

2.2. Modelul dinamic al structurii mecanice

2.2.1. Forma explicită a modelului dinamic

În timp ce ecuațiile cinematice descriu mișcarea robotului fără a lua în considerare forțele și momentele care produc mișcarea, ecuațiile dinamice descriu în mod explicit relația dintre forță și mișcare. Modelul dinamic al structurii mecanice reprezintă o relație cauzală între cinematica coordonatelor generalizate și momentul cu care este acționată fiecare cuplă.

Dezvoltând ecuația 2.3 pentru un manipulator, se obține următoarea ecuație diferențială matricială (forma canonică a modelului)

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{F}_f(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) + \mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{F} = \mathbf{T}, \quad (2.6)$$

unde: $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ este matricea de inerție a sistemului (nxn);

$\mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ este vectorul Coriolis Centripetal al sistemului (nx1);

$\mathbf{G}(\mathbf{q})$ este vectorul gravitațional (nx1);

$\mathbf{F}_f(\dot{\mathbf{q}})$ este vectorul datorat frecărilor (nx1);

$\mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{F}$ este vectorul datorat solicitărilor exercitate asupra
prehensorului (nx1);

$\mathbf{T}$ este vectorul momentelor motoare care acționează
în cuplele robotului (nx1);

$\mathbf{q}$ este vectorul coordonatelor generalizate (nx1);

$\dot{\mathbf{q}}$ este vectorul vitezelor generalizate (nx1);

n este numărul elementelor sistemului – numărul
corpurilor manipulatorului.

Pentru a obține forma explicită a ecuației (2.6) este necesar de a lua în considerare unele noțiuni de mecanică.

În conformitate cu concepția Newtoniană, un corp este un ansamblu (infini) de particule de masă infinit de mică. Viteza liniară a unei particule de masă m , care orbitează un punct la o rază r cu

viteza unghiulară ω (figura 2.2) este dată de relația

$$v = \omega r. \quad (2.7)$$

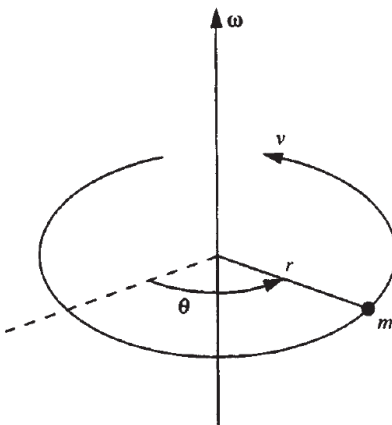


Figura 2.2: Forța centripetă.

Forța centripetă este determinată de următoarea relație

$$F_{cent} = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r = m\dot{\theta}^2 r. \quad (2.8)$$

Pentru un punct material de masă m , principiul al doilea al mecanicii (legea impulsului a lui Newton) stipulează

$$F = ma = m \frac{dv}{dt} = \frac{dmv}{dt} = \frac{dH}{dt}, \quad (2.11)$$

unde

$$H = mv \quad (2.12)$$

este denumit impulsul punctului material (cantitatea de mișcare) - momentul unei mase m care se deplasează cu viteza v .

Momentul unghiular al unei particule de masă m în raport cu originea din care masa are distanța r se numește momentul cinetic al punctului material

$$H_{ung} = Hr = mvr. \quad (2.13)$$

Cuplul sau momentul unei forțe F în raport cu aceeași origine este definită ca fiind (legea momentului cinetic)

$$N = rF = \frac{d(mvr)}{dt}. \quad (2.14)$$

Energia cinetică a unei mase care se mișcă cu o viteză liniară v

este

$$K = \frac{1}{2}mv^2. \quad (2.15)$$

Energia cinetică rotativă a masei este dată de

$$K_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2, \quad (2.16)$$

unde I este tensorul (momentul) de inerție.

Pentru un caz simplu, prezentat în Figura 2.2, unde m este o particulă de masă, tensorul de inerție devine

$$I = mr^2. \quad (2.17)$$

Astfel,

$$K_{rot} = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2. \quad (2.18)$$

Relația (2.17) poate fi generalizată pentru un solid rigid, relativ la polul O (figura 2.4)

$$I = \int_{Vol} \tilde{r}(-\tilde{r})\rho(r) dV, \quad (2.19)$$

unde $\rho(r)$ este distribuția maselor la o rază r într-un volum V . Dacă obiectul este realizat dintr-un material omogen, atunci $\rho(r) = \rho$ este o constantă.

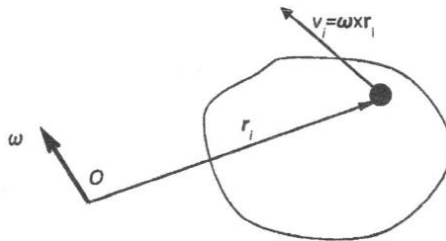


Figura 2.4: Momentul cinetic al solidului rigid.

Masa corpului este volumul integral al densității de masă:

$$m = \int_{Vol} \rho(r) dV.$$

Centrul de greutate al corpului este media ponderată a densității:

$$\bar{r} = \frac{1}{m} \int_{vol} \rho(r) r dV.$$

Calculul tensorului de inerție se face astfel

$$\begin{aligned} I &= \int_{vol} \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{bmatrix} \rho(r) dV = \\ &= \int_{vol} \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -zy \\ -xz & -zy & y^2 + x^2 \end{bmatrix} \rho(r) dV. \end{aligned}$$

Ceea ce se notează prin

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

unde: $I_{xx,yy,zz}$ sunt numite momente de inerție axiale, relative la axele x, y, z ; $I_{xy,yz,xz}$ sunt numite momentele de inerție centrifugale.

Necesitatea calculului forțelor și a momentelor de inerție conduce la necesitatea calculului accelerațiilor liniare și a celor unghiulare.

Energia potențială a unei mase m la o înălțime h într-un câmp gravitațional cu g constant este dată de

$$P = mgh. \quad (2.21)$$

Originea, care corespunde energiei potențiale zero, poate fi aleasă arbitrar, deoarece numai diferențele de energie potențială sunt semnificative în ceea ce privește forțele fizice.

Pentru a obține forma explicită a ecuației (2.6) se poate utiliza formalismul Newton-Euler sau Lagrange-Euler.

2.2.2. Utilizarea formalismului Euler-Lagrange pentru obținerea modelului dinamic al structurii mecanice

Să demonstrăm cum pot fi obținute ecuațiile Euler-Lagrange din legea a doua a lui Newton, considerând un sistem cu un singur grad

de libertate, constituit dintr-o particulă de masă constantă m , constrânsă să se deplaseze în direcția y , sub acțiunea forței f și a forței gravitaționale mg (figura 2.5).

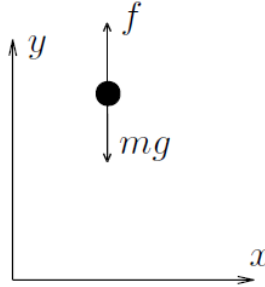


Figura 2.5: Sistem cu un singur grad de libertate.

Conform legii a doua a lui Newton $F = ma$, ecuația mișcării unei particule este

$$m\ddot{y} = f - mg. \quad (2.22)$$

Partea stângă a Ecuației (2.22) poate fi scrisă ca

$$m\ddot{y} = \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \left(\frac{1}{2} m\dot{y}^2 \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{y}},$$

unde $K = \frac{1}{2} m\dot{y}^2$ este energia cinetică.

În expresia de mai sus, pentru a lua în considerație sistemele în care energia cinetică este o funcție de mai multe variabile, utilizăm notația cu derivate parțiale.

Forța gravitațională în ecuația (2.22) poate fi exprimată ca

$$mg = \frac{\partial}{\partial y}(mgy) = \frac{\partial P}{\partial y},$$

unde $P = mgy$ este energia potențială datorată gravitației.

Dacă definim prin L diferența dintre energia cinetică și cea potențială

$$L = K - P, \quad (2.23)$$

atunci

$$L = \frac{1}{2} m\dot{y}^2 - mgy.$$

Notăm $\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial K}{\partial \dot{y}}$ și $\frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y}$, atunci ecuația (2.22) poate fi transcrisă în felul următor

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = f. \quad (2.24)$$

Funcția L se numește Lagrangeanul sistemului, iar ecuația (2.24) este numită Ecuația Euler-Lagrange.

Pentru un sistem cu n grade de libertate, ecuația Euler-Lagrange capătă următoarea formă

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau, \quad (2.25)$$

unde: q este vectorul coordonatelor generalizate;

q_i este componenta i al vectorului q ;

τ este vectorul forțelor generalizate, care acționează în cuplele robotului;

n reprezintă numărul gradelor de libertate ale structurii;

L este Lagrangeanul structurii mecanice.

Deoarece energia potențială nu depinde de viteza coordonatelor generalizate, ecuația (2.25) poate fi rescrisă astfel

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial K}{\partial q} + \frac{\partial P}{\partial q} = \tau. \quad (2.26)$$

Ecuația (2.26) permite de a separa termenii inerțiali și cei gravitaționali, ceea ce duce la forma canonică (2.6) a modelului

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial K}{\partial q} + \frac{\partial P}{\partial q} = \\ & = M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q}) + G(q) = T. \end{aligned}$$

Ecuațiile (2.23) și (2.26) permit calculul elementelor modelului dinamic (matricele de inerție, vectorul Coriolis centripetal, vectorul gravitațional) pornind de la mărimile energetice.

Exemplul 2.1. Modelul dinamic al structurii plane RT

Brațul plan RT (rotație/translație) cu două grade de libertate se

prezintă în figura 2.6, unde l este lungimea fixă cunoscută a legăturii de bază.

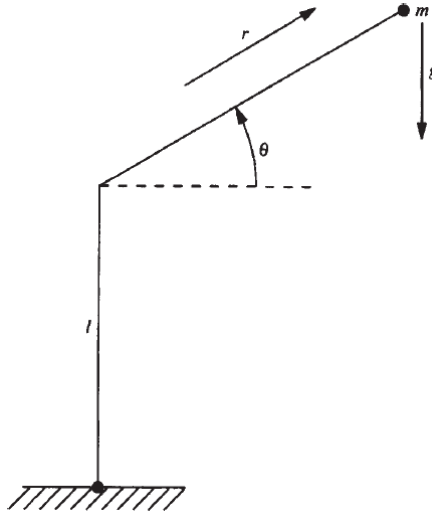


Figura 2.6: Manipulatorul plan RP cu două grade de libertate.

Vectorii coordonatelor articulațiilor și a vitezelor

$$q = \begin{bmatrix} \theta \\ r \end{bmatrix}, \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{r} \end{bmatrix}.$$

Vectorul de forță generalizat corespunzător este

$$\tau = \begin{bmatrix} n \\ f \end{bmatrix},$$

unde n este cuplul și f – forța, care acționează în cuplele robotului.

Cuplul n și forța f pot fi furnizate fie de motoare, fie de actuatoare hidraulice, dinamica cărora se va prezenta ulterior.

a. Energia cinetică și potențială

Energia cinetică totală datorată mișcării unghiulare $\dot{\theta}$ și mișcării liniare $\dot{r}$ este

$$K = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{r}^2$$

și energia potențială

$$P = mgr \sin \theta.$$

b. Ecuația Lagrange

Lagrangianul se dă cu următoarea expresie

$$L = K - P = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - mgr \sin \theta.$$

Conform ecuației Lagrange (2.25) obținem

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mr^2\dot{\theta} \\ m\dot{r} \end{bmatrix},$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \begin{bmatrix} mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} \\ m\ddot{r} \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \begin{bmatrix} -mgr \cos \theta \\ mr\dot{\theta}^2 - mg \sin \theta \end{bmatrix}.$$

Astfel, ecuațiile dinamice ale manipulatorului robotic sunt

$$mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mgr \cos \theta = n,$$

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + mg \sin \theta = f.$$

Acesta este un set de ecuații diferențiale neliniare cuplate care descriu mișcarea $q(t) = [\theta(t) \ r(t)]^T$, datorată cuplului comenzii de intrare $n(t)$ și a forței $f(t)$.

c. Dinamica manipulatorului

Ecuațiile manipulatorului pot fi scrise în formă vectorială

$$\begin{bmatrix} mr^2 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2mr\dot{r}\dot{\theta} \\ -mr\dot{\theta}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} mgr \cos \theta \\ mg \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ f \end{bmatrix}.$$

Această ecuație vectorial-matricială poate fi prezentată în felul următor

$$M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q}) + G(q) = \tau,$$

unde matricea de inerție $M(q)$ este o funcție de q (adică de θ și r), vectorul Coriolis centripetal $V(q, \dot{q})$ este o funcție de q și $\dot{q}$, și vectorul gravitațional $G(q)$ este o funcție a lui q .