

2.3. Modelul dinamic al sistemului de acționare

Modelul dinamic al actuatorului (sistemul de acționare) completează schema de modelare prezentată în figura 2.1. Reamintim că ecuația modelului dinamic (2.5) este

$$T_a(q_a, \dot{q}_a, \ddot{q}_a) = V,$$

unde: V este vectorul tensiunilor de comandă ale sistemului de acționare.

Pornind de la observația că fiecare cuplă este acționată separat (fiecare articulație a robotului este acționată de propriul motor), reiese că sistemul de acționare este un sistem dinamic decuplat. În aceste condiții, modelul dinamic al sistemului de acționare reprezintă o sumă de modele dinamice ale acționărilor din fiecare cuplă în parte (figura 2.1).

Soluția cea mai răspândită, referitor la sistemele de acționare a roboților, este utilizarea motoarelor de curent continuu (MCC). Există, de asemenea, roboți acționați de motoare electrohidraulice, motoare de curent alternativ, și chiar de motoare electropneumatice.

În continuare vom presupune un robot de manipulare cu sistem electric de acționare. Toate considerațiile legate de sinteza sistemelor de conducere prezentate, pot fi extinse și la roboți acționați cu sisteme pneumatice.

Considerăm că articulațiile robotului sunt acționate cu MCC cu magneți permanenți. La baza funcționării unui motor de CC stă principiul că asupra unui conductor parcurs de curent electric, amplasat într-un câmp magnetic, acționează o forță $F = i \times \varphi$, unde φ este fluxul magnetic, iar i este curentul în conductor. Motorul este alcătuit dintr-un stator fix și un rotor mobil care se rotește în interiorul statorului, așa cum se arată în Figura 2.8.

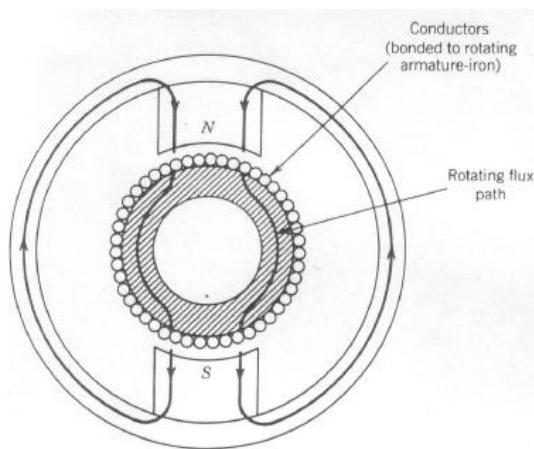


Figura 2.8. Vedere în secțiune transversală a unui MCC cu magnet permanent.

Dacă statorul produce un flux magnetic radial φ și curentul din rotor (numit și armătura) este i_a , atunci va exista un cuplu pe rotor care îl impune să se rotească. Mărimea acestui cuplu este definit de următoarea expresie

$$\tau_m = K_1 \varphi i_a, \quad (2.27)$$

unde τ_m este cuplul motorului (momentul de torsiune) (Nm) (cuplul sau momentul este o marime fizică, obținută prin înmulțirea unei forte, care acționează asupra unui obiect, și lungimea brațului acelei forte), φ este fluxul magnetic (Weberi), i_a este intensitatea curentului din armătură (Amperi), iar K_1 este o constantă fizică.

Totodată, dacă un conductor se rotește într-un câmp magnetic, atunci la capetele lui este generată o tensiune V_b , numită forță contra electromotoare (fcem), proporțională cu viteza de rotație a conductorului

$$V_b = K_2 \varphi \omega_m, \quad (2.28)$$

unde ω_m este viteza unghiulară a rotorului (rad/sec), iar K_2 este o constantă de proporționalitate. Această tensiune va avea tendința să se opună curgerii curentului din conductor.

În cazul motoarelor de curent continuu cu magneți permanenți, fluxul ϕ poate fi considerat constant. Cuplul pe rotor poate fi variat prin controlul curentului de armatură i_a .

Circuitul electric al rotorului MCC se prezintă în figura 2.9.

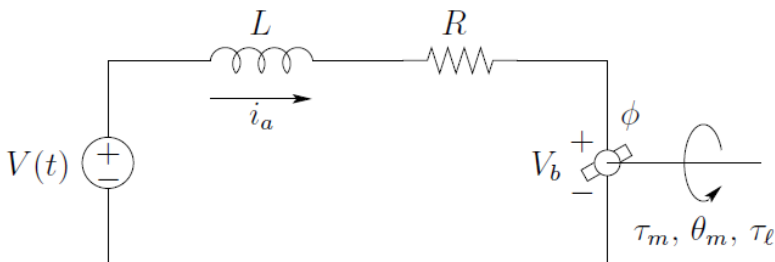


Figura 2.9. Circuitul electric al rotorului MCC.

În figura 2.9 avem următoarele notații:

V – tensiunea aplicată rotorului (de comandă);

L – inductanța înfășurării armăturii, H ;

R – rezistența armăturii;

V_b – forța contra electromotoare;

i_a – intensitatea curentului din armatură;

θ_m – poziția rotorului (radiani);

τ_m – cuplul motorului (momentul de torsiune), datorat câmpului magnetic;

τ_l – cuplul (momentul) de sarcină;

ϕ - fluxul magnetic datorat statorului.

Ecuatia diferențială pentru curentul armăturii

$$L \frac{di_a}{dt} + Ri_a = V - V_b. \quad (2.29)$$

Deoarece fluxul magnetic ϕ este constant, cuplul dezvoltat de motor este

$$\tau_m = K_1 \phi i_a = K_m i_a, \quad (2.30)$$

unde K_m este coeficientul momentului (cuplului) motor în Nm/A .

Din (2.28) obținem

$$V_b = K_2 \varphi \omega_m = K_b \omega_m = K_b \frac{d\theta_m}{dt}, \quad (2.31)$$

unde K_b este constanta contra electromotoare.

Coeficientul momentului MCC poate fi determinat din setul de caracteristici ce reprezintă dependența momentului față de viteza unghiulară a axului motorului (figura 2.10).

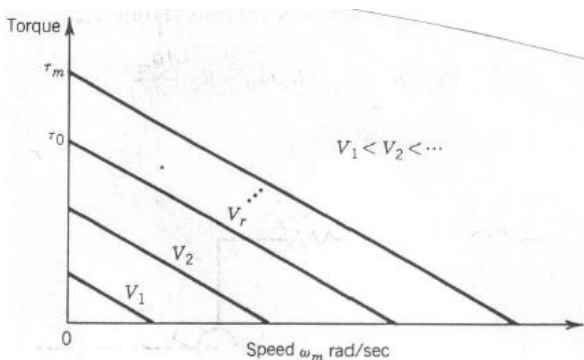


Figura 2.10. Caracteristicile moment-viteză a MCC.

Când motorul este blocat, cuplul rotorului blocat la tensiunea nominală este notat cu τ_0 . Utilizând ecuația (2.29), pentru cazul când $V_b = 0$ și $di_a/dt = 0$, obținem tensiunea nominală

$$V_r = R i_a = \frac{R \tau_0}{K_m}.$$

Astfel, coeficientul momentului motor este

$$K_m = \frac{R \tau_0}{V_r}. \quad (2.32)$$

În figura 2.11 se prezintă MCC în serie cu un reductor cu raportul de transmisie $r:1$, conectat la o articulație a manipulatorului. Raportul de transmisie r are, în mod obișnuit, valori cuprinse între 20 și 200 sau mai mult.

În domeniul Laplace, ecuațiile (2.29), (2.31) și (2.34) pot fi combinate și transcrise după cum urmează

$$(Ls + R)I_a(s) = V(s) - K_b s \theta_m(s) \quad (2.35)$$

$$(J_m s^2 + B_m s) \theta_m(s) = K_m I_a(s) - \tau_l(s)/r. \quad (2.36)$$

Schema bloc a sistemului din figura 2.11 este prezentată în Figura 2.12.

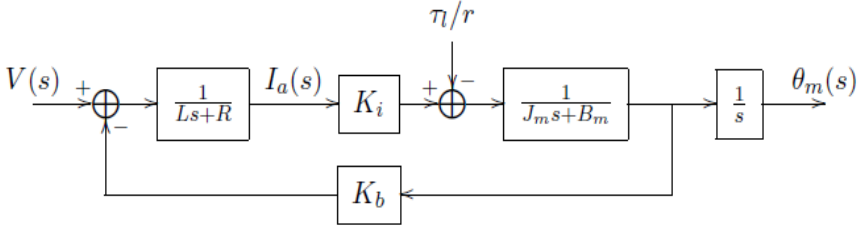


Figura 2.12. Schema bloc a sistemului cu MCC.

Funcția de transfer intrare-ieșire $V(s) \rightarrow \theta_m(s)$ a MCC este data de următoarea expresie

$$\frac{\theta_m(s)}{V(s)} = \frac{K_m}{s [(Ls+R)(J_m s+B_m)+K_b K_m]}. \quad (2.37)$$

Funcția de transfer perturbație-ieșire $\tau_l(s) \rightarrow \theta_m(s)$, unde în calitate de perturbație avem momentul de sarcină $\tau_l(s)$

$$\frac{\theta_m(s)}{\tau_l(s)} = \frac{-(Ls+R)}{s [(Ls+R)(J_m s+B_m)+K_b K_m]}. \quad (2.38)$$

Frecvent, se presupune că „constanta de timp electrică” L/R este mult mai mică decât „constanta de timp mecanică” J_m/B_m . Aceasta este o ipoteză rezonabilă pentru multe sisteme electromecanice și conduce la un model de ordin redus al dinamicii motorului. Dacă neglijăm constanta de timp electrică prin setarea $L/R = 0$, funcția de transfer intrare-ieșire $V(s) \rightarrow \theta_m(s)$ capătă următoarea formă

$$\frac{\theta_m(s)}{V(s)} = \frac{K_m/R}{s [J_m s + (B_m + K_b K_m/R)]} = \frac{K}{s (J_{eff} s + B_{eff})}, \quad (2.39)$$

unde $K = \frac{k_m}{R}$; $J_{eff} = J_m$; $B_{eff} = B_m + \frac{K_b K_m}{R}$.

Similar, funcția de transfer perturbație-ieșire $\tau_l(s) \rightarrow \theta_m(s)$

$$\frac{\theta_m(s)}{\tau_l(s)} = \frac{1}{s[J_ms + (B_m + K_b K_m/R)]} = \frac{1}{s(J_{eff}s + B_{eff})}, \quad (2.40)$$

Astfel, luând în considerare generalizările efectuate în (2.39), modelul dinamic (2.34) al sistemului de acționare capătă următoarea formă

$$J_m \ddot{q}_a + (B_m + K_b K_m/R) \dot{q}_a + \tau_l/r = (K_m/R)V, \quad (2.41)$$

unde $q_a = \theta_m$ este unghiul de poziție al motorului, V – tensiunea de comandă a motorului.

Pentru un sistem cu n grade de libertate, unde avem n motoare, care acționează în cele n cuple prin intermediul celor n transmisii mecanice, forma explicită a modelului dinamic al sistemului de acționare (2.5) este următoarea

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} J_{m1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{m2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_{a1} \\ \ddot{q}_{a2} \\ \vdots \\ \ddot{q}_{an} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{eff1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_{eff2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B_{effn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{a1} \\ \dot{q}_{a2} \\ \vdots \\ \dot{q}_{an} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_{l1}/r_1 \\ \tau_{l2}/r_2 \\ \vdots \\ \tau_{ln}/r_n \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} K_{m1}/R_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_{m2}/R_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & K_{mn}/R_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}, \quad (2.42) \end{aligned}$$

unde: J_{mi} este momentul de inerție al rotorului i ;

q_{ai} este unghiul de poziție al motorului i ;

τ_{li} este cuplul (momentul) de sarcină în cupla i ;

r_i este coeficientul de reducere a transmisiei i ;

V_i este tensiunea de comandă a motorului i ;

$B_{effi} = B_{mi} + K_{bi} K_{mi}/R_i$.

2.4. Modelul dinamic holist

Pentru a integra modelele subsistemelor analizate într-un singur model (holist) al manipulatorului, revenim la schema din figura

2.1. Pot fi observate următoarele aspecte: dacă, prin vectorul q al variabilelor dorite în cuplele robotului, se impune o anumită sarcină, controlerul trebuie să asigure o mărime de comandă, care poate fi scrisă cu ajutorul vectorului tensiunilor de comandă V , ceea ce înseamnă realizarea următorului lanț causal $q \rightarrow T \rightarrow T_a \rightarrow V$. Respectiv aplicarea unei anumite tensiuni de comandă conduce la realizarea unei anumite sarcini, adică la următorul lanț causal $V \rightarrow T_a \rightarrow T \rightarrow q$.

Reunind relațiile modelului dinamic ale structurii mecanice (2.6) cu cel al actuatorilor (2.42) se obține modelul complet al robotului

$$(J_M + M(q))\ddot{q} + (B + V(q, \dot{q}))\dot{q} + G(q) + T_p = K_M V, \quad (2.43)$$

unde: J_M este matricea de inerție a actuatorilor (motoarelor de CC);

$M(q)$ este matricea de inerție a structurii mecanice;

B este matricea coeficienților de amortizare ale rotoarelor;

$V(q, \dot{q})$ este vectorul Coriolis centripetal;

$G(q)$ este vectorul gravitațional;

T_p este vectorul momentelor perturbatoare;

q este vectorul coordonatelor generalizate;

$\dot{q}$ este vectorul vitezelor generalizate ($n \times 1$);

K_M este matricea coeficienților de transfer (motori)
ai actuatorilor;

V este matricea tensiunilor de comandă a motoarelor.

Exemplul 2.3. Structura plană R cu motor și reductor

Considerăm brațul robotic cu o singură cuplă, prezentat în figura 2.13, care constă dintr-o legătură rigidă cuplată printr-o transmisie mecanică (ambreaj) cu un motor de curent continuu.

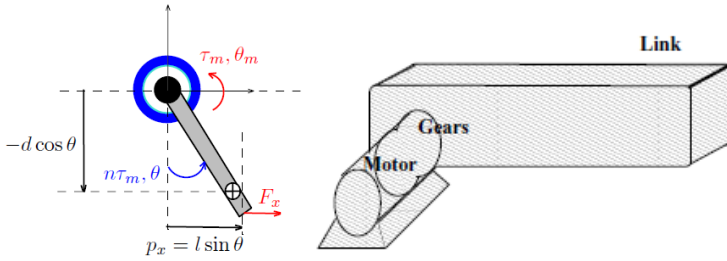


Figura 2.13: Brațul cu un singur grad de libertate cu motor și reductor.

Fie că θ_l și θ_m sunt unghiurile legăturii (articulației, cuplei) și axului motorului, respectiv, care se află în următoarea relație $\theta_m = r\theta_l$ unde $r : 1$ este raportul de transmisie. Relația algebrică dintre unghiurile legăturii și axul motorului arată că sistemul are doar un singur grad de libertate și, prin urmare, putem scrie ecuațiile de mișcare utilizând fie θ_m , sau θ_l . Dacă ne referim la θ_l , energia cinetică a sistemului este dată de

$$K = \frac{1}{2}J_m\dot{\theta}_m^2 + \frac{1}{2}J_l\dot{\theta}_l^2 = \frac{1}{2}(r^2J_m + J_l)\dot{\theta}_l^2,$$

unde J_m, J_l sunt inerțiile de rotație (tensorul de inerție) ale motorului și a legăturii, respectiv. Energia potențială este dată ca

$$P = Mgl(1 - \cos \theta_l),$$

unde M este masa totală a brațului, iar l este distanța de la axa articulației până la centrul de greutate al brațului.

Definind $J = r^2J_m + J_l$, obținem Lagrangianul L

$$L = \frac{1}{2}J\dot{\theta}_l^2 - Mgl(1 - \cos \theta_l).$$

Substituind această expresie în ecuațiile Euler-Lagrange (2.25), obținem ecuația de mișcare

$$J\ddot{\theta}_l + Mgl \sin \theta_l = \tau_l.$$

Forța generalizată τ_l constă din cuplul motorului $u = r\tau_m$, raportat la legătură și momentele de amortizare (neconservative) $B_m\dot{\theta}_m$ și $B_l\dot{\theta}_l$. Raportând amortizarea motorului la randamentul

legăturii

$$\tau = u - B\dot{\theta}_l,$$

unde $B = rB_m + B_l$. Prin urmare, expresia completă a dinamicii acestui sistem este

$$J\ddot{\theta}_l + B\dot{\theta}_l + Mgl \sin \theta_l = u.$$