y} \right] dy =$$

$$= \int\limits_0^1 x dx \int\limits_0^{1-x} (1 - x - y) dy = \int\limits_0^1 x \left[\left(y - xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{1-x} \right] dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^1 (x - 2x^2 + x^3) dx = \frac{1}{24}. \blacktriangleleft$$

Exemplul 2. *Să se calculeze integrala triplă* $\iiint\limits_T z^2 \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, *unde* T *este domeniul mărginit de suprafeţele* $y = 0,\ z = 0,\ z = 3,\ x^2 + y^2 = 2x,\ y \ge 0.$

Rezolvare. Ecuaţia $x^2 + y^2 = 2x$ poate fi scrisă în forma $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, de unde rezultă ca ea este ecuaţia unei suprafeţe cilindrice cu generatoarele paralele cu axa Oz şi cu directoarea $\Gamma: \quad (x - 1)^2 + y^2 = 1$ din planul Oxy. Domeniul T este reprezentat în fig.6.4b. Vom trece la coordonatele cilindrice ρ, φ şi z. Ecuaţia semicircumferinţei Γ este $\rho = 2\cos\varphi$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ care se obţine din ecuaţia $x^2 + y^2 = 2x$, substituind $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ şi simplificând ambele părţi prin ρ. Deci domeniul T poate fi scris în coordonate cilindrice astfel:

$$T = \{(\rho, \varphi, z): \qquad 0 \le \varphi \le \pi/2, \quad 0 \le \rho \le 2\cos\varphi, \quad 0 \le z \le 3\}.$$

Avem:

$$\iiint\limits_T z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} d\rho \int\limits_0^3 z\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}\rho\,dz =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \rho^2\,d\rho \int\limits_0^3 z\,dz = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \rho^2 \left[\frac{z^2}{2}\Big|_0^3\right] d\rho =$$

$$= \frac{9}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \left[\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^{2\cos\varphi}\right] d\varphi = 12\int\limits_0^{\pi/2} \cos^3\varphi\,d\varphi = 12\int\limits_0^{\pi/2} (1-\sin^2\varphi)\,d(\sin\varphi) =$$

$$= 12\left[\sin\varphi - \frac{1}{3}\sin^3\varphi\right]\Big|_0^{\pi/2} = 8 \blacktriangleleft$$

Exemplul 3. *Să se calculeze integrala triplă* $\iiint\limits_T x^2\,dxdydz$*, unde* T *este sfera* $x^2+y^2+z^2 \le 4$.

Rezolvare. Trecem la coordonatele sferice ρ, φ şi θ (fig.6.6). În aceste coordonate domeniul T poate fi scris în forma:

$$T = \{(\rho,\varphi,\theta): \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le r \le 2\}.$$

Deci

$$\iiint\limits_T x^2\,dxdydz = \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho^2\sin^2\theta\cdot\cos^2\varphi\cdot\rho^2\sin\theta\,d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} \sin^3\theta\,d\theta \int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi\,d\varphi \int\limits_0^2 \rho^4 d =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} (\cos^2\theta - 1)d(\cos\theta)\cdot\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi\cdot\frac{1}{5}\left[r^5\Big|_0^2\right] =$$

$$= \left[\left(\frac{1}{3}\cos^3\theta - \cos\theta\right)\Big|_0^{\pi}\right]\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\varphi+\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{2\pi}\right]\cdot\frac{32}{5} = \frac{128}{5}\pi. \blacktriangleleft$$

Exemplul 4. *Să se calculeze volumul corpului, mărginit de suprafeţele* $x=0$, $y=0$, $z=0$, $2x+3y=6$, $y^2+z-4=0$, $y \ge 0$.

Rezolvare. Suprafeţele $x=0$, $y=0$ şi $z=0$ sunt planele de coordonate Oyz, Oxz şi, respectiv, Oxy. Ecuaţia $2x+3y=6$ este ecuaţia unui plan paralel cu axa Oz (deoarece în această ecuaţie lipseşte variabila z) şi care intersectează planul Oxy prin dreapta $2x+3y=6$ de pe acest plan (fig.7.1). Suprafaţa $y^2+z-4=0$ este o suprafaţă cilindrică cu generatoarele paralele cu axa Ox (deoarece în ecuaţia ei lipseşte variabila x) şi cu directoarea $y^2+z-4=0$ din planul Oxy.

Fie T domeniul spaţial, mărginit de suprafeţele date, şi D proiecţia ortogonală a lui pe planul Oxy. Evident că

$$D = \left\{(x, y) : \qquad 0 \le x \le 3, \quad 0 \le y \le 2 - \frac{2}{3}x\right\}$$

$$T = \left\{(x, y, z) : \qquad 0 \le x \le 3, \quad 0 \le y \le 2 - \frac{2}{3}x, \quad 0 \le z \le 4 - y^2\right\}.$$

Aplicând formula (3.7.16), obţinem

$$V = \iiint\limits_T dx\, dy\, dz = \int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{2-\frac{2x}{3}} dy \int\limits_0^{4-y^2} dz = \int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{2-\frac{2x}{3}} \left(4 - y^2\right) dy =$$

$$= \int\limits_0^3 \left(\frac{8}{81}x^3 - \frac{8}{9}x^2 + \frac{16}{3}\right) dx = 10. \blacktriangleleft$$

Exemplul 5. *Să se calculeze masa corpului T mărginit de suprafeţele $z = 0$, $z = \sqrt{5}$ şi $x^2 + y^2 - z^2 = 4$, dacă densitatea lui este $\mu(x,y,z)=z$.*

Rezolvare. Suprafaţa $x^2 + y^2 - z^2 = 4$ reprezintă un hiperboloid de rotaţie cu o pânză. Deci T este domeniul, cuprins înăuntrul acestui hiperboloid şi între planele $z=0$ şi $z = \sqrt{5}$ (fig.7.2). Determinăm intersecţia hiperboloidului cu planul $z = \sqrt{5}$. Din sistemul

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 4, \\ z = \sqrt{5}. \end{cases} \quad \text{obtinem} \quad x^2 + y^2 = 9,$$

Deci proiecţia lui T pe planul Oxy este cercul $x^2 + y^2 \le 9$.

Divizăm domeniul T în două parţi T_1 şi T_2 cu ajutorul suprafeţei cilindrice $x^2 + y^2 = 4$. Proiecţiile pe Oxy ale acestor parţi D_1 şi D_2 sunt cercul $x^2 + y^2 \le 4$ şi, respectiv, inelul $4 \le x^2 + y^2 \le 9$. Vom trece la coordonate cilindrice. Cum

$$T_1 = \left\{(\rho, \varphi, z) : \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \rho \le 2, \quad 0 \le z \le \sqrt{5}\right\}$$

şi

$$T_2 = \left\{(\rho, \varphi, z) : \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 2 \le \rho \le 3, \quad \sqrt{\rho^2 - 4} \le z \le \sqrt{5}\right\},$$

avem

$$m = \iiint\limits_T zdxdydz = \iiint\limits_{T_1} zdxdydz + \iiint\limits_{T_2} zdxdydz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2} \rho\, d\rho \int\limits_0^{\sqrt{5}} z\, dz + \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_2^{3} \rho d\rho \int\limits_{\sqrt{\rho^2-4}}^{\sqrt{5}} zdz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2} \frac{5}{2}\rho\, d\rho + \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_2^{3} \rho\left(\frac{9}{2} - \frac{\rho^2}{2}\right) d\rho =$$

$$= 5\int\limits_0^{2\pi} d\varphi + \frac{25}{8}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{65}{4}\varphi. \blacktriangleleft$$

Exemplul 6. *Să se calculeze momentele statice m_{xy}, m_{xz} şi m_{yz} ale cubului $T = \{(x, y, z) : 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1, \quad 0 \le z \le 1\}$, dacă densitatea lui este $\mu(x,y,z) = x+y+z$.*

Rezolvare. Cubul dat este reprezentat în fig.7.4. Conform (3.7.18) avem

$$m_{xy} = \iiint\limits_T z(x + y + z)\, dxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 z(x + y + z)\, dz =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}\right) dy = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2}x + \frac{7}{12}\right) dx = \frac{5}{6}.$$

Analog obtinem $m_{xz} = m_{yz} = \dfrac{5}{6}$. $\blacktriangleleft$

Exemplul 7. *Să se calculeze coordonatele centrului maselor cubului $T = \{(x, y, z) : \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1, \quad 0 \le z \le 1\}$ cu densitatea $\mu(x,y,z)=x+y+z$.*

Rezolvare. Momentele statice au fost calculate în exemplul 6.. Calculăm masa cubului dat:

$$m = \iiint\limits_T \mu(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_T (x + y + z)dxdydz =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 (x + y + z)dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \left(x + y + \frac{1}{2}\right) dy = \int\limits_0^1 (x + 1)dx =$$

$$= \frac{3}{2}.$$

Conform (3.7.19) avem: $x_c = \dfrac{m_{yz}}{m} = \dfrac{5}{9}$. Analog obţinem $y_c = z_c = \dfrac{5}{9}$. ◀

Exemplul 8. *Să se calculeze momentul de inerţie a unui con circular omogen cu densitatea μ_0 în raport cu axa sa, dacă raza bazei lui este R, iar generatoarea formează cu înălţimea unghiul $\alpha = 45°$.*

Rezolvare. Alegem sistemul cartezian rectangular de coordonate $Oxyz$ astfel ca O să coincidă cu vârful conului şi înălţimea lui să se afle pe semiaxa pozitivă a axei Oz (fig.7.5). Dacă notăm prin T conul dat, atunci, în coordonate cilindrice, avem $T = \{(\rho, \varphi, z): \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq R, \quad \rho \leq z \leq R\}$. Aceasta rezultă din faptul că $\alpha = 45°$ şi deci înălţimea conului este egală cu raza lui, iar suprafaţa care mărgineşte conul este partea suprafeţei conice $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, situate în semispaţiul de sus. Această parte are ecuaţia $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ sau, în coordonate cilindrice, $z = \rho$.

Dacă notăm cu $\mu_0 = \text{const}$ densitatea conului, atunci din (3.7.20) avem

$$I_z = \iiint\limits_T (x^2 + y^2)\mu_0 \, dxdydz =$$

$$= \mu_0 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R d\rho \int\limits_\rho^R (\rho^2 \cos^2\varphi + \rho^2 \sin^2\varphi)\rho \, dz = \mu_0 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho^3 \, d\rho \int\limits_\rho^R dz = \mu_0 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho^3 (R - \rho) d\rho =$$

$$= \mu_0 \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{20} R^5 \, d\varphi = \frac{1}{10}\pi R^5 \mu_0. \ ◀$$