Пусть функция  определена и удовлетворяет условиям Дирихле в промежутке . Рассмотрим вспомогательную функцию , для которой:

= (*t*(-*l,l* ]), ,

а в остальных действительных значениях *t* определим  по закону периодичности.

К построенной таким образом функции  с периодом *2l* можно применять

полученные ранее результаты о разложении в ряд Фурье.

 Заметим, что если заданная функция  даже непрерывна при *t=±l* , но не имеет периода *2l* , так что  , то для такой функции разложение в ряд Фурье может иметь место лишь в открытом промежутке .

 Отметим, что вместо промежутка  можно было бы взять любой промежуток  длины *2l* .

 Предположим, что функция  задана лишь в промежутке  и удовлетворяет в нем условиям Дирихле. Желая разложить  в ряд Фурье в промежутке  , доопределим ее в промежутке [- *l,*0) произвольным образом, лишь бы  удовлетворяла в нем условиям Дирихле. Затем применим рассуждения, проведенные выше.

 Произвол в доопределении функции дает возможность получить различные тригонометрические ряды. При этом, если  - точка непрерывности промежутка , то все эти ряды будут в точке  сходиться к  , если же  - точка разрыва первого рода, то – к  . .

 Можно использовать произвол в доопределении функции  в промежутке [- *l,*0) так, чтобы получить для  разложение только по косинусам или только по синусам. Действительно, если для любого из  положим  , то получим доопределенную четную функцию в промежутке  . Ее разложение в ряд Фурье будет содержать только одни косинусы. При этом коэффициенты разложения можно вычислять по формулам (19), куда входят лишь значения первоначально заданной функции  .

 Аналогично, если доопределить  условием  для любого  из  так, чтобы она получилась нечетной, то в ее разложении будут участвовать только члены с

синусами. Коэффициенты такого разложения определяются по формулам (20).

 ***Пример5***. Разложить в ряд Фурье по синусам функцию  (рис. 9, а)).



 

 

*а*

 -2 - 0  2 *x*

 

0 *t*

 Рис. 9, а). Рис. 9, б).

 ***Решение.*** Обозначим  через  и доопределим функцию  до

 2π-периодиеской нечетной функции (рис. 9, б)). Тогда  , где





Отсюда =

=  

 ***Пример 6.*** Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию 

(рис. 10, а)).

 

  *A*

*A*

 

 0    2 - - 0    2 *x*

 Рис.10, а). Рис 10, б).

 ***Решение***. Обозначим  через *x* . Доопределим функцию , , до периодической с периодом  функции (рис. 10, б)). Тогда доопределенная функция (сохраним за ней обозначение  ) будет четной -периодической функцией и на промежутке  совпадающей с данной  . Ее ряд Фурье , где , 





 Таким образом

 

 ***Задача 3.***  при  Разложить в ряд по косинусам.

 ***Задача 4.***  при . Разложитьв ряд по синусам.

**6 .НЕПЕРИОДИЧЕСКИЕ СИГНАЛЫ. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ КАК ПРЕДЕЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ РЯДА ФУРЬЕ**

 Периодические сигналы являются математическими моделями, идеализацией реальных сигналов, так как последние всегда имеют конечную длительность.

 Как было показано ранее, если функция  удовлетворяет условиям Дирихле в конечном промежутке  , то в любой точке непрерывности *t* этого промежутка ее можно представить тригонометрическим рядом



где

   

Если же *t* - точка разрыва первого рода, то  Подставляя вместо коэффициентов  и  их выражения, можно переписать ряд в виде

  (30)

 Если функция  определена на всей числовой прямой и не является периодической, то она уже не может быть разложена в ряд Фурье. Но она может быть рассмотрена как периодическая с периодом 

 Пусть  - непериодическая функция абсолютно интегрируемая в промежутке  (то есть интеграл  имеет конечное значение) и удовлетворяющая условиям Дирихле в любом конечном промежутке . В этом случае, какова бы ни была точка непрерывности *t* , соответствующее значение  выразится разложением (30) при любом *l>*  . Переходя в (30) к пределу при  , установим предельную форму этого разложения.

 Так как  сходится, то . Обратимся к ряду

  (31)

из правой части (30). Множители  можно рассматривать как дискретные значения

некоторой переменной  , непрерывно меняющейся от  до  ; при этoм приращение

 ∆

очевидно, стремится к нулю при  . При таких обозначениях ряд (31) записывется в виде:

  (32)

и является интегральной суммой для функции

 

зависящей от  в промежутке [0,+. Переходя к пределу при  сначала в (32) а затем в (30) получим предельную форму разложения (30):

  (33)

 Правая часть (33) называется интегралом Фурье функции .

 Раскрывая в (33) выражение косинуса разности, получим:

 

Или

  (34)

где

 , . (35)

 Заметим, что в равенствах (34), (35) обнаруживается аналогия с тригонометрическим разложением, лишь параметр *n* , пробегающий ряд натуральных значений, заменен

здесь непрерывно изменяющимся параметром  , а бесконечный ряд – несобственным интегралом. Коэффициенты  и  по своей структуре также напоминают

коэффициенты Фурье.

**6.1. Различные виды интеграла Фурье.**

 1. Ввиду того, что внутренний интеграл в (33) есть четная функция относительно  ,

интеграл Фурье (33) можно переписать в виде:

  (36)

 2. Если  есть четная функция, то

, .

Тогда из (34) получаем упрощенную форму записи интеграла Фурье для четной функции,

содержащую лишь косинусы:

 . (37)

 3. Аналогично, если  есть нечетная функция, то

, 

и получаем интеграл Фурье для нечетной функции, содержащий лишь синусы:

  . (38 ) Пусть функция  задана лишь в промежутке [0,+. Продолжим ее на промежуток с помощью одного из равенств:

 или  .

Если для построенной таким образом четной или нечетной функции в промежутке  существует интеграл Фурье, то для положительных значений *t* можно воспользоваться как формулой (37), так и формулой (38). Таким образом, будет получено

представление  в виде интеграла Фурье, содержащего только косинусы или только

синусы.

 4. Интеграл Фурье в комплексной форме.

 Пусть для функции  существует интеграл Фурье (34). Преобразуем подынтегральную функцию этого интеграла с помощью формул Эйлера:





 Если положить:

 ,  ,

то подынтегральная функция интеграла (34) запишется в виде:

 ,

а сам интеграл (34) запишется так:

  (39)

 Преобразуем частные интегралы, входящие в (39):





Тогда равенство (39) может быть переписано в виде:

.

Или

  . (40)

Найдем выражение для :



.

Или

 . (41)

 Легко проверить, что

.

Или

  . (42)

 Заметим, что равенство (41) получено при условии, что  , а из равенства (42) вытекает его справедливость для любых действительных значений  .

 Правая часть равенства (40) называется интегралом Фурье в комплексной форме для функции .

 Подставляя выражение (41) для  в равенство (40), получим интеграл Фурье функции  в виде: