**7.ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ**

Пусть функция  задана на промежутке  , который, в частности, может совпадать со всей числовой осью  или с полуосью (например, ). Интегральным преобразованием функции  называется

выражение



где  - фиксированная для данного преобразования функция, называемая ядром преобразования. Если ядро  принимает комплексные значения, то и 

будет комплексной функцией аргумента .

**7.1. Преобразования Фурье.**

Пусть для функции  существует интеграл Фурье (43). Преобразованием Фурье

функции  называется функция

. (44)

Следовательно, преобразование Фурье определяется ядром  ,

пропорциональным функции .

Используя формулу (44), равенство (43) можно переписать в виде:

. (45)

Заметим, что формула (45) позволяет восстановить саму функцию  , если известно ее преобразование Фурье . Преобразование, определяемое формулой (45), называется обратным преобразованием Фурье функции .

Говорят, что прямое (44) и обратное (45) преобразования Фурье выражены в комплексной форме. В действительной форме эти преобразования записываются в виде:

 ,  (46)

(прямое) и , согласно формуле (34),

 (47)

(обратное).

Если функция  четная, то формулы (46) , (47) могут быть записаны и в следующей симметричной форме:

 (прямое),

 (обратное)

и называются парой косинус-преобразований Фурье.

Если функция  нечетная, то из формул (46) и (47) получаем пару синус-преобразований Фурье:

 (прямое) и

 (обратное).

Заметим, что для четной функции  , а для нечетной 

Действительно, пусть  - четная функция. Ее преобразование Фурье





В силу четности  произведение  тоже четное, а  - нечетное. Поэтому

 .

Таким образом,  . Второе утверждение проверяется аналогично.

В приложениях, например, в радиоэлектронике пара преобразований Фурье используется также в несимметричной форме:

, (48)

 (49)

или в форме:

 ,  , где  - циклическая частота.

**7.2. Спектры непериодических сигналов**.

В дальнейшем прямое (48) и обратное (49) преобразования Фурье будут использованы в несимметричной форме .

В силу физических соображений преобразование Фурье  функции  называется также спектральной характеристикой или спектральной плотностью функции

 .

Принципиально важно, что спектральная плотность – комплекснозначная функция частоты, одновременно несущая информацию как об амплитуде, так и о фазе элементарных синусоид. Действительно, по аналогии с интегралом Фурье в комплексной форме, в частности с формулами (25) и (26), можно написать:

 где  , .

При этом модуль и аргумент спектральной плотности  определяются выражениями:

 , 

и называются, соответственно, амплитудным и фазовым спектром функции .

Как было показано ранее, интеграл Фурье получен как предельная форма ряда Фурье

2*l* -периодической функции в случае когда . Спектр 2*l* -периодической функции является линейчатым и расстояние между соседними спектральными линиями равно основной частоте  . По мере возрастания *l* уменьшаются расстояния между

спектральными линиями и амплитуды  гармоник. При  спектр из дискретного переходит в сплошной.

В следующих задачах найти преобразования Фурье, амплитудные и фазовые спектры сигналов. 

***Пример 7***. 1

 (a>0), (Рис.11, а) a)

0 t

***Решение***. Согласно (48),



 

Амплитудный и фазовый спектры сигнала  изображены на рис. 11,б) и 11, в).

 

 

0



*0*   

*б*) *в*)

Рис. 11.

***Пример 8.***



***Решение***. Применяя формулу (48), получим:

.

На рис. 12 изображены прямоугольный импульс ( *а*) и его спектральная плотность ( *б*).

 



*A*

*t* 0

0

-  - - -   

*а*) *б*)

Рис. 12.

Модуль спектральной плотности  изображен на рис. 13, а), а аргумент  на рис. 13, б).

 

 2



-3 -2 - 0  2 3

-3 -2 - 0  2 3  

*а*) -

*б*) -2

Рис. 13.

***Задача******5*.**



***Задача******6***.



**7.3. Свойства преобразования Фурье и их смысл с точки зрения сигналов и их спектров**.

Введем оператор Фурье *F* :

.

Заметим, что следующие свойства не зависят от того в какой форме симметричной или нет записано преобразование Фурье.

***Свойство* *1***. (Непрерывность).Если функция  абсолютно интегрируема на всей числовой оси *R*,то ее преобразование Фурье  непрерывно на *R* и стремится к нулю при .

***Доказательство***. Согласно определению



При этом каждый из интегралов

, 

является непрерывной функцией (так как  - абсолютно интегрируема, а функции

 и  ограничены и непрерывны) и стремится к нулю в силу теоремы Римана при  .

***Свойство* *2***. (Линейность). Пусть для функций  и  существуют преобразования Фурье (соответственно обратные преобразования Фурье). Тогда, каковы бы ни были числа  и  , для функции  также существует преобразование Фурье (соответственно обратное ему), причем



( соответственно  .

Это свойство непосредственно следует из определения преобразования Фурье и линейности операции интегрирования.

Смысл этого свойства состоит в том, что при сложении сигналов складываются их спектры.

***Свойство* *3***.(Однозначность). Если  , то  .

Для доказательства достаточно применить обратное преобразование Фурье.

Свойство 3 означает, что спектр сигнала определяется однозначно.

Свойства 1, 2, 3 могут быть обобщены на случай пространства . То есть справедливо следующее утверждение. Оператор *F ,* так же как и обратный оператор ,

являются линейными взаимно однозначными отображениями пространства .

***Свойство* *4***. (Взаимозаменяемость независимых переменных).

Если  , то  .

***Доказательство***. Используя определения прямого и обратного преобразований Фурье

получим



Это свойство показывает, что переменные  и *t* в преобразованиях Фурье взаимно заменимы. Если сигналу  соответствует спектр  , то сигналу 

соответствует спектр  .

***Свойство* *5***.(Изменение масштаба независимой переменной). Если ,

то  ( *a*>0 ). .

***Доказательство***. Действительно,



При изменении масштаба времени в *a* раз масштаб частот изменится в  раз.

Это означает, что ширина спектра сигнала увеличивается при сжатии его по времени и

уменьшается при растяжении сигнала.

***Свойство* *6***. (Смещение функции по времени).

Если  , то 

***Доказательство***. Действительно,



Таким образом, при смещении сигнала по времени на  , его спектр смещается по

фазе на  , а по амплитуде не меняется ввиду равенства 

Как видно из рис.14 при дифференцировании сигнала происходит его обострение, а при интегрировании – сглаживание.

  

. *t t t*

Рис. 14.

О том, что при этом происходит с его спектром, говорит следующее свойство.

***Свойство* *7***. ( Дифференцирование и интегрирование функции времени).Если  , то  а  .

***Доказательство.*** Действительно,



так как внеинтегральное слагаемое в силу абсолютной интегрируемости функции 

стремится к нулю при  .

Для доказательства второго утверждения обозначим  . Тогда, так как  , на основании первого утверждения получим, что . Отсюда согласно однозначности оператора Фурье будем иметь:  или

.

Таким образом, при дифференцировании сигнала его спектральная плотность умножается на  , а при интегрировании – делится на . Как следствие, спектр

производной (интеграла) имеет большие (меньшие) значения в области высоких частот

по сравнению со спектром исходного сигнала.

***Свойство* *8***. (Дифференцирование спектральной плотности). Если функция 

непрерывна, а функции  ,  , ...,  абсолютно интегрируемы на всей числовой прямой, то преобразование Фурье  функции  является *n* раз

дифференцируемой на всей числовой прямой функцией и

 , 

**Доказательство**. Это свойство вытекает из теоремы о дифференцировании интеграла по параметру. В случае  получаем:



***Свойство* *9***. (Интегрирование спектральной плотности). Если  непрерывна, 

и  абсолютно интегрируемы на всей числовой прямой,  , то

 .

***Доказательство***. Пусть  . Тогда по свойству 8 получим:

.

Отсюда



***Свойство* *10***. (Смещение спектральной плотности).

Если  , то 

***Доказательство***. Действительно,



***Свойство* *11***. (Теорема Парсеваля).



Смысл теоремы Парсеваля состоит в том, что энергия сигнала равна сумме энергий всех составляющих его спектра.

***Свойство* *12***. (Спектральная плотность произведения сигналов).

Пусть  и  непрерывны и абсолютно интегрируемы на всей числовой прямой. Если  ,  , то

 . (50)

***Доказательство***. Найдем спектральную плотность произведения  :

. (51)

Применив обратное преобразование Фурье, выразим  через его спектральную плотность и подставим в (51) :



Изменив порядок интегрирования, получим:

 (52)

Интеграл, стоящий в правой части (52), называют сверткой функции  и  и символически обозначают через  .

Таким образом, 

Заметим, что свойство 12 может быть обращено.

***Свойство 13***. (Произведение спектральных плотностей). Если в условиях свойства 12  , то 

Доказательство этого свойства аналогично доказательству предыдущего и предоставляется читателю.

Таким образом, спектр произведения сигналов равен свертке их спектров и наоборот

произведению спектров соответствует свертка сигналов.

**7.4. Прямая и обратная задачи для линейного преобразователя.**

Многие радиотехнические системы и устройства можно рассматривать как преобразователи на вход которых поступает сигнал  , а на выходе получают его образ – сигнал  . Различные преобразователи ведут себя по разному при подаче на вход суммы сигналов. Преобразователь называется линейным, если линейную комбинацию входных сигналов  он преобразует в линейную комбинацию их образов  . При этом он называется стационарным, если его параметры не зависят от времени. Существует достаточно большой класс физических систем для которых линейные стационарные модели дают достаточно точное описание.

Любой линейный стационарный преобразователь можно описать либо с помощью импульсной характеристики  , либо с помощью частотного коэффициента передачи

 . При этом импульсная характеристика является образом достаточно короткого по времени сигнала единичной площади, поданного на вход преобразователя, а частотный коэффициент передачи – преобразованием Фурье импульсной характеристики.

Рассмотрим две задачи для линейного стационарного преобразователя.

*Прямая задача*. Пусть требуется найти сигнал  на выходе преобразователя, если

задан сигнал  на входе преобразователя и его импульсная характеристика  .

Тогда входной сигнал представляют в виде суммы элементарных импульсов и находят их образы. При этом согласно формуле Дюамеля



сигнал  на выходе линейного преобразователя является сверткой входного сигнала

 и импульсной характеристики  преобразователя . Отсюда и из свойства 13

вытекает, что спектральная плотность сигнала на выходе преобразователя  равна

произведениию спектральной плотности  сигнала на входе и частотного коэффициента передачи  , который называется также спектральной характеристикой преобразователя.

Пусть теперь известен сигнал на входе преобразователя  , спектральная характеристика преобразователя  и требуется найти сигнал на выходе преобразователя. Тогда определяют спектральную плотность  входного сигнала

(см. (48)) и умножением  и  - спектральную плотность  сигнала на выходе преобразователя. Наконец, применяя к произведению  обратное преобразование Фурье (см. 49)), получим выходной сигнал в виде функции от времени.

Таким образом, если входной сигнал  , то сигнал на выходе

.

*Обратная задача*. Требуется найти сигнал на входе преобразователя, если известен сигнал  на его выходе и спектральная характеристика преобразователя  . Для этого сначала находим спектральную плотность  сигнала на выходе в виде:

 Затем спектральную плотность сигнала на входе: 

Тогда с помощью обратного преобразования Фурье получим ,что сигнал на входе



Заметим, что преобразование Фурье нашло применение и при дискретной обработке сигналов, особенно благодаря открытию нового алгоритма, известного под названием “быстрое преобразование Фурье” и созданию течнических возможностей для его реализации.