Integrale duble

Exemplul 1. *Să se calculeze integrala dublă iterată I_1 a funcţiei f(x,y)=x+y pe domeniul D, mărginit de liniile x=2, y=0 şi $y = x/2$.*

Rezolvare. Domeniul D poate fi scris în forma standardă (fig.2.3).

$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \qquad 0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le x/2\Big\}.$$

Avem $F(x) = \int\limits_0^{x/2} (x+y)dy = \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{\frac{x}{2}} = \frac{5}{8}x^2$. Deci

$$I_1 = \int\limits_0^2 F(x)dx = \int\limits_0^2 \frac{5}{8}x^2dx = \frac{5}{8}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = \frac{5}{3}. \blacktriangleleft$$

Exemplul 2. *Să se calculeze integrala dublă iterată I_2 a funcţiei f(x,y) pe domeniul D definit de liniile $x = 2$, $y = 0$ şi $y = \frac{x}{2}$.*

Rezolvare. Scriem mai întâi domeniul D în forma standardă (3.5.24). Observăm că D este cuprins între dreptele orizontale y=0 şi y=1 şi pentru fiecare y fixat din [0,1] dreapta orizontală, care trece prin punctul de pe Oy cu ordonata y, intră în domeniul D prin linia x=2y şi iese din el prin linia x=2 (când punctul se mişcă în direcţia axei Ox). Deci

$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \qquad 0 \le y \le 1, \quad 2y \le x \le 2\Big\}.$$

Avem $I_2 = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{2y}^2 (x+y)dx\right) dy = \int\limits_0^1 \left[\left(\frac{x^2}{2} + xy\right)\Big|_{2y}^2\right] dy = \int\limits_0^2 (2 + 2y - 4y^2)dy = \frac{5}{3}$

Observăm că $I_1 = I_2$. În acest caz se spune că integrala dublă iterată nu depinde de ordinea de integrare.

Exemplul 3. *Să se calculeze integrala dublă $\iint\limits_D xydxdy$, unde D este mărginit de liniile $y = 0$, $y = \sqrt{x}$ şi $x = 1$.*

Rezolvare. Reducem calculul integralei duble date la calculul unei integrale duble iterate. Pentru aceasta trebuie să alegem ordinea de integrare şi să determinăm limitele de integrare. Aceasta se face imediat după ce domeniul de integrare este scris în careva formă standardă. În acest scop este util să reprezentăm pe desen domeniul de integrare.

Evident (fig.2.5) că D poate fi scris în următoarea formă standardă:

$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \qquad 0 \le x \le 1, \qquad 0 \le y \le \sqrt{x}\Big\}.$$

Conform egalităţii (3.5.34) avem

$$\iint\limits_D xydxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} xydxdy = \int\limits_0^1 x \left[\left(\frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{\sqrt{x}} \right] dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 x^2 dx = \frac{1}{6}s. \blacktriangleleft$$

Exemplul 4. *Să se calculeze* $\iint\limits_D x(1/y)^2 dxdy$*, unde* D *este domeniul mărginit de liniile* $x = 2$, $y = x$ *şi* $y = 1x$.

Rezolvare. O reprezentare schematică a domeniului D ne sugerează ideea necesităţii determinării coordonatelor punctului de intersecţie a liniilor $y{=}x$ şi $y = 1/x$ (fig.2.6). Pentru aceasta rezolvăm sistemul alcătuit din ecuaţiile acestor linii:

$$\begin{cases} y = x \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}, \begin{cases} y = x \\ x^2 = 1 \end{cases} \quad \text{de unde } \{(1,1), (-1,-1)\}$$

Evident că $(1,1) \in D$, iar $(-1,-1) \notin D$. Deci domeniul D poate fi scris în forma standardă $D = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 1 \le x \le 2, \quad 1/x \le y \le x \Big\}$. Avem

$$\iint\limits_D \frac{x}{y^2} dx\, dy = \int\limits_1^2 dx \int\limits_{1/x} \frac{x}{y^2} dy = \int\limits_1^2 \left[-\frac{1}{y} \Big|_{\frac{1}{x}}^{x} \right] x dx = \frac{1}{2} \int\limits_1^2 (x^2 - 1) dx = \frac{4}{3}. \blacktriangleleft$$

Exemplul 5. *Să se schimbe ordinea de integrare în expresia*

$$I = \int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y) dy + \int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x,y) dy$$

Rezolvare. Notăm prin D_1 şi D_2 domeniile de integrare ale integralelor din suma I. Avem $D_1 = \Big\{ (x,y) : \ -2 \le x \le -\sqrt{3}; \ \ 0 \le y \le \sqrt{4 - x^2} \Big\}$,

$$D_2 = \Big\{ (x,y) : \ -\sqrt{3} \le x \le 0, \ 0 \le y \le 2 - \sqrt{4 - x^2} \Big\}.$$

Graficul funcţiei $y = \sqrt{4 - x^2}$ reprezintă semicircumferinţa de sus a circumferinţei $x^2 + y^2 = 4$, iar graficul funcţiei $y = 2 - \sqrt{4 - x^2}$ reprezintă semicircumferinţa de jos a circumferinţei $x^2 + (y-2)^2 = 4$. Găsim punctele de intersecţie ale acestor grafice, rezolvând sistemul alcătuit din ecuaţiile lor. În rezultat, obţinem punctele $M_1(-\sqrt{3}, 1)$ şi $M_2(\sqrt{3}, 1)$; punctul M_2 nu aparţine domeniului de integrare (fig.2.7).

Notăm: $D = D_1 \cup D_2$. Evident că

$$D = \Big\{ (x,y) : \ 0 \le y \le 1, \ \ -\sqrt{4 - y^2} \le x \le -\sqrt{4 - (y-2)^2} \Big\}.$$

Cum $4-(y-2)^2 = 4y - y^2$, la schimbarea ordinii în integrala I obţinem

$$I = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{4y-y^2}} f(x,y)dx. \blacktriangleleft$$

Exemplul 6. *Să se calculeze integrala dublă* $\iint\limits_D e^{x/y}dxdy$, *unde* D *este domeniul mărginit de liniile* x=*0*, y=*1 şi* $x = y^2$.

Rezolvare. Domeniul D este simplu în raport cu axa Oy (fig.2.8) şi poate fi scris în următoarea formă analitică: $D = \left\{(x,y): \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le \sqrt{x}\right\}$.

Deci $\iint\limits_D e^{x/y}dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} e^{x/y}dy$. Integrala interioară nu poate fi calculată cu ajutorul formulei Newton-Leibniz, deoarece primitiva în raport cu variabila y a funcţiei $e^{x/y}$ nu este funcţie elementară.

Însă integrala dată poate fi calculată, dacă aplicăm o altă ordine de integrare. Cum domeniul de integrare D este regulat şi în direcţia axei Ox şi poate fi scris în forma analitică $D = \left\{(x,y): \quad 0 \le y \le 1, \quad 0 \le x \le y^2\right\}$, avem

$$\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}dxdy = \int_0^1 dy \int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}}dx = \int_0^1 dy \int_0^{y^2} ye^{\frac{x}{y}}d(\frac{x}{y}) = \int_0^1 y[e^{\frac{x}{y}} \Big|_0^{y^2}]dy =$$
$$= \int_0^1 y(e^y - 1)dy = \left[(y-1)e^y - 0,5y^2\right] \Big|_0^1 = 0,5. \blacktriangleleft$$

Exemplul 7. *Să se calculeze integrala dublă*

$$I = \iint\limits_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{2 - \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4}}},$$

unde $D = \left\{(x,y): \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} \le 1\right\}$.

Rezolvare. Trecem la variabilele u şi v:

$$\begin{cases} x = 3u\cos v, \\ y = 2u\sin v. \end{cases}$$

Evident, că în variabilele u şi v domeniul de integrare D se scrie în forma (fig.3.1): $D = \{(u,v): 0 \le v \le 2\pi,\ 0 \le u \le 1\}$. Calculăm Jacobianul:

$$J = \begin{vmatrix} 3\cos v & -3u\sin v \\ 2\sin v & 2u\cos v \end{vmatrix} = 6u.$$

Aplicând formula (3.5.38), obţinem

$$I = \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 \frac{6udu}{\sqrt{2-u^2}} = \int_0^{2\pi} \left[-6\sqrt{2-u^2} \Big|_0^1 \right] dv = 12\pi(\sqrt{2}-1). \blacktriangleleft$$

Exemplul 8. *Să se calculeze integrala dublă* $\iint\limits_D \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) dxdy$*, unde* D *este domeniul mărginit de liniile:* $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=9$, $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$ *şi* $y=x$, $x\geq 0$.

Rezolvare. Dacă am calcula această integrală în coordonate carteziene rectangulare, atunci domeniul D ar trebui divizat în trei părţi şi de calculat trei integrale duble (fig.3.2). Vom calcula această integrală, trecând la coordonate polare.

Cum $D^* = \left\{(\rho,\varphi) : \quad 1\leq\rho\leq 3,\ \pi/6\leq\varphi\leq\pi/4\right\}$, avem

$$\iint\limits_D \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) dxdy = \iint\limits_{D^*} \operatorname{arctg}\left(\frac{\rho\sin\varphi}{\rho\cos\varphi}\right) \rho d\rho d\varphi =$$

$$= \iint\limits_{D^*} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\varphi)\, \rho d\rho d\varphi = \iint\limits_{D^*} \varphi\cdot\rho d\rho d\varphi = \int_1^3 \rho d\rho \int_{\pi/6}^{\pi/4} \varphi d\varphi =$$

$$= \int_1^3 \rho d\rho \left[\left(\frac{\varphi^2}{2}\right) \Big|_{\pi/6}^{\pi/4} \right] = \frac{5}{288}\pi^2 \int_1^3 \rho d\rho = \frac{5}{72}\pi^2. \blacktriangleleft$$