Aplicaţiile integralei duble în geometrie şi fizică

Exemplul 1. *Să se calculeze aria figurii D, mărginite de liniile* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *şi* $\dfrac{x^2}{4a^2} + \dfrac{y^2}{4b^2} = 1.$

Rezolvare. Vom aplica formula (3.6.1) şi vom trece la alte variabile. Observăm că domeniul D este figura plană, mărginită de elipsele, ecuaţiile canonice ale cărora sunt date în enunţul exerciţiului (fig.4.1).

Trecem la variabilele ρ şi φ conform legii

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi, \\ y = b\rho\sin\varphi, \end{cases} \qquad (\rho,\varphi) \in D^*,$$

unde $D* = \{(\rho,\varphi): \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 1 \le \rho \le 2\}$. Calculăm jacobianul:

$$J = \begin{vmatrix} \partial x/\partial\rho & \partial x/\partial\varphi \\ \partial y/\partial\rho & \partial y/\partial\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -a\rho\sin\varphi \\ b\sin\varphi & b\rho\cos\varphi \end{vmatrix} = ab\rho.$$

Conform (3.5.38) obţinem

$$S = \iint\limits_D dxdy = \iint\limits_{D^*} ab\rho d\rho d\varphi =$$

$$= ab\int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 \rho d\rho = ab\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{\rho^2}{2}\right)\Bigg|_1^2\right]d\varphi = \left(\frac{3ab}{2}\right)\int_0^{2\pi} d\varphi = 3\pi ab. \blacktriangleleft$$

Exemplul 2. *Să se calculeze volumul corpului mărginit de suprafeţele z=x2+y2, x=0, y=x, y=1.*

Rezolvare. Suprafaţa z=x2+y2 este un paraboloid de rotaţie, axa căruia coincide cu Oz, x=0 este ecuaţia planului Oyz, planul y=x trece prin axa Oz şi dreapta y=x de pe planul Oxy, iar y=1 este planul paralel cu Oxz şi care intersectează axa Oy în punctul cu ordonata 1 (fig.4.6).

Vom aplica formula (3.6.2) cu $f(x,y) = x^2 + y^2$ şi $D = \{(x,y): 0 \le x \le 1, \, x \le y \le 1\}$.

Avem:

$$V = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_x^1 (x^2+y^2)dy =$$

$$= \int_0^1 \left[x^2 y \Big|_x^1 + \frac{y^3}{3}\Big|_x^1 \right] dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{3} - \frac{4x^3}{3} \right) dx = \frac{1}{3}. \blacktriangleleft$$

Exemplul 3. *Să se calculeze aria părţii suprafeţei sferice $x^2+y^2+z^2=4$, care se află în interiorul suprafeţei cilindrice $x^2+y^2=1$.*

Rezolvare. Suprafaţa dată S constă din două părţi S_1 şi S_2 cu arii egale (fig.4.8). Una din aceste părţi S_1 este definită de ecuaţia $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, $x^2+y^2 \le 1$.

Aplicăm formula (3.6.9) cu $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$, $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\}$. Cum $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$, obţinem

$$|S_1| = \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dxdy =$$

$$= \iint_D \sqrt{1+\frac{(x^2+y^2)}{(4-x^2-y^2)}} dxdy =$$

$$= \iint_D \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}} dxdy.$$

În coordonate polare avem $D = \{(\rho,\varphi) : 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \rho \le 1\}$ şi deci

$$|S_1| = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{2\rho}{\sqrt{4-\rho^2}} d\rho = \left[\varphi \,\Big|_0^{2\pi}\right] \cdot \left[-2\sqrt{4-\rho^2}\,\Big|_0^1\right] = 4\pi\left(2-\sqrt{3}\right).$$

Aria suprafeţei S este $|S| = 2|S_1| = 8\pi\left(2-\sqrt{3}\right)$. $\blacktriangleleft$

Exemplul 4. *Să se calculeze masa domeniului plan D, mărginit de liniile $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=9$, $y=0$ şi $y=x\sqrt{3}$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, densitatea superficială a căruia este $\mu(x,y) = \dfrac{y}{x^2}$.*

Rezolvare. Conform (3.6.10) avem $m = \iint_D \left(\dfrac{y}{x^2}\right) dxdy$. Calculăm această integrală, trecвnd la coordonate polare.

Cum (fig.5.1) $D^* = \{(\rho,\varphi) : 0 \le \varphi \le \pi/3,\ 1 \le \rho \le 3\}$, avem

$$m=\int\limits_0^{\pi/3}d\varphi\int\limits_1^3\frac{\rho\sin\varphi}{\rho^2\cos^2\varphi}\rho\,d\rho=-\int\limits_0^{\pi/3}\frac{d(\cos\varphi)}{\cos^2\varphi}\int\limits_1^3 d\rho=2\frac{1}{\cos\varphi}\Bigg|_0^{\pi/3}=2.\ ◀$$

Exemplul 5. *Să se calculeze momentele statice faţă de axa Ox şi faţă de axa Oy ale domeniului plan D, mărginit de axa Ox şi arcul, care se află în semiplanul de sus (y≥0) al elipsei* $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ *(fig.5.3).*

Rezolvare. Conform (3.6.12) şi (3.6.13) avem $m_x=\iint\limits_D y dxdy$ şi $m_y=\iint\limits_D xdxdy$.

Cum $D=\{(x,y):\ -5\le x\le 5,\ 0\le y\le \frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}\}$, avem

$$m_x=\int_{-5}^{5}dx\int_0^{(3/5)\sqrt{25-x^2}}y\,dy=\int_{-5}^{5}\left[\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{(3/5)\sqrt{25-x^2}}\right]dx=$$

$$=\frac{9}{50}\int_{-5}^{5}(25-x^2)dx=\frac{9}{50}\left(25x-x^3/3\right)\Big|_{-5}^{5}=30.$$

Pentru m_y avem:

$$m_y=\int\limits_{-5}^{5}x\,dx\int\limits_0^{(3/5)\sqrt{25-x^2}}dy=\frac{3}{5}\int\limits_{-5}^{5}x\sqrt{25-x^2}dx=$$

$$=-\frac{3}{10}\int_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}\,d(25-x^2)=-\frac{1}{5}\sqrt{(25-x^2)^3}\Bigg|_{-5}^{5}=0.$$

Faptul că $m_y=0$ putea fi prezis din timp, adică fără a calcula integrala (3.6.13), deoarece domeniul D este simetric faţă de axa Oy şi este omogen ($\mu(x,y)=1$).◀

Exemplul 6. *Să se calculeze coordonatele centrului maselor domeniului plan D, mărginit de liniile* $y=0$, $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, $y\ge 0$, *cu densitatea superficială* $\mu(x,y)=1$.

Rezolvare. Observăm că domeniul D este acelaşi ca şi în exemplul 2. Acolo am calculat $mx=30$ şi $my=0$. Rămâne să calculăm m. Avem:

$$m=\iint\limits_D 1\cdot dx\,dy=\int_{-5}^{5}dx\int_0^{(3/5)\sqrt{25-x^2}}dx=\frac{3}{5}\int_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}dx=$$

$$=\left|\begin{array}{c}x=5\sin t,\quad dx=5\cos t\,dt;\\ x=-5,\ t=-\pi/2;\ \ x=5,\ t=\pi/2.\end{array}\right|=\frac{3}{5}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{25-25\sin^2 t}\cdot 5\cos t\,dt=$$

$$=15\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\,dt=15\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt=$$

$$=\frac{15}{2}t\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}+\frac{15}{4}\sin 2t\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{15\pi}{2}.$$

Folosind formulele (3.6.14), obţinem:

$$x_C = \frac{m_y}{m} = \frac{0}{15\pi/2} = 0; y_C = \frac{m_x}{m} = \frac{30}{15\pi/2} = \frac{4}{\pi}.$$

Răspuns: $C\left(0; \frac{4}{\pi}\right)$. ◄

Exemplul 7. *Să se calculeze momentele de inerţie I_0, I_x, I_y ale unui cerc de raza 2 cu centrul în originea de coordonate, dacă densitatea superficială în fiecare punct este egală cu distanţa acestui punct pвnă la centrul cercului.*

Rezolvare. Cum distanţa de la punctul (x,y) până la originea $O(0,0)$ este egală cu $\sqrt{x^2+y^2}$, din datele exemplului rezultă că densitatea superficială a cercului, pe care îl notăm cu D, este $\mu(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Aplicând formulele (3.6.16), avem:

$$I_x = \iint Dy^2\sqrt{x^2+y^2}dxdy,$$

$$I_y = \iint Dx^2\sqrt{x^2+y^2}dxdy,$$

$$I_0 = \iint D(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}dxdy.$$

Vom calcula aceste integrale, trecвâd la coordonate polare ρ şi φ : $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Evident, că domeniul de integrare poate fi scris în forma (fig.5.4): $D = \{(\rho,\varphi) : 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \rho \le 2\}$. Avem:

$$I_x = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^2\sin^2\varphi \cdot \rho \cdot \rho\, d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi\int_0^2 \rho^4 d\rho = \frac{32\pi}{5};$$

$$I_y = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^2\cos^2\varphi \cdot \rho \cdot \rho\, d\rho = \frac{32\pi}{5};$$

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{62\pi}{5}. ◄$$