отводится сигналу. Одним из способов изучения сигнала является создание и исследование его математической модели. В зависимости от целей исследования, математическая модель дает возможность абстрагироваться от конкретной природы носителя сигнала и выделить те его свойства, которые являются наиболее важными. При этом одна и та же модель может описывать различные характеристики сигнала, например, ток, напряжение, напряженность электромагнитного поля.

Для теории передачи сигналов важным является то, что практически все сигналы (дискретные и непрерывные) и все аддитивные помехи можно рассматривать как элементы некоторого векторного пространства.

**1. ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО СИГНАЛОВ**

Типичным для радиотехники сигналом является напряжение на зажимах какой-либо цепи или ток, протекающий в ветви. Такой сигнал описывается функцией времени. При этом функция может принимать как действительные так и комплексные значения.

Рассмотрим множество сигналов *L=*{*(t),*  *(t), ...*}. Как известно, сигналы можно складывать, умножать на числа. При зтом эти операции обладают некоторыми общими свойствами.

Говорят, что множество *L* наделено структурой линейного (векторного) пространства, если выполнены следующие условия:

1. В множестве *L* определена операция сложения элементов. То есть любым двум элементам *x* и *y* из *L* ставится в соответствие элемент из *L* , называемый их суммой и обозначаемый через *x+y* . При этом операция сложения удовлетворяет следующим усливиям:

1.1. *x+y = y+x*;

1.2. (*x+y*)*+z=x+*(*y+z*);

1.3. в множестве *L* существует нулевой элемент 0 такой, что *x+*0*=x*  для любого *x* из *L*  ;

1.4. для каждого элемента *x* из *L* существует противоположный ему элемент (-*x*) такой, что *x+*(-*x*)=0*.*

2. В множестве *L* определена операция умножения элементов на действительные (комплексные) числа. То есть любому числу λ из *R* ( *C* ) и любому элементу *x* из *L* ставится в соответствие элемент из *L* , обозначаемый через λ*x* и называемый их произведением. При этом:

2.1. *1x=x*;

2.2. λ(μ *x*)= ( λμ) *x.*

3.Операции сложения элементов и умножения их на числа удовлетворяют свойствам:

3.1. λ(*x+y)=λ x+λy*;

3.2 . ( λ+μ)*x=λx+μx.*

По аналогии с трехмерным пространством, элементы линейного пространства называются векторами.

Линейное пространство называется действительным (комплексным), если операция умножения элементов на числа определена только для действительных (комплексных) чисел.

Множество  всех функций *f(t*) , непрерывных на отрезке [*a,b*] , множество всех гармонических колебаний вида  , с естественным образом введенными операциями сложения функций и умножения их на числа, образуют линейные пространства.

Основными энергетическими характеристиками действительного сигнала являются его мощность и энергия. Мгновенная мощность определяется как квадрат мгновенного значения:  , а энергия сигнала на отрезке  - как интеграл от

мгновенной мощности: . Отношение  дает среднюю мощность сигнала на отрезке . .

Для оценки энергии сигнала, сравнения различных сигналов, оценки их взаимного влияния может быть использовано понятие скалярного произведения.

Будем говорить, что в линейном пространстве *L* определено скалярное произведение, если каждой паре элементов *x* , *y* из *L* поставлено в соответствие действительное число, обозначаемое символом  и называемое скалярным произведеним элементов *x* и *y* , причем выполнены следующие условия:

1)  =  ;

2)  ;

3)  ; .

4) .

Линейное пространство, в котором определено скалярное произведение, называется евклидовым пространством.

Величина  = называется нормой элемента *x* евклидова пространства.

Легко видеть, что в линейном пространстве  скалярное произведение можно пределить в виде: . Тогда энергия сигнала на отрезке  ( который может быть заменен и на промежуток  ) равна его скалярному квадрату или квадрату нормы, а энергия суммарного сигнала

.

Или  , где  - взаимная энергия сигналов  и  . Таким образом , скалярное произведение сигналов характеризует их взаимную энергию.

Заметим, что если сигналы принимают комплексные значения, то скалярное произведение и норму можно определить по формулам:

 ;  , где  - символ комплексного сопряжения.

С помощью понятий скалярного произведения и нормы можно определить угол между двумя сигналами  и  по формуле:

.

Линейное пространство, в котором введена норма, называется нормированным.

Линейным нормированным будет, например, пространство всех сигналов, определенных на конечном или бесконечном интервале  , интегрируемых с

квадратом и имеющих ограниченную энергию. Такое пространство обозначается через .

**2 .ОРТОНОРМИРОВАННЫЙ БАЗИС. ОБОБЩЕННЫЙ РЯД ФУРЬЕ**

Два элемента евклидова пространства *u* и *v* называются ортогональными, если их скалярное произведение  равно нулю. В частности, ортогональность двух сигналов

из  означает, что их взаимная энергия равна нулю.

Система элементов евклидова пространства называется ортогональной, если ее элементы попарно ортогональны. Ортогональная система ненулевых элементов всегда линейно независима. Поэтому, если число элементов ортогональной системы ненулевых векторов совпадает с размерностью пространства, то эта система образует базис рассматриваемого пространства. При этом базис называется ортонормированным, если система его элементов ортогональна и нормированна. Последнее означает, что норма каждого элемента базиса равна единице. Очевидно, по любому ортогональному базису  можно построить ортонормированный базис, заменив все элементы  на .

Ортонормированный базис в линейном пространстве играет роль прямоугольной декартовой системы координат. Поэтому каждый вектор линейного пространства может

быть представлен своими проекциями на элементы этого базиса. Такое представление называется разложением вектора по ортонормированному базису.

Доказано, что  является бесконечно-мерным линейным нормированным

пространством.

Пусть

 (1)

ортогональный базис пространства  ,  - произвольный сигнал из  ,

 (2)

- разложение сигнала  по базису (1). При этом коэффициенты  разложения (2) называются координатами сигнала  по базису (1). Для их нахождения достаточно

последовательно умножать сигнал  скалярно на векторы базиса (1):



Отсюда коэффициент  разложения (2) выражается формулой:   и характеризует взаимную энергию сигнала  и *k* -ого базисного вектора.

Ряд (2), коэффициенты которого вычисляются по формулам:

 , (3)

называется обобщенным рядом Фурье сигнала  по базису (1). Совокупность коэффициентов  называется спектром сигнала  в базисе (1) и полностью определяет этот сигнал.

В частности, координаты сигнала в ортонормированном базисе равны скалярным произведениям сигнала на соответствующие базисные векторы, а его энергия

.

Смысл полученного равенства состоит в том, что энергия сигнала равна сумме энергий всех компонент, из которых складывается обобщенный ряд Фурье сигнала.

Рассмотрим приближение сигнала  с помощью конечной суммы  и подберем коэффициенты разложения  так, чтобы среднеквадратическая ошибка

приближения



(или энергия ошибки) была минимальна. Для этого положим  , где  - кеэффициенты обобщенного ряда Фурье. Тогда



Отсюда следует, что среднеквадратическая ошибка минимальна при  то есть при

 . Таким образом, обобщенный ряд Фурье дает оптимальное (в смысле минимума среднеквадратической ошибки) разложение сигнала по ортогональному базису.

Пространство  обладает свойством полноты, которое состоит в том, что если

 существует, то он сам является элементом этого пространства. Из свойства полноты вытекает, что норма ошибки аппроксимации  есть монотонно

убывающая функция, зависящая от *N* . Поэтому, выбирая число членов аппроксимации

достаточно большим, всегда можно добиться требуемой точности . Кроме того, из

полноты пространства  вытекает, что равенство (2) следует понимать в смысле сходимости в среднем

 (4)

Именно, если *t* - точка непрерывности  , то

 . (5)

Если же *t* - точка разрыва первого рода  , то сходимость в среднем (4) не влечет сходимости (5). Такое нарушение сходимости ряда Фурье  в точках разрыва носит

название явления Гиббса.

**3. ПРИМЕРЫ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ**

3.1. Важным примером ортогональной системы является тригонометрическая система функций

 ( 6)

в промежутке [-π, π]. Ее ортогональность вытекает из следующих соотношений:  







Заметим, что система функций (6) не является нормированной,так как



  (7)

Однако система функций



уже будет ортонормированной в промежутке [-π, π].

3.2. Отметим, что тригонометрическая система (6) не ортогональна в промежутке [0, π],

но каждая из ее подсистем:

 ; (8)

 (9)

в отдельности будет ортогональной в этом промежутке.

3.3. Легко также проверить, что ортогональными будут следующие системы:  в промежутке ; (10)

 в промежутке  ; (11)

 в промежутке . (12)

3.4. Ортогональной будет также система комплексных функций

 в промежутке  . (13)

Существуют и другие ортогональные системы функций: полиномы Чебышева, Эрмита,

Лагерра, функции Уолша.

Важность тригонометрической системы объясняется тем, что гармоническое колебание

является единственной функцией времени, которая сохраняет свою форму при прохождении через любую линейную цепь (с постоянными параметрами). Изменяются лишь амплитуда и фаза колебаний. Кроме того техника генерирования гармонических сигналов относительно проста.

Заметим, что приведенные в соответствующих промежутках  ортогональные системы [6-13] являются ортогональными базисами соответствующих пространств сигналов .

1. **ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ**

Простейшими периодическими функциями (если не считать постоянных) являются тригонометрические функции. Гармоническим анализом называется процесс разложения

сигнала на простейшие гармонические составляющие – гармоники.

* 1. **Ряд Фурье 2π-периодической функции.**

Рассмотрим произвольный 2π-периодический сигнал  из  . Например,  - произвольная -периодическая, кусочно-монотонная на отрезке  функция,

имеющая на нем не более конечного числа точек разрыва первого рода (условия Дирихле). Пусть:

 -

ортогональный базис пространства  (см. (6)).

Рядом сигнала  по тригонометрической системе функций (6) называется ряд

 , (14)

коэффициенты которого вычисляются по формулам (3) с учетом (7). Именно:

   

Обычно ряд (14) записывают в виде

 (15)

где

  (16.1)

  (16.2)

Формулы (16.1), (16.2) известны под названием формул Эйлера-Фурье. Вычисленные по этим формулам коэффициенты называются коэффициентами Фурье данного сигнала, а

составленный с их помощью тригонометрический ряд (15) – рядом Фурье сигнала .

Доказано, что ряд (15) в каждой точке непрерывности  сигнала  сходится к сигналу , а если  - точка разрыва первого рода , то к сумме 

Заметим, что если функция  имеет период *T*, так что при любом *t*:  , то величина интеграла  по промежутку длины *T* не зависит от *a* . Действительно,

 При этом, заменяя в последнем интеграле *t* на *x+T* получим: . Следовательно,  Поэтому в формулах (16.1), (16.2), определяющих коэффициенты Фурье, интегралы могут быть взяты по любому промежутку длины 2π.

* 1. **Ряды Фурье четных и нечетных 2π-периодических функций.**

Пусть  - интегрируемая на отрезке  функция. Тогда

 . При этом 

Следовательно,  Поэтому, если- четная функция , то  Если же  - нечетная функция 

то 

Пусть сигнал  представляет собой четную 2π -периодическую функцию. Тогда,

учитывая что  - четная функция, а  - нечетная функция, получим:

  

 Значит ряд Фурье 2π-периодической четной функции имеет вид:



Пусть теперь  - 2π-периодическая нечетная функция. Тогда  -нечетная, а  - четная функция. Поэтому

 Значит ряд Фурье 2π-периодической нечетной функции имеет вид:



Таким образом, четная 2π-периодическая функция, удовлетворяющая условиям Дирихле, разлагается по ортогональной системе четных функций (8) в промежутке [0, π], а нечетная 2π-периодическая функция – по ортогональной системе нечетных функции (9) в

промежутке [0, π].

**4.3. Ряды Фурье -периодических функций.**

Пусть  - произвольный -периодический сигнал, принадлежащий  Выполнив разложение этого сигнала в базисе (10) пространства  :

,

т.е., вычислив коэффициенты  , получим спектральное представление сигнала :

 . (17)

При этом в  выполнены соотношения:

 

 

Из них согласно (3) получим:

   .

Обычно ряд Фурье -периодической функции (17) записывают в виде:

 (18)

где

 

 

Аналогично предыдущему пункту, если -периодический сигнал  является четной функцией, то он разлагается в ряд Фурье по ортогонольной системе четных функций (11)

, где

  (19)

а если - нечетной, то по ортогональной системе нечетных функций (12)

, где

  (20)

Таким образом, в общем случае -периодический сигнал (см. (18)) содержит в себе не

зависящую от времени постоянную составляющую  , которая равна среднему значению сигнала  за период  , и бесконечный набор гармонических колебаний (гармоник)

 (21)

с частотами  кратными основной частоте  .

Любая гармоника (21) ряда Фурье характеризуется амплитудой  и начальной фазой , для определения которой, умножим и поделим (21) нa:

.

Определим так, чтобы ,. Это можно сделать, так как .Тогда ,  , а гармоника (21) может

быть записана в виде:

.

Таким образом, получим другую, эквивалентную (18) , форму записи ряда Фурье

, (22)

где , , которая иногда оказывается удобнее и называется

часто гармонической формой ряда Фурье, в отличие от формы (18), именуемой тригонометрической .

***Пример 1***. Найти разложение в ряд Фурье периодической последовательности

униполярных треугольных импульсов, изображенных на рис. 1.



*Е*

-*Т*/2 0 *Т*/2 *t*

Рис.1.

***Решение.*** Легко видеть, что  на интервале (-*Т*/2, *Т*/2) задается уравнением:

 и является четной *Т*-периодической функцией. Поэтому,

согласно формуле (19), получим:

Тогда



=

***Пример 2***. Найти разложение в ряд Фурье периодического колебания пилообразной формы (рис. 2).



*Е*

-*Т*/2 0 *Т*/2 *Т t*

Рис. 2.

***Решение.*** Колебание  задается уравнением :   и является

*Т-*периодической нечетной функцией. Поэтому, учисывая формулу (20), получим:





 Отсюда 



* 1. **Комплексная форма ряда Фурье**.

Основная формула спектрального анализа периодических сигналов (18) может быть записана и в более простом симметричном виде. Для этого, применив формулы Эйлера

, ,

воспользуемся связью между тригонометрическими и экспоненциальными функциями

, .

Тогда



=.

Введем обозначения:

 ;  ; .

Тогда

.

При этом получим:

=

 ;

;

 =

 .

Таким образом, при всех целых *n* справедливо равенство

 . (23) Ряд

 , (24) коэффициенты которого вычисляются по формулам (23), называется комплексной или экспоненциальной формой ряда Фурье (18).

Учитывая, что

,

ряд (24)можно рассматриварь как разложение сигнала  по ортогональной системе функций(13) с коэффициентами (23).

Коэффициенты  в общем случае являются комплексными величинами. Обозначим:

 , (23.1)

 , (23.2)

тогда

 . (25)

Коэффициенты  часто удобно записывать в показательной форме  , где

, . (26)

Тогда ряд (24) можно записать в виде:

 . (27)

Переходя в (27) к тригонометрической форме получим:

 . (28)

Из сравнения выражений (18), (22) и (28) видно, что амплитуда *n*-ой гармоники

связана с коэффициентом  ряда (28) соотношением

  . (29)

1. **СПЕКТРЫ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ**

Сигналы можно представлять двояко: в виде функций от времени и в виде частотных спектров. Например, гармоника, задаваемая функцией  (рис.3,а)

*Αcos(ωt+ψ)*

0 *ωt*

*ψ>0*

Рис. 3, а.

полностью характеризуется амплитудой , частотой  и начальной фазой  Ее амплитудный и фазовый спектры изображаются в виде одиночных ординат  и  , соответствующих угловой частоте  (рис. 3,б).

*A*



*A/2 -*

 

  -  -

Рис. 3,б Рис. 3,в

При комплексной форме записи косинусоиды



шкала частот дополняется отрицательной полуосью. При этом амплитудный и фазовый спектры изображаются парами ординат (рис. 3.в), соответствующих положительному и отрицательному значениям угловой частоты ( и -  ).

Если периодический сигнал удовлетворяет условиям Дирихле, он разлагается в ряд Фурье в тригонометрической (22) или комплексной (24) форме. Амплитудный и фазовый спектры сигнала задаются соответственно множествами

 и 

в случае тригонометрической формы ряда Фурье и множествами

 и 

в случае комплексной формы.

При этом в случае комплексной формы , . Поэтому амплитудный спектр симметричен относительно оси ординат, а фазовый – относительно начала координат.

В обоих случаях спектры являются дискретными и называются линейчатыми.

**5.1. Спектры простейших периодических сигналов.**

***Пример 3***. Прямоугольное колебание с периодом *T*

 изображено на рис. 4.



*E*

0  *T/2*  *T*

*t*

-*E*

Рис. 4.

Построить амплитудные и фазовые спектры тригонометрического и комплексного

рядов Фурье сигнала.

***Решение***. Заметим, что функция  является нечетной. Поэтому,применяя формулы (23.1) и (23.2), находим для нечетной функции:

, 



Отсюда, учитывая, что  , получим:

 ; 

Таким образом , 

= 

Амплитудные спектры комплексного и тригонометрического рядов показаны на рис. 5, а) и 5, б).

 

2*E/π* 2*E/π* 4*E/π*

2*E*/(3π) 2*E*/(3π) 4*E*/(3π)

2*E/*(5π) 2*E/*(5π) 4*E/*(5π)

-5ω -3 ω -ω 0 ω 3ω 5ω ω0ω 3ω 5ω ω

а) б)

Рис.5.

Фазовые спектры комплексного и тригонометрического рядов даны на рис. 6, а) и 6, б).

 

π/2

ω 3ω 5ω ω 3ω 5ω

-5ω -3 ω -ω -π/2  -π/2 - 

а) Рис.6. б)

***Пример 4***. Периодическая последовательность прямоугольных импульсов длительностью  , с периодом *T* (*T>τ*)

изображена на рис.7.



*Е*

*-Т* *Т*

*-* *t*

Рис.7.

Построить амплитудный и фазовый спектры тригонометрической формы ряда Фурье сигнала .

***Решение***. Функция  является четной, поэтому

 , где ,



Таким образом,



При этом амплитуда  а фаза  равна 0 , если

 и равна - , если <0.

Графики  и  в случае   представлены на рис. 8, а) и 8, б) .





0  4 8 12 16 

Рис. 8, а).







Рис. 8, б).

В следующих задачах построить амплитудные и фазовые спектры сигналов.

***Задача 1***.

 

***Задача 2.***

 