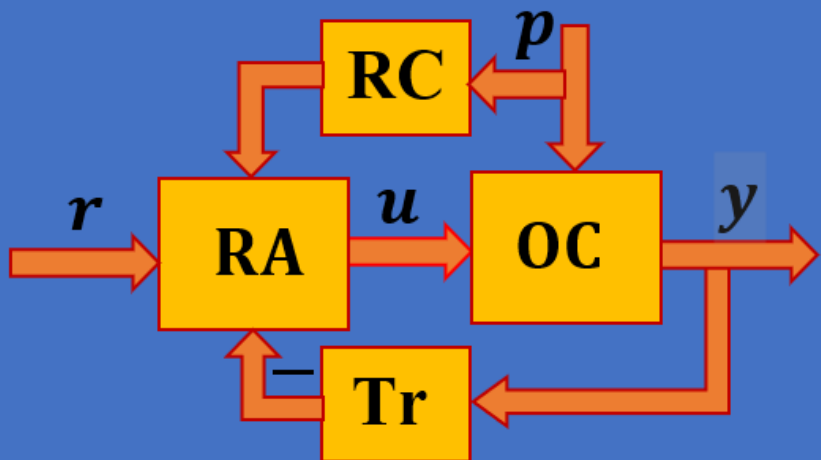


Bartolomeu IZVOREANU

TEORIA
SISTEMELOR
AUTOMATE

MANUAL



UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI
FACULTATEA CALCULATOARE, INFORMATICĂ
ȘI MICROELECTRONICĂ
DEPARTAMENTUL INGINERIA SOFTWARE
ȘI AUTOMATICĂ

Bartolomeu IZVOREANU

TEORIA SISTEMELOR AUTOMATE

MANUAL

Chișinău
Editura „Tehnica-UTM”
2022

CZU 681.5(075.8)

I-99

Manualul a fost discutat și aprobat pentru editare la Senatul Universității Tehnice a Moldovei, proces verbal nr. 4 din 25.10.2022.

Manualul *Teoria sistemelor automate* este destinat studenților care studiază Programul de studii *Automatică și informatică*, în care sunt expuse principiile și metodele teoriei sistemelor automate liniare continue cu prezentarea modelelor matematice ale elementelor și sistemului liniar cu parametri concentrați ai transferului intrare-ieșire: ecuații diferențiale, funcții temporale, funcții de transfer, funcții frecvențiale și modele în forma intrare-stare-ieșire prin variabilele de stare, metode de analiză a stabilității și performanțelor sistemului de conducere automată la acțiunea semnalelor deterministe referință și perturbație. Sunt date exemple de calcul, formulate întrebări și propuse probleme de rezolvat.

Manualul include 9 capitole, bibliografie și 3 anexe.

Autor: conf. univ., dr. șt. tehn. Bartolomeu IZVOREANU

Recenzenți: academ., dr. hab. șt. tehn. Anatolii BALABANOV

prof. univ., dr. ing. Gheorghe CĂPĂȚĂNĂ

prof. univ., dr. șt. fiz.-mat. Vasile MORARU

**DESCRIEREA CIP A CAMEREI NAȚIONALE A CĂRȚII DIN RM
Izvoreanu, Bartolomeu.**

Teoria sistemelor automate: Manual / Bartolomeu Izvoreanu;
Universitatea Tehnică a Moldovei, Facultatea Calculatoare, Informatică
și Microelectronică. Departamentul Ingineria Software și Automatică.

– Chișinău: Tehnica-UTM, 2022. – 349 p.: fig., tab.

Bibliogr.: p. 345-346 (23 tit.). – 50 ex.

ISBN 978-9975-45-853-5

© UTM, 2022

CUPRINS

INTRODUCERE	8
1 NOȚIUNILE DE BAZĂ ALE TEORIEI CONDUCERII	12
1.1 Noțiuni de bază ale automaticii.....	12
1.2 Informația și principiile de conducere	17
1.2.1 <i>Principiile de conducere</i>	18
1.2.2 <i>Principiul de conducere cu sistemul deschis</i>	18
1.2.3 <i>Principiul de conducere cu compensarea acțiunii perturbației.....</i>	19
1.2.4 <i>Principiul de conducere cu sistemul închis</i>	19
1.2.5 <i>Principiul de conducere combinat</i>	22
1.2.6 <i>Principiul de conducere adaptiv</i>	23
1.3 Algoritmii de funcționare ai sistemelor automate	24
1.4 Schema bloc funcțională și elementele funcționale ale sistemului automat	27
1.5 Clasificarea sistemelor automate	30
1.5.1 <i>Clasificarea sistemelor automate după tipul semnalului în timp</i>	30
1.5.2 <i>Clasificarea sistemelor automate după algoritmii de reglare</i>	31
1.5.3 <i>Clasificarea sistemelor automate după principiul energetic</i>	34
1.5.4 <i>Clasificarea sistemelor automate după eroarea de funcționare</i>	35
1.5.5 <i>Clasificarea sistemelor automate după modelele matematice</i>	37
1.6 Problemele teoriei sistemelor automate	38
Chestionar și probleme	41
2 MODELE LINIARE ȘI CARACTERISTICILE SISTEMELOR AUTOMATE	42
2.1 Noțiune de modele matematice	42
2.2 Caracteristici statice ale elementelor și sistemelor automate	43
2.3 Ecuația diferențială	46
2.4 Ecuații diferențiale ale sistemelor fizico-tehnice	53

2.5	Expresii în operatori	61
2.6	Transformata Laplace și funcția de transfer	63
2.7	Semnale tipice și caracteristicile temporale	
	ale sistemului automat	68
2.7.1	<i>Clasificarea semnalelor de intrare</i>	68
2.7.2	<i>Semnal treaptă unitară și răspunsul indicial</i>	69
2.7.3	<i>Semnal rampă unitară și răspunsul tranzitoriu</i>	70
2.7.4	<i>Semnal impuls dreptunghiular și funcția pondere</i>	72
2.8	Răspunsuri indiciale ale elementelor și sistemelor automate	73
2.9	Semnale armonice și funcții frecvențiale ale sistemului automat	74
2.10	Elemente dinamice de transfer	80
2.10.1	<i>Elemente dinamice tipice</i>	80
2.10.2	<i>Element ideal</i>	82
2.10.3	<i>Element cu inerție de ordinul unu</i>	84
2.10.4	<i>Element integrator</i>	87
2.10.5	<i>Element derivator</i>	90
2.10.6	<i>Element oscilant amortizator</i>	95
2.11	Element cu inerție de ordinul doi	100
2.12	Element cu timp mort	103
2.13	Relațiile răspunsului indicial cu funcția pondere și funcția de transfer	107
2.14	Elemente dinamice cu proprietăți specifice	117
	Chestionar și probleme	121
3	SCHEME STRUCTURALE ALE SISTEMULUI AUTOMAT ȘI TRANSFIGURAREA LOR	122
3.1	Schema bloc structurală a sistemului de reglare automată	122
3.2	Transfigurarea schemelor structurale	123
3.3	Funcțiile de transfer ale sistemului de reglare automată	132
	Chestionar și probleme	152
4	STABILITATEA SISTEMELOR AUTOMATE	153

4.1	Introducere	153
4.2	Noțiune de stabilitate și condiții de stabilitate ale sistemului automat	154
4.3	Criterii de stabilitate	159
4.3.1	<i>Criteriul Routh</i>	159
4.3.2	<i>Criteriul Hurwitz</i>	162
4.4	Criteriile frecvențiale	167
4.4.1	<i>Principiul argumentului funcției complexe</i>	167
4.4.2	<i>Criteriul Mihailov</i>	170
4.4.3	<i>Criteriul Nyquist</i>	173
4.5	Analiza stabilității sistemului automat după caracteristicile logaritmice	181
4.6	Rezerva de stabilitate a sistemului automat	182
4.7	Metode de separare în spațiul parametrilor	187
4.7.1	<i>Conceptul de separare</i>	187
4.7.2	<i>Metoda de separare pe un parametru</i>	190
4.8	Stabilitatea structurală a sistemului automat	190
4.9	Sensibilitatea sistemului de reglare automată	195
4.9.1	<i>Preliminarii</i>	195
4.9.2	<i>Sensibilitatea la variația parametrilor canalului direct</i>	198
4.9.3	<i>Sensibilitatea la variația parametrilor canalului perturbației</i>	200
4.9.4	<i>Sensibilitatea la variația parametrilor canalului de reacție</i>	201
	Chestionar și probleme	207
5	PERFORMANȚELE SISTEMELOR AUTOMATE	209
5.1	Preliminarii	209
5.2	Indicii de calitate ai răspunsului indicial al sistemului	210
5.3	Precizia sistemului automat în regim staționar	214
5.4	Estimarea performanțelor sistemului automat după metoda poli-zero-uri	225
5.4.1	<i>Estimarea gradului de stabilitate și a oscilației</i>	225

5.4.2	<i>Estimarea timpului de reglare</i>	225
5.4.3	<i>Estimarea suprareglării și a gradului de amortizare</i>	229
5.4.4	<i>Influența repartiției $p - z$ a funcției de transfer $H_0(s)$ asupra răspunsului indicial</i>	232
5.4.5	<i>Repartiția $p - z$ a funcției de transfer $H_0(s)$ și a imaginii intrării $r(s)$</i>	233
5.5	Criterii integrale de estimare a performanțelor sistemului	233
5.6	Performanțele sistemului automat la acțiunea semnalelor armonice	247
	Chestionar și probleme	248
6	CORECȚIA SISTEMELOR AUTOMATE	250
6.1	Condiții impuse sistemului automat	250
6.2	Conexiune în serie a elementului de corecție	251
6.3	Conexiune în paralel a elementului de corecție	253
6.4	Conexiune în reacție a elementului de corecție	256
6.5	Concluzii	260
	Chestionar și probleme	261
7	SISTEME DE REGLARE AUTOMATĂ CU PROPRIETĂȚI SPECIFICE	262
7.1	Sisteme automate cu timp mort	262
7.2	Sisteme automate cu conducere combinată	263
7.3	Sisteme automate multivariabile	269
	7.3.1 <i>Modele matematice ale proceselor multivariabile</i>	269
	7.3.2 <i>Reglarea proceselor multivariabile</i>	272
	7.3.3 <i>Algoritmi de reglare a proceselor multivariabile</i>	273
	Chestionar și probleme	277
8	MODELE MATEMATICE ÎN FORMA ECUAȚIILOR DE STARE	278
8.1	Ecuatii de stare	278
8.2	Funcția de transfer a sistemului automat	285
8.3	Realizarea sistemică a funcției de transfer a sistemului automat	287

8.3.1 Preliminarii.....	287
8.3.2 Forma de realizare canonică controlabilă.....	288
8.3.3 Forma de realizare canonică observabilă	293
8.3.4 Forma de realizare canonică Jordan	295
8.3.5 Forma de realizare canonică Jordan	297
8.4 Sisteme echivalente	298
8.5 Proprietățile structurale ale sistemelor liniare	300
Chestionar și probleme	316
9 SINTEZA SISTEMULUI DE REGLARE AUTOMATĂ	317
9.1 Structura sistemului de reglare automată	317
9.2 Formularea problemei de proiectare a sistemului de reglare automată	319
9.3 Modele matematice ale obiectelor de conducere	321
9.4 Alegerea și acordarea reguletoarelor	334
9.4.1 Legile de reglare tipice	334
9.4.2 Metode empirice de acordare a reguletoarelor tipice	335
9.4.3 Alegerea și acordarea reguletoarelor pentru procesele lente	336
9.4.4 Alegerea și acordarea reguletoarelor prin metodele experimentale	338
9.4.5 Metoda gradului maximal de stabilitate.....	340
Chestionar și probleme	344
BIBLIOGRAFIE	345
Anexa 1. Funcții de timp continue și imaginea Laplace	347
Anexa 2. Modele matematice ale elementelor tipice	348
Anexa 3. Funcții frecvențiale ale elementelor tipice	349

INTRODUCERE

Automatica reprezintă domeniul științific și aplicativ despre conceptul de conducere cu obiectele materiale și fenomenele fizice în interesul umanității. Domeniul științific este *teoria conducerii automate*, iar cel aplicativ este *automatizarea proceselor* – construirea sistemului de conducere automată a procesului. În calitate de obiecte de studiu servesc procesele de fabricație a bunurilor materiale și serviciilor din toate domeniile de activitate umană, care sunt supuse acțiunilor forțelor naturale [1-4, 8, 11-13, 18, 21].

În etapa actuală de dezvoltare termenii *automat* și *automatizare* sunt larg utilizați atât în limbajul ingineresc, cât, în general, și în limbajul curent sociouman [1, 16, 21].

Adjectivul *automat* desemnează calitatea unui sistem fizico-tehnic de a efectua, pe baza unei comenzi, o operație sau mai multe operații fără participarea directă a operatorului uman. Substantivul *automat* reprezintă un dispozitiv (sistem tehnic), care funcționează în mod automat.

Primele procese automatizate au fost reprezentate prin reglarea automată a nivelului apei cu utilizarea plutitorului (flotorului) în ceasurile cu apă, construite științific în Grecia Antică în secolele IV-III î. H. În secolul I, Heron din Alexandria, Egipt, a scris o carte cu denumirea *Pneumatica*, în care a expus diferite mecanisme cu utilizarea reglării automate a apei cu ajutorul traductorului-regulator – flotorul [3, 21].

În Europa, prima automatizare a fost concepută de olandezul Cornelius Djebel (1572-1633), care prezintă sistemul cu reacție negativă cu reglarea temperaturii în incubator. Tot în Europa, Den Pupe în anul 1681 a inventat primul regulator de presiune pentru cazanele cu vaporii, care funcționa ca supapă de siguranță [3, 21].

În Rusia, primul în istorie sistem cu reacție inversă a fost inventat de mecanicul I.I. Polzunov în anul 1765, care prezintă regulatorul de reglare a nivelului apei în cazanul cu vaporii [3, 4].

Prima automatizare în Anglia, care a avut o largă utilizare industrială, realizată de mecanicul scoțian James Watt în anul 1769, prezintă celebrul regulator centrifugal aplicat în sistemul de reglare automată a rotațiilor mașinii cu vaporii, inventată de însuși James Watt în același an [3, 21].

În perioada ce a urmat de la invenția regulatorului de nivel și a regulatorului centrifugal și utilizarea lor la automatizarea diverselor procese s-a format noțiunea de automată industrială.

În perioada care a urmat automatizării mașinii cu vapori, echipamentele de automatizare s-au conceput și realizat empiric-intuitiv. În regimurile de funcționare a mașinii cu vapori apăreau regimuri dificile de funcționare ca oscilațiile slab amortizate sau a regimurilor neamortizate – regimuri instabile ale rotațiilor mașinii.

În acest context, a apărut necesitatea dezvoltării teoriei sistemelor automate. Primul studiu matematic de analiză a stabilității sistemului de reglare automată a rotațiilor mașinii cu vapori cu utilizarea ecuațiilor diferențiale ca model al regulatorului centrifugal a fost elaborat și publicat de savantul englez J.C. Maxwell în anul 1868 [3, 21].

Un studiu matematic mai amplu ca model al sistemului de reglare automată a rotațiilor mașinii cu vapori a fost realizat de profesorul rus din Sankt-Petersburg I.A. Vyshnegradski în anii 1876-1878, care a pus bazele analizei sistemice a sistemelor de reglare automată [3, 21].

Aceste lucrări științifice au condiționat apariția disciplinei *teoria reglării automate* care s-a dezvoltat în continuare în cadrul mecanicii.

În anul 1877, matematicianul englez E. Routh a elaborat primul criteriu de analiză a stabilității sistemului automat [3, 8, 12, 13]. În anul 1895, matematicianul elvețian A. Hurwitz a elaborat al doilea tip de criteriu de analiză a stabilității sistemului automat [3, 8, 11, 13].

În anul 1892, matematicianul rus A.M. Leapunov a dezvoltat bazele matematice ale teoriei stabilității, care a avut un rol crucial în dezvoltarea teoriei sistemelor automate, elaborând metoda întâia și a doua de analiză a stabilității sistemelor dinamice [1, 3, 4, 8, 11-13].

Până la al II-lea război mondial teoria și practica sistemelor de reglare automată s-au dezvoltat în mod diferit. În fosta URSS, pentru teoria sistemelor automate s-a dezvoltat metoda în domeniul timpului cu utilizarea ecuațiilor diferențiale, care descriu dinamica sistemelor.

În SUA, în anii '30 ai secolului XX, cu dezvoltarea vertiginoasă a telecomunicațiilor, în baza dezvoltării amplificatoarelor electronice cu reacție inversă negativă, cercetătorii Bode, Nyquist și Black au elaborat metoda frecvențială în baza transformatei Fourier de analiză și sinteză a sistemelor automat liniare [3, 4, 8, 11, 13, 18, 21].

Un rol important în analiza stabilității sistemelor automate a avut elaborarea în 1932 de H. Nyquist a criteriului frecvențial de stabilitate.

Practica utilizării funcțiilor frecvențiale logaritmice a avut un rol important în dezvoltarea și implementarea sistemelor de reglare automată cu diverse procese industriale și tehnologice.

Pe parcursul celui de al II-lea război mondial, teoria și practica sistemelor de reglare automată s-a dezvoltat vertiginos, construindu-se diferite sisteme automate în domeniile militar și civil (piloți automați pentru avioane, sisteme de urmărire automată pentru radare etc.).

În anul 1940, teoria reglării automate devine un domeniu separat de dezvoltare științifică. Pe parcursul anilor 1940-1960 au fost elaborate metodele de studiu și construire a sistemelor automate neliniare, optime și adaptive. În anii 1960-1970 s-au dezvoltat noi metode de studiu al sistemelor automate în domeniul timpului bazate pe variabilele de stare, care au abordat o nouă viziune a problemelor controlabilității, observabilității, stabilității și optimalității sistemelor automate [1, 3-5, 10, 13-15, 18, 20].

În baza metodelor ecuațiilor de stare s-au dezvoltat metode și practici de construire a sistemelor automate cu structură variabilă, care au fost larg utilizate la automatizarea diverselor procese industriale.

În perioada de după anii 1990, o deosebită importanță s-a acordat dezvoltării sistemelor automate robuste ca prioritate practică.

În etapa actuală, teoria conducerii automate dispune de un aparat fundamental de metode și tehnici de analiză și sinteză a sistemelor automate cu structură complexă, în care algoritmi de conducere se realizează în formă numerică pe microprocesoare, care conduc la ridicarea performanțelor, robusteții și fiabilității sistemelor de conducere automată [1, 4, 8, 9, 11, 13, 14, 18].

Prin concepte și echipamente și produse program avansate, automatica este aplicată practic în toate domeniile socio-economice.

În tabelul I.1 sunt date etapele de bază de dezvoltare a teoriei și practicii sistemelor cu conducere automată [3].

Tabelul I.1. Etapele de dezvoltare a teoriei sistemelor automate

Nr. crt.	Anul	Denumirea etapei
1	1765	I.I. Polzunov a elaborat sistemul de reglare cu reacție negativă cu regulatorul de nivel al apei în cazanul cu vapori.
2	1769	J. Watt a construit mașina cu vapori cu regulatorul de reglare a turațiilor arborelui mașinii. Acest moment este începutul Revoluției industriale în Marea Britanie, când s-au obținut considerabile succese în mecanizarea proceselor, care au fost rezultatele premergătoare automatizării.
3	1800	Ele White a propus conceptul de interschimbabilitate a pieselor în procesul de fabricație a mușchetelor. Acest moment este începutul etapei fabricării în masă.
4	1868	J. Maxwell a elaborat modelul matematic al regulatorului mașinii cu vapori.
5	1913	Henry Ford la fabricile sale a implementat asamblarea mecanizată a automobilelor.
6	1927	H. Bode analizează amplificatoarele cu reacție negativă
7	1932	H. Nyquist a elaborat metoda frecvențială de analiză a stabilității sistemului automat.
8	1952	La Institutul Tehnologic din Massachusetts au fost elaborate strungurile cu conducere numerică cu program.
9	1954	J. Devon a elaborat echipamentul pentru transportarea obiectelor, care este prototipul robotului industrial.
10	1960	În baza ideilor lui J. Devon s-a elaborat primul robot Unimăt. În 1961, acești roboți au fost utilizați pentru deservirea strungurilor de presare.
11	1970	S-au propus modele de sisteme în variabilele de stare și s-a elaborat teoria conducerii optimale (L.S. Unimăt, R. Bellman).
12	1980	Se efectuează cercetări ample ale sistemelor de conducere robustă.
13	1990	Industria care fabrica producție pentru export a implementat pe scară largă automatizarea.
14	1994	În automobile se implementează sisteme de conducere cu reacție negativă. În industrie apare necesitatea de aplicare a sistemelor de conducere robuste.

1 NOȚIUNI DE BAZĂ ALE TEORIEI CONDUCERII

1.1 Noțiuni de bază ale automaticii

În etapa modernă de dezvoltare a civilizației există diverse procese tehnice, tehnologice, biologice, economice, sociale etc., care necesită organizarea funcționării acestora pentru a atinge scopul dorit [1, 3, 4, 8-13, 16, 18, 21].

Conducerea diverselor procese industriale și tehnologice poate fi realizată manual sau automat. Conducerea (reglarea) manuală se realizează de un operator uman, iar conducerea automată se realizează de un sistem fizico-tehnic.

Eliberarea operatorului uman de operațiile de conducere nemijlocită a proceselor îi oferă posibilități de supraveghere a evoluției procesului automatizat.

Automatica este o ramură a științei și tehnicii, care studiază și construiește sisteme cu conducere automată a diverselor procese fără intervenția umană. Automatica include din două concepte fundamentale.

1. Componenta teoretică - *Teoria sistemelor cu conducere automată*, care elaborează principiile de construire și funcționare ale sistemelor cu conducere automată.

2. Componenta practică - *Automatizarea* proceselor reprezintă acțiunea de concepere și realizare a elementelor funcționale și echiparea sistemelor fizico-tehnice pentru efectuarea în mod automat a acțiunilor de conducere (reglare) a diverselor operații, mișcări și acțiuni cu procese tehnice, tehnologice, biologice, economice, sociale etc.

Prin automatizarea unui proces se subînțelege construirea sistemului cu conducerea automată a procesului.

Cele mai importante categorii de automatizări sunt: de comandă, de măsurare, de semnalizare și de reglare și conducere.

Avantajele automatizării sunt următoarele:

1. Creșterea productivității, scăderea consumurilor specifice de materii prime, de materiale, de combustibil, de energie etc.
2. Asigurarea preciziei de execuție.
3. Creșterea siguranței în funcționare.

4. Protejarea instalațiilor.
5. Scoaterea operatorului uman din mediile nocive.
6. Eliberarea operatorului uman din procesul de producere de bunuri materiale și servicii.

În aspect socioeconomic, automatizarea oferă omului noi posibilități de supraveghere a funcționării instalațiilor automatizate.

Exemple de procese tehnice și tehnologice pot servi obiectele care se deplasează în spațiu (nave maritime și de zbor, autovehicule etc.), obiectele energetice (reactoare, generatoare, motoare, cuptoare termice, procese calorice, diverse convertoare de energii etc.), obiectele din industria alimentară și chimică (processe cu transfer de masă, processe cu reacție (reactoare, autoclave) etc.), obiectele și procesele din metalurgie și construcția de mașini (cuptoare, convertoare, strunguri etc.), tehnica casnică (frigidere, condiționere, fiere de călcat, electronica casnică) etc.

Mărimile care determină starea proceselor și obiectelor tehnice sunt mărimi fizico-chimice ca temperatura, presiunea, tensiunea, curentul, concentrația etc.

Exemple de obiecte economice pot servi uzina, fabrica, unitățile de consum și servicii, băncile etc. Mărimea generalizată care determină rezultatul funcționării este rentabilitatea.

Pentru a trata mai profund un proces se analizează un exemplu de proces, evidențind mărimile care determină evoluția acestuia în timp.

Procesul de fabricație este reprezentat de o instalație tehnologică (fig. 1.1), unde, în baza tehnologiei, echipamentului tehnic, energiei și

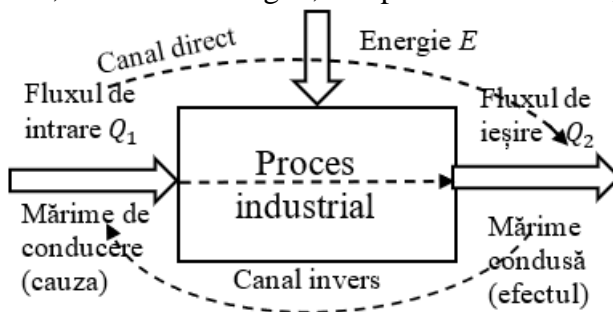


Fig. 1.1. Proces industrial

operatorului uman se realizează procesul care transformă fluxul material sau energetic Q_1 de la intrare (materie primă, piese etc.) în flux material sau energetic Q_2 de la ieșire (a producției fabricate de calitate impusă).

Asupra procesului pot acționa diverse perturbații cum ar fi factorii interni și externii, modificând regimul de funcționare, care conduc la destabilizarea procesului și pentru a-l restabili este necesar a interveni, deci, a aplica acțiuni pentru a stabili procesul. Astfel de acțiuni forțate aplicate asupra procesului sunt mărimile de conducere.

Conform concepției teoriei conducerii automate procesul reprezintă obiectul de conducere (reglare) a mărimilor care interacționează în proces: fluxul de intrare Q_1 este numit mărimea de conducere (reglare) notată prin vectorul $\mathbf{u}(t)$, fluxul de ieșire Q_2 este numit mărimea condusă (reglată) notată prin vectorul $\mathbf{y}(t)$ și mărimea energie E numită perturbație notată prin vectorul $\mathbf{p}(t)$ (fig. 1.2).

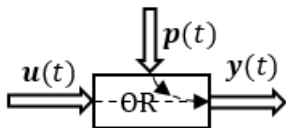


Fig. 1.2. Schema bloc funcțională a obiectului de reglare

Obiectul de conducere reprezintă un proces tehnic, industrial, tehnologic, biologic, economic, social etc., care necesită conducere pentru o mai bună funcționare.

Mărimea de conducere (reglare) $\mathbf{u}(t)$ reprezintă un algoritm sau o succesiune de comenzi orientate asupra procesului pentru a-l aduce în starea dorită $\mathbf{y}_d(t)$. La ieșirea procesului se obține mărimea de ieșire curentă $\mathbf{y}(t)$.

Mărimea de conducere $\mathbf{u}(t)$ reprezintă mărimea dorită (etalon) a ieșirii $\mathbf{y}_d(t)$ a procesului aplicată la intrare și se obține răspunsul $\mathbf{y}_u(t)$ al obiectului descris de transferul intrare-ieșire dată de relația funcțională:

$$\mathbf{y}_u(t) = f_1(\mathbf{u}(t)). \quad (1.1)$$

Relația care descrie acțiunea perturbației $\mathbf{p}(t)$ asupra procesului, destabilizându-l, este:

$$\mathbf{y}_p(t) = f_2(\mathbf{p}(t)). \quad (1.2)$$

Deoarece relațiile (1.1) și (1.2) exprimă legătura funcțională a mărimii de ieșire $\mathbf{y}(t)$ a obiectului în raport cu mărimea de conducere $\mathbf{u}(t)$ și perturbația $\mathbf{p}(t)$, se obține:

$$\mathbf{y}(t) = f_3(\mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t)) = \mathbf{y}_u(t) + \mathbf{y}_p(t). \quad (1.3)$$

În cazul dat, mărimile \mathbf{u} , \mathbf{p} , \mathbf{y} sunt mărimi vectoriale.

Relațiile (1.1)-(1.3) sunt modele matematice generalizate ale proceselor industriale ca obiecte de conducere.

Dacă mărimea de conducere $\mathbf{u}(t)$ este realizată de operatorul uman (OU), atunci se spune că conducerea procesului este manuală.

Pentru a substitui operatorul uman, deci, a automatiza procesul, se construiește un sistem tehnic de conducere numit *regulator automat* (RA) (fig. 1.3), care se conectează pe canalul direct înaintea obiectului de reglare. Regulatorul automat RA prelucrează semnalele, care acționează asupra obiectului de reglare: referința (cauza) $\mathbf{r} = \mathbf{y}_d$, perturbația (cauza) \mathbf{p} , răspunsul (efectul) \mathbf{y} .

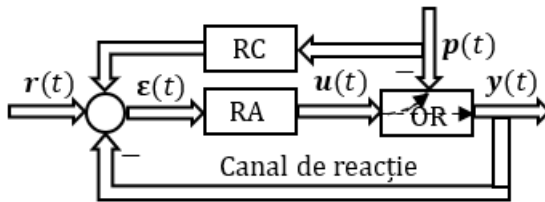


Fig. 1.3. Schema bloc funcțională a sistemului de reglare automată

Mărimea de ieșire dorită $\mathbf{y}_d(t) = \mathbf{r}(t)$ este numită mărime de referință sau prescrisă.

Structura obținută, alcătuită din ansamblul regulatorul automat RA, obiectul de reglare OR, regulatorul compensator RC și reacția

inversă negativă cu semnalele respective, se numește *sistem de reglare automată (SRA)* sau *sistem cu conducere automată (SCA)*.

În sistemul automat se măsoară mărimea de ieșire curentă $y_r(t)$ și se transmite pe canalul de reacție la intrarea sistemului pentru a fi *comparată* (are semnul minus) cu referința $r(t)$, obținând eroarea $\epsilon(t)$ a sistemului automat exprimată prin relația:

$$\epsilon(t) = r(t) - y_r(t). \quad (1.4)$$

Ansamblul din regulator și obiectul de reglare formează canalul direct al sistemului, unde se procesează materia și energia și subsidiarul de informație.

Un concept fundamental în automatică, larg utilizat în cadrul sistemelor automate, este canalul reacției inverse negative. Reacția este negativă, deoarece determină evoluția procesului în sensul anulării abaterii din proces.

În unele sisteme tehnice se utilizează și reacția inversă pozitivă.

Ca fenomen natural, reacția pozitivă sau negativă este prezentă la toate nivelurile și formele de organizare a materiei, organismelor biologice și societăților, constituind obiectul de studiu al ciberneticii [1, 4, 8, 11-13, 16, 18, 21, 22].

Mărimea de ieșire curentă $y(t)$ a sistemului se dă în raport cu referința și eroarea de relația:

$$y(t) = y_d(t) \pm \epsilon(t) = r(t) \pm \epsilon(t), \quad (1.5)$$

unde, în acest caz, mărimea $\epsilon(t)$ este numită *precizia* sistemului.

Regulatorul automat, în baza erorii $\epsilon(t)$ sistemului, elaborează mărimea de conducere (de reglare sau de comandă) dată de relația:

$$u_r(t) = f_r(\epsilon(t)), \quad (1.6)$$

care se aplică asupra obiectului pentru a stabiliza regimul staționar de funcționare al obiectului.

Dacă asupra procesului acționează perturbația (referința $r(t) =$

= 0), atunci această mărime se măsoară și se transmite la intrarea sistemului și regulatorul formează mărimea $\mathbf{u}_p(t)$ de compensare (în fig. 1.3 linia întreruptă cu săgeată) a perturbației măsurate după relația:

$$\mathbf{u}_p(t) = f_p(\mathbf{p}(t)). \quad (1.7)$$

Când asupra obiectului acționează semnalul de referință $\mathbf{r}(t)$ și perturbația $\mathbf{p}(t)$ regulatorul elaborează mărimea de conducere:

$$\mathbf{u}_{rp}(t) = f_{rp}(\mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t)), \quad (1.8)$$

care stabilizează regimul de funcționare al procesului și rejectează acțiunea perturbației măsurate.

Relațiile (1.6)-(1.8) elaborate de regulator se numesc *algoritmi* sau *legi* de conducere sau reglare. Noțiunea de algoritm de conducere este mai complexă (pot fi realizate și alte operații de prelucrare a semnalului mărimii de conducere) în comparație cu noțiunea de reglare.

Algoritmul de reglare se referă la reglarea unor parametri tehnologici care determină starea procesului ca temperatura, presiunea, debitul, concentrația etc.

Datorită complexității proceselor industriale și tehnologice cu cerințe înalte de performanță, automatizarea devine o necesitate primordială în contextul globalizării economiei și a piețelor de procese și produse cu eficiență, calitate, siguranță ridicată și optimizarea consumurilor energetice și materiale în regimurile de funcționare.

Conform cerințelor tehnice și economice, sistemele de conducere automată sunt supuse restricțiilor ecologice de compatibilitate cu mediul în care evoluează.

1.2 Informația și principiile de conducere

1.2.1 Principiile de conducere

Conducerea și informația din sistemul automat sunt două noțiuni fundamentale reciproc legate între ele. Conducerea nu poate fi

realizată fără informația necesară despre starea și caracteristicile obiectului de conducere, obiectivele conducerii, acțiunea mediului asupra sistemului. În practica construirii sistemelor automate, în funcție de informația apriori se utilizează principii fundamentale de conducere, care să conducă la stabilizarea regimului de funcționare al procesului și să rejeteze acțiunile perturbațiilor. Principiile de bază sunt următoarele [3, 4, 8, 11-13, 18, 19-21]:

1. Principiul de conducere a sistemului deschis.
2. Principiul de conducere cu compensarea acțiunii perturbației.
3. Principiul de conducere a sistemului închis sau cu reacție.
4. Principiul de conducere combinat (cu compensarea acțiunii perturbației și cu reacție).
5. Principiul de conducere adaptiv.

1.2.2 Principiul de conducere a sistemului deschis

În acest caz, se presupune că este cunoscută informația apriorică despre obiectivele conducerii și caracteristicile obiectului condus. În cazul când starea obiectului trebuie stabilizată $y(t) = y_{st} = \text{const}$ și nu acționează perturbația $p(t) = 0$, atunci referința $r(t) = r_0 = \text{const}$. Regulatorul automat (RA) în baza informației referinței r_0 elaborează mărimea de conducere u care stabilizează procesul la valoarea lui $y_{st} = \text{const}$ (fig. 1.4).

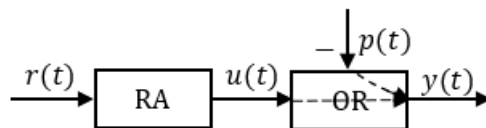


Fig. 1.4. Schema bloc funcțională a sistemului deschis

Avantajul constă în simplitatea algoritmului și construcția regulatorului. Dezavantajul – când asupra procesului acționează perturbații, atunci procesul se destabilizează și nu este posibil a fi stabilizat regimul de funcționare al procesului, fiindcă mărimea de ieșire nu se măsoară.

1.2.3 Principiul de conducere cu compensarea acțiunii perturbației

Dacă asupra procesului acționează perturbații puternice, atunci se aplică principiul de conducere cu compensarea acțiunii perturbației se stabilește perturbația $p(t)$ cu cea mai puternică acțiune asupra procesului, se măsoară și se formează bucla de compensare a perturbației măsurate cu regulatorul compensator RC (fig. 1.5), astfel mărimea de ieșire $y(t)$ fiind invariantă în raport cu perturbația măsurată.

Regulatorul RA elaborează mărimea de comandă $u(t)$ din două componente:

$$u(t) = f(\varepsilon(t)) = f_r(\varepsilon_r(t)) + f_p(\varepsilon_p(t)) = u_r(t) + u_p(t), \quad (1.9)$$

unde $\varepsilon(t) = \varepsilon_r(t) + \varepsilon_p(t)$, $u_r(t) = f_r(\varepsilon_r(t))$ este comanda de reglare, iar $u_p(t) = f_p(\varepsilon_p(t))$ - compensează acțiunea perturbației măsurate.

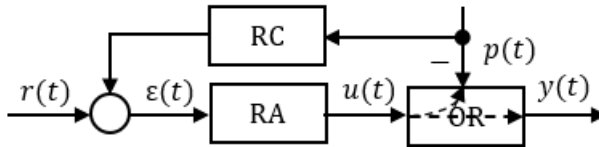


Fig. 1.5. Schema funcțională a sistemului cu compensarea perturbației

Dar asupra procesului acționează și perturbații mai slabe, care destabilizează procesul. Avantajul constă în compensarea rapidă a perturbației cu acțiune puternică măsurată, iar dezavantajul că sistemul rămâne deschis la acțiunea perturbațiilor nemăsurate.

1.2.4 Principiul de conducere a sistemului închis

Unul dintre cele mai larg utilizate principii de conducere este cel cu reacție (fig. 1.6). În sistem se măsoară mărimea de ieșire $y(t)$ și acest semnal, prin canalul de reacție, se transmite pentru comparare cu

semnalul referinței $r(t)$, în baza căruia se elaborează eroarea sistemului:

$$\varepsilon(t) = r(t) - y(t) \quad (1.10)$$

și regulatorul RA elaborează mărimea de conducere $u(t)$ a procesului. În mărimea de ieșire $y(t)$ ca răspuns la semnalul de intrare referință și perturbație sunt componentele ieșire-referință $y_r(t)$ și ieșire-perturbație $y_p(t)$. Astfel, conducerea stabilizează regimul de funcționare al procesului și rejectează acțiunea perturbațiilor nemăsurabile.

Acest fapt se datorează acțiunii reacției negative a sistemului de reglare automată, care rejectează perturbațiile și realizează invarianța mărimii de ieșire în raport cu perturbațiile și reduce sensibilitatea la variația caracteristicilor obiectului de reglare și la acțiunile mediului.

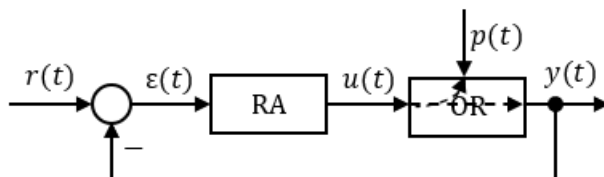


Fig. 1.6. Schema bloc funcțională a sistemului cu reacție

Acestea sunt avantajele principiului. Dezavantajul constă în organizarea legăturii inverse cu echipament special, care conduce la soluții complexe de automatizare (echipament, fiabilitate, costuri etc.) și, ca rezultat, crește inerția sistemului.

Se consideră schema de principiu electrică a sistemului de reglare automată a rotațiilor motorului cu curent continuu reprezentată în figura 1.7.

Motorul de curent continuu are o largă utilizare în practica automatizărilor diverselor procese și a acționărilor electrice.

Se evidențiază obiectul de reglare și elementele funcționale ale sistemului. Obiectul de reglare este motorul de curent continuu (MCC) 1 cu excitație separată, la care se reglează viteza unghiulară ω sau rotațiile n prin modificarea tensiunii rotorice u_r , sau tensiunii de excitație u_e , sau modificarea ambelor tensiuni rotorice u_r și excitație

u_e . Motorul este antrenat la cuplul de sarcină (momentul de sarcină) M_s .

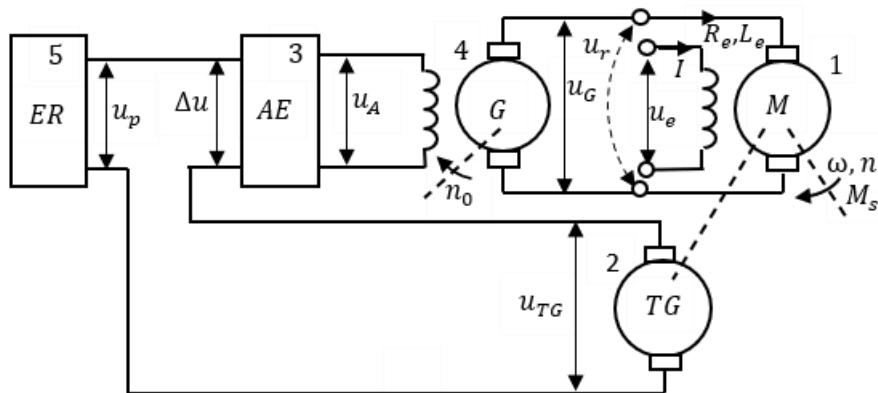


Fig. 1.7. Schema de principiu electrică a sistemului de stabilizare a rotațiilor motorului de curent continuu

Aplicând tensiunea de excitație la bobina de excitație (stator), se produce fluxul magnetic în interiorul statorului. Se aplică tensiunea rotorică la bobina rotorului care produce câmpul rotorului și, datorită interacționării acestor câmpuri, rotorul se va roti cu o viteză proporțională tensiunii. Cea mai utilizată metodă de reglare a rotațiilor motorului este metoda prin reglarea tensiunii rotorice u_r , datorită faptului că astfel se introduce fluxul de putere mai mare în comparație cu reglarea tensiunii de excitație.

Pentru măsurarea rotațiilor n ale motorului se utilizează traductorul de tip tahogenerator (TG) de curent continuu, rotorul căruia se cuplează mecanic cu rotorul motorului. Mărimea de intrare a tahogeneratorului TG sunt rotațiile (viteza) motorului, iar mărimea de ieșire este tensiunea tahogeneratorului u_{TG} , care este proporțională rotațiilor n ale motorului.

În scopul menținerii rotațiilor motorului la valoarea dorită se alege tensiunea de referință u_p , care este produsă la ieșirea elementului de referință (ER).

Mărimea tensiunii u_{TG} , prin canalul de reacție, se transmite și se

compară cu tensiunea u_p și se determină eroarea:

$$\Delta u = u_p - u_{TG},$$

care, fiind o mărime de valoare mică, se transmite amplificatorului electronic (AE) și, la ieșirea acestuia, se obține tensiunea amplificată u_A . Tensiunea amplificată u_A se transmite bobinei de excitație a generatorului de curent continuu (G), care produce fluxul magnetic al statorului. Pentru a obține tensiunea de ieșire a generatorului u_G , rotorul generatorului se rotește de un motor electric de curent alternativ cu turații n_0 constante. Tensiunea generatorului u_G se aplică la bornele rotorului și, astfel, se stabilizează rotațiile motorului proporționale tensiunii de eroare Δu . Generatorul este elementul de execuție (EE) care realizează reglarea tensiunii u_r a motorului.

De exemplu, dacă s-a produs creșterea prin salt a momentului de sarcină M_s ca perturbație, atunci se reduc turațiile motorului n , ceea ce conduce la reducerea tensiunii u_{TG} și rezultă creșterea tensiunii Δu , care se transmite prin canalul direct amplificator-generator-motor, astfel, rotațiile se stabilizează la valoarea inițială, și invers, dacă s-a redus momentul de sarcină M_s , cresc rotațiile motorului n și tensiunea u_{TG} respectiv, reducând tensiunea Δu , care se transmite prin canalul direct amplificator-generator-motor și rotațiile se stabilizează la valoarea dată.

Astfel, în sistemul automat se realizează stabilizarea rotațiilor motorului datorită principiului de reglare (conducere) cu reacție inversă negativă tipică pentru sistemele automate.

1.2.5 Principiul de conducere combinat

În cazul când sistemul de reglare automată este supus acțiunilor perturbațiilor și se dorește rejecția lor, atunci se aplică principiul combinat (cu compensarea acțiunii perturbației cu regulatorul compensator RC și cu reacție) de conducere cu procesul cu regulatorul RA pe calea directă pentru a obține calitatea dorită a sistemului de reglare automată construit (fig. 1.8).

Sistemele adaptive reprezintă o nouă categorie de sisteme de conducere caracterizate prin capacitatea de a compensa modificările structurale sau parametrice ale procesului condus, modificând corespunzător structura sau parametrii algoritmului de conducere.

În blocul de identificare (BI) se introduc mărimile de intrare $u(t)$ și de ieșire $y(t)$ și se apreciază modelul matematic al obiectului de reglare datorită modificării parametrilor acestuia în urma acțiunii perturbațiilor. Modelul aproximat $\Delta_O(t)$ al obiectului se transmite blocului de adaptare (BA), care în baza unui criteriu de optimizare parametrică Q recalculează și ajustează parametrii de acord $\Delta_R(t)$ ai regulatorului și, astfel, se menține regimul dorit de funcționare al obiectului condus. Conturul cu linie întreruptă de la blocul de identificare BI la blocul de adaptare BA și la regulatorul RA formează conturul de adaptare numit și mecanism de adaptare. Structura sistemului din figura 1.9 conține două contururi: conturul format din regulatorul RA și obiectul de reglare OR cu buclă în reacție și conturul de adaptare.

Aceste sisteme automate se numesc sisteme cu autoacordare. Scopul adaptării sistemului automat este de a optimiza indicii de calitate ai regimului de funcționare a sistemului, minimizând criteriul Q prin modificarea parametrilor de acord ai regulatorului RA.

1.3 Algoritmii de funcționare ai sistemelor automate

Algoritmii de funcționare ai sistemelor cu conducere automată se clasifică după modul de variație al semnalelor de intrare referință $r(t)$ și perturbația $p(t)$ și evoluția răspunsului sistemului.

Sisteme cu conducere automată

1 Sisteme de reglare automată (algoritmi de reglare):

- 1) algoritm de stabilizare;
- 2) algoritm de urmărire;
- 3) algoritm de conducere cu program.

2 Sisteme cu conducere automată (algoritmi de conducere):

- 1) algoritm optimal de conducere;
- 2) algoritm extremal de conducere;
- 3) algoritm adaptiv de conducere.

După algoritmi de funcționare, sistemele cu conducere automată se divizează în două clase [3, 4, 8, 11, 13, 18, 21].

1. Sisteme de reglare automată.
2. Sisteme cu conducere automată.

Sistemele de reglare automată se clasifică după algoritmi de funcționare în modul următor:

1.1. Pentru sistemul cu *algoritmul de stabilizare* la intrarea lui se aplică mărimea de referință $r(t) = \text{const}$ și răspunsul se stabilizează la o valoare constantă y_{st} , numit regim staționar.

1.2. În sistemul cu *algoritmul de urmărire* la intrarea lui se aplică semnalul care variază în timp după o lege cunoscută ($r(t) = \text{var}$) și răspunsul sistemului se va modifica concomitent cu semnalul de intrare și, astfel, se stabilizează un regim staționar. În figura 1.10 se dă schema de principiu electrică a sistemului de urmărire automată a unghiului arborelui motorului, în care se utilizează elementele: 1 este obiectul de reglare, care prezintă cuplul de sarcină M_s , 2 – traductorul realizat de rezistorul R_α , 3 – elementul de referință realizat de rezistorul R_r , 4 – comparatorul reprezintă puntea formată din rezistorii R_r și R_α , 5 – amplificatorul electronic, 6 – generatorul ca amplificator de putere, 7 – motorul electric ca element de execuție.

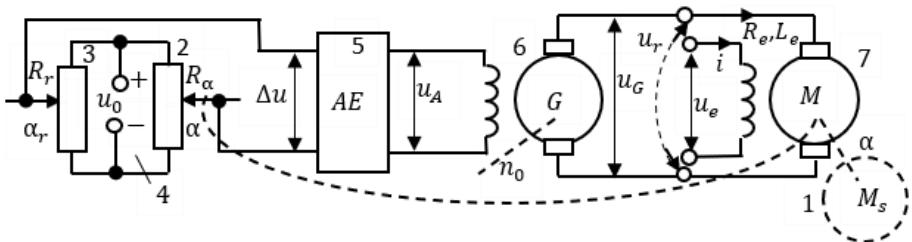


Fig. 1.10. Schema de principiu electrică a sistemului de urmărire a unghiului arborelui motorului

Se prezintă modul de funcționare al sistemului. Puntea formată din rezistoarele R_r și R_α și alimentată cu tensiunea u_0 , realizează compararea unghiului de referință α_r și a unghiului curent α , care determină starea curentă a obiectului de reglare, obținându-se eroarea

$\Delta\alpha = \alpha_r - \alpha$, care se convertește de punte în tensiunea Δu ($\Delta\alpha \rightarrow \Delta u$). Inițial, puntea este în stare de echilibru și la ieșirea ei semnalul $\Delta u = 0$.

Pentru pornirea sistemului, semnalul de referință α_r se aplică cursorului rezistorului R_r , iar semnalul de reglare α se realizează cu cursorul rezistorului R_α , care este în stare inițială și, astfel, puntea se dezechilibrează producând tensiunea $\Delta u \neq 0$. Această tensiune Δu se prelucrează consecutiv de amplificatorul 5, generatorul 6, motorul 7, la ieșirea căreia se realizează unghiul α și, prin canalul de reacție - linia întreruptă realizează legătura mecanică a arborelui motorului cu cursorul traductorului R_α , care conduce la echilibrarea punții și tensiunea $\Delta u = 0$ și, astfel, tensiunea rotorică a motorului $u_r = 0$, iar arborele motorului se poziționează la unghiul α .

1.3. În cazul sistemului cu *algoritmul de conducere cu program*, intrarea în sistem se prezintă ca o succesiune de modificări cu valori constante sau/și variabile în concordanță cu cerințele de variații ale stării procesului și răspunsul sistemului se va modifica conform comenzilor.

2.1. *Algoritmul optimal* este cel mai eficient dintr-o varietate posibilă de decizii. Pentru elaborarea acestui algoritm se utilizează criterii de optimizare a parametrilor sistemului (de exemplu, minimul de energie, rapiditate în timp etc.).

2.2. Denumirea *algoritmului extremal* este legată de menținerea stării extremale a regimului de funcționare al obiectului de reglare (de exemplu, starea maximă sau starea minimă).

2.3. Sistemul de conducere automată funcționează într-un mediu și pe durata funcționării pot să varieze parametrii sistemului și ai mediului, care vor conduce la reducerea stabilității și calității sistemului. Datorită *algoritmului adaptiv*, structura sistemului se va adapta noilor condiții în baza modificării parametrilor și structurii regulatorului și, astfel, se va menține un regim eficient de funcționare al sistemului automat. Utilizarea acestui algoritm permite construirea sistemelor automate care asigură performanțe și robustețe ridicate.

Conceptual, sistemele adaptive s-au dezvoltat semnificativ în ultimii ani ai secolului al XX-lea, datorită dezvoltării intensive a tehnicii microprocesoarelor și aplicabilității acestora.

1.4 Schema bloc funcțională și elementele funcționale ale sistemului automat

În automatică, pentru prezentarea elementelor funcționale și ale sistemelor automate se utilizează următoarele tipuri de scheme [1, 4, 8, 11-13, 18, 21]:

1. Scheme de principiu (electrice, pneumatice, hidraulice, tehnologice etc.).
2. Scheme bloc funcționale.
3. Scheme bloc structurale (algoritmice).
4. Scheme funcționale de automatizare.
5. Scheme de montaj etc.

Fiecare tip de schemă este utilizată în diferite etape de analiză și construire a sistemului automat.

Definiție. Schema bloc funcțională este o simbolizare grafică a interacțiunii elementelor tehnice cu procesul industrial reprezentată din dreptunghiuri, cerceulețe și săgeți direcționate după modul de funcționare al sistemului.

Fiecare dreptunghi și cerceuleț este format din elementele funcționale componente ale sistemului automat, iar săgețile prezintă informația de comunicații în structura sistemului.

Construirea schemei bloc funcționale pornește ipotetic de la două variante posibile în realitate:

1. Existența sistemului reprezentat prin schema de principiu.
2. Procesul industrial se construiește și, în paralel, se elaborează sistemul de conducere.

Din analiza schemelor de principiu nu este posibil a stabili (extrage) informația despre dinamica sistemului. Pentru a obține această informație, inițial se construiește schema bloc funcțională convențională a sistemului și se descrie modul de funcționare al elementelor tehnice și al întregului sistem de conducere cu procesul industrial pentru atingerea scopului dorit.

Se consideră schema bloc funcțională (fig. 1.11) pentru un proces industrial ipotetic, compusă din minimum de elemente funcționale (date prin abrevieri), astfel ca procesul să se realizeze.

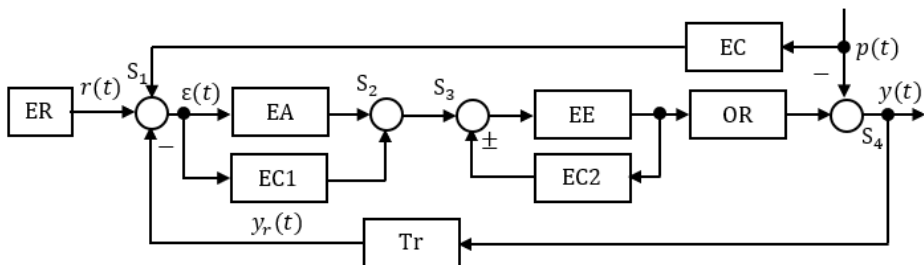


Fig. 1.11. Schema bloc funcțională a sistemului de reglare automată

Procesul condus este reprezentat ca obiectul de reglare (OR). În sistem acționează semnalul de referință $r(t)$, elaborat de către un echipament special - elementul de referință (ER), care reprezintă semnalul etalon al mărimii de ieșire $y(t)$ a procesului și semnalul perturbației $p(t)$, care deteriorează regimul funcționării normale a procesului.

Elementul funcțional este un element tehnic-convertoare, care realizează o funcție concretă în sistem (de exemplu amplificare, acționare etc.), convertind semnalul de la intrare în semnal de ieșire. În structura sistemului automat se regăsesc mai multe elemente funcționale-convertoare care se dau în continuare.

1. Elementele funcționale S_1 - S_4 sunt sumatoare, care însumează semnalele cu semnele lor și sunt realizate în mod diferit.

2. Elementul de amplificare (EA), care are rolul de a amplifica semnalul mic al erorii în baza sursei existente de energie. Se utilizează amplificatoare electrice, pneumatice și hidraulice.

3. Elementul de execuție (EE), care în baza semnalului de la amplificator acționează elementul de reglare deplasându-l (închide/deschide), astfel se reglează fluxul de substanță sau energie care se introduce (se extrage) în procesul condus. Elementul de execuție este compus din elementul de acționare și organul de reglare. Pentru deplasarea organului de reglare este necesar a depune un efort, care este aplicat de elementul de acționare. În calitate de element de acționare se utilizează motoare electrice (de curent continuu sau alternativ), fluigice (pneumatice și hidraulice).

4. Traductorul (Tr), în general, este compus din elementul

sensibil și adaptor. Elementul sensibil este un element tehnic, ce reacționează la modificarea mărimii fizice controlate a procesului, care, în multe cazuri, este o mărime mecanică (temperatură, presiune, nivel etc.) și nu poate fi transmisă la distanță. Reieșind din aceste considerente, se utilizează adaptorul care transformă semnalul neelectric în semnal electric convenabil a fi transmis la distanță.

Traductorul Tr1 măsoară mărimea de ieșire, care este transmisă pe calea de reacție la intrarea sistemului și, astfel, are loc reacția inversă.

Există multiple tipuri de traductoare cu diverse principii de funcționare, care măsoară diverse mărimi fizice de stare ale procesului.

Elementul compensator EC măsoară mărimea perturbației și o compensează datorită formării circuitului cu reacție negativă.

Elementele descrise sunt elementele principale din structura sistemului automat.

Însă, pentru a avea posibilitatea de a ridica stabilitatea și performanțele sistemului, în structura lui forțat se introduc elemente adăugătoare, numite elemente de corecție, cu proprietăți care să satisfacă cerințele impuse sistemului.

5. Elementul de corecție EC1, conectat în paralel la amplificator, prelucrează semnalul erorii prin operații de derivare sau de integrare și, astfel, semnalul acesta se însumează cu semnalul amplificat al erorii, obținând un efect mai puternic.

6. Elementul de corecție EC2, conectat în reacție la elementul EE, prelucrează semnalul de la ieșirea acestuia și se transmite la intrarea lui, efectuând reacția inversă, care ridică performanțele elementului EE (reduce inerția, liniarizează caracteristica statică).

În practica automatizărilor se construiesc sisteme automate atât în baza elementelor funcționale date mai sus, cât și utilizarea elementelor neliniare, logice, discrete etc.

Structura generalizată a sistemului de conducere automată cu parametrii economici ai bugetului național ca model matematic cu reacție negativă [3, 13] se dă în fig. 1.12 în care sunt blocurile funcționale: 1 este producerea (fabricația), 2 – acumularea impozitelor, 3-5 – comparatoare, 6 - consumatorii, 7 – măsurări, 8 – guvernul.

Mărima de referință este bugetul dorit r , mărimea de ieșire – bugetul y , măsurările y_r , cheltuielile de stat u_1 , cheltuielile consumatorilor u_2 și veniturile de la industria privată ca perturbație p , mărimea de conducere u și eroarea $\varepsilon = r - y_r$.

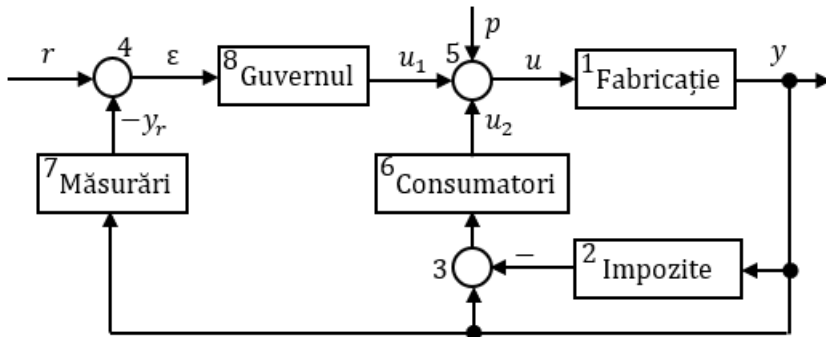


Fig. 1.12. Structura sistemului de conducere a bugetului național

Bugetul național se formează în urma producerii bunurilor materiale și serviciilor plus fabricația în industria privată.

Acest model permite analiza rolului guvernului în conducerea economiei și dinamica cheltuielilor pe articole. În unele cazuri, conturul consumatorilor are un rol mai redus, iar rolul principal aparține conducerii guvernului. Blocul măsurări trebuie să urmărească cu precizie și cu rapiditate totalitatea modificărilor veniturilor.

1.5 Clasificarea sistemelor automate

Clasificarea sistemelor automate și a semnalelor care acționează asupra lor se poate face considerând diferite aspecte ale sistemului, cât și ale semnalelor. Mai jos se prezintă clasificarea sistemelor automate din mai multe puncte de vedere în modul descris [3, 4, 8, 11, 13, 18].

1.5.1 Clasificarea sistemelor automate după tipul semnalului în timp

Noțiunile ca variabilă și semnal în teoria sistemelor automate au

sensul informațional. Semnalele la intrarea și ieșirea elementelor funcționale ale sistemelor automate sunt purtători de informații, iar însăși elementele sunt convertitoare de semnale și ca dispozitive de transmitere și prelucrarea acestei informații.

După existența semnalului în timp atestăm două tipuri de semnale continue (analogice) $y(t)$ (fig. 1.13, *a*) și semnale discretizate (eșantionate) $y(kT)$ (fig. 1.13, *b*) prezentate cu o succesiune de impulsuri, unde T este perioada de eșantionare (discretizare). Din aceste considerente, sistemele automate se clasifică în două clase de sisteme.

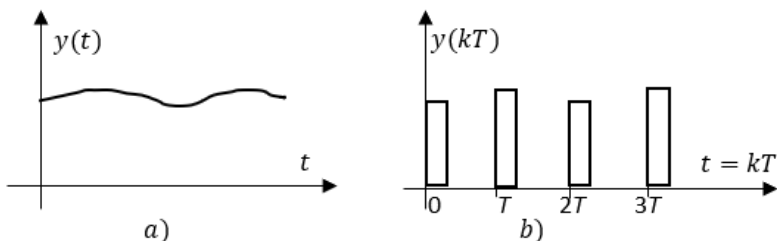


Fig. 1.13. Tipuri de semnale în timp

1. Sisteme automate continue, în care informația se codează prin amplitudinile semnalelor analogice la intrări și ieșiri, care există în orice moment de timp. Timpul și nivelul semnalelor aparțin mulțimilor puterilor continue.

2. Sisteme automate discrete, în care informația semnalelor se codează cu succesiuni de impulsuri, la care se modifică un parametru al impulsului (amplitudinea, durata și fază).

În figura 1.13, *b*) la impulsuri se modulează numai amplitudinea, iar durata și faza sunt constante.

1.5.2 Clasificarea sistemelor automate după algoritmi de reglare

Se consideră structura sistemului automat cu reacție (fig. 1.14, *a*), în care regulatorul R în baza informației erorii $\varepsilon(t)$ elaborează mărimea de comandă $u(t)$ cu obiectul de reglare OR după algoritmul (legea) de conducere [4, 8, 13, 18]:

$$u(t) = f(\varepsilon(t)). \quad (1.11)$$

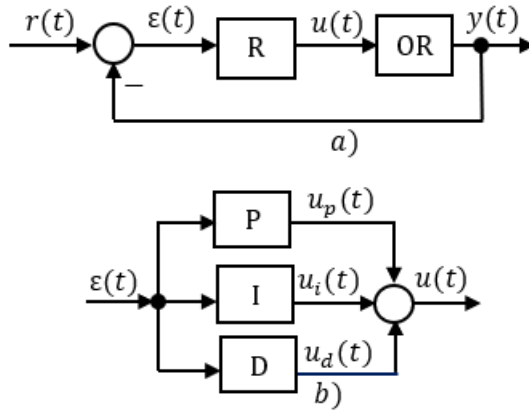


Fig. 1.14. Schema funcțională a sistemului a) și a regulatorului PID b)

Se utilizează mai multe tipuri de algoritmi de reglare: liniari, neliniari, discreți etc.

În practică construirii sistemelor automate se utilizează pe larg legi de reglare de ordin redus, care conduc la obținerea performanțelor satisfăcătoare și se numesc legi (algoritmi) de reglare tipice.

În continuare se dau legile tipice de reglare continue după structura regulatorului din figura 1.14, b), reprezentate în forma ecuațiilor integro-diferențiale.

1. *Legea cu acțiune proporțională (P)*, în care cu cât este mai mare eroarea $\varepsilon(t)$, cu atât mai mare va fi acțiunea comenzii $u(t)$ asupra obiectului de reglare. Ca și convertor de semnale algoritmul are model matematic:

$$u(t) = k_p \varepsilon(t), \quad (1.12)$$

unde $k_p > 0$ este coeficient de proporționalitate, numit parametru de acord. Sistemul automat cu acest algoritm are performanțe reduse.

2. *Legea cu acțiune integrativă* (I), în care mărimea de conducere $u(t)$ acționează asupra obiectului și este suma erorii $\varepsilon(t)$ pe o durată de timp. Ca și convertor de semnale algoritmul are modelul matematic:

$$u(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(t) dt = k_i \int_0^t \varepsilon(t) dt \quad (1.13)$$

sau în formă derivativă, unde viteza modificării mărimii de comandă $u(t)$ este proporțională erorii $\varepsilon(t)$:

$$\frac{du(t)}{dt} = k_i \varepsilon(t), \quad (1.14)$$

unde T_i este constanta de timp de integrare (dimensiunea secundă), numit parametru de acord, iar $k_i = 1/T_i$.

Acest algoritm se utilizează în sistem, când se impune ca eroarea să fie nulă (sisteme astatice).

3. *Legea cu acțiune derivativă* (D), în care conducerea $u(t)$ este proporțională vitezei de modificare a erorii $\varepsilon(t)$ sistemului și este descrisă de legea:

$$u(t) = T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} = k_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt}, \quad (1.15)$$

unde $T_d = k_d$ este constanta de timp de derivare (dimensiunea secundă), numit parametru de acord.

În baza componentelor legilor simple P, I, D se formează legi combinate ca conexiuni în paralel: PD, PI, ID, PID etc.

4. *Legea cu acțiune proporțională-derivativă* (PD) descrisă ca model matematic:

$$u(t) = k_p \varepsilon(t) + k_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt}, \quad (1.16)$$

care are doi parametri de acord k_p și k_d .

Acest algoritm formează comanda de anticipare în baza erorii, care conduce la ridicarea performanțelor sistemului când asupra sistemului acționează semnale ce se modifică în timp.

5. *Legea cu acțiune proporțională-integrativă* (PI) descrisă ca model matematic:

$$u(t) = k_p \varepsilon(t) + k_i \int_0^t \varepsilon(t) dt, \quad (1.17)$$

care are doi parametri de acord k_p și $k_i = 1/T_i$.

6. *Legea cu acțiune integrativă-derivativă* (ID) descrisă ca model matematic:

$$u(t) = k_i \int_0^t \varepsilon(t) dt + k_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt}, \quad (1.18)$$

care are doi parametri de acord k_i și k_d .

7. *Legea cu acțiune proporțională-integrativă-derivativă* (PID) descrisă ca model matematic:

$$u(t) = k_p \varepsilon(t) + k_i \int_0^t \varepsilon(t) dt + k_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt}, \quad (1.19)$$

care are trei parametri de acord k_p , k_i și k_d .

Utilizarea acestui algoritm conduce la obținerea performanțelor ridicate și robustețe ale sistemului automat.

Datorită simplității legile de reglare tipice P, PI și PID au o largă utilizare în automatica industrială pentru automatizarea diverselor procese.

1.5.3 Clasificarea sistemelor automate după principiul energetic

Elementele funcționale ale sistemului automat utilizează surse de energie (electrică, pneumatică, hidraulică) [4, 13, 18] pentru a elabora semnalele de intrare și ieșire ale acestora, care sunt purtători de informații și energii. Din aceste considerente sistemele automate se clasifică în două tipuri.

1. Sisteme directe (fără surse de energii). Traductorul, în baza energiei obiectului, măsoară mărimea de stare a obiectului, formează comanda și o convertește în acționarea organului de reglare. Avantajele acestor tipuri de sisteme este simplitatea elementelor funcționale și fiabilitate ridicată, iar dezavantaje sunt precizia redusă și imposibilitatea de a construi un sistem cu performanțe ridicate. Sistemele directe nu pot fi realizate, atunci când se cer puteri mari pentru acționarea și deplasarea organului de reglare.

2. Sisteme indirecte (cu surse de energii). Dacă se cer puteri mari pentru deplasarea organului de reglare, atunci se construiesc sisteme cu surse de energii, care se utilizează în elementele funcționale ale sistemului (amplificator, elementul de execuție etc.). Aceste tipuri de sisteme sunt larg utilizate pentru automatizarea diverselor procese (fig. 1.7, 1.10).

1.5.4 Clasificarea sistemelor automate după eroarea de funcționare

În sistemele liniare netede (fig. 1.14) eroarea ε a regimului staționar de funcționare este invers proporțională coeficientului de transfer k al sistemului deschis și proporțională semnalelor care acționează asupra sistemului cu referința r și perturbația p și dată de relația:

$$\varepsilon = \frac{1}{1+k} r + \frac{1}{1+k} p = \varepsilon_r + \varepsilon_p, \quad (1.20)$$

unde ε_r este eroarea în raport cu referința r , ε_p - eroarea în raport cu perturbația p .

După eroare, sistemele automate în regim staționar se clasifică în două categorii.

1. Sisteme automate staționare, în care mărimea de conducere în regim staționar pentru o referință determinată, este funcție de mărimea de sarcină (perturbație) și eroarea este o mărime finită diferită de zero $\varepsilon \neq 0$. Elementele din structura sistemului în regim staționar se descriu cu caracteristici statice.

Elementul funcțional care are cea mai mare eroare staționară este traductorul. Avantajele acestor sisteme - conține un număr redus de elemente și structură mai simplă, costuri mici și fiabilitate ridicată, iar dezavantajul - sistemul are precizie redusă.

2. Sisteme automate astatice, în care mărimea de conducere în regim staționar pentru o referință determinată nu este funcție de mărimea de sarcină (perturbație) și teoretic eroarea $\varepsilon = 0$, dar practic eroarea este o mărime mică finită constantă. În structura sistemului există elemente statice și astatice (integratoare).

Avantajul constă în precizia ridicată, iar dezavantaje sunt structura complexă, costuri mai mari, fiabilitate redusă.

Exemplul 1.1. Se consideră sistemul automat deschis din figura 1.7, în care în regim normal de funcționare rotațiile n_1 se descriu de relația:

$$n_1 = kr,$$

unde $k = k_A k_G k_m$ este coeficientul de transfer al sistemului deschis (coeficienții de transfer ai amplificatorului, generatorului și a motorului respectiv), r - referința.

Se cere să se determine eroarea sistemului deschis la modificarea coeficientului de transfer k al sistemului deschis.

Soluționare. Pentru sistemul închis, în condiția reacției unitate $k_{TG} = 1$ rotațiile se descriu de relația:

$$n_1 = \frac{k}{1+k} r.$$

La un moment dat de timp s-a modificat sarcina M_s , care a condus la modificarea rotațiilor n_2 și a coeficientului de transfer de αk ori și n_2 are forma:

$$n_2 = \frac{\alpha k}{1+\alpha k} r.$$

Variația rotațiilor se determină de diferența dintre rotațiile n_1 ale sistemului deschis și n_2 ale sistemului închis:

$$\Delta n = n_1 - n_2 = \frac{k}{1+k} r - \frac{\alpha k}{1+\alpha k} r = \frac{k}{1+k} r \frac{1-\alpha}{1+\alpha k} = n_1 \frac{1-\alpha}{1+\alpha k}$$

În cazul când în sistem nu există regulatorul (sistem deschis), atunci variația Δn este:

$$\Delta n = n_1 - n_2 = kr(1-\alpha) = n_1(1-\alpha).$$

Din comparația variațiilor rotațiilor n_1 și n_2 se constată că eroarea Δn în sistemul închis se reduce de $1 + \alpha k$ ori în raport cu sistemul deschis.

De exemplu, rotațiile motorului s-au redus cu 30 % de la valoarea normală și $\alpha = 0.3$.

Dacă în sistem nu există regulatorul, atunci modificarea rotațiilor este:

$$\Delta n = n_1 - n_2 = kr(1 - \alpha) = n_1(1 - 0.3) = 0.7n_1,$$

unde rotațiile în regim staționar au valoarea de 70 % din valoarea inițială n_1 .

Se consideră coeficientul de transfer $k = 100$ al sistemului deschis și se determină variația rotațiilor în sistemul închis în regim staționar:

$$\Delta n = n_1 - n_2 = n_1 \frac{1-\alpha}{1+\alpha k} = n_1 \frac{1-0.3}{1+0.3*100} = \frac{0.7}{31} n_1 \approx 0.023n_1,$$

ceea ce constituie 2.3 % din valoarea inițială a rotațiilor n_1 , care s-a redus de 30.43 ori în comparație cu sistemul deschis.■

1.5.5 Clasificarea sistemelor după modele matematice

Modelele matematice ale sistemelor automate descriu evoluția transferului intrare-ieșire ale sistemelor ca modul de funcționare. Clasificarea modelelor în timp continuu și discret se efectuează în modul următor:

1. Clasificarea sistemelor după numărul mărimilor de ieșire: monovariabile (cu o singură mărime de ieșire) și multivariabile (cu două și mai multe ieșiri).

2. Clasificarea sistemelor după numărul de contururi: cu un contur (buclă) și cu două și mai multe contururi (bucle).

3. Modele liniare staționare și nestaționare, în care parametrii sistemului sunt constanți (nu depind de timp) și cu parametri variabil (depind de timp).

4. Modele neliniare staționare și nestaționare, în care parametrii sistemului sunt constanți și cu parametri variabili (funcție de timp).

5. Modele deterministe și stocastice. În sistemele deterministe semnalele de intrare sunt funcții cunoscute (determinate), iar în cele stocastice semnalele exogene sunt aleatorii și răspunsurile acestor sisteme vor fi de asemenea aleatorii.

6. Modele matematice cu parametri concentrați și cu parametri

distribuiți. În primul caz, parametrii modelului sunt concentrați uniform pe coordonate, iar în al doilea caz, parametrii modelului sunt distribuiți neuniform pe coordonate.

Din tipurile de clasificări 1-6 continue sau discrete ale modelelor matematice pot fi obținute prin diferite combinații modele complexe de sisteme automate [2-4, 8, 10, 11, 13, 18, 21, 22].

1.6 Problemele teoriei sistemelor automate

Structura unui sistem automat se construiește în baza unui calcul energetic de alegere și dimensionare a elementelor funcționale și conexiunea lor după modul de funcționare al sistemului.

Calitatea regimului de funcționare al unui sistem automat se determină după răspunsul indicial (fig. 1.15) ca răspuns la semnalul de intrare treaptă unitară, utilizând indicii de calitate: eroarea staționară ε , timpul de reglare t_r , suprareglarea σ etc. [1, 4, 8, 11-13, 18, 21].

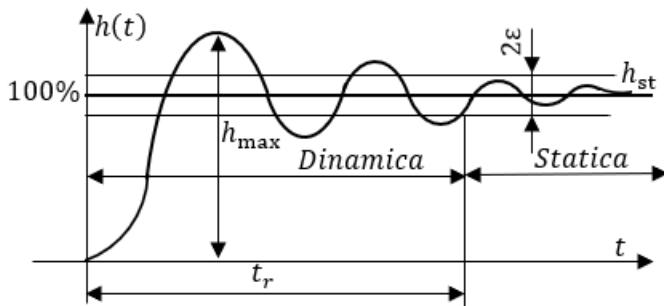


Fig. 1.15. Răspunsul indicial al sistemului de reglare automată

Cerințele principale ale evoluției sistemului de conducere automată sunt:

1. Stabilitatea funcționării sistemului.
2. Rejecția perturbațiilor.
3. Urmărirea referinței.
4. Robustețea stabilității și performanțele sistemului automat (sensibilitate redusă a proprietăților interne la variația caracteristicilor elementelor sistemului).

Teoria sistemelor automate ca disciplină teoretică de proiectare a sistemelor cu conducere automată studiază și rezolvă următoarele clase de probleme.

1. Problemele staticii și dinamicii sistemelor automate.
2. Problemele de analiză și sinteză ale sistemelor automate.
3. Problemele de optimizare a regimurilor de funcționare ale sistemelor automate.

Dinamica și *statica* sistemului analizează transferul intrare-ieșire prezentate de regimul tranzitoriu și staționar (permanent) al sistemului.

Statica sistemului constă în analiza calității regimului staționar și calculul erorii staționare ε a sistemului și a coeficientului de transfer k al sistemului.

Dinamica sistemului analizează evoluția sistemului în regimurile tranzitorii de la o stare inițială nulă sau nenulă la starea viitoare – regimul staționar la acțiunea semnalelor exogene și determină stabilitatea (funcționarea da/nu), calitatea (performanțele) funcționării, invarianța și robustețea sistemului.

Pentru rezolvarea problemelor staticii și dinamicii sistemului se utilizează metodele de analiză și sinteză.

Analiza sistemelor automate constă în studierea proprietăților sistemice ale sistemului, realizarea funcțiilor impuse sistemului și satisfacerea obiectivelor la automatizarea procesului condus. În urma analizei structurii sistemului se constată calitativ proprietățile evoluției sistemului și se determină cantitativ gradul de corespundere a cerințelor impuse procesului condus.

Pentru analiza unui sistem automat se determină modelul matematic al sistemului și se rezolvă următoarele probleme:

1. Stabilitatea asimptotică a sistemului automat.
2. Determinarea performanțelor funcționării sistemului (precizia, performanțele tranzitorii în forma criteriilor locale sau globale).
3. Invarianța și robustețea sistemului automat.
4. Concluzii privind calitatea funcționării sistemului automat.

Prin utilizarea metodei de analiză nu este posibil a construi sisteme calitative și atunci se utilizează metodele de sinteză, care, după formulare, este inversă problemei de analiză.

Sinteza sistemului presupune executarea următoarelor etape:

1. Se numesc performanțele sistemului automat.
2. Se determină caracteristicile elementelor și semnalelor exogene și structura sistemului automat.
3. Se determină modelul matematic al sistemului, care se soluționează și se obțin caracteristicile statice și dinamice ale sistemului.

Problema de *optimizare* presupune alegerea regimului optimal de funcționare al sistemului automat, minimizând un criteriu de optimizare (timp minim – rapiditatea sistemului, minim de energie etc.).

În figura 1.16 sunt reprezentate 3 răspunsuri indiciale ale unui sistem automat la semnalul treaptă unitară.

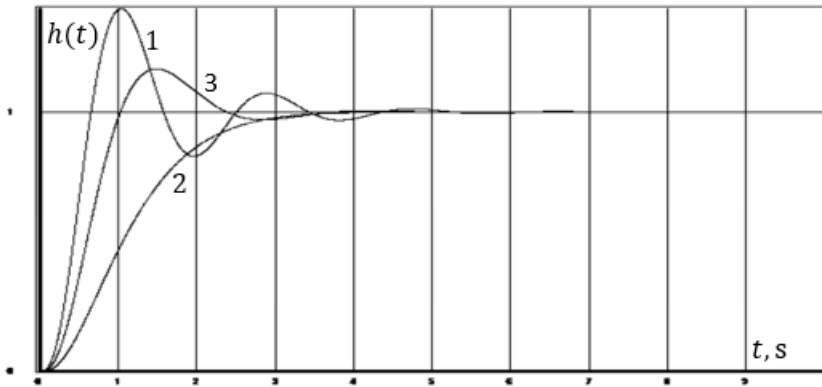


Fig. 1.16. Răspunsuri indiciale ale sistemului automat

Alura 1 reprezintă regimul oscilant amortizator real al sistemului, dar indicii de calitate nu sunt satisfăcători (suprareglarea, timpul de reglare și numărul oscilațiilor sunt mari). Alura 2 reprezintă răspunsul indicial aperiodic al aceluiași sistem după modificările parametrilor sistemului și s-au redus oscilațiile, dar răspunsul este foarte lent, sistemul nu are rapiditate. Alura 3 reprezintă răspunsul indicial optimal al sistemului, care păstrează rapiditatea sistemului și a redus oscilațiile.

Pentru un sistem automat, ca sistem tehnic, au importanță deosebită și alte probleme ca fiabilitatea, masa și dimensiunile,

consumul de energie, costurile și calitatea etc., care sunt studiate de alte discipline.

Datorită complexității proceselor care se automatizează, sistemul de conducere automată trebuie să fie compatibil cu mediul în care evoluează și să corespundă exigențelor de exploatare sigură.

Chestionar și probleme

1. Ce probleme rezolvă automatică?
2. Ce reprezintă obiectul de reglare (conducere)?
3. Explicați transferul intrare-ieșire al obiectului de reglare și explicați relația funcțională dintre aceste mărimi.
4. Dați exemple de procese industriale ca obiecte de reglare (conducere).
5. Care este rolul regulatorului în sistemul automat? Explicați relația funcțională a transferului intrare-ieșire a regulatorului.
6. Ce reprezintă algoritmi de reglare tipici? Numiți parametri de acord.
7. Numiți și explicați principiile de conducere ale sistemelor automate, avantajele și dezavantajele acestora.
8. Care sunt algoritmi de funcționare ai sistemului automat?
9. Ce reprezintă clasificarea sistemelor automate?
10. Ce rol are conducerea adaptivă și cum se realizează?
11. Ce reprezintă schema funcțională a sistemului automat? Numiți elementele funcționale de bază ale sistemului automat și ce funcții au în structura sistemului?
12. Construiți schema funcțională pentru schema de principiu electrică a sistemului de reglare automată din figura 1.7 și numiți elementele funcționale.
13. Prezentați schema funcțională pentru schema de principiu electrică a sistemului de reglare automată din figura 1.10 și numiți elementele funcționale.
14. Elaborați schema bloc funcțională a sistemului de reglare automată a temperaturii în cuptor industrial pentru temperatura de funcționare 250 °C.
15. Elaborați schema bloc funcțională a sistemului de reglare automată a presiunii în recipient.
16. Ce reprezintă problema staticii pentru sistemul automat?
17. Ce probleme rezolvă dinamica sistemului pentru sistemul automat?
18. Expuneți o tratare a problemei de analiză a sistemului automat.
19. Ce reprezintă problema de sinteză a sistemului automat?
20. Explicați ce reprezintă problema de optimizare a sistemului automat.

2 MODELE LINIARE ȘI CARACTERISTICILE SISTEMELOR AUTOMATE

2.1 Noțiune de modele matematice

Se consideră modelul sistemului de reglare automată asupra căruia acționează semnalele de intrare referința $x(t)$ și perturbația $p(t)$ și se obține răspunsul $y(t)$ (fig. 2.1). Sistemul automat este un convertor care transformă mărimile de intrare și condițiile inițiale în variabilele de stare și în semnalul de ieșire al sistemului. Aceste transformări se descriu prin relații matematice, care se numesc modele matematice și se utilizează două forme de modele [1, 3-5, 8, 11-15, 18]:

1. Modele matematice intrare-ieșire (MM II).
2. Modele matematice intrare-stare-ieșire (MM ISI).

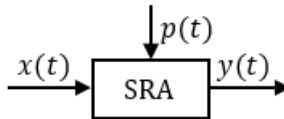


Fig. 2.1. Modelul sistemului automat

Pentru sistemele de reglare automată liniare continue deterministe cu parametri concentrați se utilizează următoarele tipuri de modele matematice:

1. Ecuații integro-diferențiale.
2. Funcții temporale.
3. Funcții de transfer.
4. Funcții frecvențiale.

Modelele matematice ale obiectelor de conducere și elementelor funcționale ale sistemului automat pot fi determinate în formă analitică în baza legilor fizico-chimice care descriu transferul intrare-ieșire în forma unor ecuații sau pe cale experimentală.

Determinarea modelelor matematice pentru obiectul condus și elementele sistemului se obțin din condiții contradictorii. Din considerente de precizie, modelele trebuie să descrie cât mai adecvat proprietățile originalului și un ordin ridicat, iar din considerente de

operare cu acestea, modelele trebuie să fie de ordin redus, păstrând proprietățile principale ale originalului.

Modelul se construiește de la ordin redus și, la necesitate, ridicând ordinul acestuia.

În practică se construiesc și modele fizice pentru elemente tehnice (procese) în condiții de laborator pentru analiza pe cale experimentală a modului de funcționare și a stabili transferul intrare-ieșire pentru a fi comparat cu funcționarea modelului obținut prin metode analitice.

2.2 Caracteristici statice ale elementelor și sistemelor automate

Statica studiază proprietățile sistemului automat în regimuri stabilizate de funcționare când variabilele nu depind de timp, numite regimuri *staționare* sau regimuri *permanente*: eroarea sau precizia staționară și coeficientul de transfer [1, 4, 8, 11, 13, 18, 21].

Caracteristica statică este legătura funcțională dintre o mărime numită funcție (mărimea de ieșire) și altă mărime independentă numită argument (mărimea de intrare), care nu depind de timp, și descrie regimul staționar de funcționare al elementului sau al sistemului automat.

Regimul staționar reprezintă un caz particular al regimului dinamic al elementului sau sistemului și atunci ecuația staticii se obține din ecuația diferențială, când toate derivatele sunt nule ca funcție în abateri.

Mai multe elemente funcționale ale sistemului automat în regimul staționar se caracterizează prin funcții strict univalente ale transferului intrare-ieșire cu caracteristici neliniare, care au funcții polinomiale, fracții raționale etc.

Se consideră modelul unui element sau al unui sistem (fig. 2.2), care descrie transferul intrare-ieșire $x \rightarrow y$ în regim staționar dat de relația analitică, numită caracteristică statică:

$$y = f(x). \quad (2.1)$$

Pentru funcția f există două clase de funcții: liniare și neliniare.

Caracteristica statică liniară a elementului funcțional reprezintă o aproximare (liniarizare) a caracteristicii neliniare, care este funcție netedă.

Liniarizarea caracteristicilor netede univalente se efectuează aplicând metodele de liniarizare: metoda tangentei și metoda secantei.

Caracteristica statică (2.1) liniară este reprezentată în formă grafică în figura 2.2 și în formă analitică:

$$y = kx, \quad (2.2)$$

unde $k > 0$ este coeficientul de proporționalitate, numit coeficient de transfer (de câștig) și valoarea lui numerică este unica caracteristică.

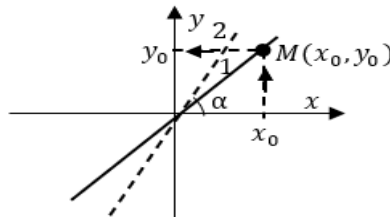


Fig. 2.2. Caracteristică statică liniară

Coeficientul de transfer k se exprimă ca raportul dintre mărimea de ieșire y la mărimea de intrare x și indică cu cât este mai mare (mai mică) mărimea de ieșire în raport cu intrarea în forma:

$$k = \frac{y}{x}, \quad (2.3)$$

dimensiunea căruia depinde de raportul dimensiunilor mărimilor y și x .

Analizând caracteristica statică 1 din figura 2.2, trasată la unghiul α în raport cu axa absciselor, se constată că este o caracteristică simetrică cu axa ordonatelor (în cadranele 1 și 2) și originea prezintă regimul staționar. Modificarea mărimii de intrare de la regimul staționar poate fi $x_0 \pm \Delta x$ și rezultă modificarea mărimii de ieșire $y_0 \pm \Delta y$. Pentru valoarea mărimii de intrare inițiale x_0 se ridică perpendiculara

(săgeata) până la intersecția cu caracteristica 1 în punctul M , care se proiectează pe axa ordonatelor și se obține mărimea de ieșire y_0 , iar regimul staționar obținut se reprezintă prin punctul $M(x_0, y_0)$. Unghiul α se calculează din triunghiul dreptunghiular cu ipotenuza pe caracteristica statică și cu catetele x_0 și y_0 ca tangenta unghiului și din definiția tangentei se obține:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_0}{x_0} = k. \quad (2.4)$$

Dacă se modifică unghiul $\alpha = 0 \dots 90^\circ$, atunci modificarea coeficientului de transfer este $k = 0 \dots \infty$.

Rezultă că pot fi trasate o infinitate de caracteristici statice sub diferite unghiuri (de exemplu, caracteristica 2 cu linie întreruptă).

Pe caracteristica statică, ca dreaptă reprezentată dintr-o continuitate de puncte, se obțin o infinitate de regimuri staționare de funcționare ale elementului sau sistemului automat.

Dacă caracteristica statică a elementului este dată în formă analitică, atunci coeficientul de transfer se determină ca valoarea derivatei în punctul de funcționare:

$$k = \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x=x_0}. \quad (2.5)$$

În cazul când asupra elementului funcțional sau sistemului automat acționează mai multe semnale de intrare x_1, x_2, \dots, x_r , caracteristica statică se prezintă ca funcție de mai multe argumente:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_r).$$

Clasa caracteristicilor statice *neliniare* este foarte diversă și mai jos se dau exemple de funcții neliniare analitice:

$$y = x^2, y = x^3, y = \sqrt{x^3}, y = e^{x^2}, y = \ln x^3, \dots, \quad (2.6)$$

iar în figura 2.3 sunt reprezentate exemple de caracteristici grafice: a, b

– saturație, *c* – parabolă, *d* – releu ideal, *e* – releu cu zonă de insensibilitate, *f* – releu cu zonă de insensibilitate și histererezis.

Caracteristicile statice releice sunt alcătuite din segmente proporționale (fig.2.3, *a*) și segmente care coincid sau sunt paralele axelor de coordonate (fig. 2.3, *d-f*).

Caracteristicile statice ale elementelor funcționale se stabilesc pentru transferul intrare-ieșire în raport cu referința și perturbația, care se pot obține pe cale analitică sau pe cale experimentală.

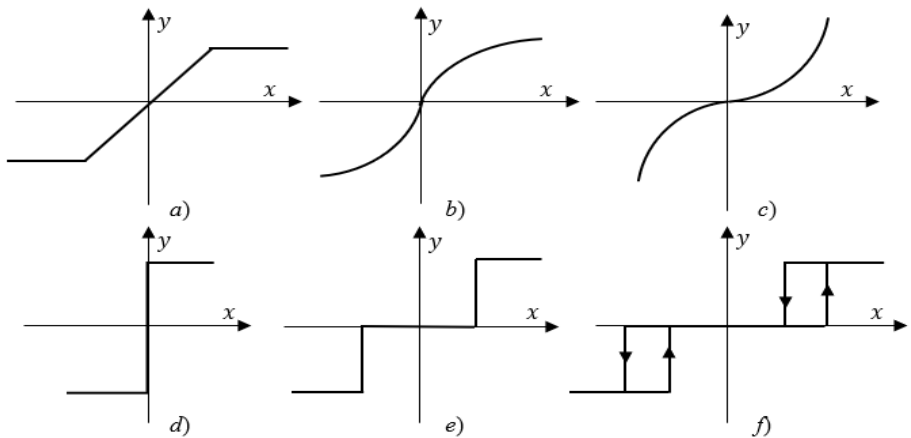


Fig. 2.3. Caracteristici statice neliniare

2.3 Ecuația diferențială

Ecuațiile diferențiale, ca modele matematice, se utilizează pe larg la descrierea dinamicii obiectelor de conducere, elementelor și sistemelor automate, care descriu evoluția funcționării acestora în domeniul timpului continuu. Ca rezultat se obțin funcții necunoscute de semnalele de intrare, condițiilor inițiale, variabilelor de stare și de ieșire ale sistemului, care pot fi monodimensionale sau multidimensionale.

Ecuațiile diferențiale sunt egalități care conțin în ambele părți câte una sau mai multe funcții și derivatele lor. Dacă aceste funcții depind de o singură variabilă independentă, atunci acestea se numesc expresii diferențiale ordinare. Dacă aceste funcții depind de două sau

mai multe variabile independente, atunci acestea sunt expresii diferențiale cu derivate parțiale. Astfel, se obțin modele de ecuații diferențiale ordinare și de ecuații diferențiale cu derivate parțiale.

Deoarece dinamica sistemelor automate evoluează în domeniului timpului și timpul va fi unica variabilă independentă, atunci ecuațiile diferențiale ordinare prezintă modelul matematic adecvat de descriere a evoluției sistemelor cu parametri concentrați și invarianți în timp. În cazul când variabila independentă va fi timpul și vor exista și alte variabile independente (semnale multidimensionale), atunci se obțin ecuații diferențiale cu derivate parțiale care descriu sisteme cu parametri distribuți [1, 4, 8, 11-13, 14, 18, 20, 21].

Timpul este o mărime fizică continuă, omogenă, nelimitată și caracteristic este faptul că în același interval de timp se poate reproduce același fenomen, din aceleași cauze, sub aceleași influențe și în condiții identice.

Se consideră un sistem de reglare automată din figura 2.1 (poate fi obiectul de reglare sau un element funcțional) cu parametri concentrați invarianți în timp, asupra căruia acționează semnalele monodimensionale de intrare referința $x(t)$ și perturbația $p(t)$ și se obține o singură mărime de ieșire, răspunsul $y(t)$.

Ecuația diferențială descrie echilibrul tuturor forțelor interne și externe existente în sistemul automat.

Se dă dinamica sistemului automat în condiții inițiale nule pentru cazul când perturbația $p(t) = 0$ descris de o ecuație diferențială neliniară generalizată dată în forma:

$$F_1 \left(y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t), \dots, y^{(n)}(t) \right) = F_2 \left(x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t), \dots, x^{(m)}(t) \right), \quad (2.7)$$

unde $F_1(\bullet)$ este funcție neliniară continuă netedă pe argumentele variabila de ieșire și derivatele ei de ordinul n , care indică ordinul inerției și se numește ordinul sistemului, $F_2(\bullet)$ - funcție neliniară pe variabila de intrare și derivatele ei de ordinul m , care indică ordinul de anticipare al sistemului, iar punctele deasupra variabilelor reprezintă derivatele variabilelor în timp:

$$\dot{y}(t) = \frac{dy(t)}{dt}, \ddot{y}(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2}, \dots, y^{(n)} = \frac{d^ny(t)}{dt^n},$$

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}, \ddot{x}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}, \dots, x^{(m)} = \frac{d^mx(t)}{dt^m}.$$

Pentru a obține un model liniar, ecuația (2.7) se liniarizează, utilizând metoda Taylor de prezentare a acesteia într-o serie cu un număr finit de termeni din partea stângă și partea dreaptă, care sunt derivatele parțiale ale funcțiilor pe variabilele de ieșire și intrare, respectiv, având în ambele părți câte trei componente – 1, 2 și 3 de forma:

$$\underbrace{F_{10}(\bullet)}_{\substack{1\text{-regim} \\ \text{staționar}}} + \underbrace{\frac{\partial F_1(\bullet)}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial F_1(\bullet)}{\partial \dot{y}} \Delta \dot{y} + \dots + \frac{\partial F_1(\bullet)}{\partial y^{(n)}} \Delta y^{(n)}}_{2\text{- Partea liniară, regim tranzitoriu}} + \underbrace{Q_1}_3 =$$

$$= \underbrace{F_{20}(\bullet)}_{\substack{1\text{-regim} \\ \text{staționar}}} + \underbrace{\frac{\partial F_1(\bullet)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial F_1(\bullet)}{\partial \dot{x}} \Delta \dot{x} + \dots + \frac{\partial F_1(\bullet)}{\partial x^{(n)}} \Delta x^{(n)}}_{2\text{- Partea liniară, regim tranzitoriu}} + \underbrace{Q_2}_3, \quad (2.8)$$

unde termenii Q_1 și Q_2 sunt suma totală a derivatelor de la ordinul doi în creștere pe variabila de ieșire $y(t)$ și variabila de intrare $x(t)$, respectiv, care conțin mărimile mici $(\Delta \dot{y})^2, (\Delta \ddot{y})^2, \dots$ și $(\Delta \dot{x})^2, (\Delta \ddot{x})^2, \dots$ se neglijează ($Q_1 \approx 0, Q_2 \approx 0$). Mărimile $\Delta y, \Delta \dot{y}, \dots, \Delta y^{(n)}$ reprezintă abaterea mărimii de ieșire și derivatele ei de la regimul staționar datorită abaterii forțate a mărimii de intrare și derivatele ei $\Delta x, \Delta \dot{x}, \dots, \Delta x^{(m)}$ de la starea inițială.

După neglijarea termenilor $Q_1 \approx Q_2 \approx 0$, expresia (2.8) este liniară de forma:

$$\underbrace{F_{10}(\bullet)}_{\substack{1\text{-regim} \\ \text{staționar}}} + \underbrace{\frac{\partial F_1(\bullet)}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial F_1(\bullet)}{\partial \dot{y}} \Delta \dot{y} + \frac{\partial F_1(\bullet)}{\partial \ddot{y}} \Delta \ddot{y} + \dots + \frac{\partial F_1(\bullet)}{\partial y^{(n)}} \Delta y^{(n)}}_{2\text{- Partea liniară, regim tranzitoriu}} =$$

$$= \underbrace{F_{20}(\bullet)}_{\substack{1-\text{regim} \\ \text{staționar}}} + \underbrace{\frac{\partial F_1(\bullet)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial F_1(\bullet)}{\partial \dot{x}} \Delta \dot{x} + \frac{\partial F_1(\bullet)}{\partial \ddot{x}} \Delta \ddot{x} + \dots + \frac{\partial F_1(\bullet)}{\partial x^{(n)}} \Delta x^{(n)}}_{2-\text{Partea liniară, regim tranzitoriu}}, \quad (2.9)$$

care se descompune în două ecuații.

Prima este ecuația care descrie regimul staționar al transferului intrare-ieșire al sistemului la valori constante ale intrării x_0 și ieșirii y_0 și se numește ecuația statică (componenta 1):

$$F_{10}(\bullet) = F_{20}(\bullet), \quad (2.10)$$

A doua este ecuația diferențială liniară în timp continuu invariantă (componenta 2) de ordinul n , care descrie dinamica sistemului de forma:

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m x^{(m)} + \dots + b_2 \ddot{x} + b_1 \dot{x} + b_0 x, \quad (2.11)$$

unde coeficienții $a_n = \frac{\partial F_1(\bullet)}{\partial y^{(n)}}, \dots, a_2 = \frac{\partial F_1(\bullet)}{\partial \ddot{y}}, a_1 = \frac{\partial F_1(\bullet)}{\partial \dot{y}}, a_0 = \frac{\partial F_1(\bullet)}{\partial y}$ - exprimă proprietățile interne ale sistemului, coeficienții $b_m = \frac{\partial F_1(\bullet)}{\partial u^{(m)}}, \dots, b_2 = \frac{\partial F_1(\bullet)}{\partial \ddot{u}}, b_1 = \frac{\partial F_1(\bullet)}{\partial \dot{u}}, b_0 = \frac{\partial F_1(\bullet)}{\partial u}$ - exprimă proprietățile semnalelor și proprietățile de anticipație. Coeficienții $\overline{a_n}, \overline{a_1}$ și $\overline{b_m}, \overline{b_1}$ exprimă inerția sistemului și se numesc constante de timp, având dimensiunea secundă la puterea egală cu ordinul derivatei, iar coeficienții a_0 și b_0 au dimensiunea corelată cu dimensiunea mărimii de ieșire și mărimii de intrare respectiv. Coeficienții $\overline{a_n}, \overline{a_0}$ și $\overline{b_m}, \overline{b_0}$ sunt constanți și se numesc parametrii ecuației diferențiale.

În practică, parametrii unor elemente din structura sistemului se modifică în timp cu viteza comparativă cu viteza procesului de conducere a sistemului. Aceste tipuri de sisteme se prezintă ca sisteme nestaționare sau sisteme cu parametri variabili, care se descriu de ecuația diferențială:

$$a_n(t)y^{(n)}(t) + \dots + a_2(t)\ddot{y}(t) + a_1(t)\dot{y}(t) + a_0(t)y(t) =$$

$$= b_m(t)x^{(m)}(t) + \dots + b_2(t)\ddot{x}(t) + b_1(t)\dot{x}(t) + b_0(t)x(t).$$

În continuare, vor fi analizate sisteme care se descriu prin ecuații diferențiale liniare cu parametrii constanți.

Pentru o scriere compactă a ecuației (2.11) s-au omis timpul t și simbolul variației Δ .

Ordinul sistemului n indică numărul de capacități acumulative de materie sau energie, iar în cazurile sistemelor mecanice indică numărul gradelor de libertate ale corpurilor în spațiu.

Datorită variațiilor variabilelor din (2.11), aceasta se numește și ecuație în variații și este liniară în raport cu argumentele și derivatele lor.

Se consideră elementul descris de caracteristica statică neliniară netedă (fig. 2.4) cu regimul staționar reprezentat de punctul $M_0(x_0, y_0)$:

$$y_0 = f(x_0). \quad (2.12)$$

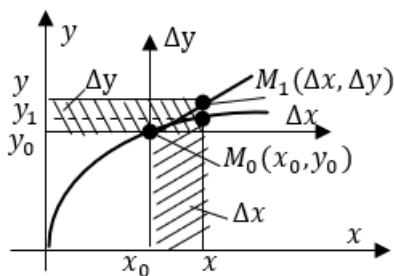


Fig. 2.4. Liniarizarea caracteristicii statice

În continuare, se aplică o variație $\pm \Delta x$ a mărimii de intrare de la valoarea inițială x_0 și mărimea nouă va fi:

$$x = x_0 \pm \Delta x, \quad (2.13)$$

care va conduce la modificarea mărimii de ieșire:

$$y = y_0 \pm \Delta y. \quad (2.14)$$

Pe caracteristica statică neliniară (fig. 2.4) valoarea mărimii de ieșire este y_1 (linia punctată).

Pentru liniarizarea caracteristicii statice, în punctul $M_0(x_0, y_0)$ se trasează tangenta care aproximează curba și noul regim de funcționare al sistemului va fi punctul $M_1(\Delta x, \Delta y)$ în noul sistem de coordonate $\Delta x M_0 \Delta y$ cu originea în punctul $M_0(x_0, y_0)$.

Astfel, ecuația (2.10) descrie evoluția sistemului automat în coordonatele $\Delta x M_0 \Delta y$ ca transferul variațiilor intrare-ieșire $\Delta x \rightarrow \Delta y$.

În acest caz, liniarizarea reprezintă relațiile variației transferului intrare-ieșire ca funcții liniare:

$$\Delta y = k \Delta x, \quad (2.15)$$

unde coeficientul k se numește coeficient de transfer (proportionalitate).

Noțiunea fizică a primei derivate $\Delta \dot{y}$ și $\Delta \dot{x}$ este viteza, a derivatei de ordinul doi $\Delta \ddot{y}$ și $\Delta \ddot{x}$ – accelerația de gradul unu, a derivatei de ordinul trei $\Delta \dddot{y}$ și $\Delta \dddot{x}$ – accelerația de gradul doi, ..., $\Delta y^{(n)}$ și $\Delta x^{(m)}$ – accelerația de gradul $n - 1$ sau $m - 1$ respectiv.

Ecuația (2.10) descrie dinamica și statica sistemului automat în vecinătatea regimului staționar în punctul $M_0(x_0, y_0)$.

Dacă condițiile inițiale ale sistemului sunt nenule, atunci ecuația diferențială (2.10) se completează cu condițiile inițiale nenule: $y(0) \neq 0$, $\dot{y}(0) \neq 0$, $\ddot{y}(0) \neq 0, \dots$, $y^{(n)}(0) \neq 0$, care sunt determinate de energiile existente în elementele acumulatori la aceste condiții inițiale.

De regulă, ecuațiile diferențiale se scriu în formă standard (canonică), când coeficienții $a_0 = 1$ și $b_0 = 1$ sau în forma monică, când coeficienții $a_n = 1$ și $b_m = 1$.

Exemplul 2.1. Se consideră un element funcțional (fig. 2.1) descris de ecuația diferențială neliniară de forma:

$$F(y, \dot{y}, \ddot{y}, u, \dot{u}) = F(\bullet) = p,$$

unde u și p sunt semnalele de intrare, y – mărimea de ieșire, \dot{y} și \dot{u} – primele derivate, \ddot{y} – derivata a doua.

Se cere să se aproximeze ecuația inițială cu ecuație liniară.

Soluționare. Se consideră un regim de funcționare, pentru care variabilele din ecuația inițială au valorile:

$$u = u_0, \dot{u} = \dot{u}_0, p = p_0, y = y_0, \dot{y} = \dot{y}_0, \ddot{y} = \ddot{y}_0.$$

Notăm abaterile reale ale variabilelor u, p și y de la cele fixate:

$$\Delta u = u - u_0, \Delta p = p - p_0, \Delta y = y - y_0.$$

Se determină valorile reale ale variabilelor în forma:

$$u = u_0 + \Delta u, \dot{u} = \dot{u}_0 + \Delta \dot{u}, p = p_0 + \Delta p, y = y_0 + \Delta y,$$

$$\dot{y} = \dot{y}_0 + \Delta \dot{y}, \ddot{y} = \ddot{y}_0 + \Delta \ddot{y}.$$

În ecuația inițială se substituie variabilele $y, \dot{y}, \ddot{y}, u, \dot{u}$ și p cu cele din ultimele expresii și această expresie se prezintă în șirul Taylor pentru regimul staționar, iar abaterile de ordinul mai mare ca unu sunt mărimi neglijabile și se obține:

$$\begin{aligned} F_0(\bullet) + \left(\frac{\partial F(\bullet)}{\partial y}\right)_0 \Delta y + \left(\frac{\partial F(\bullet)}{\partial \dot{y}}\right)_0 \Delta \dot{y} + \left(\frac{\partial F(\bullet)}{\partial \ddot{y}}\right)_0 \Delta \ddot{y} = \\ = -\left(\frac{\partial F(\bullet)}{\partial u}\right)_0 \Delta u - \left(\frac{\partial F(\bullet)}{\partial \dot{u}}\right)_0 \Delta \dot{u} + p_0 + \Delta p = 0. \end{aligned}$$

În sistem s-a instalat noul regim staționar:

$$F_0(\bullet) + p_0 = 0.$$

Din ecuația liniarizată se scade ecuația regimului staționar și se obține ecuația în variații:

$$a_0 \Delta \ddot{y}(t) + a_1 \Delta \dot{y}(t) + a_2 \Delta y(t) = b_0 \Delta \dot{u}(t) + b_1 \Delta u(t) + c_0 \Delta p(t),$$

$$\text{unde } a_0 = \left(\frac{\partial F(\bullet)}{\partial \ddot{y}}\right)_0, a_1 = \left(\frac{\partial F(\bullet)}{\partial \dot{y}}\right)_0, a_2 = \left(\frac{\partial F(\bullet)}{\partial y}\right)_0, b_0 = -\left(\frac{\partial F(\bullet)}{\partial \dot{u}}\right)_0, b_1 = -\left(\frac{\partial F(\bullet)}{\partial u}\right)_0,$$

$c_0 = 1$, care reprezintă unghiul tangentei trasată la caracteristică în punctul regimului staționar în raport cu axa absciselor, au valori constante și sunt parametrii ecuației.

Se omite simbolul Δ și se scrie ecuația diferențială în forma canonică:

$$a_0 \ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_2 y(t) = b_0 \dot{u}(t) + b_1 u(t) + c_0 p(t). \blacksquare$$

2.4 Ecuații diferențiale ale sistemelor fizico-tehnice

Pentru înțelegerea funcționării unui proces tehnologic sau/și industrial este necesar atât sub aspect fenomenologic, cât și sub aspect relațional-cantitativ să se cunoască modelele lor matematice. În acest scop, este dat procesul și trebuie să se analizeze relațiile funcționale (transferul) dintre variabilele intrare-ieșire ale acestuia și să se determine ecuațiile respective.

Evoluția în timp este întotdeauna direcționată în sensul trecut-prezent-viitor, iar evoluția ieșirilor este întotdeauna cauzată de evoluția intrărilor și a stării inițiale în care se află sistemul și niciodată invers.

Deoarece procesele tehnologice și industriale evoluează în timp, relațiile dintre variabilele intrare-ieșire au forma unor *ecuații integro-diferențiale* [1, 3, 4, 8, 10, 11, 13, 16-22].

Setul de ecuații integro-diferențiale obținut se numește *modelul matematic* al respectivului proces, care, în virtutea atributelor sale, este un model matematic abstract. La nivel conceptual, modelul matematic obținut este o imagine (aproximație) a procesului real, care trebuie să fie validat prin comparație cu procesul real. Rezultatul validării este eroarea admisibilă dintre evoluția procesului real și evoluția corespunzătoare a modelului matematic, obținută prin simulare.

Ecuațiile proceselor și sistemelor fizico-tehnice se obțin pe baza legilor generale ale naturii. O generalizare a variabilelor caracteristice proceselor și sistemelor fizico-tehnice este dată în tabelul 2.1, care pe baza caracterului relațiilor dintre aceste variabile, se împart în mod natural în două clase [21]:

1. Variabile longitudinale.
2. Variabile transversale.

Această divizare (dihotomie) se face din considerente energetice, deoarece în mod natural se prezintă următoarele clase de sisteme [21]:

1. Sisteme (proces) disipative.
2. Sisteme (proces) cu acumulare inductivă.
3. Sisteme (proces) cu acumulare capacitivă.

Pentru sistemul automat cu o singură intrare și o singură ieșire,

legătura dintre sistemul fizic și modelul matematic asociat pe baza clasificărilor variabilelor și sistemelor uzuale se prezintă sumarul principalelor tipuri de ecuații utilizabile în modelarea matematică date în tabelul 2.2 [21].

Tabelul 2.1. Variabile longitudinale și transversale ale sistemelor (proceselor)

Nr. crt.	Tip sistem/proces	Tip variabilă					
		Longitudinală	Sim-bol	Unit. măsură	Transversală	Sim-bol	Unit. măsură
1	Electric	Curentul	i	A	Tensiunea	u	V
2	Mecanic	Forța	f	kg	Viteza de translație	v	m/s
		Cuplul	c	Nm	Viteza unghiulară	ω	s ⁻¹
3	Fluidic	Debitul	q	m ³ /oră	Presiunea	p	bar
4	Termic	Fluxul termic	q		Temperatura	θ	K (°C)

Tabelul 2.2. Tipuri de sisteme disipative și acumulative

Nr. crt.	Tip sistem (proces)	Natura fizică	Parametrul fizic	Simbol	Unitate măsură	Ecuația (legea)
1	2	3	4	5	6	7
1	Disipativ	Electric	Rezistența electrică	R	Ω	$i = \frac{1}{R}u$
2		Mecanic	Coeficientul de frecare	K_f		$f = K_f v$
3						$c = K_f \omega$
4		Fluidic	Rezistența fluidică	R_f		$q = \frac{1}{R_f}p$
5		Termic	Rezistența termică	R_t		$q = \frac{1}{R_t}\theta$
6	Acumulator inductiv	Electric	Inductanța electrică	L	H	$u = L \frac{di}{dt}$
7		Mecanic	Coeficientul de elasticitate	K	N/m ²	$v = \frac{1}{K} \frac{df}{dt}$
8						$\omega = \frac{1}{K} \frac{dc}{dt}$
9		Fluidic	Inertanța fluidică	I		$p = I \frac{dq}{dt}$

Tabelul 2.2 (continuare)

1	2	3	4	5	6	7
10	Acumulator capacitiv	Electric	Capacitatea electrică	C	F	$i = C \frac{du}{dt}$
11		Mecanic	Masa inertă	M	kg	$f = M \frac{dv}{dt}$
12			Momentul de inerție	J	Nm ²	$c = J \frac{d\omega}{dt}$
13		Fluidic	Capacitatea fluidică	C_f	J/(kg · K)	$q = C_f \frac{dp}{dt}$
14		Termic	Capacitatea termică	C_t	J/(kg · K)	$q = C_t \frac{d\theta}{dt}$

Exemple de descriere a dinamicii unor sisteme fizico-tehnice de diferită natură fizică sunt expuse în sursele [3, 4, 8, 9, 11-13, 15-21].

Exemplul 2.2. Se consideră un sistem mecanic cu mișcare de translație (fig. 2.5, a) alcătuit din elementele resort-amortizator–masa inertă. Funcționarea fiecărui element separat se descrie ca un proces elementar conform legilor respective [3,18, 21].

1. Masa M inertă 3 este element acumulator capacitiv care se descrie de forța inertială f_i , proporțională accelerației dv/dt (legea Newton):

$$f_i = M \frac{dv}{dt}.$$

2. Resortul 1 ca element acumulator inductiv se descrie de forța elastică f_r , care este proporțională integralei de la viteză $v(t)$ (legea lui Hooke):

$$f_r = K \int_0^t v(t) dt,$$

unde K este coeficientul de elasticitate.

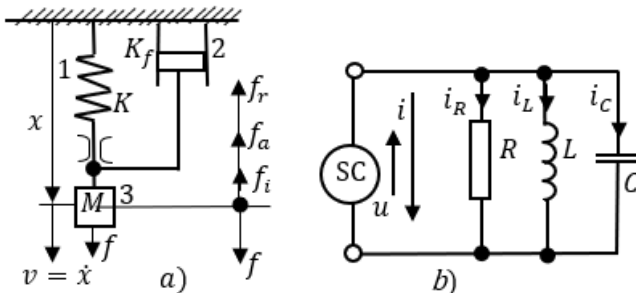


Fig. 2.5. Exemple de sisteme fizico-tehnice

3. Amortizatorul 2 ca element disipativ se descrie de forța de frecare vâscoasă f_a care este proporțională vitezei v (expresia poziția 2 din tabelul 2.2):

$$f_a = K_f v,$$

unde K_f este coeficientul de frecare.

Asupra masei acționează o forță externă și echilibrul dinamic al sistemului se exprimă de ecuația bilanțului de forțe:

$$f_a + f_r + f_i = f.$$

După substituirea cu expresiile respective se obține ecuația integro-diferențială ca model matematic de forma:

$$M \frac{dv}{dt} + K_f v + K \int_0^t v(t) dt = f(t)$$

cu condițiile inițiale pentru variabilele:

$$x(t) = \int_0^t v(t) dt; \quad x(t_0) = x_0; \quad \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = v(t_0) = v_0,$$

care definesc starea inițială a celor două elemente acumulate de energie, ceea ce reprezintă x_0 este alungirea inițială a resortului (energia inițială acumulată în resort) și v_0 – viteza inițială a masei inerte este energia cinetică inițială acumulată de masa inertă. ■

Exemplul 2.3. Pentru a evidenția analogiile dintre diferite sistemele fizico-tehnice, conform noțiunilor de variabile fizico-tehnice date în tabelele 2.1 și 2.2, se consideră circuitul (sistemul) electric (fig. 2.5, b) ca conexiune paralelă a elementelor pasive rezistorul R , inductanța L și capacitatea C alimentat, în care curge curent electric i de la sursa de curent SC. Elementele din sistem se descriu ca procese elementare conform legilor respective [2, 18, 21]:

1. Rezistența R ca element disipativ descris de legea lui Ohm:

$$i_R(t) = \frac{1}{R} u(t).$$

2. Inductanța L ca element acumulator descris de consecința legii inducției:

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u(t) dt.$$

3. Capacitatea C ca element acumulator descris de consecința definiției capacității electrice:

$$i_C(t) = C \frac{du(t)}{dt}.$$

4. Pentru descrierea bilanțului curenților circuitului electric se aplică legea I-a a lui Kirchhoff:

$$i_C(t) + i_R(t) + i_L(t) = i(t).$$

5. În ultima expresie se substituie componentele curenților din expresiile de mai sus și se obține modelul matematic al circuitului electric în forma:

$$C \frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{R} u(t) + \frac{1}{L} \int_0^t u(t) dt = i(t).$$

La această ecuație se adaugă încă două ecuații, care exprimă condițiile inițiale ale celor două elemente acumuloare de energie, tensiunea inițială $u(t_0) = u_0$ la bornele capacității, care este energia electrică inițială acumulată de capacitate și curentul inițial $i_L(t_0) = i_0$ prin inductanță, ce reprezintă energia electromagnetică inițială acumulată în inductanță. ■

Comparând ultimele ecuații din ex. 2.2 și din ex. 2.3, se constată că variabilele viteza $v(t)$ din ex. 2.2 și tensiunea $u(t)$ din ex. 2.3 sunt variabile transversale, iar variabilele forța $f(t)$ și curentul $i(t)$ sunt variabile longitudinale, fiind într-o relație de similitudine.

Deci, aceste sisteme sunt similare sau izomorfe.

Ecuațiile din ex. 2.2-2.3 se exprimă într-o formă abstractă prin modelul matematic generalizat al unei ecuații diferențiale de ordinul doi:

$$a_0 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_2 y(t) = x(t) \quad (2.16)$$

cu condițiile inițiale $y(t_0) = y_0$, $dy(t)/dt|_{t=t_0} = \dot{y}_0$, $t_0 > 0$.

În (2.16) $x(t)$ este semnalul de intrare abstract, $y(t)$ – ieșirea abstractă, iar coeficienții a_0 , a_1 , a_2 sunt proprietățile interne ale sistemului generalizat.

Ecuația (2.16) se obține pentru ex. 2.2, utilizând substituțiile:

$$v(t) = dy(t)/dt, v = u - K_{y0}, K_f = a_1, M = a_2,$$

iar (2.16) pentru ex. 2.3 se obține substituind:

$$u(t) = dy(t)/dt, i = u - L^{-1}y_0, L^{-1} = a_1, R^{-1} = a_1, C = a_2.$$

Sistemele din ex. 2.2-2.3 pot fi modelate de modelul matematic (2.16) și fiecare exemplu de sistem conține câte un element disipativ, un element acumulator inductiv și un element acumulator capacitiv.

Ordinul modelului matematic (al ecuației diferențiale) este determinat de numărul de capacități acumulative de energie independente din sistem, care reprezintă starea inițială a energiei acumulate și împreună cu semnalul de intrare determină evoluția ulterioară a sistemului.

Astfel, analiza și sinteza sistemelor de reglare automată cu utilizarea modelelor matematice au format noțiunea de *concepție sistemică*, care este valabilă pentru clase largi de sisteme izomorfe, dar care trebuie să fie interpretată conform naturii concrete a fenomenelor și specificului procesului tehnologic sau industrial.

Exemplul 2.4. În sistemele automate, motorul electric de curent continuu (MCC) poate fi utilizat în calitate de obiect de conducere sau ca element de acționare în structura elementului de execuție [8, 9, 11-13, 17-21].

Din aceste considerente, prezintă interes modelul matematic al motorului.

Se consideră schema de principiu electrică a motorului MCC cu excitație independentă dată în figura 2.6. Pentru a simplifica analiza se consideră numai fenomenele electrice, electromagnetice și electromecanice, iar fenomenele termice și neliniaritățile de tip feromagnetic se neglijează.

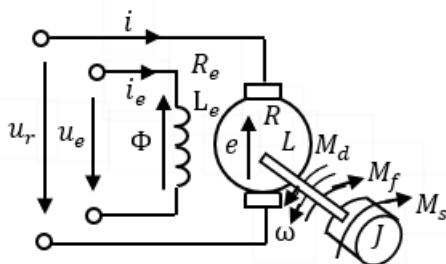


Fig. 2.6. Schema de principiu electrică a MCC

Conducerea vitezei unghiulare $\omega(t)$ a rotorului motorului poate fi efectuată după trei posibile variante: prin variația tensiunii rotorice $u_r(t)$, prin variația tensiunii de excitație $u_e(t)$ și prin variația concomitentă a ambelor tensiuni. În practică are

avantaje variația tensiunii rotorice datorită posibilității de aplicare a unui flux de energie mai mare, care conduce la dezvoltarea unui cuplu activ M_d mai mare și, rezultă că se va realiza și un cuplu de sarcină M_s mai mare.

Astfel, sistemul motor se separă în cinci elemente pentru care se scriu ecuațiile respective.

1. Circuitul electric rotoric se descrie de legea a II-a Kirchhoff:

$$u_r(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e(t),$$

unde $u_r(t)$ este tensiunea aplicată la bornele circuitului rotoric, R , L – rezistența și inductanța rotorului, $i(t)$ – curentul rotoric, $e(t)$ – tensiunea contraelectromotoare.

2. Circuitul electric rotoric unde se formează tensiunea contraelectromotoare descrisă de relația:

$$e(t) = k_e \omega(t),$$

unde k_e este coeficient de proporționalitate constant, determinat de caracteristicile motorului, $\omega(t)$ – viteza unghiulară a rotorului.

3. Rotorul ca și corp rigid în mișcare de rotație în jurul unei axe fixe se descrie de legea Newton în forma:

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} = M_d(t) - M_f(t) - M_s(t),$$

unde J este momentul de inerție al rotorului și sarcinii, M_d – momentul dinamic dezvoltat de motor, M_f – cuplul de frecare, M_s – cuplul de sarcină (perturbator).

4. Rotorul ca sediu al cuplului dinamic, care se aproximează prin relația:

$$M_d(t) = k_m i(t),$$

unde k_m este coeficient de proporționalitate constant, determinat de caracteristicile motorului.

5. Rotorul este sediu al cuplului de frecare, descris de legea frecării vâscoase:

$$M_f = k_f \omega,$$

unde k_f este coeficientul de proporționalitate constant determinat de caracteristicile motorului.

Cele cinci ecuații care descriu elementele funcționale se prezintă în operatori și se exprimă prin scheme bloc parțiale (fig. 2.7, a)-e):

$$a) i(s) = \frac{1}{Ls+R}(u(s) - e(s)), \quad b) e(s) = k_e \omega(s),$$

$$c) \omega(s) = \frac{1}{Js} (M_d(s) - M_f(s) - M_s(s)),$$

$$d) M_d(s) = k_m i(s), \quad e) M_f(s) = k_f \omega(s).$$

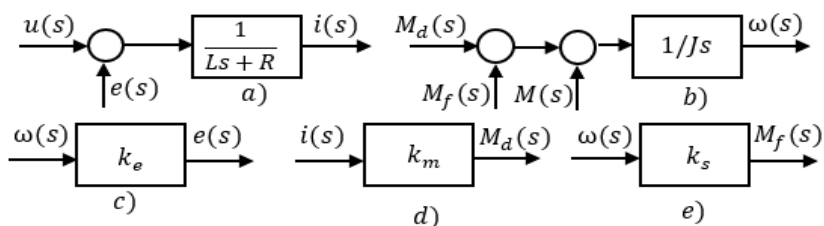


Fig. 2.7. Scheme bloc parțiale ale modelului MCC

În figura 2.7 schema *a* prezintă prima ecuație, schema *b* – ecuația a doua, schema *c* – ecuația a treia, schema *d* – ecuația a patra, schema *e* – ecuația a cincea.

În baza acestor scheme bloc parțiale a transferul intrare-ieșire pentru fiecare element dinamic se construiește schema bloc structurală a motorului MCC (fig. 2.8).

Prin reglarea tensiunii rotorice u_r , se modifică viteza unghiulară ω . Prin schimbarea semnului tensiunii u_r , se inversează sensul rotației rotorului.

Dacă motorul este utilizat ca element de acționare, atunci din creșterea/reducerea cuplului de sarcină M_s (perturbator) rezultă reducerea/creșterea vitezei unghiulare, care poate conduce la consecințe nedorite asupra procesului tehnologic.

După această schema structurală se analizează modul de funcționare și rolul fiecărui element din structura motorului MCC. La creșterea în salt a tensiunii $u_r(t)$, atunci prin elementele 1 și 2 (fig. 2.8) va fi o creștere lentă a curentului rotoric $i(t)$ datorită elementului 2 cu întârziere și urmează o creștere a momentului dinamic prin elementul 3, ceea ce conduce prin elementele 4, 5 și 6 la o creștere a vitezei $\omega(t)$, dar mai lentă decât a curentului $i(t)$ datorită prezenței integratorului 6.

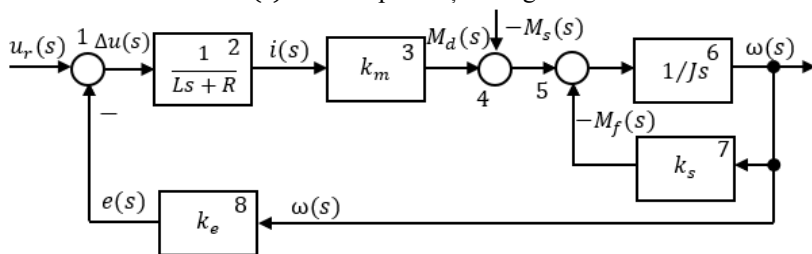


Fig. 2.8. Schema bloc structurală a motorului electric de curent continuu

Creșterea vitezei $\omega(t)$, prin canalul de reacție negativă locală cu elementele 7

și 5, va rezulta o scădere a cuplului rezultat al motorului $M_d - M_f - M_s$ și urmează reducerea vitezei de creștere a lui $\omega(t)$. În continuare, prin reacția negativă a sistemului care se realizează cu elementele 8 și 1, viteza $\omega(t)$ se transmite la intrarea sistemului și scade tensiunea rezultantă $\Delta u(t) = u_r(t) - e(t)$, care prin lanțul de elemente 2–3–4–5–6, va conduce la o reducere suplimentară a vitezei de creștere a lui $\omega(t)$. Acest proces va continua până când se va stabili un regim de funcționare al motorului.

Schema bloc structurală a motorului MCC reprezintă o imagine grafică a relațiilor de cauzalitate existente între mărimile motorului, exprimate prin intermediul funcțiilor de transfer și pe baza conexiunilor blocurilor cu transfer unidirecțional.

Din sistemul de ecuații expus mai sus, după unele transformări, se obține ecuația diferențială de ordinul doi, care descrie dinamica motorului (s-a neglijat momentul de frecare, fiind mărime de valoare mică $M_f \approx 0$):

$$\frac{LJ}{k_m k_e} \frac{d^2 \omega(t)}{dt^2} + \frac{RJ}{k_m k_e} \frac{d\omega(t)}{dt} + \omega(t) = \frac{1}{k_e} u_r(t) - \frac{R}{k_m k_e} \left(\frac{L}{R} \frac{dM_s}{dt} + M_s \right),$$

care se prezintă în forma canonică:

$$T_e T_m \frac{d^2 \omega(t)}{dt^2} + T_m \frac{d\omega(t)}{dt} + \omega(t) = k u_r(t) - k_s \left(T_e \frac{dM_s(t)}{dt} + M_s(t) \right),$$

unde $T_e = L/R$ este constanta de timp electrică a motorului, $T_m = LJ/k_m k_e$ – constanta de timp electromecanică, $k = 1/k_e$ – coeficientul de transfer al motorului pe mărimea de reglare, $k_s = R/k_m k_e$ – coeficientul de transfer al motorului pe mărimea de perturbație (sarcinii).

La funcționarea motorului în gol $M_s = 0$ și atunci ecuația ia forma:

$$T_e T_m \frac{d^2 \omega(t)}{dt^2} + T_m \frac{d\omega(t)}{dt} + \omega(t) = k u_r(t).$$

Observație. Parametrii ecuației diferențiale pentru motoarele produse în masă au valorile: $k = 0.01 \dots 0.03$, $T_e = 0.01 \dots 0.1$ s, $T_m = 0.01 \dots 0.1$ s. Pentru motoarele de putere medie și mare se îndeplinesc condițiile pentru constantele de timp, $T_m \geq T_e$ și pentru coeficientul de amortizare $\xi = 0.5 \sqrt{T_m/T_e} \geq 1$, ceea ce rezultă că motorul este echivalent unui element cu inerție de ordinul doi. ■

2.5 Expresii în operatori

Se consideră ecuația diferențială de forma:

$$a_n y^{(n)} + \dots + \dot{y} + a_0 y = b_m x^{(m)} + \dots + b_1 \dot{x} + b_0 x. \quad (2.17)$$

Procedurile de soluționare a ecuațiilor diferențiale sunt dificile.

Pentru simplificarea acestor proceduri, se introduc noțiunile de operator de derivare și de integrare de forma:

$$p = \frac{d}{dt}, p^2 = \frac{d^2}{dt^2}, \dots, p^n = \frac{d^n}{dt^n}, \frac{1}{p} = \int dt, \frac{1}{p^2} = \iint dt dt, \dots \quad (2.18)$$

Ecuația diferențială (2.17) cu notațiile (2.18) are forma:

$$a_n p^n y + \dots + a_1 p y + a_0 y = b_m p^m x + \dots + b_1 p x + b_0 x, \quad (2.19)$$

care este o expresie algebrică (în operatori).

Expresia algebrică (2.19) după transformare are forma:

$$y(a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0) = x(b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0). \quad (2.20)$$

Expresiile din paranteze din (2.20) se notează în forma:

$$A(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0, \quad (2.21)$$

$$B(p) = b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_2 p^2 + b_1 p + b_0,$$

care sunt expresii în operatorul p , $B(p)$ este polinomul de anticipație al sistemului de gradul m , $A(p)$ – polinomul caracteristic de gradul n , care conține caracteristicile proprietăților interne de inerție ale sistemului.

Expresia (2.20) cu (2.21) se transformă în forma:

$$A(p)y = B(p)x, \quad (2.22)$$

care reprezintă aceeași ecuație diferențială (2.17) scrisă în formă compactă.

Dacă semnalul de intrare x este cunoscut, atunci din (2.22) se obține mărimea de ieșire în raport cu cea de intrare în forma:

$$y = \frac{B(p)}{A(p)} x = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0} x = H(p)x, \quad (2.23)$$

unde $H(p) = \frac{B(p)}{A(p)}$ este operatorul sistemului.

Mărima y de ieșire este exprimată ca produsul dintre operatorul sistemului $H(p)$ și semnalul x de intrare.

Exemplul 2.5. Se consideră ecuația diferențială care descrie sistemul automat:

$$a_0 y^{(4)} + a_1 \ddot{y} + a_2 \dot{y} + a_3 y + a_4 y = b_0 \ddot{x} + b_1 \dot{x} + b_2 x.$$

Se cere să se prezinte expresia operațională.

Soluționare. Se substituie derivata în ecuația diferențială prin operatorul de derivare $\frac{d}{dt} = p$ și după transformare se obține expresia operațională:

$$a_0 p^4 y + a_1 p^3 y + a_2 p^2 y + a_3 p y + a_4 y = b_0 p^2 x + b_1 p x + b_2 x,$$

$$y = \frac{b_0 p^2 + b_1 p + b_2}{a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4} x = \frac{B(p)}{A(p)} x = H(p)x. \blacksquare$$

2.6 Transformata Laplace și funcția de transfer

Soluționarea ecuațiilor diferențiale este o procedură dificilă și pentru simplificarea acestei proceduri se utilizează transformata Laplace, care transformă ecuațiile diferențiale în ecuații algebrice [1, 4, 8, 10-13, 18, 19, 21].

Funcțiile de timp $f(t)$ care se transformă trebuie să corespundă următoarelor proprietăți:

1. Funcția $f(t)$ este definită și derivabilă pe segmentul $[0, \infty)$.
2. Funcția $f(t) = 0$, când $t < 0$.
3. Există astfel de numere pozitive c și M , când $|f(t)| < M e^{ct}$ la $0 \leq t < \infty$.

Funcția cu aceste proprietăți se numește *funcție-original*.

Definiție. Se numește *transformata Laplace directă* relația care pune în corespondență funcției $f(t)$ de variabilă reală funcția $F(s)$ de variabilă complexă $s = \alpha + j\omega$ descrisă de relația integrală:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad (2.24)$$

unde $f(t)$ este funcția-original, e^{-st} – operatorul de transformare,

$s = \alpha + j\omega$ – variabila complexă Laplace, $\alpha > 0$, $\omega > 0$, $j = \sqrt{-1}$, $F(s)$ – imaginea Laplace.

Transformarea Laplace directă simbolic se prezintă în forma imaginea $F(s) = L\{f(t)\}$.

Integrala (2.24) se calculează pentru o dreaptă $\text{Res} = \alpha > c$.

După imaginea $F(s)$ cunoscută se calculează funcția-original cu expresia integrală:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} F(s) e^{st} ds, \quad (2.25)$$

care se numește *transformata Laplace inversă* și stabilește corespondența dintre original și imagine în intervalul de continuitate al originalului.

Transformarea Laplace inversă simbolic prezintă originalul $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$.

Proprietățile transformatei Laplace directe se dau în tabelul 2.3.

Tabelul 2.3. Proprietățile transformatei Laplace directe

Nr. crt.	Proprietatea	Originalul $x(t)$	Imaginea $X(s)$
1	Înmulțirea la o constantă	$ax(t)$	$aX(s)$
2	Derivata de ordinul n a originalului	$\frac{d^k}{dt}(x(t))$	$s^k X(s)$
3	Integrarea originalului	$\int_0^T \dots \int_0^T x(t) (dt)^k$	$\frac{1}{s^k} X(s)$
4	Scara originalului	$x(at)$	$\frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)$
5	Prezența timpului mort	$x(t - \tau)$	$X(s)e^{-\tau s}$
6	Valoarea inițială a originalului	$\lim_{t \rightarrow 0} x(t)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$
7	Valoarea finală a originalului	$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$	$\lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$

Proprietățile transformatei Laplace directe și inverse se pot

studia din sursele de literatură [1, 4, 8, 11-13, 18].

Definiție. Funcția de transfer a sistemului automat (obiectului sau elementului) este raportul dintre mărimea de ieșire către mărimea de intrare transformate după Laplace în condiții inițiale nule.

În condiții inițiale nule funcția de transfer (f.d.t.) se obține din forma operațională (2.22), substituind operatorul $p = s$ și rezultă:

$$A(s)y(s) = B(s)x(s). \quad (2.26)$$

Din (2.26) și definiției rezultă funcția de transfer a sistemului:

$$\frac{y(s)}{x(s)} = H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}, \quad m \leq n, \quad (2.27)$$

unde n este gradul polinomului $A(s)$, iar m este gradul polinomului $B(s)$.

Inegalitatea $m < n$ este condiția de realizabilitate fizică a sistemului automat și exprimă *principiul cauzalității* sau *principiul non-anticipării*, conform căruia *efectul* nu anticipează *cauza*, dar se evidențiază o întârziere a efectului în raport cu cauza. Funcția care satisface inegalitatea $m < n$ se numește *strict proprie*, când $m = n$ se numește *proprie* și în cazul când $m > n$ funcția se numește *improprie*.

În sistemele automate cazul când $m = n$ rezultă datorită operațiilor matematice de aducere la numitorul comun a expresiilor.

Funcția de transfer $H(s)$ este o funcție complexă de variabilă complexă s , iar coeficienții (parametrii) a_i , $i = \overline{0, n}$ și b_j , $j = \overline{0, m}$ sunt reali. Funcția de transfer este o funcție rațională.

Polinoamele $B(s)$ și $A(s)$ sunt prime între ele (nu au nici un divizor comun) și rezultă că $z_j \neq p_i$, iar f.d.t. $H(z_j) = 0$ și $|H(p_i)| = +\infty$.

Dacă $m < n$, atunci la cele m zerouri finite ale f.d.t. $H(s)$ se adaugă și punctul de la infinit $|s| = +\infty$ ca zero de multiplicitate $n - m$ când f.d.t. $|H(s)| = 0$ pentru aceste zerouri și, astfel, numărul de zerouri va fi egal cu numărul de poli $m = n$.

În cazul când $m = n$ punctul de la infinit nu este nici pol și nici zerou al f.d.t. $H(s)$.

Dacă este cunoscută f.d.t., atunci ușor se poate calcula mărimea de ieșire a sistemului în formă operațională:

$$y(s) = H(s)x(s). \quad (2.28)$$

Pornind de la ecuația diferențială dată se calculează funcția de transfer, și invers, dacă se cunoaște f.d.t. se calculează ecuația diferențială.

Dacă f.d.t. $H(s)$ este dată prin raportul a două polinoame relativ coprime între ele și polinomul caracteristic are n rădăcini distincte, atunci $H(s)$ se prezintă în forma factorizată [1, 4, 8, 13, 18, 21]:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \\ &= \frac{b_0 \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{a_0 \prod_{i=1}^n (s - p_i)} = \frac{B(0)}{A(0)} + \sum_{l=1}^n \frac{sB(p_l)}{p_l \dot{A}(p_l)}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

unde $\frac{b_0}{a_0} = k$ este coeficientul de transfer al sistemului, polinomul $B(s) = \prod_{j=1}^m (s - z_j) = 0$ se obțin rădăcinile z_j , care se numesc *zerourile* lui $H(s)$ și prezintă derivarea (anticiparea, accelerarea), iar dacă polinomul caracteristic $A(s) = \prod_{i=1}^n (s - p_i) = 0$ se obțin rădăcinile p_i , care sunt *polii* lui $H(s)$ și sunt acumulate de energii (inerția), independente între ele, prezente în structura sistemului automat și exprimă întârzierea sistemului, $\dot{A}(p_i)$ – derivata lui $A(s)$.

Diferența $e = n - m$ este numită excesul polilor n în raport cu zerourile m , ce caracterizează inerția sistemului la momentul inițial în raport cu variațiile bruște ale intrării x .

În cazul când asupra sistemului acționează perturbația $p(t)$, iar referința $x(t) = 0$, similar se determină f.d.t. a sistemului în raport cu perturbația care va avea forma:

$$H_p(s) = \frac{y(s)}{p(s)} = \frac{C(s)}{A(s)} = \frac{c_r s^r + c_{r-1} s^{r-1} + \dots + c_1 s + c_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}, \quad r \leq n, \quad (2.30)$$

unde $C(s)$ este polinomul perturbațiilor de gradul r , $A(s)$ - polinomul caracteristic al sistemului de gradul n și $r \leq n$ condiția de cauzalitate.

Funcțiile de transfer (2.29)-(2.30) descriu sisteme statice, care au regimul staționar determinat de relația caracteristicii statice:

$$y = H(s)|_{s=0}x = \frac{b_0}{a_0}x = kx, \quad (2.31)$$

$$y = H_p(s)|_{s=0}p = \frac{c_0}{a_0}p = k_p p,$$

unde $k = b_0/a_0$, $k_p = c_0/a_0$ sunt coeficienții de transfer ai sistemului automat în raport cu referința x și perturbația p .

Sistemele statice reprezintă numai sistemele de stabilizare.

Dacă structura sistemului conține elemente integratoare, atunci funcția de transfer al sistemului are forma:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{B(s)}{s^\nu A_1(s)} = \frac{1}{s^\nu} \frac{B(s)}{A_1(s)} = \frac{1}{s^\nu} H_{st}(s) = \\ &= \frac{1}{s^\nu} \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^{n-\nu} + a_{n-1} s^{n-\nu-1} + \dots + a_1 s + a_0}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

unde ν este numit *gradul de astatism* și indică numărul de elemente integratoare existente în canalul direct al structurii sistemului, $B(s)$, $A_1(s)$ – polinoamele sistemului static, $H_{st}(s) = B(s)/A_1(s)$ – f.d.t. a sistemului static.

În sistemele automate astatice nu există regim staționar în sensul ca regim staționar în sistemele statice (2.29).

În sistemele automate cu astatism eroarea teoretic este egală cu zero, iar practic eroarea este o mărime mică constantă finită, care nu depinde de mărimea de referință și/sau perturbație.

Sisteme automate astatice caracterizează sistemele de urmărire și sistemele de conducere cu program.

2.7 Semnale tipice și caracteristici temporale ale sistemului automat

2.7.1 Clasificarea semnalelor de intrare

Sistemul automat în regim de funcționare în timp este supus diferitor acțiuni ca semnale de intrare, care se prezintă ca funcții pe variabila independentă timp. Semnalele după modul de variație în timp și forma lor de prezentare ca model matematic se clasifică în semnale deterministe și stocastice (aleatorii) [1, 4, 8, 11-13, 18, 21].

Semnalul determinist variază după o lege în timp și se descrie printr-un model matematic ca funcție de timp.

Semnalul stocastic variază în timp aleatoriu și nu poate fi descris de un model matematic. Dacă valorile semnalelor deterministe și stocastice sunt determinate la orice moment de timp, atunci sunt semnale continue (analogice), iar dacă valorile acestora se determină la anumite momente de timp, sunt semnale discrete (eșantionate).

La studierea teoretică și experimentală a elementelor și sistemelor automate se aplică semnale standard sau tipice, care descriu semnalele reale mai larg utilizate cu modele matematice simple și care pot fi ușor simulate. Avantajul utilizării acestor semnale tipice conduce la unificarea calculului și compararea rezultatelor studiilor sistemelor automate.

În calitate de semnale de intrare, se utilizează larg semnalele tipice de forma polinomială prezentată prin suma unor termeni de tip monom:

$$x(t) = \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} 1(t) \quad r \geq 1, \quad (2.33)$$

unde funcția $1(t)$ este semnalul treaptă unitară.

Din (2.33) se obțin cazurile particulare de următoarele semnale tipice.

1. Funcția treaptă $x(t) = a1(t)$ sau treaptă unitară $x(t) = 1(t)$, când $a = 1$ și $r = 1$, a este amplitudinea semnalului.

2. Funcția rampă $x(t) = at1(t)$ sau rampă unitară $x(t) = t1(t)$ când $a = 1$ și $r = 2$, a este viteza de creștere a semnalului.

3. Funcția parabolă $x(t) = a(t^2/2!)1(t)$ sau parabola de gradul unu când $r = 2$, $a = 1$, unde a este accelerația de creștere a semnalului.

Funcția parabolă de gradul doi $x(t) = a(t^3/3!)1(t)$, când $r = 3$, $a = 1$, a este accelerația de gradul doi de creștere a semnalului.

Funcția parabolă de gradul arbitrar $r - 1$ se descrie prin relația $x(t) = a(t^{r-1}/(r-1)!)1(t)$, a este accelerația de gradul $r - 1$ de creștere a semnalului.

4. Impuls dreptunghiular (impuls ideal unitar sau $\delta(t)$ impuls).

În anexa 1 se dau expresiile analitice ale semnalelor de timp continuu și imaginea Laplace.

În continuare, este expusă acțiunea semnalelor tipice asupra sistemului și se analizează răspunsul sistemului ca funcții de timp.

2.7.2 Semnal treaptă unitară și răspunsul indicial

Semnalul treaptă se prezintă în forma $x(t) = a1(t)$ și este acțiunea care crește brusc de la zero până la amplitudinea a , care în continuare rămâne constantă (fig. 2.9, a).

Dacă amplitudinea $a = 1$, semnalul se numește treaptă unitară și se descrie de relația:

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0, \end{cases} \quad (2.34)$$

unde semnalul treaptă unitară exprimă valoarea semnalului ca valoare relativă 100 %.

Se consideră sistemul automat cu condițiile inițiale nule (fig. 2.1) și asupra lui acționează semnalul treaptă unitară $x(t) = 1(t)$ (fig.2.9, a), care forțează sistemul să treacă din starea inițială nulă în regimul staționar h_{st} și se înregistrează răspunsul indicial al sistemului (fig. 2.9, b).

În figura 2.9, b) sunt reprezentate două răspunsuri indiciale 1 și 2 ale sistemului, care indică modul de transfer al sistemului din starea

inițială nulă în starea de funcționare ca regim staționar $h_{st} = 1$ (100 %). Alura 1 se numește răspuns indicial oscilant amortizat, iar alura 2 – răspuns indicial aperiodic.

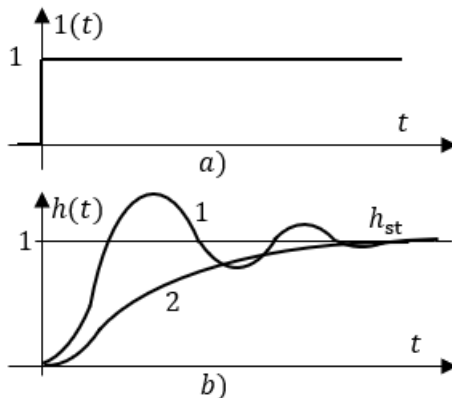


Fig. 2.9. Semnal treaptă unitară *a*) și răspunsuri indiciale *b*)

Răspunsurile indiciale sunt soluția ecuației diferențiale construită în timp, când la intrarea sistemului acționează semnalul treaptă unitară.

Semnalul treaptă se utilizează pentru experimentarea și calculul sistemelor de stabilizare, datorită faptului că aceste semnale modelează adecvat acțiunile reale asupra sistemului.

Imaginea Laplace a semnalului treaptă unitară este:

$$r(s) = \frac{1}{s}. \quad (2.35)$$

2.7.3 Semnal rampă unitară și răspunsul tranzitoriu

Semnalul rampă unitară (fig. 2.10, *a*, curba 1) este o funcție proporțională timpului și trasată sub 45° în raport cu axa absciselor descrisă de relația:

$$x(t) = t1(t), 0 \leq t < \infty, \quad (2.36)$$

care acționează asupra sistemului cu condițiile inițiale nule și impune ca

răspunsul să urmeze cât mai fidel semnalul de intrare (fig. 2.10, *b*).

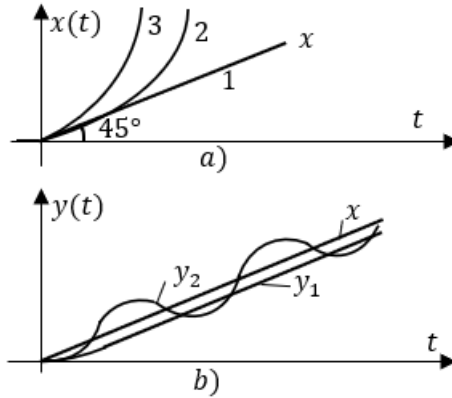


Fig. 2.10. Semnale rampă unitară, parabile *a*) și procese indiciale *b*)

Aceste semnale de intrare se aplică preponderent pentru sisteme de urmărire și sisteme cu conducere cu program.

La ieșirea sistemului există două tipuri de răspunsuri: y_1 cu eroare constantă $\varepsilon = x - y_1$ și y_2 cu eroare variabilă $\varepsilon(t) = x - y_2(t)$.

În figura 2.10, *a*) sunt reprezentate semnale de intrare de tipul parabolă de gradul unu curba 2 și parabolă de gradul doi curba 3, scrise de relațiile respective:

$$x(t) = \frac{t^2}{2!} 1(t), \quad 0 \leq t < \infty, \quad (2.37)$$

$$x(t) = \frac{t^3}{3!} 1(t), \quad 0 \leq t < \infty. \quad (2.38)$$

Semnalul de intrare parabolă de gradul $r - 1$ se prezintă în forma:

$$x(t) = \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} 1(t), \quad 0 \leq t < \infty. \quad (2.39)$$

Imaginea Laplace a semnalului rampă unitară (2.37) este:

$$r(s) = \frac{1}{s^2}, \quad (2.40)$$

iar pentru parabolă de gradul unu, doi și de gradul r f.d.t. respective sunt:

$$r(s) = \frac{1}{s^3}, r(s) = \frac{1}{s^4}, r(s) = \frac{1}{s^{r+1}}, r \geq 4. \quad (2.41)$$

2.7.4 Semnal impuls dreptunghiular și funcția pondere

Semnalul impuls dreptunghiular (fig. 2.11, *a*) este impulsul cu parametrii amplitudinea a mare, durată $\tau = t_2 - t_1$ mică, în comparație cu inerția mare a sistemului și aria $S = \tau a$, care se aplică la intrarea sistemului cu condițiile inițiale nule și se înregistrează răspunsul (fig. 2.11, *b*).

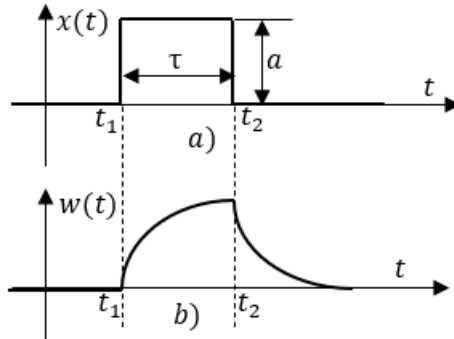


Fig. 2.11. Semnal impuls dreptunghiular *a*) și funcția pondere a sistemului *b*)

Acțiunea semnalului impuls dreptunghiular se prezenta în modul următor: frontul impulsului este semnal treaptă pe durata impulsului și acționează asupra sistemului, care trece din starea inițială în starea dorită, iar la stingerea impulsului sistemul trece din starea dorită în starea inițială și alura obținută se numește funcție pondere $w(t) = y(t)$ (fig. 2.11, *b*).

Modelul impulsului dreptunghiular se idealizează ca impuls ideal numit $\delta(t)$ impuls (impuls Dirac), care are parametrii: amplitudinea $a \rightarrow \infty$, durata $\tau \rightarrow 0$ și aria $S = 1$ determinată de integrala:

$$S = \int_0^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (2.42)$$

Funcția indicială și funcția pondere ale sistemului automat sunt caracteristicile temporale principale ale sistemului care se calculează reciproc.

Funcția pondere este egală cu derivata răspunsului indicial:

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} \quad (2.43)$$

și invers, răspunsul indicial este egal cu integrala de la funcția pondere:

$$h(t) = \int_0^T w(t) dt. \quad (2.44)$$

Dacă un semnal arbitrar de intrare $x(t)$ prezentat ca o succesiune continuă de impulsuri de durată mică $x(\tau)\delta(t - \tau)$, care au aria $x(\tau)d\tau$ și acționează asupra sistemului numai în momentele de timp $\tau = t$, unde $0 < \tau < \infty$, atunci răspunsul sistemului se calculează ca suma totală a funcțiilor pondere cu integrala de convoluție de forma:

$$y(t) = \int_0^T x(\tau)w(t - \tau) d\tau = \int_0^T x(t - \tau)w(\tau) d\tau. \quad (2.45)$$

Deoarece răspunsul sistemului nu poate anticipa cauza (condiția de realizabilitate fizică) funcția pondere $w(t) \equiv 0$ la $t < 0$.

Funcția de transfer de la $\delta(t)$ impuls este egală cu unitatea:

$$H(s) = \int_0^\infty \delta(t)e^{-st} dt = 1. \quad (2.46)$$

Funcția de transfer a sistemului este transformata Laplace de la funcția pondere:

$$H(s) = \int_0^\infty w(t)e^{-st} dt. \quad (2.47)$$

2.8 Răspunsuri indiciale ale elementelor și sistemelor automate

Răspunsurile indiciale ale elementelor și sistemelor se obțin prin

două metode: metoda analitică și metoda experimentală.

Metoda analitică se reduce la determinarea ecuației diferențiale a elementului sau sistemului și obținerea soluției, care reprezintă răspunsul indicial al sistemului.

Metoda experimentală constă în aplicarea semnalelor tipice temporale semnal treaptă unitară sau impuls dreptunghiular la intrarea elementului sau sistemului în condiții inițiale nule, înregistrarea răspunsului și prelucrarea acestor semnale pentru identificarea modelului matematic și a parametrilor acestuia.

În continuare, pentru determinarea pe cale experimentală a răspunsurilor indiciale ale elementelor tipice se utilizează schema bloc de simulare (fig. 2.12) a elementului și ridicarea răspunsului indicial.



Fig. 2.12. Schema bloc de simulare a elementului dinamic

La intrarea elementului dinamic tipic 2 în condiții inițiale nule se aplică semnalul treaptă unitară $x(t) = 1(t)$ elaborat de elementul 1 și se înregistrează răspunsul indicial $h(t)$ cu elementul 3. În continuare, alura răspunsului indicial al elementului sau sistemului se utilizează pentru caracterizarea proprietăților statice și dinamice - regimurile de funcționare tranzitoriu și staționar și determinarea modelului matematic în forma funcției de transfer. După structura din figura 2.12, aplicând la intrare semnalul impuls, se ridică și funcția pondere a elementului sau sistemului automat.

2.9 Semnale armonice și funcții frecvențiale ale sistemului automat

În condiții reale asupra sistemului automat acționează semnale care se modelează ca semnale armonice reprezentate prin sinusoidă sau cosinusoidă [1, 4, 8, 11-13, 16-21]. Se consideră sistemul automat asupra căruia în momentul de timp $t = 0$ acționează semnalul sinusoidal cu amplitudinea X și pulsația ω (fig. 2.13) de forma:

$$x(t) = X\sin\omega t, \quad (2.48)$$

în care pulsația ω este un parametru real și poate lua orice valori fixate din gama $0 \leq \omega \leq \infty$. Pulsația ω are dimensiunea rad/s.

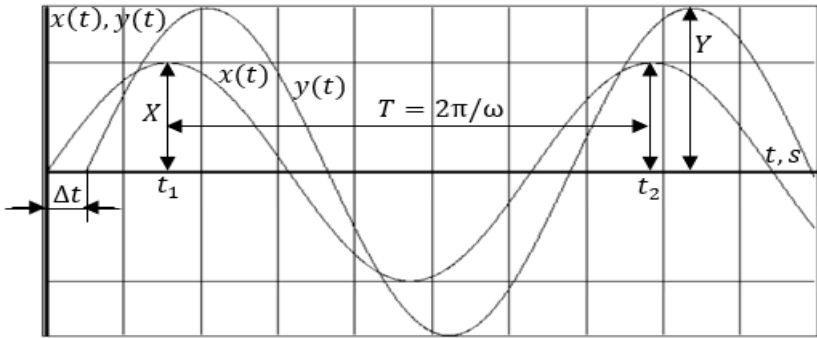


Fig. 2.13. Semnal de intrare sinusoidal $x(t)$ și răspunsul sistemului $y(t)$

Există relația între pulsație și frecvența de rețea $\omega = 2\pi f$, unde frecvența are dimensiunea 1/s. Rezultă că pulsația și frecvența au aceeași dimensiune, ceea ce nu face o distincție specială între pulsație și frecvență.

După un anumit timp, necesar pentru stabilizarea procesului tranzitoriu, la ieșirea sistemului se obține un regim oscilant neamortizat sinusoidal cu aceeași pulsație ω , dar cu altă amplitudine Y și cu un defazaj φ (fig. 2.13) de forma:

$$y(t) = Y\sin(\omega t + \varphi), \quad (2.49)$$

unde $\varphi = (\Delta t/T)360$ este defazajul dintre semnalul de ieșire și semnalul de intrare, care se determină de inerția sistemului și exprimă întârzierea.

Perioada oscilațiilor T reprezintă distanța dintre două amplitudini succesive ale semnalului $x(t)$ la momentele de timp t_1 și t_2 : $T = t_2 - t_1$, iar frecvența se determină după relația $\omega = 2\pi/T$ și $T = 2\pi/\omega$.

Repetând experimentul de aplicare a semnalului de intrare cu

amplitudinea constantă, dar diverse valori ale pulsației ω din intervalul $0 \dots \infty$, se constată că amplitudinea și defazajul răspunsului sistemului sunt funcții de pulsația ω și proprietățile interne ale sistemului.

Funcțiile trigonometrice (2.48) și (2.49) se înlocuiesc cu funcții complexe prin valorile complexe cu aceiași parametri – amplitudine, frecvență și fază:

$$X \sin \omega t = X e^{j\omega t}, Y \sin(\omega t + \varphi) = Y e^{j\omega t} e^{j\varphi(\omega)}. \quad (2.50)$$

Funcția frecvențială a sistemului se obține prin raportul dintre răspunsul sistemului și semnalul de intrare (2.50):

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{Y \sin(\omega t + \varphi)}{X \sin \omega t} = \frac{Y e^{j\omega t} e^{j\varphi(\omega)}}{X e^{j\omega t}} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = \\ &= |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} = A(\omega) (\cos \varphi(\omega) + j \sin \varphi(\omega)) = \\ &= A(\omega) \cos \varphi(\omega) + j A(\omega) \sin \varphi(\omega) = P(\omega) + j Q(\omega), \end{aligned} \quad (2.51)$$

unde $A(\omega) = Y/X$ este raportul amplitudinii semnalului de ieșire la amplitudinea semnalului de intrare, care depinde de modificarea pulsației ω și reprezintă caracteristica amplitudine-frecvență sau atenuare-frecvență, care este *atenuarea* răspunsului la frecvență și se măsoară în deciBell (dB), $\varphi(\omega) = \arg H(j\omega)$ – caracteristica fază-frecvență sau faza răspunsului la frecvență, care reprezintă defazajul mărimii de ieșire în raport cu intrarea și se măsoară în grade, mai rar în radiani, $j = \sqrt{-1}$ - unitatea imaginară, ω – pulsația care variază de la $-\infty \dots +\infty$, $e^{j\varphi(\omega)} = \cos \varphi(\omega) + j \sin \varphi(\omega)$, $P(\omega) = A(\omega) \cos \varphi(\omega)$, $Q(\omega) = A(\omega) \sin \varphi(\omega)$ - partea reală și imaginară ca funcții frecvențiale, $H(j\omega)$ este locul de transfer sau funcția amplitudine-fază frecvență (hodograf), care este răspunsul la frecvență, $|H(j\omega)|$ - modulul.

Locul de transfer al sistemului stabil în condiții inițiale nule se determină ca transformata Fourier din funcția de transfer $H(s)$, substituind $s = j\omega$ și se obține:

$$\frac{y(j\omega)}{x(j\omega)} = H(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} = P(\omega) + jQ(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} =$$

$$= A(\omega)\cos\varphi(\omega) + jA(\omega)\sin\varphi(\omega), \quad (2.52)$$

unde $P(\omega) = A(\omega)\cos\varphi(\omega)$, $Q(\omega) = A(\omega)\sin\varphi(\omega)$.

Locul de transfer reprezintă hodograful funcției $H(j\omega)$, care se construiește în sistemul de coordonate $P(\omega) - Q(\omega)$ sau sistemul polar $A(\omega) - \varphi(\omega)$ (fig. 2.14).

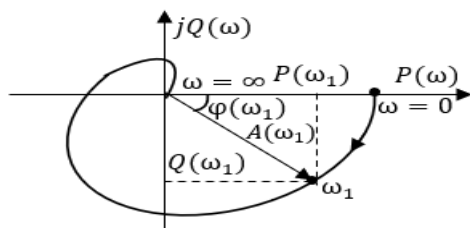


Fig. 2.14. Locul de transfer al sistemului

Funcțiile frecvențiale $A(\omega)$ și $\varphi(\omega)$ se calculează prin relațiile:

$$A(\omega) = |H(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}, \quad (2.53)$$

unde $|H(j\omega)|$ este modulul locului de transfer:

$$\varphi(\omega) = \arg H(j\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}. \quad (2.54)$$

Pentru construirea funcției $A(\omega)$ în scară naturală calculele devin dificile datorită valorilor mari ale lui $\omega = 0 \cdots \infty$. Calculele devin simple dacă această caracteristică se construiește în scară logaritmică: pe axa ordonatelor se utilizează $20\lg A(\omega) = 20\lg |H(j\omega)| = L(\omega)$ dB, iar pe axa absciselor se utilizează $\lg \omega$ cu unitatea de măsură decada, care reprezintă modificarea valorii lui ω de 10 ori: 0,1; 1; 10; 100; 1000 etc. și se prezintă ca intervale constante, iar pe axă se indică $\lg 1 = 0$; $\lg 10 = 1$; $\lg 100 = 2$; $\lg 1000 = 3$ etc.

Deoarece $\lg\omega|_{\omega=0} = -\infty$, axa ordonatelor se trasează printr-un punct arbitrar.

Caracteristica $L(\omega)$ se prezintă din segmente paralele la axa absciselor și segmente cu unghi ± 20 dB/decadă, ce corespunde unghiului defazajului $\varphi(\omega) = \pm \frac{\pi}{2} = \pm 90^\circ$.

Dacă f.d.t. $H(s)$ este în formă factorizată, atunci și locul de transfer va fi de aceeași formă și funcțiile amplitudine (modulul) și fază se calculează prin relațiile:

$$A(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{|B(j\omega)|}{|A(j\omega)|}, \quad (2.55)$$

$$\varphi(\omega) = \arg H(j\omega) = \arg B(j\omega) - \arg A(j\omega). \quad (2.56)$$

Transferul intrare-ieșire al sistemului din (2.52) în forma:

$$y(j\omega) = H(j\omega)x(j\omega), \quad (2.57)$$

unde $y(j\omega)$ se numește densitatea spectrală a mărimii de ieșire, $|y(j\omega)|$ – densitatea spectrală de amplitudine, $H(j\omega)$ – răspunsul la frecvență, $x(j\omega)$ – densitatea spectrală a mărimii de intrare.

Expresia (2.57) exprimă modul de transformare a densității spectrale a mărimii de intrare $x(j\omega)$ în densitatea spectrală a mărimii de ieșire $y(j\omega)$ prin răspunsul la frecvență $H(j\omega)$ al sistemului, care evidențiază comportarea sistemului în domeniul frecvențelor ca un filtru.

Locul de transfer al sistemului se determină cu transformata Fourier de la funcția pondere prin relația:

$$H(j\omega) = \int_0^\infty w(t)e^{-j\omega t} dt.$$

Exemplul 2.6. Se consideră funcția de transfer a unui sistem automat static cu date numerice prezentată în forma:

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0s + b_1}{a_0s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3} = \frac{5s + 7}{3s^3 + 8s^2 + 9s + 2}$$

Se cere să se determine forma analitică și grafică a locului de transfer al sistemului automat.

Soluționare. Pentru a obține locul de transfer $H(j\omega)$ în formă analitică al sistemului automat, în funcția de transfer $H(s)$ se utilizează substituția variabilei $s = j\omega$ și se calculează ca funcție complexă, evidențiind partea reală și imaginară ca funcții de frecvența ω și, folosind proprietățile pentru unitatea imaginară $j = \sqrt{-1}$, $j^2 = -1$, $j^3 = -j$, se obține:

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} = \frac{b_0 j\omega + b_1}{a_0(j\omega)^3 + a_1(j\omega)^2 + a_2 j\omega + a_3} = \frac{j b_0 \omega + b_1}{-j a_0 \omega^3 - a_1 \omega^2 + j a_2 \omega + a_3} = \\ &= \frac{b_1 + j b_0 \omega}{(a_3 - a_1 \omega^2) + j(a_2 \omega - a_0 \omega^3)} \frac{(a_3 - a_1 \omega^2) - j(a_2 \omega - a_0 \omega^3)}{(a_3 - a_1 \omega^2) - j(a_2 \omega - a_0 \omega^3)} = \\ &= \frac{b_1(a_3 - a_1 \omega^2) - j b_1(a_2 \omega - a_0 \omega^3) + j b_0 \omega(a_3 - a_1 \omega^2) + b_0 \omega(a_2 \omega - a_0 \omega^3)}{(a_3 - a_1 \omega^2)^2 + (a_2 \omega - a_0 \omega^3)^2} = \\ &= \frac{b_1(a_3 - a_1 \omega^2) + b_0 \omega(a_2 \omega - a_0 \omega^3)}{(a_3 - a_1 \omega^2)^2 + (a_2 \omega - a_0 \omega^3)^2} + j \frac{-b_1(a_2 \omega - a_0 \omega^3) + b_0 \omega(a_3 - a_1 \omega^2)}{(a_3 - a_1 \omega^2)^2 + (a_2 \omega - a_0 \omega^3)^2} = P(\omega) + jQ(\omega), \end{aligned}$$

unde partea reală și imaginară au forma:

$$\begin{aligned} P(\omega) &= \frac{b_1(a_3 - a_1 \omega^2) + b_0 \omega(a_2 \omega - a_0 \omega^3)}{(a_3 - a_1 \omega^2)^2 + (a_2 \omega - a_0 \omega^3)^2} = \frac{7(2 - 8\omega^2) + 5\omega(9\omega - 3\omega^3)}{(2 - 8\omega^2)^2 + (9\omega - 3\omega^3)^2}, \\ Q(\omega) &= \frac{-b_1(a_2 \omega - a_0 \omega^3) + b_0 \omega(a_3 - a_1 \omega^2)}{(a_3 - a_1 \omega^2)^2 + (a_2 \omega - a_0 \omega^3)^2} = \frac{-7(9\omega - 3\omega^3) + 5\omega(2 - 8\omega^2)}{(2 - 8\omega^2)^2 + (9\omega - 3\omega^3)^2}. \end{aligned}$$

În continuare, se variază $\omega = 0 \dots \infty$ și se calculează funcțiile $P(\omega)$, $Q(\omega)$, care se dau în tabelul 2.4.

Tabelul 2.4. Calculul locului de transfer $H(j\omega)$

ω	0	0.1	0.2	0.3	0.5	1.0	2.0	5.0	10.0	$\omega \rightarrow \infty$
$P(\omega)$	3.5	3.1994	-0	-0
$Q(\omega)$	0	-1.184	-0	-0

După datele din tabelul 2.4 în scară se construiește locul de transfer $H(j\omega)$ reprezentat în figura 2.15. ■

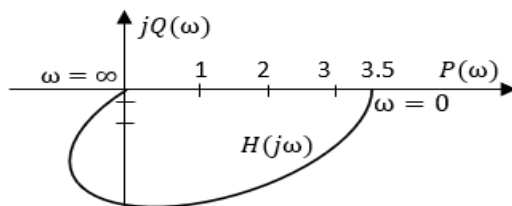


Fig. 2.15. Alura locului de transfer $H(j\omega)$ al sistemului automat

2.10 Elemente dinamice de transfer

2.10.1 Elemente dinamice tipice

Sistemele cu conducere automată reprezintă un ansamblu de elemente funcționale conectate într-un mod anumit pentru ca sistemul să funcționeze. Aceste elemente îndeplinesc anumite funcții (de măsurare, de amplificare, de execuție etc.) și se deosebesc după principiul de acțiune, construcție și natură fizică (electrice, termice, hidraulice etc.).

Dinamica sistemului depinde de proprietățile interne ale elementelor sistemului, care se descriu de ecuațiile transferului intrare-ieșire în timp și care descriu matematic procesele fizice din aceste elemente (adunarea, scăderea, produsul, derivarea, integrarea etc.). Având diferite destinații, principii de funcționare, construcții și natură fizică, elementele sistemelor pot fi descrise prin aceleași ecuații integro-diferențiale, funcții de timp (procese tranzitorii sau pondere care reprezintă răspunsul sistemului sau elementului la semnalul de intrare), funcții de transfer și funcții frecvențiale [1, 4, 8, 13, 18, 21].

Elementele care se descriu prin același tip de ecuații integro-diferențiale sau funcții de transfer, dar care se deosebesc numai prin valorile numerice ale parametrilor, se numesc *elemente dinamice* (ED) de transfer de același tip. Elementele dinamice tipice se descriu, de regulă, prin ecuații diferențiale de ordinul nu mai mare decât doi, funcții de timp, funcții de transfer și funcții frecvențiale.

Se consideră elementul dinamic cu o intrare și o ieșire (fig. 2.16, a) cu modelul matematic ecuația diferențială de ordinul doi pe intrare și ieșire în condiții inițiale nule de forma:

$$a_0\ddot{y}(t)+a_1\dot{y}(t) + a_2y(t) = b_0\ddot{x}(t) + b_1\dot{x}(t) + b_2x(t), \quad (2.58)$$

unde $x(t)$, $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$ sunt semnalul de intrare și derivatele lui de ordinul unu și doi, $y(t)$, $\dot{y}(t)$, $\ddot{y}(t)$ – semnalul de ieșire și derivatele lui de ordinul unu și doi.

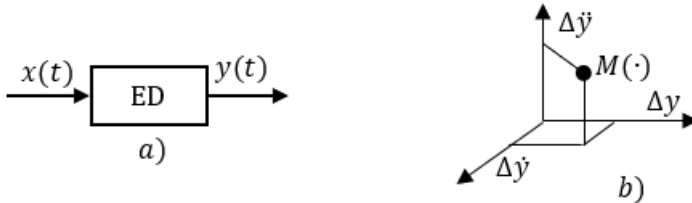


Fig. 2.16. Element dinamic

Coeficienții a_0, a_1 reprezintă proprietățile interne ale elementului și sunt constante de timp (cu dimensiunea secunda la puterea egală cu ordinul derivatei), coeficienții b_0, b_1 reprezintă proprietățile semnalului de intrare și sunt constante de timp (cu dimensiunea secunda la puterea egală cu ordinul derivatei), coeficienții a_2 și b_2 au dimensiunea în funcție de raportul dimensiunilor mărimii de ieșire la mărimea de intrare.

Elementul dinamic (2.58) conține în partea stângă și partea dreaptă suma componentelor - abaterea, prima și a doua derivată a mărimii de ieșire și a mărimi de intrare respectiv. În figura 2.16, b) este dat cazul răspunsului elementului la momentul de timp t prin punctul $M(\cdot) = M(\Delta y, \Delta \dot{y}, \Delta \ddot{y})$ cu cele trei componente care acționează la ieșirea lui.

Din (2.58) se obțin mai multe elemente dinamice simple, compuse din diferite componente ale termenilor din stânga și dreapta ale expresiei. Din (2.58) se evidențiază 5 elemente dinamice de transfer tipice de bază, care se clasifică după proprietățile interne și operațiile efectuate, fiind numite conform acestor proprietăți.

Clasificarea elementelor tipice se efectuează și după ordinul derivatei mărimii de ieșire și mărimii de intrare: ordinul zero, unu și doi.

Pentru elementele dinamice tipice se prezintă ecuația diferențială, forma operațională cu operatorii $B(p)$ și $A(p)$, funcția de

transfer substituind $p = s$ și polinoamele $B(s)$ și $A(s)$, expresia analitică și răspunsul indicial la semnal de intrare treaptă unitară, expresia analitică a funcției pondere ca răspuns la semnal impuls unitar și funcțiile analitice și caracteristicile frecvențiale, substituind $s = j\omega$ în funcția de transfer.

2.10.2 Element ideal

Elementul dinamic ideal sau proporțional (nu are inerție) se obține din (2.58) ca ecuație diferențială de ordinul zero:

$$a_2 y(t) = b_2 x(t), \quad (2.59)$$

care se aduce la forma standard (cu coeficientul pe lângă $y(t)$ $a_2 = 1$), împărțind termenii din stânga și dreapta la coeficientul a_2 și se obține:

$$y(t) = kx(t), \quad k = b_2/a_2, \quad (2.60)$$

unde $k > 0$ este numit coeficient de transfer cu dimensiunea determinată de raportul dimensiunilor mărimii de ieșire la mărimea de intrare:

$$k = \frac{y(t)}{x(t)}. \quad (2.61)$$

În cazul când dimensiunile lui $y(t)$ și $x(t)$ sunt aceleași, atunci k se numește factor (coeficient) de amplificare, care este adimensional.

Drept exemple servesc diverse elemente funcționale la care inerția este o mărime mică neglijabilă (amplificatoare electronice, traductoare etc.).

Forma operațională și funcția de transfer:

$$y = kx, \quad B(p) = k, \quad A(p) = 1, \quad (2.62)$$

$$\frac{y(s)}{x(s)} = H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = k, \quad B(s) = k, \quad A(s) = 1. \quad (2.63)$$

La intrarea elementului ideal se aplică semnal treaptă unitară (fig. 2.17, a) și se ridică răspunsul indicial (fig. 2.17, b).

Răspunsul indicial și funcția pondere se descriu prin relațiile:

$$h(t) = k1(t), \quad (2.64)$$

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = k\delta(t). \quad (2.65)$$

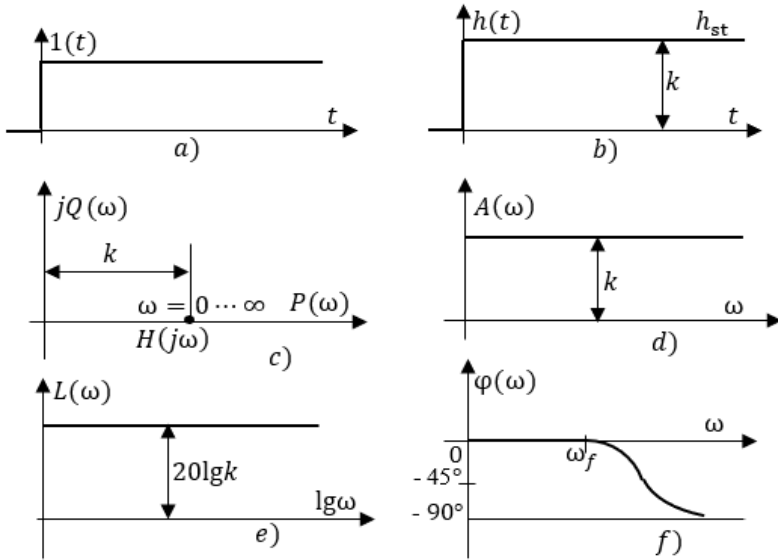


Fig. 2.17. Răspunsul indicial și caracteristicile frecvențiale ale elementului ideal

Funcțiile și caracteristicile frecvențiale:

$$H(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) = k, \quad P(\omega) = k, \quad Q(\omega) = 0,$$

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = k, \quad (2.66)$$

$$\varphi(\omega) = \arg H(j\omega) = \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = 0.$$

Variind pulsația $\omega = 0 \dots \infty$ se calculează caracteristicile frecvențiale $P(\omega)$, $Q(\omega)$, $A(\omega)$, $\varphi(\omega)$ care se dau în tabelul 2.5.

După datele din tabelul 2.5 se construiesc caracteristicile frecvențiale (fig. 2.17, c)-f): c - locul de transfer $H(j\omega)$, d - amplitudine-pulsație $A(\omega)$, e - logaritmică $L(\omega) = 20\lg k$, f - fază-pulsație $\varphi(\omega)$.

Tabelul 2.5. Funcții frecvențiale

Funcția	Date numerice		
	0	ω_f	∞
$P(\omega)$	k	k	k
$Q(\omega)$	0	0	0
$A(\omega)$	k	k	k
$\varphi(\omega)$	0	> 0	-90°

Caracteristicile frecvențiale ale elementului ideal nu sunt funcții de pulsația ω . Locul de transfer $H(j\omega)$ la variația lui $\omega = 0 \dots \infty$ reprezintă un punct (ghem) alocat pe axa absciselor la distanța k . Caracteristicile $A(\omega)$ și $L(\omega)$ reprezintă o dreaptă alocată în cadranul unu, care intersectează axa ordonatelor la distanța k și $20\lg k$ respectiv.

Caracteristica de fază $\varphi(\omega)$ coincide cu axa absciselor numai în gama de pulsații $0 < \omega < \omega_f$. Pulsația ω_f este numită pulsație de frângere (tăiere) și la valorile lui $\omega > \omega_f$ elementul ideal se transformă în element cu inerție de ordinul unu.

Rezultă că elementul ideal este un filtru ideal și aproximează elemente și sisteme fără inerție, care au caracteristicile $A(\omega) = \text{const}$ și $\varphi(\omega) \approx 0$ pe domenii largi de frecvențe $\omega = 0 \dots \omega_f$.

2.10.3 Element cu inerție de ordinul unu

Elementul cu inerție (întârziere) de ordinul unu are inerție și amplifică răspunsul semnalului de intrare, descris de ecuația diferențială de ordinul unu în raport cu ieșirea și reprezentat în forma:

$$a_1 \dot{y}(t) + a_2 y(t) = b_2 x(t), \quad (2.67)$$

care se aduce la forma standard (cu coeficientul pe lângă $y(t)$ $a_2 = 1$), împărțind termenii din stânga și dreapta la coeficientul a_2 și se obține:

$$T\dot{y}(t) + y(t) = kx(t), k = \frac{b_2}{a_2}, T = \frac{a_1}{a_2}, \quad (2.68)$$

unde $k > 0$ este coeficientul de transfer, $T > 0$ – constanta de timp cu dimensiunea secundă.

Drept exemple pot servi diverse elemente care funcționează cu inerția de ordinul unu (amplificatoare electronice, pneumatice, hidraulice, traductoare, elemente de acționare etc.).

Forma operațională și funcția de transfer:

$$y = \frac{k}{Tp+1}x, B(p) = k, A(p) = Tp + 1, \quad (2.69)$$

$$\frac{y(s)}{x(s)} = H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{k}{Ts+1}, B(s) = k, A(s) = Ts + 1. \quad (2.70)$$

Elementul cu inerție de ordinul unu are polul $p = s = -1/T$.

Răspunsul indicial (fig. 2.18, a) și funcția pondere se descriu:

$$h(t) = k(1 - e^{-t/T})1(t), \quad (2.71)$$

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{k}{T}e^{-t/T}1(t). \quad (2.72)$$

Pentru calculul constantei de timp T a elementului cu inerție de ordinul unu pe curbă, se alege un punct arbitrar și la acest punct se trasează tangenta care să intersecteze regimul staționar h_{st} și axa absciselor și proiecția tangentei pe axa absciselor reprezintă valoarea constantei de timp.

În figura 2.18, a) tangenta s-a trasat la curbă în origine, astfel, se explică sensul fizic al constantei de timp.

Mișcarea cu viteză constantă pe durata constantei de timp atinge regimul staționar h_{st} .

Constanta de timp a elementului cu inerție se determină și după

valoarea de $0.632h_{st} = 0.632k$.

Funcțiile și caracteristicile frecvențiale:

$$H(j\omega) = \frac{k}{1+Tj\omega} \frac{1-Tj\omega}{1-Tj\omega} = \frac{k}{1+T^2\omega^2} - j \frac{kT\omega}{1+T^2\omega^2} = P(\omega) - jQ(\omega),$$

$$P(\omega) = \frac{k}{1+T^2\omega^2}, \quad Q(\omega) = \frac{kT\omega}{1+T^2\omega^2},$$

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \sqrt{\left(\frac{k}{1+T^2\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{kT\omega}{1+T^2\omega^2}\right)^2} = \frac{k}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}, \quad (2.73)$$

$$\varphi(\omega) = \text{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \text{arctg} \frac{\frac{kT\omega}{1+T^2\omega^2}}{\frac{k}{1+T^2\omega^2}} = -\text{arctg}(T\omega),$$

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{1 + T^2\omega^2}.$$

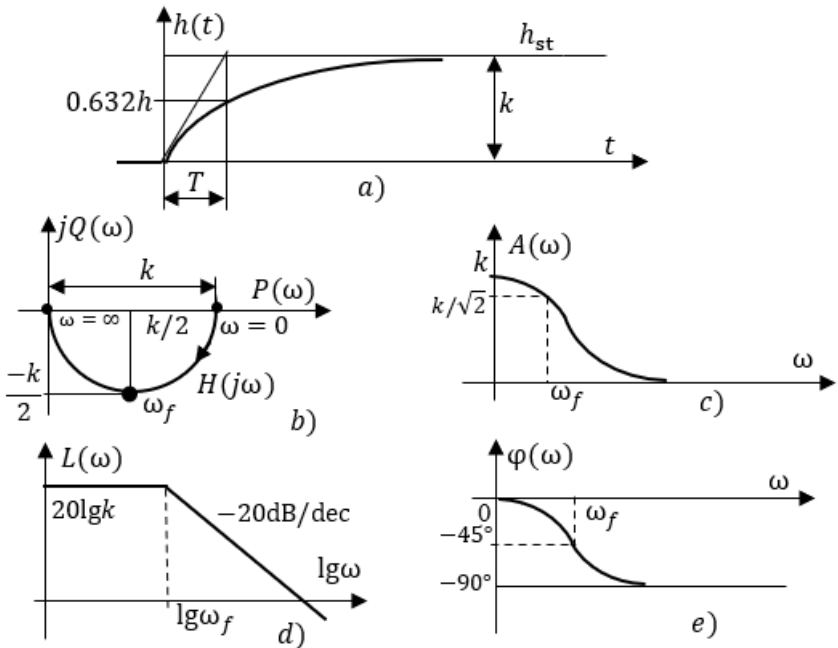


Fig. 2.18. Răspunsul indicial și caracteristicile frecvențiale ale elementului cu inerție de ordinul unu

Se variază pulsația $\omega = 0 \dots \infty$ și se calculează caracteristicile frecvențiale $P(\omega)$, $Q(\omega)$, $A(\omega)$, $\varphi(\omega)$ care se dau în tabelul 2.6.

După datele din tabelul 2.6 se construiesc caracteristicile date în figura 2.18, b)-e): b – locul de transfer $H(j\omega)$, c – amplitudine-pulsație $A(\omega)$, d – caracteristica logaritmică $L(\omega) = 20\lg A(\omega)$, e – fază-pulsație $\varphi(\omega)$.

Tabelul 2.6. Funcții frecvențiale

Funcția	Date numerice		
	ω	$\omega_f = 1/T$	∞
$P(\omega)$	k	$k/2$	0
$Q(\omega)$	-0	$-k/2$	-0
$A(\omega)$	k	$k/\sqrt{2}$	0
$\varphi(\omega)$	0	-45°	-90°

Locul de transfer $H(j\omega)$ reprezintă o semicircumferință situată în cadranul 4 cu raza $k/2$. Caracteristica atenuare-frecvență $A(\omega)$ în scară logaritmică se aproximează cu două asimptote care se intersectează în punctul de frângere cu coordonatele $(\lg\omega_f, 20\lg k)$, unde frecvența de frângere $\omega_f = 1/T$.

Prima asimptotă este situată în cadranul unu și intersectează axa ordonatelor la $20\lg k$, iar a doua asimptotă este trasată prin punctul de frângere cu panta -20 dB/dec. Eroarea de aproximare a caracteristicii continue cu cea logaritmică în punctul de frângere se calculează prin relația $A(\omega_f) = A(1/T) = 20\lg\sqrt{2} \approx 3$ dB. Caracteristica de fază are defazajul -90° . La valoarea lui $\omega = \omega_f = 1/T$ caracteristica de fază $\varphi(\omega) = \varphi(1/T) = -45^\circ$.

Alura $L(\omega)$ reprezintă caracteristica unui filtru trece-jos cu banda de frecvențe $\omega = 0 \dots \omega_f$.

2.10.4 Element integrator

Elementul integrator însușește răspunsul la semnalul de intrare pe durata unui anumit timp, descris prin ecuația diferențială de ordinul unu pe mărimea de ieșire de forma:

$$a_1 \dot{y}(t) = b_2 x(t), \quad (2.74)$$

care se aduce la forma standard (cu coeficientul $b_2 = 1$), împărțind expresia la coeficientul b_2 și integrând-o, se obține ecuația integrală:

$$y(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^T x(t) dt, \quad T_i = \frac{a_1}{b_2}, \quad (2.75)$$

unde $T_i > 0$ este numită constanta de timp de integrare, secundă.

Drept exemple pot servi motorul de curent continuu pe transferul intrare-tensiune rotorică și ieșire-unghiul de deplasare a rotorului (fig. 2.19, a), circuitul electric pasiv RC cu o constantă de timp $T_i = RC$ (fig. 2.19, b), unde transferul tensiunea de intrare u_1 - tensiunea de ieșire u_2 se descrie prin relația (2.75) și elementul acumulator este condensatorul cu capacitatea C .

Observație. Proprietatea de integrare există în toate obiectele de reglare, în care se acumulează energie sau substanță fără a fi transmisă în mediul exterior.

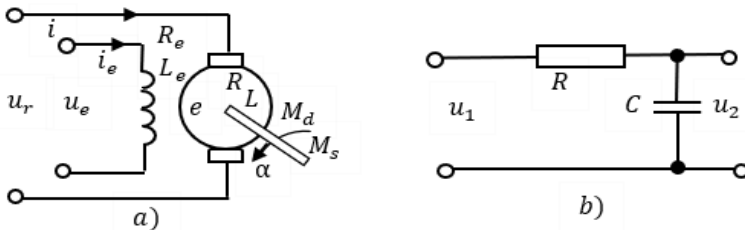


Fig. 2.19. Elemente integratoare

Exemplul 2.7. Se consideră un rezervor cu acumulare de lichid cu secțiunea transversală S , m^2 , în care mărimea de intrare este fluxul lichidului $Q(t)$ introdus în rezervor, iar mărimea de ieșire este nivelul lichidului $L(t)$ în rezervor [11].

Se cere să se determine modelul ecuației care descrie dinamica acestui proces.

Soluționare. Ecuația bilanțului lichidului în rezervor stabilește legătura funcțională de creștere a nivelului ΔL pe durata timpului Δt prezentată în forma:

$$S \Delta L(t) = Q(t) \Delta t.$$

Ecuația bilanțului se prezintă ca ecuație diferențială în condiția $\Delta t = dt$ și

$$\Delta L(t) = dL(t):$$

$$\frac{dL(t)}{dt} = \frac{1}{S} Q(t) dt$$

și în formă integrală:

$$L(t) = \frac{1}{S} \int Q(t) dt = \frac{1}{T_i} \int Q(t) dt = k_i \int Q(t) dt,$$

în care $S = T_i > 0$ este constanta de timp de integrare, $k_i = 1/S = 1/T_i$. ■

Forma operațională și funcția de transfer:

$$y = \frac{1}{T_i p} x, B(p) = 1, A(p) = T_i p, \quad (2.76)$$

$$\frac{y(s)}{x(s)} = H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{1}{T_i s} = \frac{k_i}{s}, k_i = \frac{1}{T_i}, B(s) = 1, A(s) = T_i s = 0. \quad (2.77)$$

Elementul integrator are polul $p = s = 1/T_i = 0$.

Răspunsul indicial (fig. 2.20, a) și funcția pondere se descriu:

$$h(t) = \frac{1}{T_i} t 1(t) = k_i t 1(t), \quad (2.78)$$

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{T_i} 1(t) = k_i 1(t). \quad (2.79)$$

Pentru calculul constantei T_i de timp de integrare, pe axa ordonatelor se indică unitatea, care se regăsește pe alură și acest punct se proiectează pe axa absciselor. Astfel, segmentul pe axa timpului de la origine până la intersecție reprezintă constanta de timp de integrare.

Cu cât este mai mare unghiul format de dreaptă și axa timpului, cu atât mai mică va fi constanta de timp de integrare, și invers.

Funcțiile și caracteristicile frecvențiale:

$$H(j\omega) = \frac{1}{T_i j\omega} \frac{-T_i j\omega}{-T_i j\omega} = -j \frac{T_i \omega}{T_i^2 \omega^2} = -j \frac{1}{T_i \omega},$$

$$P(\omega) = 0, Q(\omega) = -\frac{1}{T_i \omega},$$

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \sqrt{\left(-\frac{1}{T_i\omega}\right)^2} = \frac{1}{T_i\omega} = \frac{k_i}{\omega}, \quad (2.80)$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \operatorname{arctg} \frac{-(1/T_i\omega)}{0} = -90^\circ,$$

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k_i - 20 \lg \omega.$$

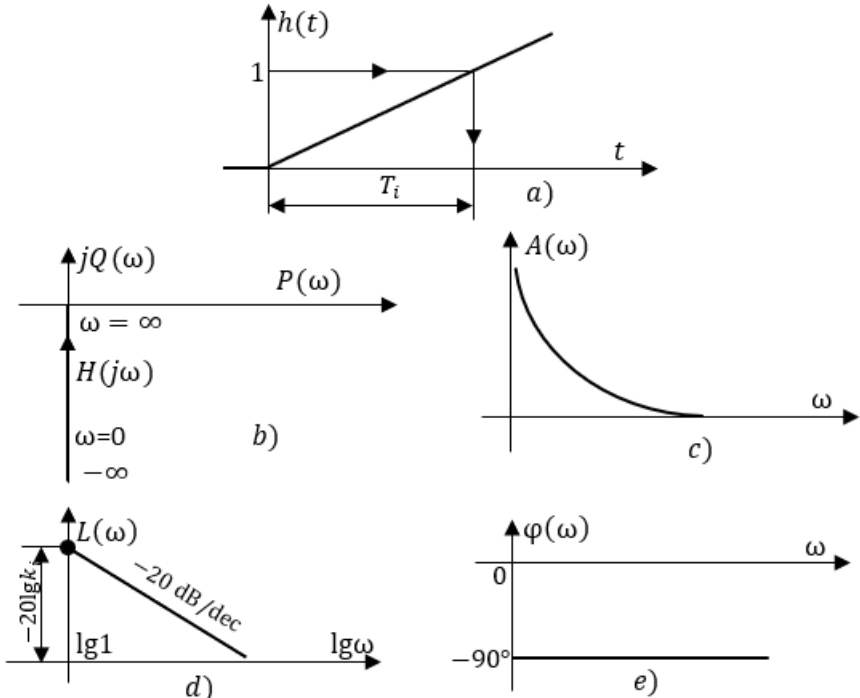


Fig. 2.20. Răspunsul indicial și caracteristicile frecvențiale ale elementului integrator

Variind pulsația $\omega = 0 \dots \infty$ se calculează și se construiesc caracteristicile frecvențiale $Q(\omega)$, $A(\omega)$, $L(\omega)$ $\varphi(\omega)$, care sunt reprezentate în figura 2.20, b)-e): b – locul de transfer $H(j\omega)$, c – amplitudine-pulsație $A(\omega)$, d – amplitudine în scară logaritmică $L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k_i$, e – fază-pulsație $\varphi(\omega)$. Locul de transfer $H(\omega)$ coincide cu semiaxa negativă a axei ordonatelor, care la valoarea $\omega = 0$ începe de la $-\infty$ și la $\omega = \infty$ se termină în origine.

Caracteristica $A(\omega)$ reprezintă o hiperbolă, care la valoarea $\omega = 0$ începe de la ∞ și la $\omega = \infty$ tinde la 0, iar cea logaritmică $L(\omega)$ reprezintă o dreaptă trasată prin punctul cu ordonata $20\lg k_i$ și pe axa absciselor $\omega = 1$ cu panta -20 dB/dec. Caracteristica de fază $\varphi(\omega)$ prezintă asimptota în cadranul 4, care este paralelă axei absciselor, fiind deplasată la -90° pe axa ordonatelor și care are defazajul uniform pentru tot intervalul de frecvențe. Elementul integrator prezintă filtru trece-jos.

2.10.5 Element derivator

Elementul derivator ideal la care răspunsul la semnalul de intrare este proporțional derivatei (vitezei) semnalului de intrare, descris de ecuația diferențială de ordinul unu pe mărimea de intrare de forma:

$$a_2 y(t) = b_1 \dot{x}(t), \quad (2.81)$$

care se aduce la forma standard (cu coeficientul pe lângă $y(t)$ $a_2 = 1$), raportând termenii din stânga și dreapta la coeficientul a_2 și se obține ecuația diferențială:

$$y(t) = T_d \dot{x}(t), T_d = \frac{b_1}{a_2}, \quad (2.82)$$

unde $T_d > 0$ este constanta de timp de derivare cu dimensiunea secundă.

Elementul (2.82) este un element derivator ideal, care în practică nu se realizează. Pentru obținerea derivatorului real la derivatorul ideal (2.82), în partea stângă se adaugă o componentă cu inerție relativ mică pe lângă derivata mărimii de ieșire și ecuația diferențială are forma:

$$T_f \dot{y}(t) + y(t) = T_d \dot{x}(t), T_d = \frac{b_1}{a_2}, T_f = (0.1 \dots 0.125) T_d, \quad (2.83)$$

unde $T_f > 0$ este constanta de timp de inerție sau de filtrare.

Ca exemple de elemente derivatoare în figura 2.21 sunt

reprezentate circuitul electric al unei bobine cu inductanța L și rezistența conductorului R (fig. 2.21, *a*) cu constanta de timp de derivare $T_d = RL$ și circuitul electric alcătuit din condensatorul cu capacitatea C și rezistența R (fig. 2.21, *b*) cu constanta de timp de derivare $T_d = CR$.

Forma operațională și funcția de transfer ale elementului derivator ideal:

$$y = T_d p x, B(p) = T_d p, A(p) = 1. \quad (2.84)$$

$$\frac{y(s)}{x(s)} = H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = T_d s, B(s) = T_d s = 0, A(s) = 1, \quad (2.85)$$

care are zeroul egal cu zero $z = s = 0$.

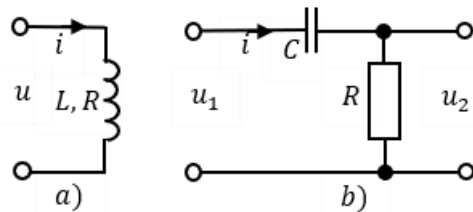


Fig. 2.21. Elemente derivatoare

Răspunsul indicial (fig. 2.22, *a*, dreapta 1) și funcția pondere:

$$h(t) = T_d \frac{d1(t)}{dt} = T_d \delta(t) = k \delta(t), \quad (2.86)$$

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = T_d \frac{d\delta(t)}{dt} = k \frac{d\delta(t)}{dt}. \quad (2.87)$$

Funcțiile și caracteristicile frecvențiale ale elementului derivator ideal:

$$H(j\omega) = T_d j\omega, P(\omega) = 0, Q(\omega) = jT_d \omega,$$

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \sqrt{(T_d \omega)^2} = T_d \omega, \quad (2.88)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \arctg \frac{T_d \omega}{0} = 90^\circ,$$

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg T_d \omega.$$

Se variază pulsația $\omega = 0 \dots \infty$, se calculează și se construiesc caracteristicile frecvențiale $P(\omega)$, $Q(\omega)$, $A(\omega)$, $L(\omega)$, $\varphi(\omega)$, care sunt reprezentate în figura 2.22, b-e) (curbele 1 – element ideal, curbele 2 – element real): b – locul de transfer $H(j\omega)$, c – amplitudine-pulsație $A(\omega)$, d – caracteristica amplitudine în scară logaritmică $L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg T_d \omega$, e – fază-pulsație $\varphi(\omega)$.

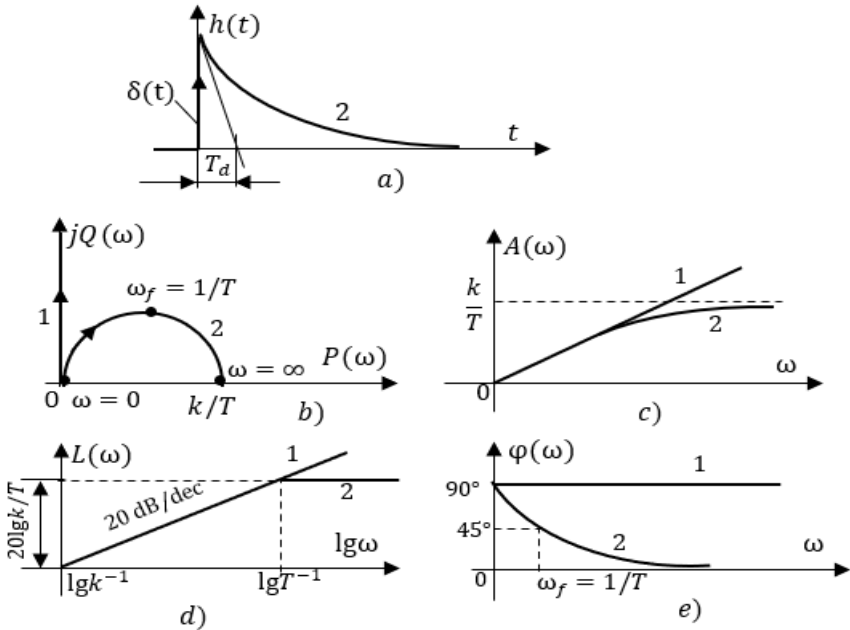


Fig. 2.22. Răspunsul indicial și caracteristicile frecvențiale ale elementului derivator ideal și real

Locul de transfer $H(j\omega)$ coincide cu semiaxa pozitivă a ordonatelor (curba 1), care la valoarea $\omega = 0$ începe de la 0 și la $\omega = \infty$ tinde la ∞ . Caracteristica $A(\omega)$ reprezintă o dreaptă sub un unghi în raport cu axa absciselor (curba 1), care la valoarea $\omega = 0$ începe de

la 0 și la $\omega = \infty$ tinde la ∞ . Caracteristica $L(\omega)$ reprezintă o dreaptă trasată prin punctul cu coordonatele $(0, \lg k^{-1})$ cu panta 20 dB/dec (curba 1).

Caracteristica de fază $\varphi(\omega)$ prezintă asimptota 1 paralelă axei absciselor și începe pe axa ordonatelor, fiind deplasată la 90° , care are defazajul uniform pentru tot intervalul de frecvențe.

Elementul derivator ideal prezintă filtru trece-sus.

Forma operațională și funcția de transfer ale elementului derivator real:

$$y = \frac{T_d p}{T_f p + 1} x = T_d p \frac{1}{T_f p + 1} x, B(p) = T_d p, A(p) = T_f p + 1, (2.89)$$

$$\frac{y(s)}{x(s)} = H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{T_d s}{T_f s + 1} = T_d s \frac{1}{T_f s + 1}, B(s) = T_d s = 0, (2.90)$$

$$A(s) = T_f s + 1 = 0,$$

care are zeroul $z = s = 0$ și polul $p = s = -1/T_f$.

Elementul derivator real se prezintă ca o conexiune serie a elementului derivator ideal și a elementului cu inerție de ordinul unu cu coeficientul de transfer unitar, numit și element de filtrare.

Răspunsul indicial (fig. 2.22, a, alura 2) și funcția pondere ale elementului derivator real:

$$h(t) = \frac{T_d}{T_f} e^{-t/T_f} 1(t), (2.91)$$

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{T_d}{T_f} \delta(t) - \frac{T_d}{T_f^2} e^{-t/T_f} 1(t). (2.92)$$

Pentru calculul constantei T_d de timp de derivare a elementului real derivativ se trasează tangenta la punctul de intersecție al răspunsului cu axa ordonatelor și se determină proiecția acesteia pe axa absciselor.

Funcțiile și caracteristicile frecvențiale:

$$H(j\omega) = \frac{T_d j\omega}{T_f j\omega + 1} \frac{1 - T_f j\omega}{1 - T_f j\omega} = \frac{T_d T_f \omega^2}{1 + T_f^2 \omega^2} + j \frac{T_d \omega}{1 + T_f^2 \omega^2} = P(\omega) + jQ(\omega),$$

$$P(\omega) = \frac{T_d T_f \omega^2}{1 + T_f^2 \omega^2}, \quad Q(\omega) = \frac{T_d \omega}{1 + T_f^2 \omega^2}, \quad (2.93)$$

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \sqrt{\left(\frac{T_d T_f \omega^2}{1 + T_f^2 \omega^2}\right)^2 + \left(\frac{T_d \omega}{1 + T_f^2 \omega^2}\right)^2} = \frac{T_d \omega}{\sqrt{1 + T_f^2 \omega^2}},$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \arctg \frac{T_d \omega}{T_d T_f \omega^2} = \arctg \frac{1}{T_f \omega} = 90^\circ - \arctg T_f \omega,$$

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg \frac{T_d \omega}{\sqrt{1 + T_f^2 \omega^2}} = 20 \lg T_d \omega - 20 \lg \sqrt{1 + T_f^2 \omega^2}.$$

Se variază $\omega = 0 \dots \infty$, se calculează și se construiesc funcțiile frecvențiale $P(\omega)$, $Q(\omega)$, $A(\omega)$, $L(\omega)$, $\varphi(\omega)$, care sunt reprezentate în figura 2.22, *b*)-*e*) (curbele 2): *b* – locul de transfer $H(j\omega)$, *c* – amplitudine-pulsație $A(\omega)$, *d* – caracteristica $L(\omega)$, *e* – fază-pulsație $\varphi(\omega)$.

Locul de transfer $H(j\omega)$ reprezintă o semicircumferință în cadranul unu (curba 2), care la valoarea $\omega = 0$ începe de la 0 și la $\omega = \infty$ are valoarea finală T_d/T_f . Caracteristica $A(\omega)$ prezintă curba 2 care are asimptota egală cu T_d/T_f . Caracteristica $L(\omega)$ (curba 2) este trasată din două segmente: primul segment este curba 1 – caracteristica derivatorului ideal, iar al doilea segment este asimptota paralelă axei absciselor, care se trasează din punctul cu coordonatele $(\lg T_f^{-1}, 20 \lg T_d/T_f)$. Caracteristica de fază $\varphi(\omega)$ prezintă curba 2, care cu creșterea lui $\omega = 0 \dots \infty$ defazajul este în descreștere de la 90° la 0.

Derivatorul real ca element dinamic în domeniul frecvență reprezintă un filtru trece-sus la valorile joase ale frecvenței $\omega = 0 \dots \omega_f$ ($\omega_f = 1/T_f$ – frecvența de frângere) și filtru cu bandă constantă la valorile înalte ale frecvenței $\omega \geq \omega_f$.

2.10.6 Element oscilant amortizator

Elementul oscilant amortizator se descrie cu ecuația diferențială de ordinul doi pe mărimea de ieșire de forma:

$$T^2\ddot{y}(t) + 2\xi T\dot{y}(t) + y(t) = kx(t), \quad (2.94)$$

unde $k > 0$ este coeficientul de transfer, $T > 0$ – constanta de timp cu dimensiunea secundă, 2 – o constantă, $\xi \geq 0$ – coeficientul (factorul) de amortizare adimensional.

În dependență de valorile lui ξ din (2.94) se obțin trei tipuri de elemente.

Element oscilant amortizator ($\xi < 1$), oscilant neamortizator ($\xi = 0$) și cu inerție de ordinul doi ($\xi \geq 1$).

Pentru elementul oscilant amortizator se prezintă modelele matematice.

Forma operațională și funcția de transfer:

$$y = \frac{k}{T^2p^2 + 2\xi Tp + 1} x, \quad B(p) = k, \quad A(p) = T^2p^2 + 2\xi Tp + 1, \quad (2.95)$$

$$\frac{y(s)}{x(s)} = H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{k}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1}, \quad B(s) = k, \quad (2.96)$$

$$A(s) = T^2s^2 + 2\xi Ts + 1 = 0,$$

care are doi poli p_1 și p_2 ca rădăcini complexe cu partea reală negativă.

Funcția de transfer are următoarea formă:

$$H(s) = \frac{k}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1} = k \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, \quad (2.97)$$

unde $\omega_n = 1/T$ este pulsația naturală a elementului.

Se soluționează ecuația pătratică:

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= \frac{-2\xi T \pm \sqrt{(2\xi T)^2 - 4T^2}}{2T^2} = \frac{-2\xi T \pm j2T\sqrt{1-\xi^2}}{2T^2} = \\ &= -\frac{\xi}{T} \pm j\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -\alpha \pm j\omega, \end{aligned} \quad (2.98)$$

unde partea reală $\alpha = \xi/T = \xi\omega_n$ este coeficientul de amortizare și partea imaginară $\omega = \sqrt{1-\xi^2}/T = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ – frecvența proprie de

stingere a oscilațiilor procesului indicial al elementului (rad/s).

Răspunsul indicial (fig. 2.23, a) și funcția pondere se descriu:

$$h(t) = k \left(1 - \frac{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}{\omega} e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi) \right) 1(t) =$$

$$= k1(t) + C e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi), \quad (2.99)$$

unde $C = -1(t) \frac{k1(t)\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}{\omega}$, $\varphi = \arctg\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) = \arcsin\omega T = \arccos\xi$,

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{k}{\omega T^2} e^{-\alpha t} \sin\omega t 1(t). \quad (2.100)$$

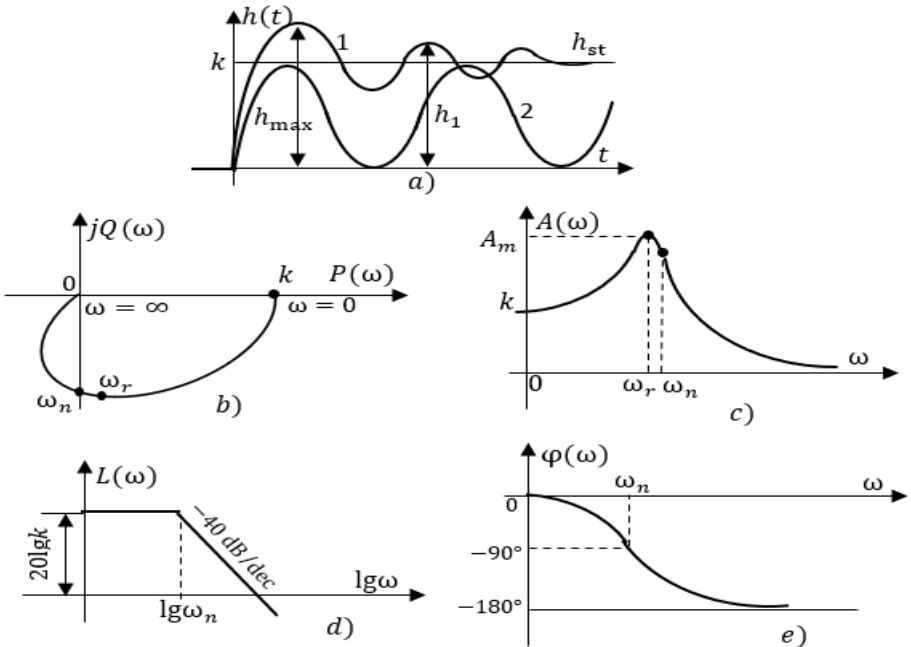


Fig. 2.23. Răspunsul indicial și caracteristicile frecvențiale ale elementului oscilant amortizator

Pentru determinarea vitezei de stingere a răspunsului indicial oscilator al elementului se utilizează factorul de amortizare:

$$\psi = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1} = 1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = (1 - e^{-\frac{2\pi}{\mu}})100 \%,$$

unde σ_1 și σ_2 sunt prima și a doua suprareglare a răspunsului $h(t)$.

Cu cât valoarea lui ψ tinde către 1, cu atât mai rapid se sting oscilațiile.

Funcțiile și caracteristicile frecvențiale:

$$H(j\omega) = \frac{k}{1-T^2\omega^2+j2\xi T\omega} \frac{1-T^2\omega^2-j2\xi T\omega}{1-T^2\omega^2-j2\xi T\omega} = P(\omega) - jQ(\omega),$$

$$P(\omega) = \frac{k(1-T^2\omega^2)}{(1-T^2\omega^2)^2+(2\xi T\omega)^2}, \quad Q(\omega) = \frac{-k2\xi T\omega}{(1-T^2\omega^2)^2+(2\xi T\omega)^2},$$

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \frac{k}{\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2+(2\xi T\omega)^2}}, \quad (2.101)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = -\arctg \frac{2\xi T\omega}{1-T^2\omega^2},$$

$$\begin{aligned} L(\omega) &= 20\lg A(\omega) = 20\lg \frac{k}{\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2+(2\xi T\omega)^2}} = \\ &= 20\lg k - 40\lg \sqrt{(1-T^2\omega^2)^2+(2\xi T\omega)^2}. \end{aligned}$$

Variind pulsația $\omega = 0 \dots \infty$ se calculează și se construiesc caracteristicile frecvențiale $P(\omega)$, $Q(\omega)$, $A(\omega)$, $L(\omega)$, $\varphi(\omega)$, care sunt reprezentate în figura 2.23, b)-e): b – locul de transfer $H(j\omega)$, c – amplitudine-pulsație $A(\omega)$, d – caracteristica logaritmică $L(\omega)$, e – fază-pulsație $\varphi(\omega)$.

Locul de transfer $H(j\omega)$ prezintă alura din cadranele 4 și 3, care la valoarea $\omega = 0$ începe pe axa absciselor la distanța k de la origine și la $\omega = \infty$ tinde la 0. La valoarea frecvenței nominale $\omega_n = 1/T$, locul de transfer intersectează semiaxa negativă a ordonatelor.

Caracteristica amplitudinii $A(\omega)$ la valoarea frecvenței de rezonanță:

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} = \sqrt{1 - 2\xi^2}/T$$

are valoarea maximă la valoarea lui $\xi < 0.707$ ($1 - 2\xi^2 > 0$):

$$A_{\max}(\omega_r) = k/2\xi\sqrt{1 - \xi^2}.$$

Din analiza ultimelor relații se constată că dacă se reduce valoarea lui ξ , atunci valorile frecvenței de rezonanță ω_r tind către valorile frecvenței nominale și amplitudinea $A_{\max}(\omega_r)$ are valori mai mari.

Caracteristica $L(\omega)$ la valori mici ale coeficientului de amortizare $0 < \xi < 1$ are rezonanță la valoarea $\lg\omega_n$ și este trasată din două segmente, care se intersectează în punctul cu coordonatele $(\lg\omega_n, 20\lg k)$: primul segment este dreapta paralelă axei ordonatelor la distanța $20\lg k$, iar al doilea segment cu panta -40dB/dec . Caracteristica de fază $\varphi(\omega)$, care cu creșterea lui $\omega = 0 \cdots \infty$ defazajul crește de la 0 la -180° .

Elementul oscilant amortizator este un filtru trece-jos pentru frecvențele joase, iar frecvențele înalte le filtrează.

Elementul oscilant neamortizator pentru care se prezintă modelele matematice când $\xi = 0$.

Forma operațională și funcția de transfer:

$$y = \frac{k}{T^2 p^2 + 1} x, B(p) = k, A(p) = T^2 p^2 + 1, \quad (2.102)$$

$$\frac{y(s)}{x(s)} = H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{k}{T^2 s^2 + 1}, \quad (2.103)$$

$$B(s) = k, A(s) = T^2 s^2 + 1 = 0,$$

care are doi poli p_1 și p_2 imaginari.

Se soluționează ecuația pătratică (2.103):

$$s^2 = -\frac{1}{T^2}, p_{1,2} = \sqrt{-\frac{1}{T^2}} = \pm j \frac{1}{T} = \pm j\omega, \quad (2.104)$$

Răspunsul indicial (fig. 2.23, a) prezintă oscilații neamortizate

cu frecvența nominală $\omega_n = \frac{1}{T}$:

$$h(t) = k \left(1 - \cos \frac{t}{T}\right) 1(t), \quad (2.105)$$

unde $\varphi = \arctg\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) = \arcsin \omega T = \arccos \xi$.

Funcția pondere se determină cu relația:

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{k}{T} \sin \frac{t}{T} 1(t). \quad (2.106)$$

Funcțiile și caracteristicile frecvențiale:

$$H(j\omega) = \frac{k}{1-T^2\omega^2} = P(\omega) - jQ(\omega),$$

$$P(\omega) = \frac{k}{1-T^2\omega^2}, \quad Q(\omega) = 0,$$

$$A(\omega) = \frac{k}{1-T^2\omega^2}, \quad (2.107)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = -\arctg \frac{0}{k/(1-T^2\omega^2)} = \begin{cases} 0, & \omega < \frac{1}{T}, \\ -180^\circ, & \omega > \frac{1}{T}, \end{cases}$$

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg \frac{k}{1-T^2\omega^2}.$$

Caracteristicile frecvențiale se obțin din caracteristicile elementului oscilant amortizator la condiția $\xi = 0$.

2.11 Element cu inerție de ordinul doi

Elementul cu inerție de ordinul doi ($\xi \geq 1$) se descrie prin ecuația diferențială de ordinul doi de forma:

$$T_1\ddot{y}(t) + T_2\dot{y}(t) + y(t) = kx(t), \quad (2.108)$$

unde $T_1 = T^2$ și $T_2 = 2\xi T$ sunt constante de timp.

Forma operațională și funcția de transfer:

$$y = \frac{k}{T_1 p^2 + T_2 p + 1} x, \quad B(p) = k, \quad A(p) = T_1 p^2 + T_2 p + 1, \quad (2.109)$$

$$\frac{y(s)}{x(s)} = H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{k}{T_1 p^2 + T_2 p + 1}, \quad (2.110)$$

$$B(s) = k, \quad A(s) = T_1 p^2 + T_2 p + 1 = 0.$$

Acest element are doi poli reali negativi p_1 și p_2 ca rădăcini reale negative ale ecuației caracteristice pătratice în condiția $T_2^2 > 4T_1$:

$$p_1 = \frac{-T_2 + \sqrt{T_2^2 - 4T_1}}{2T_2} - \frac{1}{T_3} = -\alpha_1, \quad p_2 = \frac{-T_2 - \sqrt{T_2^2 - 4T_1}}{2T_2} - \frac{1}{T_4} = -\alpha_2. \quad (2.111)$$

Elementul cu inerție de ordinul doi se realizează ca și conexiune serie a două elemente cu inerție de ordinul unu cu constantele de timp T_3 și T_4 cu f.d.t.:

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{k}{T_1 s^2 + T_2 s + 1} = \frac{k_1}{T_3 s + 1} \frac{k_2}{T_4 s + 1},$$

$$B(s) = k = k_1 k_2,$$

$$A(s) = (T_3 s + 1)(T_4 s + 1) = T_3 T_4 s^2 + (T_3 + T_4) s + 1$$

sau ca conexiune paralelă cu f.d.t. de forma:

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{T_3}{T_3 - T_4} \frac{k}{T_3 s + 1} - \frac{T_4}{T_3 - T_4} \frac{k}{T_4 s + 1}.$$

Răspunsul aperiodic de ordinul doi (fig. 2.24, a) se descrie:

$$h(t) = k \left(1 - \frac{T_3}{T_3 - T_4} e^{-t/T_3} + \frac{T_4}{T_3 - T_4} e^{-t/T_4} \right) 1(t), \quad (2.112)$$

unde primul termen reprezintă procesul permanent $y_p(t)$, iar termenii doi și trei reprezintă procesul tranzitoriu $y_t(t) = y_l(t)$.

Funcția pondere a elementului este:

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{k}{T_3 - T_4} (e^{-t/T_3} - e^{-t/T_4}) 1(t). \quad (2.113)$$

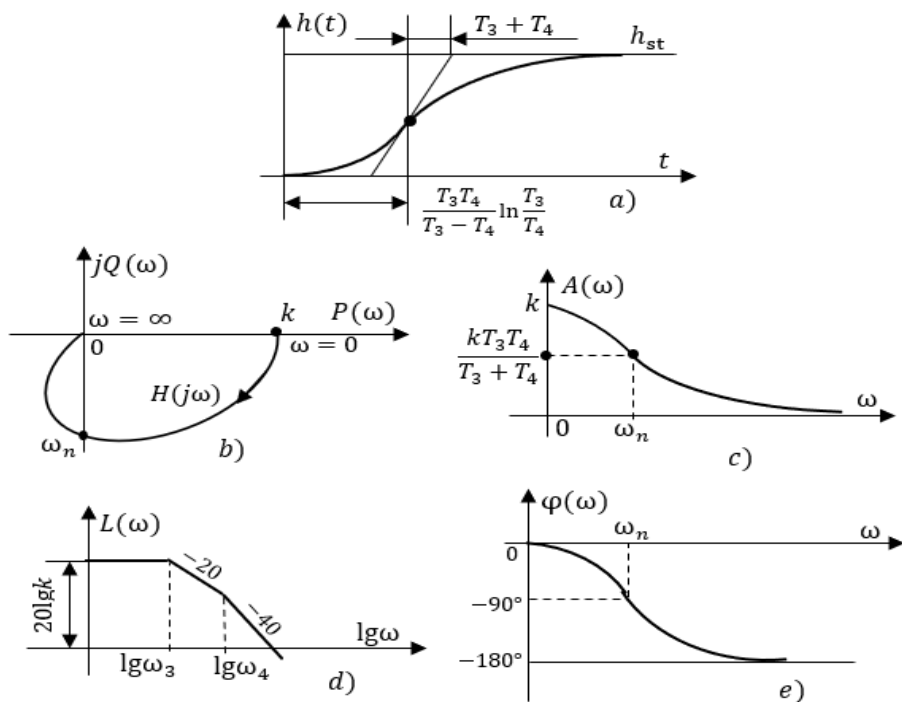


Fig. 2.24. Răspunsul indicial și caracteristicile frecvențiale ale elementului cu inerție de ordinul doi

Variind pulsația $\omega = 0 \dots \infty$ se calculează și se construiesc caracteristicile frecvențiale $P(\omega)$, $Q(\omega)$, $A(\omega)$, $L(\omega)$, $\varphi(\omega)$, care sunt reprezentate în figura 2.23, b)-e): b – locul de transfer $H(j\omega)$, c –

amplitudine-pulsație $A(\omega)$, d – caracteristica logaritmică $L(\omega)$, e – fază-pulsație $\varphi(\omega)$.

Locul de transfer $H(j\omega)$ prezintă alura din cadranele 4 și 3, care la valoarea $\omega = 0$ începe pe axa absciselor la distanța k de la origine și la $\omega = \infty$ tinde la 0. La valoarea frecvenței nominale $\omega_n = 1/T$, locul de transfer intersectează semiaxa negativă a ordonatelor.

Caracteristica $L(\omega)$ este trasată din trei segmente: primul segment are unghiul zero (dreapta $20\lg k$), al doilea segment dreapta cu unghiul -20 dB/dec, al treilea segment dreapta cu unghiul -40 dB/dec.

Caracteristica de fază $\varphi(\omega)$ cu creșterea lui $\omega = 0 \dots \infty$ defazajul crește de la 0 la -180° .

Elementul cu inerție de ordinul doi este un filtru trece-jos pentru frecvențele joase, iar frecvențele înalte le filtrează.

2.12 Element cu timp mort

Pentru a descrie elementele și procesele complexe, la cele 5 elemente dinamice de bază se adăugă *elementul cu timpul mort*.

Elementul cu timpul mort se descrie prin ecuația diferențială de ordinul zero pe mărimea de ieșire și mărimea de intrare de forma:

$$y(t) = kx(t - \tau), \quad (2.114)$$

unde $k > 0$ este coeficientul de transfer, $\tau > 0$ - timp mort exprimat în secunde, pe durata căruia semnalul de ieșire este egal cu zero.

Timpul mort se datorează vitezei de propagare a semnalului în diferite medii naturale sau dispozitive (de exemplu, transmiterea căldurii, deplasarea fluidelor pe conducte etc.).

Timpul mort poate să conțină două componente: timpul de transport τ_t al semnalului datorită parcurgerii distanțelor cu viteze reduse de propagare și timpul transformărilor fizico-chimice τ_{tr} în transmiterea răspunsului la semnalul de intrare.

În cazurile când elementele și procesele posedă inerție mare, atunci modelul matematic al răspunsului conține componenta timpului mort, care se apreciază ca $0 \dots 10$ % din valoarea mărimii de ieșire.

Forma operațională și funcția de transfer:

$$y = e^{-\tau p} x, B(p) = e^{-\tau p}, A(p) = 1, \quad (2.115)$$

unde operatorul $B(p) = e^{-\tau p}$ este o funcție transcendentă,

$$\frac{y(s)}{x(s)} = H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = ke^{-\tau s}, B(s) = ke^{-\tau s}, A(s) = 1, \quad (2.116)$$

unde $e^{-\tau s}$ este o funcție transcendentă (infini dimensională), care conduce la operații dificile de realizabilitate fizică [1,4, 8,11,13, 18, 21].

Pentru a obține funcții raționale finit dimensionale, termenul $e^{-\tau s}$ se aproximează, utilizând o metodă din cele trei existente.

Prima metodă constă în prezentarea termenului transcendent în serie cu limitarea lui n de forma:

$$e^{-\tau s} \approx 1 - \tau s + \frac{\tau^2}{2!} s^2 - \frac{\tau^3}{3!} s^3 + \frac{\tau^4}{4!} s^4 - \dots + \frac{\tau^{2n}}{(2n)!} s^{2n} + \dots \quad (2.117)$$

A doua metodă utilizează aproximațiile Pade uzuale de ordinul (1+1), (2+0), (2+1) și (2+2):

$$\begin{aligned} 1) e^{-\tau s} &\approx \frac{1 - \frac{\tau}{2}s}{1 + \frac{\tau}{2}s}, & 2) e^{-\tau s} &\approx \frac{1}{1 + \tau s + \frac{\tau^2}{2}s^2}, \\ 3) e^{-\tau s} &\approx \frac{1 - \frac{\tau}{3}s}{1 + \frac{2\tau}{3}s + \frac{\tau^2}{6}s^2}, & 4) e^{-\tau s} &\approx \frac{1 - \frac{\tau}{2}s + \frac{\tau^2}{12}s^2}{1 + \frac{\tau}{2}s + \frac{\tau^2}{12}s^2}. \end{aligned} \quad (2.118)$$

A treia variantă de realizare a funcției transcendente este aproximația cu limitarea lui n de forma:

$$e^{-\tau s} \approx \frac{1}{(1 + \tau s)^n}. \quad (2.119)$$

Utilizând metoda operațională pe o cale simplificată, se obțin

funcțiile de transfer raționale ale elementelor și sistemelor automate.

Răspunsul indicial (fig. 2.25, a) și funcția pondere se descriu:

$$h(t) = k1(t - \tau), \quad (2.120)$$

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = k\delta(t - \tau). \quad (2.121)$$

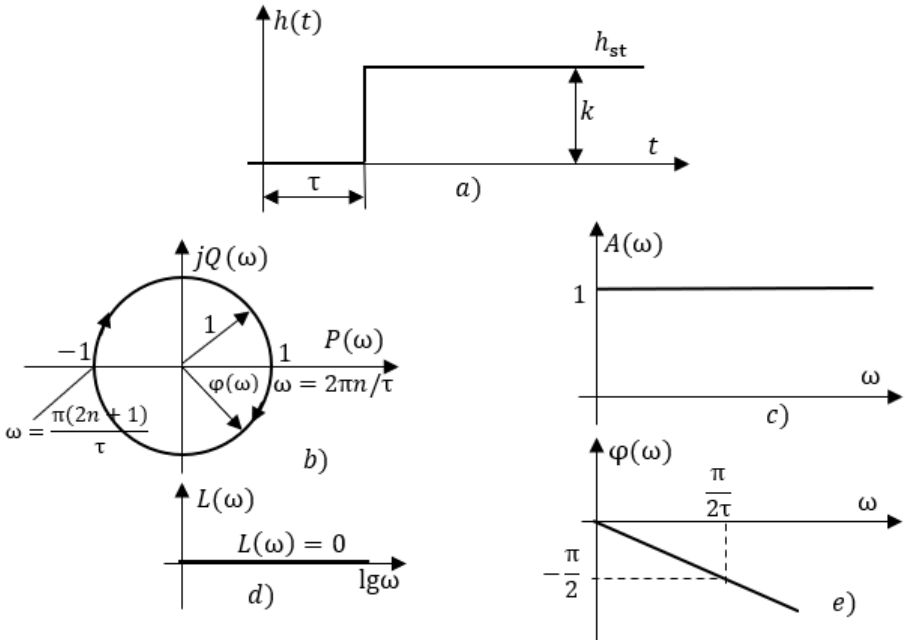


Fig. 2.25. Răspunsul indicial și caracteristicile frecvențiale ale elementului cu timp mort

Funcțiile și caracteristicile frecvențiale:

$$H(j\omega) = e^{-\tau j\omega} = \cos\omega\tau - j\sin\omega\tau = P(\omega) - jQ(\omega),$$

$$P(\omega) = \cos\omega\tau, \quad Q(\omega) = -\sin\omega\tau,$$

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \sqrt{\cos^2\omega\tau + \sin^2\omega\tau} = 1, \quad (2.122)$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \operatorname{arctg} \frac{-\sin\omega\tau}{\cos\omega\tau} = -\omega\tau,$$

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg 1 = 0.$$

Variind pulsația $\omega = 0 \cdots \infty$, se calculează și se construiesc caracteristicile frecvențiale $P(\omega)$, $Q(\omega)$, $A(\omega)$, $L(\omega)$, $\varphi(\omega)$, care sunt reprezentate în figura 2.25, b)-e): b – locul de transfer $H(j\omega)$, c – amplitudine-pulsație $A(\omega)$, d – caracteristica logaritmică $L(\omega)$, e – fază-pulsație $\varphi(\omega)$.

Locul de transfer $H(j\omega)$ prezintă o circumferință cu centrul în origine cu raza unitară ($k = 1$). La valoarea lui $\omega = \pi 2n/\tau$ modulul $|H(j\omega)| = 1$, iar la valoarea lui $\omega = \pi(2n + 1)/\tau$ modulul $|H(j\omega)| = -1$. Fiecărui punct al locului de transfer îi corespund o infinitate de frecvențe.

Caracteristica $A(\omega)$ la variația $\omega = 0 \cdots \infty$ are amplitudinea $A = 1$, care reprezintă o dreaptă paralelă axei absciselor. Caracteristica $L(\omega)$ are valoarea $L(\omega) = 0$ și se suprapune pe axa absciselor. Caracteristica de fază $\varphi(\omega)$ este proporțională pulsației ω și reprezintă o dreaptă în cadranul 4, care începe din origine. La valoarea lui $\omega = \pi/2\tau$ defazajul este de -90° .

Din elementele tipice 1–6, prin adăugarea și altor componente din (2.58) și elementului cu timp mort se obținut și alte elemente dinamice cu diferite proprietăți.

Constantele de tipul k , T , ξ , τ , prezente în ecuațiile diferențiale ale elementelor tipice 1–7, se numesc parametrii elementelor dinamice.

Exemple de elemente tipice care conțin timpul mort:

1. Element cu inerție de ordinul unu cu timp mort:

$$T\dot{y}(t) + y(t) = kx(t - \tau).$$

2. Element integrator cu timp mort:

$$y(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^T x(t - \tau) dt.$$

3. Element oscilant amortizator cu timp mort:

$$T^2\ddot{y}(t) + 2\xi T\dot{y}(t) + y(t) = kx(t - \tau).$$

4. Element cu anticipație-întârziere:

$$T_1\dot{y}(t) + y(t) = (T_2\dot{x}(t) + x(t)).$$

Dacă $T_2 > T_1$, atunci elementul are acțiune derivativă, iar când $T_2 < T_1$ – are acțiune integratoare-inerție și când $T_2 = T_1$ este element proporțional, k – coeficient de transfer.

2.13 Relațiile răspunsului indicial cu funcția pondere și funcția de transfer

În continuare, pornind de la ecuația diferențială a elementului sau a sistemului, se expune procedura de determinare a proceselor indiciale, funcției pondere și a răspunsului elementelor sau sistemelor la un semnal de intrare generalizat.

Se consideră sistemul automat cu condiții inițiale nule, asupra căruia acționează semnalul de intrare treaptă unitară $r(s) = 1(s)$, care se descrie prin funcția de transfer de forma:

$$H(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}, \quad m \leq n, \quad (2.123)$$

unde coeficienții din (2.123) exprimă proprietățile sistemului, iar $m \leq n$ este condiția de realizabilitate fizică sau efectul nonanticipație al sistemului.

Deoarece f.d.t. $H(s)$ este o funcție rațională ca raportul a două polinoame cu coeficienții reali și aceasta se prezintă și în formă factorizată:

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{a_n \prod_{i=1}^n (s - p_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{B(p_i)}{A'(p_i)(s - p_i)} =$$

$$= \frac{B(0)}{A(0)} + \sum_{i=1}^n \frac{p_i B(p_i)}{p_i \dot{A}(p_i)(s-p_i)}. \quad (2.124)$$

Dacă polinomul $B(s) = 0$ are z_j ($j = \overline{1, m}$) rădăcini distincte, care prezintă zerourile lui $H(s)$ și polinomul are formă factorizată $B(s) = b_m \prod_{j=1}^m (s - z_j)$ și modelează operații de amplificare și derivare. În esență, acesta are un efect de amplificare-anticipare a mărimii de ieșire raportată la mărimea de intrare (exprimă proprietățile de anticipație în sistem).

Dacă ecuația $A(s) = 0$ are p_i ($i = \overline{1, n}$) rădăcini distincte, care sunt polii lui $H(s)$, atunci polinomul se prezintă în forma factorizată $A(s) = a_n \prod_{i=1}^n (s - p_i)$, iar inversul acestui polinom modelează numai operații pe integrare. În raportul transferului temporal intrare-ieșire operațiile de integrare au un efect de întârziere a mărimii de ieșire față de mărimea de intrare (datorită proprietăților interne de inerție).

În sistemele reale principiul nonanticipării, conform căruia efectul nu anticipează cauza, în f.d.t. a sistemului $H(s)$ operatorul bazat pe integrare $A(s)$ trebuie să fie dominant în raport cu operatorul de amplificare-derivare $B(s)$.

Din (2.123) se prezintă mărimea de ieșire în forma operațională:

$$h(s) = H(s)r(s) = H(s)1(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \frac{1}{s} = \frac{B(s)}{sA(s)}, \quad (2.125)$$

unde semnalul treaptă unitară în transformata Laplace este $1(s) = 1/s$.

Răspunsul indicial $h(t)$ al sistemului (2.125) la acțiunea intrării treaptă unitară $1(t)$ se determină prin transformata Laplace inversă:

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{B(s)}{sA(s)} \right\}. \quad (2.126)$$

Dacă ecuația caracteristică a sistemului $A(s) = 0$ are n rădăcini distincte p_i , atunci răspunsul indicial $h(t)$ din (2.126) al sistemului în condiții inițiale nule se calculează prin relația:

$$h(t) = \sum_{i=1}^n \frac{B(p_i)}{p_i \dot{A}(p_i)} (e^{p_i t} - 1) 1(t) = \left[\frac{B(0)}{A(0)} + \sum_{i=1}^n \frac{B(p_i)}{p_i \dot{A}(p_i)} e^{p_i t} \right] 1(t). \quad (2.127)$$

Prima componentă din (2.127) reprezintă regimul staționar:

$$h_p(t)_{t=\infty} = h_{st} = H(s)_{s=0} = \frac{B(0)}{A(0)},$$

iar a doua componentă reprezintă regimul tranzitoriu:

$$h_l(t) = h(t) - h_{st} = L^{-1} \left[\frac{H(s) - H(0)}{s} \right] = \sum_{i=1}^n \frac{B(p_i)}{p_i A'(p_i)} e^{p_i t}.$$

Funcția pondere a sistemului se calculează cu derivata de la procesul indicial (2.127) și se obține expresia:

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{B(p_i)}{A'(p_i)} e^{p_i t} 1(t). \quad (2.128)$$

Din cele expuse, rezultă că în relația (2.127) polii p_i lui $H(s)$ au un rol determinant în evoluția răspunsului sistemului pe durata regimului tranzitoriu. La o mărime de intrare $r(s)$ oarecare, mărimea de ieșire $y(s)$ depinde și de polii finiți ai imaginii $r(s)$.

Se consideră că mărimea de referință $r(t)$ este o combinație liniară de funcții de forma $r(t) = t^k e^{\alpha t}$ și se reprezintă prin relația:

$$r(t) = r_0 e^{\alpha t} 1(t), \quad (2.129)$$

iar transformata Laplace este:

$$r(s) = r_0 / (s - \alpha), \quad (2.130)$$

unde polul α și amplitudinea r_0 sunt doi parametri, valorile cărora se aleg conform necesităților de funcționare ale sistemului automat.

În acest caz, răspunsul (2.127) în domeniul timpului are forma:

$$h(t) = \left(\sum_{k=1}^n c_k e^{p_k t} \right) 1(t) + d e^{\alpha t} 1(t) = y_l(t) + y_p(t), \quad (2.131)$$

unde coeficienții c_k și d se calculează prin relațiile:

$$c_k = \lim_{s \rightarrow p_k} (s - p_k)H(s)r(s) = \frac{b_0 \prod_{j=1}^m (p_k - z_j)}{a_0 \prod_{i=1}^n (p_k - p_i)} \frac{r_0}{p_k - \alpha}, \quad k = \overline{1, n},$$

$$d = \lim_{s \rightarrow \alpha} (s - \alpha)H(s)r(s) = \frac{b_0 \prod_{j=1}^m (\alpha - z_j)}{a_0 \prod_{i=1}^n (\alpha - p_i)} r_0.$$

Componenta $y_l(t)$ reprezintă regimul tranzitoriu (echilibrul energetic intern) ca răspuns la semnalul de intrare, evoluția temporală a căreia se determină de exponențele $e^{p_k t}$, $k = \overline{1, n}$, conform polilor finiți ai lui $H(s)$ și de coeficienții c_k , $k = \overline{1, n}$, care depind de zerourile și de polii lui $H(s)$ și de polul lui $r(s)$.

Componenta forțată $y_f(t) = y_p(t)$ reprezintă regimul permanent, evoluția temporală a căreia se determină de exponenta $e^{\alpha t}$ (există și în $r(s)$) și de coeficientul d , care depinde de zerourile și de polii lui $H(s)$ și reprezintă expresia dinamică a ieșirii, reproducând semnalul de intrare.

Dacă este cunoscută funcția de transfer (2.123) a sistemului automat în condiții inițiale nenule:

$$y_0(s) = \frac{D(s)}{A(s)} \quad (2.132)$$

și semnalul de intrare este prezentat de o funcție rațională de forma:

$$r(s) = \frac{B_r(s)}{A_r(s)}, \quad (2.133)$$

atunci răspunsul sistemului în condiții inițiale nenule din (2.132) și (2.133) în forma operațională este:

$$y(s) = H(s)r(s) + y_0(s) = \frac{B(s) B_r(s)}{A(s) A_r(s)} + \frac{D(s)}{A(s)} = \frac{B_y(s)}{A_y(s)} + \frac{D(s)}{A(s)}, \quad (2.134)$$

unde polinomul $D(s) = \sum_{i=0}^{n-1} d_i s^i$ reprezintă polinomul condițiilor inițiale nenule.

Răspunsul $y(t)$ al sistemului la acțiunea semnalului de intrare $r(t)$ se determină cu ajutorul transformatei Laplace inversă în forma:

$$y(t) = L^{-1}\{y(s)\}. \quad (2.135)$$

Pentru ecuațiile diferențiale liniare și semnalele de intrare tipice mărimea de ieșire a sistemului $y(s)$ este o funcție rațională, care poate fi dezvoltată în fracții și în condiții inițiale nule are forma:

$$y(s) = \frac{B_y(s)}{A_y(s)} = \sum_{i=1}^{n_y} \frac{B_y(p_i)}{A_y(p_i)} \frac{1}{s-p_i} = \sum_{i=1}^{n_y} \frac{c_i}{s-p_i}, \quad (2.136)$$

unde $\dot{A}_y(s) = \frac{dA_y(s)}{ds}$ în condiția $s = p_i$, p_i - polii distincți, iar coeficienții $c_i = \frac{B_y(p_i)}{\dot{A}_y(p_i)}$.

Originalul $y(t)$ conform relației (2.136) are forma:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n_y} c_i e^{p_i t}. \quad (2.137)$$

Răspunsul sistemului pentru (2.131) în condiții inițiale nenule se calculează prin expresia:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \frac{B(p_i)B_r(p_i)}{\dot{A}(p_i)A_r(p_i)} e^{p_i t} + \sum_{k=1}^{n_r} \frac{B(p_k)B_r(p_k)}{A(p_k)\dot{A}_r(p_k)} e^{p_k t} + \sum_{i=1}^n \frac{D(p_i)}{\dot{A}(p_i)} e^{p_i t} = \\ = y_l(t) + y_f(t) + y_0(t). \quad (2.138)$$

unde $p_i, i = \overline{1, n}$, sunt polii lui $H(s)$, iar $p_k, k = \overline{1, n}$, sunt polii imaginii lui $r(s)$, dar se respectă condiția $p_i \neq p_k$ (nu există rezonanță).

Răspunsul (2.138) este suma a trei componente.

1. Prima sumă reprezintă componenta regimului tranzitoriu $y_l(t)$, evoluția temporală a căreia se determină de exponențele $e^{p_i t}$ conform polilor finiți ai lui $H(s)$ în condiții inițiale nule și de coeficienții c_i , care depind de polii lui $H(s)$ și $r(s)$.

2. Suma a doua reprezintă componenta regimului permanent

$y_p(t)$, evoluția temporală a căreia se determină de exponențele $e^{p_k t}$ conform polilor finiți ai lui $r(s)$ și de coeficienții c_k , care depind de polii lui $H(s)$ și $r(s)$.

3. A treia sumă reprezintă componenta regimului tranzitoriu $y_0(t)$ datorită condițiilor inițiale nenule, evoluția temporală a căreia se determină de exponențele $e^{p_i t}$ conform polilor finiți ai lui $H(s)$ și de coeficienții c_i , care depind de polii lui $H(s)$ și de polinomul condițiilor inițiale $D(s)$.

Se prezintă trei exemple de soluționare a ecuației diferențiale de ordinul doi și determinarea procesului indicial, aplicând metoda clasică și metoda operațională.

Exemplul 2.8. Se dă ecuația diferențială de ordinul doi care descrie elementul dinamic oscilant amortizator în condiții inițiale nule (2.94):

$$T^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\xi T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t),$$

iar în formă operațională:

$$(T^2 p^2 + 2\xi T p + 1)y = kx.$$

Se cere să se soluționeze ecuația diferențială, utilizând metoda clasică și operațională.

Soluționare. Soluția generală a ecuației diferențiale de ordinul doi este:

$$y(t) = y_l(t) + y_f(t).$$

unde $y_l(t)$ este componenta liberă a soluției ecuației diferențiale omogene care descrie regimul dinamic, iar $y_f(t)$ - componenta forțată a soluției ecuației diferențiale neomogene care reprezintă regimul staționar y_{st} .

Ecuația caracteristică a ecuației diferențiale omogene:

$$T^2 p^2 + 2\xi T p + 1 = 0,$$

iar rădăcinile acesteia au forma:

$$p_{1,2} = \frac{-2\xi T \pm \sqrt{4\xi^2 T^2 - 4T^2}}{2T^2} = -\frac{\xi}{T} \pm \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{T} = -\frac{\xi}{T} \pm j \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T} = -\alpha \pm j\omega,$$

unde $\alpha = \frac{\xi}{T} = \omega\xi$ este coeficientul de amortizare, $\omega_0 = \sqrt{1 - \xi^2}/T = \omega\sqrt{1 - \xi^2}$ -

pulsația proprie de stingere a oscilațiilor (rad/s) răspunsului indicial al elementului, $\omega = 1/T$ – pulsația nominală.

Elementul este oscilant amortizator dacă $0 < \xi < 1$ și, deci, se obține $\xi^2 < 1$ și rădăcinile sunt complexe de forma:

$$p_1 = -\alpha + j\omega, \quad p_2 = -\alpha - j\omega,$$

iar procesul tranzitoriu este oscilant amortizat.

Dacă $\xi = 0$, elementul este oscilant neamortizator și rădăcinile sunt imaginare:

$$p_1 = j\frac{1}{T}, \quad p_2 = -j\frac{1}{T},$$

iar răspunsul este oscilant neamortizat.

Când $\xi \geq 1$ ($4\xi^2 T^2 > 4T^2$ sau $\xi^2 > 1$) este element cu inerție (întârziere) de ordinul doi, care poate fi reprezentat de două elemente cu inerție de ordinul unu înseriate și rădăcinile sunt reale, având forma:

$$p_1 = -\frac{\xi}{T} + \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{T} = -\alpha_1, \quad p_2 = -\frac{\xi}{T} - \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{T} = -\alpha_2,$$

iar răspunsul este aperiodic de ordinul doi.

Soluția ecuației diferențiale omogene se prezintă în forma:

$$y_l(t) = c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t},$$

unde c_1 și c_2 sunt constante necunoscute și depind de condițiile inițiale.

Soluția ecuației diferențiale neomogene este:

$$y_f(t) = k1(t).$$

Soluția generală a ecuației diferențiale de ordinul doi cu componentele $y_l(t)$ și $y_f(t)$ se prezintă de procesul indicial ca răspuns la semnalul de intrare treaptă unitară:

$$h(t) = y_l(t) + y_f(t) = \underbrace{c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t}}_{y_l(t)} + \underbrace{k1(t)}_{y_f(t)}.$$

Pentru determinarea constantelor necunoscute c_1 și c_2 se construiește sistemul din două ecuații algebrice din care se calculează aceste constante.

Prima ecuație algebrică se obține din expresia procesului indicial în condițiile inițiale nule când $t = 0$:

$$h(t)|_{t=0} = c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t} + k1(t) = c_1 + c_2 + k = 0.$$

A doua ecuație algebrică se obține prin derivarea expresiei $h(t)$ în condițiile inițiale nule:

$$\dot{h}(t)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t} + k1(t)) = c_1 p_1 + c_2 p_2 = 0.$$

Se determină constantele c_1 și c_2 din sistemul din două ecuații algebrice:

$$c_1 + c_2 + k = 0,$$

$$c_1 p_1 + c_2 p_2 = 0,$$

obținând expresiile constantelor:

$$c_1 = -\frac{kp_2}{p_1 - p_2}, \quad c_2 = \frac{kp_1}{p_1 - p_2}.$$

Răspunsul indicial are forma:

$$h(t) = k1(t) + c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t} = k\left(1 - \frac{p_2}{p_2 - p_1} e^{p_1 t} + \frac{p_1}{p_2 - p_1} e^{p_2 t}\right)1(t).$$

Dacă rădăcinile ecuației diferențiale sunt complexe, atunci răspunsul indicial este oscilant amortizat și se descrie prin relația:

$$\begin{aligned} h(t) &= c_1 e^{(-\alpha + j\omega)t} + c_2 e^{(-\alpha - j\omega)t} + k1(t) = \\ &= k1(t)\left(1 - e^{-\alpha t} \frac{1}{\omega}(\omega \cos \omega t + \alpha \sin \omega t)\right) = \\ &= k\left(1 - \frac{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}{\omega} e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi)\right)1(t) = k1(t) + C e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi), \end{aligned}$$

unde $C = -\frac{k1(t)\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}{\omega}$, $\varphi = \arctg\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) = \arcsin \omega T = \arccos \xi$.

Când ecuația diferențială a elementului cu inerție de ordinul doi are forma:

$$T_1 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t),$$

atunci ecuația caracteristică este:

$$T_1 p^2 + T_2 p + 1 = (T_3 p + 1)(T_4 p + 1) = 0$$

și rădăcinile sunt reale:

$$p_1 = -\alpha_1 = -\frac{1}{T_3}, p_2 = -\alpha_2 = -\frac{1}{T_4}.$$

În acest caz, procesul indicial are forma:

$$h(t) = k \left(1 - \frac{T_3}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_3}} + \frac{T_4}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_4}} \right) 1(t),$$

unde primul termen reprezintă procesul permanent $y_p(t)$, iar termenii doi și trei reprezintă procesul tranzitoriu $y_t(t) = y_l(t)$.■

Caracterul răspunsului indicial depinde de tipul rădăcinilor, care pot fi reale, imaginare sau complexe.

Elementul oscilant amortizator și elementul cu inerție de ordinul doi au proprietăți comune ca statism și inerție, dar procesele tranzitorii ale acestora diferă esențial unul de altul. Pentru elementul oscilant amortizator procesul indicial este oscilant amortizant (rădăcinile complexe), iar pentru elementul cu inerție de ordinul doi procesul este aperiodic (rădăcinile reale).

Metoda de soluționare a ecuației diferențiale de ordin ridicat, utilizând procedura menționată, devine dificilă. Pentru simplificarea procedurilor de soluționare a ecuațiilor diferențiale se aplică procedurile de calcul al funcțiilor temporale prin aplicarea transformatei Laplace inversă expresiei funcției de transfer reprezentată prin fracții elementare care reprezintă metoda operațională [1, 4, 8, 11-13, 18, 21, 22].

Exemplul 2.9. Se consideră sistemul automat descris prin funcția de transfer cu datele numerice de forma:

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{2}{s^2 + 3s + 2}.$$

Se cere să se calculeze expresia răspunsului indicial și a funcției pondere a sistemului prin metoda operațională.

Soluționare. Se calculează rădăcinile ecuației caracteristice ale sistemului:

$$A(s) = s^2 + 3s + 2 = 0$$

și se obțin rădăcinile $p_1 = -1, p_2 = -2$, care sunt și poliul lui $H(s)$.

Expresia operațională a procesului indicial $h(s)$ al sistemului la intrarea

căruia acționează semnalul treaptă unitară $1(s) = 1/s$ se prezintă în fracții elementare (2.125):

$$\begin{aligned} h(s) &= H(s)1(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \frac{B_r(s)}{A_r(s)} = \frac{B_h(s)}{A_h(s)} = \frac{2}{s^2+3s+2} \frac{1}{s} = \\ &= \frac{2}{s^3+3s^2+2s} = \frac{2}{(s+1)(s+2)} \frac{1}{s} = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s+1} + \frac{c_3}{s+2}. \end{aligned}$$

Se calculează coeficienții necunoscuți c_1, c_2, c_3 pentru rădăcinile ecuației caracteristice a sistemului $p_1 = 0, p_2 = -1, p_3 = -2$ după relațiile:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{B_h(s)}{A_h(s)} = \frac{2}{3s^2+6s+2} \Big|_{p_1=0} = 1, \quad c_2 = \frac{B_h(s)}{A_h(s)} = \frac{2}{3s^2+6s+2} \Big|_{p_2=-1} = -2, \\ c_3 &= \frac{B_h(s)}{A_h(s)} = \frac{2}{3s^2+6s+2} \Big|_{p_3=-2} = 1, \end{aligned}$$

unde $\dot{A}_h(s) = \frac{dA_h(s)}{ds}$.

Expresia operațională a procesului indicial $h(s)$ a sistemului cu coeficienții calculați are forma:

$$h(s) = \frac{c_1}{s-p_1} + \frac{c_2}{s-p_2} + \frac{c_3}{s-p_3} = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s+1} + \frac{c_3}{s+2} = \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2}.$$

Pentru fiecare componentă a expresiei operaționale a lui $h(s)$ se determină transformata Laplace inversă după anexa 1 și se obține răspunsul indicial în forma:

$$h(t) = 1(t) - 2e^{-t} + e^{-2t}.$$

Se determină funcția pondere a sistemului, derivând răspunsul indicial:

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(1 - 2e^{-t} + e^{-2t}) = 2e^{-t} - 2e^{-2t}. \blacksquare$$

Exemplul 2.10. Se consideră f.d.t. a sistemului din exemplul 2.9 căreia îi corespunde ecuația diferențială din exemplul 2.8 care descrie elementul cu inerție de ordinul doi:

$$H(s) = \frac{2}{s^2+3s+2}.$$

Se cere să se determine parametrii elementului coeficientul de transfer k , constantele de timp T_1, T_2 , expresiile analitice ale răspunsului indicial $h(t)$ și funcției pondere $w(t)$.

Soluționare. Funcția de transfer se aduce la forma standard, împărțind toți termenii la 2 și introducând notările respective:

$$H(s) = \frac{2}{s^2+3s+2} = \frac{1}{0.5s^2+1.5s+1} = \frac{k}{T_1s^2+T_2s+1},$$

unde parametrii ecuației diferențiale sunt: $k = 1, T_1 = 0.5, T_2 = 1.5$.

Se determină rădăcinile ecuației caracteristice de gradul doi:

$$T_1p^2 + T_2p + 1 = 0,$$

$$p_{1,2} = \frac{-T_2 \pm \sqrt{T_2^2 - 4T_1}}{2T_1} = \frac{-1.5 \pm \sqrt{2.25 - 4 \cdot 0.5}}{2 \cdot 0.5} = \frac{-1.5 \pm 0.5}{1},$$

$$p_1 = -1 = -\frac{1}{T_3}, p_2 = -2 = -\frac{1}{T_4},$$

de unde se determină constantele de timp cu valorile $T_3 = 1, T_4 = 0.5$.

Se calculează răspunsul indicial după expresia din exemplul 2.8 și se obține:

$$\begin{aligned} h(t) &= k \left(1 - \frac{T_3}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_3}} + \frac{T_4}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_4}} \right) 1(t) = \\ &= 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{1-0.5} e^{-t} + \frac{0.5}{1-0.5} e^{-2t} \right) \cdot 1 = 1 - 2e^{-t} + e^{-2t}, \end{aligned}$$

care este aceeași expresie a răspunsului indicial ca și în exemplul 2.8.

Se determină funcția pondere a elementului:

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (1 - 2e^{-t} + e^{-2t}) = 2e^{-t} - 2e^{-2t}.$$

Expresiile analitice ale răspunsului $h(t)$ și funcției pondere $w(t)$ obținute sunt aceleași ca și în exemplul 2.9 și caracterizează dinamica elementului cu inerție de ordinul doi din exemplul 2.8. ■

Expresiile analitice ale răspunsurilor indiciale și funcțiilor pondere ale elementelor tipice sunt incluse în anexa 2.

2.14 Elemente dinamice cu proprietăți specifice

Elementele dinamice tipice 1-6, analizate mai sus, se descriu prin ecuații integro-diferențiale liniare cu parametrii concentrați și se

numesc elemente de fază minimă (stabile) [1, 4, 8, 11-13, 18].

Definiție. Elementul dinamic tipic este de fază minimă (stabil), dacă toate rădăcinile ecuației caracteristice $A(s) = 0$ ale acestuia sunt negative.

Exemplul 2.11. Se dau elementele tipice cu inerție de ordinul unu și doi cu f.d.t. și parametrii:

$$H_1(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1} = \frac{5}{10s + 1}, H_2(s) = \frac{k_2}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1} = \frac{4}{2^2 s^2 + 2 \cdot 2s + 1}.$$

Se cere să se demonstreze că aceste elemente sunt de fază minimă (stabile).

Soluționare. Se calculează rădăcinile ecuațiilor caracteristice:

$$A_1(s) = T_1 s + 1 = 10s + 1 = 0$$

și se obține rădăcina negativă $s_1 = -1/T_1 = -\frac{1}{10} = -0.1$,

$$A_2(s) = T_1 s^2 + T_2 s + 1 = 4s^2 + 8s + 1 = 0$$

și se obțin rădăcinile negative $s_1 = -\frac{14.93}{8} = -1.8663$, $s_2 = -\frac{1.37}{8} = -0.1713$.

Conform definiției, elementele analizate au rădăcinile negative și sunt de fază minimă (stabile).■

Însă în practică există diverse procese și elemente cu parametrii distribuiți în spațiu (de exemplu, cuptoarele termice industriale cu transfer caloric, reactoarele și coloanele cu transfer de masă etc.) care se descriu prin ecuații diferențiale cu derivate parțiale, ce se aproximează cu ecuații diferențiale cu parametrii concentrați cu timp mort, ecuații cu termeni iraționali și expresii transcendente și se aproximează ca elemente dinamice descrise cu funcții de transfer cu proprietăți specifice: cu timp mort, iraționale, instabile, cu fază neminimă.

Se evidențiază elementele dinamice cu proprietăți specifice:

1. *Element cu timp mort* care este termen transcendent și a fost expus în p. 2.12.

2. *Elemente iraționale* tipice. Procese și elemente cu parametrii distribuiți în spațiu, care se descriu prin ecuații diferențiale cu derivate parțiale, modelele matematice ale cărora se aproximează și se prezintă cu funcții de transfer ca expresii iraționale de forma:

$$H(s) = \frac{k}{\sqrt{Ts}}, H(s) = \frac{k}{1+\sqrt{Ts}}, H(s) = e^{-\sqrt{Ts}}. \quad (2.139)$$

Prima funcție de transfer reprezintă elementul integrator, a doua funcție de transfer descrie un element cu inerție de ordinul unu și a treia funcție de transfer este element cu timp mort, în care există termenul transcendent e și irațional - radicalul.

Specificul acestor elemente iraționale este că variabila Laplace s și parametrii T sau τ se regăsesc sub radical. Calculele prin aceste tipuri de elemente sunt dificile și se utilizează metode speciale.

Elementele iraționale se aplică la descrierea proceselor de difuzie, termice, procese cu parametrii distribuiți etc.

3. *Elemente dinamice tipice instabile* se descriu cu f.d.t. de forma:

$$H(s) = \frac{k}{Ts-1}, H(s) = \frac{k}{T^2s^2-2\xi Ts+1}, H(s) = \frac{B(s)}{A(s)}, \quad (2.140)$$

unde se prezintă f.d.t. a elementului cu inerție de ordinul unu instabil, element oscilator instabil și forma generalizată.

Definiție. Elementul este *instabil* dacă ecuația caracteristică $A(s) = 0$ are una sau mai multe rădăcini pozitive.

Ca exemple de elemente funcționale instabile servesc motorul de curent continuu cu excitație în serie și motorul asincron în condiții critice.

De exemplu, pentru elementul cu inerție de ordinul unu instabil răspunsul indicial și funcția pondere se descriu cu relațiile:

$$h(t) = k(e^{-t/T} - 1)1(t), \quad (2.141)$$

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = e^{-t/T} 1(t).$$

Locul de transfer este același ca și la elementul cu inerție stabil, iar caracteristica de fază diferă: cu modificarea lui $\omega = 0 \dots \infty$ faza este $\varphi = -180 \dots -90^\circ$.

4. *Elemente dinamice cu fază neminimă* care se descriu cu funcții de transfer de forma:

$$H_1(s) = \frac{k(T_1s-1)}{T_2s+1} = \frac{3(5s-1)}{10s+1}, H_2(s) = \frac{b_0s-b_1}{a_0s^2+a_1s+a_2} = \frac{7s-7}{9s^2+6s+1}, \quad (2.142)$$

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)},$$

unde sunt prezentate f.d.t. a elementului cu inerție de ordinul unu și doi cu fază neminimă și forma generalizată.

Definiție. Elementul dinamic este de *fază neminimă*, dacă ecuația $B(s) = 0$ are una sau mai multe rădăcini pozitive.

Aceste elemente introduc în sistem anticipație (acelerare).

Exemplul 2.12. Din analiza f.d.t. (2.142) se constată că numitorul f.d.t. $H_1(s)$ și $H_2(s)$ sunt ecuații de gradul unu:

$$B_1(s) = k(T_1s - 1) = 3(5s - 1) = 0$$

cu rădăcina pozitivă $s_1 = 1/T_1 = 1/5 = 0.2$,

$$B_2(s) = b_0s - b_1 = 7s - 7 = 0$$

cu rădăcina pozitivă $s_2 = b_0/b_1 = 7/7 = 1$.

Conform definiției, elementele cu f.d.t. $H_1(s)$ și $H_2(s)$ sunt elemente cu fază neminimă. ■

În practică se utilizează elemente dinamice cu diverse proprietăți.

De exemplu, se consideră funcția de transfer a unui sistem automat cu inerție de ordinul doi oscilant neamortizator cu diverse proprietăți:

$$H(s) = \frac{ke^{-\tau s}(b_0s-b_1)}{T^2s^2-2\xi Ts+1},$$

unde kb_1 este coeficientul de transfer, τ - timp mort, b_0, T - constante de timp, ξ - grad de amortizare.

Analizând funcția de transfer a sistemului automat se constată că

sistemul este instabil cu timp mort și cu fază neminimă.

Dintre elementele dinamice cu proprietăți specifice prezentate, elementul cu timp mort este larg utilizat la descrierea dinamicii obiectelor de reglare și la prezentarea modelelor matematice ale sistemelor automate cu eșantionare și numerice.

Chestionar și probleme

1. Numiți tipurile de modele matematice utilizate în teoria sistemelor.
2. Care sunt modelele matematice în raport cu domeniile de existență ale sistemului automat?
3. Ce reprezintă caracteristica statică a elementului tipic?
4. Ce reprezintă caracteristica statică a sistemului automat?
5. Explicați și clasificați caracteristicile statice.
6. Dați exemple de caracteristici statice liniare și neliniare.
7. Se consideră ecuația diferențială care descrie elementul oscilant amortizator. Dați caracteristica statică a elementului.
8. Ce reprezintă ecuația diferențială a sistemului automat și cum se explică sensul fizic al derivatelor?
9. Se consideră ecuația diferențială de ordinul doi pe mărimea de ieșire și de ordinul zero pe mărimea de intrare, care descrie un proces termic. Explicați sensul fizic al coeficienților ecuației și unitățile de măsură.
10. Dați un exemplu de ecuație diferențială de ordinul patru pe mărimea de intrare și mărimea de ieșire.
11. Definiți elementul dinamic.
12. Prezentați modelul matematic al elementului dinamic de ordinul trei.
13. Care este sensul clasificării elementelor dinamice de transfer tipice?
14. Prezentați elementele dinamice de transfer tipice și parametrii acestora.
15. Ce reprezintă expresiile în operatori și care este rolul lor?
16. Care este importanța transformatei Laplace în teoria sistemelor?
18. Se consideră funcția de transfer a unui element:

$$H(s) = \frac{4s - 2}{9s^2 - 3s + 6}$$

Calculați zerourile și poliul lui $H(s)$ și determinați proprietățile specifice.

19. Prezentați forma analitică și grafică a semnalelor tipice.
20. Cum explicați noțiunea de semnal treaptă unitară?
22. Ce reprezintă procesul indicial și funcția pondere pentru elemente și sisteme?
23. Numiți semnalele de intrare pentru sistemul de urmărire automată.
24. Care este rolul funcțiilor frecvențiale? Numiți funcțiile frecvențiale.

3 SCHEME STRUCTURALE ALE SISTEMULUI AUTOMAT ȘI TRANSFIGURAREA LOR

3.1 Schema bloc structurală a sistemului de reglare automată

Pentru analiza transferului intrare-ieșire a sistemului de reglare automată este necesar a obține modelul matematic, care este o procedură analitică dificilă. Aplicarea metodei analitice se reduce la divizarea structurii sistemului analizat în elemente funcționale, urmată de determinarea mărimilor cauză și mărimilor efecte și studiul separat conform fenomenelor care descriu dinamica fiecărui element separat.

Deoarece se analizează elemente și sisteme liniare pentru care se aplică descrierea prin transformata Laplace, atunci funcțiile de transfer pentru fiecare element pot fi prezentate ca schemă bloc parțială.

Definiție. Schema bloc structurală a unui sistem de reglare automată (fig. 3.1) reprezintă modelul matematic al sistemului în formă grafică [1, 4, 8, 9, 11-13, 16-21].

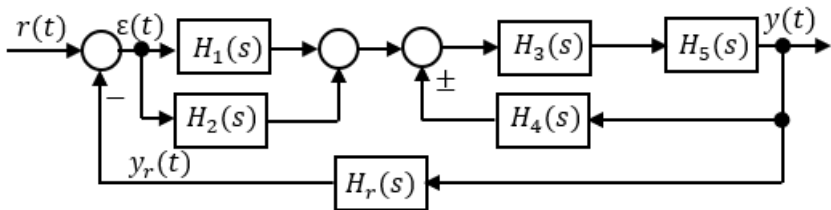


Fig. 3.1. Schema bloc structurală a sistemului de reglare automată

Pentru a construi schema bloc structurală a unui sistem automat se parcurg următoarele etape.

1. Se folosește schema bloc funcțională a sistemului divizată în elemente funcționale.
2. Pentru fiecare element funcțional separat se determină funcția de transfer.
3. În schema bloc funcțională a sistemului în locul abrevierilor din dreptunghiuri se înscriu funcțiile de transfer respective.

4. Astfel, schema obținută prezintă schema bloc structurală a sistemului de reglare automată (fig. 3.1).

Schema bloc structurală atașată sistemului real reprezintă proprietățile elementelor funcționale ale sistemului.

Astfel, schema bloc structurală a unui sistem automat este imaginea grafică a relațiilor de cauzalitate existente între mărimile sistemului, exprimate prin intermediul funcțiilor de transfer și pe baza conexiunilor elementelor cu transfer unidirecțional asociate acestor funcții de transfer.

3.2 Transfigurarea schemelor structurale

La rezolvarea problemelor de analiză și sinteză este necesar a determina funcțiile de transfer dintre careva două semnale ale unei structuri a sistemului prin utilizarea unor reguli de transfigurare cu rezultate echivalente.

Pentru simplificării acestei proceduri de transfigurare a schemei structurale a sistemului automat există 10 reguli de bază [1, 8, 18, 21].

Primele trei reguli sunt tipurile de conexiuni ale elementelor funcționale și dinamice în structura sistemului automat.

În schema structurală a sistemului automat se disting trei tipuri de conexiuni elementare ale elementelor constituente ale sistemului.

1. Conexiunea în serie.
2. Conexiunea în paralel.
3. Conexiunea cu reacție.

1. *Conexiunea în serie* se consideră structura conexiunii în serie a n elemente dinamice (fig. 3.2) descrise cu funcțiile de transfer în figura 3.2.

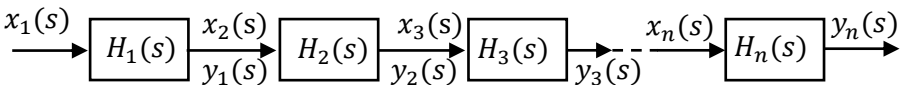


Fig. 3.2. Structura conexiunii în serie a elementelor

Fiecare element dinamic cu funcția de transfer $H_i(s)$ al

sistemului automat se descrie în forma operațională a mărimii de ieșire $y_i(s)$ în raport cu mărimea de intrare $x_i(s)$:

$$\begin{aligned} y_1(s) &= H_1(s)x_1(s), \\ y_2(s) &= H_2(s)x_2(s), \\ y_3(s) &= H_3(s)x_3(s), \\ &\dots\dots\dots \\ y_n(s) &= H_n(s)x_n(s). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Luând în considerație că ieșirea elementului precedent y_i este intrarea următorului element $x_i, i = \overline{1, n}$ și, astfel, eliminând variabilele intermediare, se obține relația mărimii de ieșire $y_n(s)$ funcție de mărimea de intrare $x_1(s)$:

$$\begin{aligned} y_n(s) &= H_1(s)H_2(s)H_3(s) \cdots H_n(s)x_1(s) = \\ &= \prod_{i=1}^n H_i(s)x_1(s) = H_e(s)x_1(s), \end{aligned} \tag{3.2}$$

unde funcția de transfer echivalentă este:

$$H_e(s) = \frac{y_n(s)}{x_1(s)} = \prod_{i=1}^n H_i(s). \tag{3.3}$$

Rezultatul (3.3) se prezintă ca regula 1: *funcția de transfer echivalentă a conexiunii în serie a elementelor este egală cu produsul funcțiilor de transfer ale elementelor componente.*

2. *Conexiunea în paralel* se consideră structura conexiunii în paralel a n elemente (fig. 3.3) cu funcțiile de transfer cunoscute.

Fiecare element cu funcția de transfer $H_i(s)$ cunoscută se descrie în forma operațională a ieșirii $y_i(s)$ în raport cu intrarea $x_i(s)$:

$$\begin{aligned} y_1(s) &= H_1(s)x_1(s) = H_1(s)x(s), \\ y_2(s) &= H_2(s)x_2(s) = H_2(s)x(s), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$y_n(s) = H_n(s)x_n(s) = H_n(s)x(s),$$

$$y(s) = y_1(s) + y_2(s) + y_3(s) + \dots + y_n(s).$$

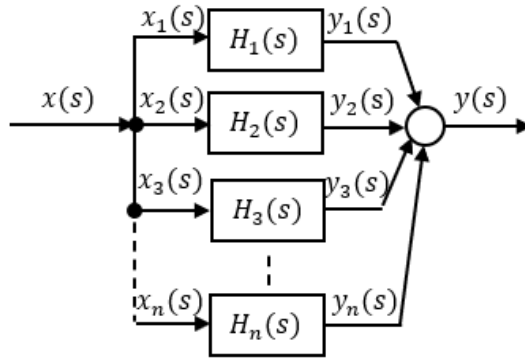


Fig. 3.3. Structura conexiunii în paralel a elementelor

Din ultima expresie valorile lui $y_i(s)$ se supstiuie cu valorile $H_i(s)x(s)$, $i = \overline{1, n}$ și se obține expresia de forma:

$$\begin{aligned} y(s) &= y_1(s) + y_2(s) + y_3(s) + \dots + y_n(s) = \\ &= H_1(s)x(s) + H_2(s)x(s) + H_3(s)x(s) + \dots + H_n(s)x(s) = \\ &= x(s)(H_1(s) + H_2(s) + H_3(s) + \dots + H_n(s)) = \\ &= x(s) \sum_{i=1}^n H_i(s) = H_e(s) x(s), \end{aligned} \quad (3.5)$$

unde funcția de transfer echivalentă este:

$$H_e(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \sum_{i=1}^n H_i(s). \quad (3.6)$$

Rezultatul (3.6) se prezintă ca regula 2: *funcția de transfer echivalentă a conexiunii în paralel a elementelor este egală cu suma funcțiilor de transfer ale elementelor componente.*

3. *Conexiunea în reacție* se consideră structura conexiunii, în care la elementul din canalul direct se conectează în reacție alt element (fig. 3.4) cu funcțiile de transfer cunoscute.

Elementele dinamice din canalul direct cu funcția de transfer $H_1(s)$ și din reacție cu funcția de transfer $H_2(s)$ se descriu în forma operațională a mărimii de ieșire în raport cu mărimea de intrare, la care se adaugă descrierea sumatorului:

$$\begin{aligned} y(s) &= H_1(s)\varepsilon(s), \\ y_r(s) &= H_2(s)y(s), \\ \varepsilon(s) &= x(s) \pm y_r(s). \end{aligned} \tag{3.7}$$

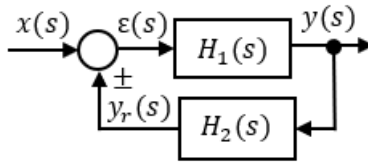


Fig. 3.4. Structura conexiunii în reacție

Se formulează problema să se calculeze funcțiile de transfer ale conexiunii în reacție pozitivă (negativă) și a erorii acestei conexiuni.

În prima expresie din (3.7) se substituie eroarea $\varepsilon(s)$ cu relația în a treia expresie și cu mărimea $y_r(s)$ din expresia a doua și după unele transformări se obține funcția de transfer a conexiunii intrare-ieșire:

$$\begin{aligned} y(s) &= H_1(s)\varepsilon(s) = H_1(s)(x(s) \pm y_r(s)) = \\ &= H_1(s)x(s) \pm H_1(s)y_r(s) = H_1(s)x(s) \pm H_1(s)H_2(s)y(s), \\ y(s)(1 \mp H_1(s)H_2(s)) &= H_1(s)x(s), \\ y(s) &= \frac{H_1(s)}{1 \mp H_1(s)H_2(s)}x(s) = H_e(s)x(s), \end{aligned} \tag{3.8}$$

unde funcția de transfer echivalentă este:

$$H_e(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{H_1(s)}{1 \mp H_1(s)H_2(s)}. \quad (3.9)$$

În baza (3.9) se formulează regula 3: *funcția de transfer echivalentă a conexiunii elementelor cu reacție este raportul dintre funcția de transfer $H_1(s)$ din canalul direct și $1 \mp H_1(s)H_2(s)$ (produsul funcției de transfer a căii directe la funcția de transfer din reacție).*

Semnul “-“ este pentru reacția pozitivă și semnul “+“ - pentru reacția negativă.

Se calculează funcția de transfer a erorii din (3.7) și eliminând mărimile intermediare se obține funcția de transfer a erorii în raport cu semnalul de intrare:

$$\begin{aligned} \varepsilon(s) &= x(s) \pm y_r(s) = x(s) \pm H_2(s)y(s) = \\ &= x(s) \pm H_2(s)H_1(s)\varepsilon(s), \\ \varepsilon(s)(1 \mp H_1(s)H_2(s)) &= x(s), \\ \varepsilon(s) &= \frac{1}{1 \mp H_1(s)H_2(s)} x(s) = H_\varepsilon(s)x(s), \end{aligned} \quad (3.10)$$

unde funcția de transfer a erorii este:

$$H_\varepsilon(s) = \frac{\varepsilon(s)}{x(s)} = \frac{1}{1 \mp H_1(s)H_2(s)}. \quad (3.11)$$

Din (3.11) se formulează regula: *funcția de transfer a erorii conexiunii cu reacție este raportul dintre unitate și $1 \mp H_1(s)H_2(s)$ (produsul funcției de transfer a căii directe la funcția de transfer din reacție).*

Semnul “-“ este pentru reacția pozitivă și semnul “+“ - pentru reacția negativă.

În continuare, se analizează transfigurările unor structuri de conexiuni de elemente dinamice realizate prin deplasarea unor elemente, sumatoare și noduri și obținerea structurilor echivalente.

4. *Deplasarea unui sumator de la intrarea la ieșirea unui bloc.*

Pentru structura inițială din figura 3.5, a) se determină relația intrare-ieșire de forma:

$$y(s) = H(s)(x_1(s) \pm x_2(s)), \quad (3.12)$$

iar în baza distributivității operației de înmulțire în raport cu cea de adunare, relația (3.12) se prezintă în forma echivalentă:

$$y(s) = H(s)x_1(s) \pm H(s)x_2(s), \quad (3.13)$$

căreia îi corespunde schema echivalentă din figura 3.5, b).

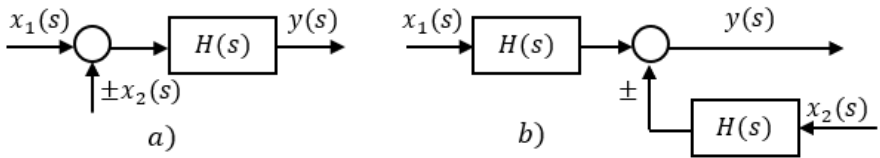


Fig. 3.5. Deplasarea unui sumator de la intrarea la ieșirea blocului

5. *Deplasarea unui sumator de la ieșirea la intrarea unui bloc.*

Pentru structura din figura 3.6, a) se determină expresia intrare-ieșire:

$$y(s) = H(s)x_1(s) \pm x_2(s) \quad (3.14)$$

și se scoate $H(s)$ ca factor comun în (3.14), obținând expresia echivalentă:

$$y(s) = H(s)(x_1(s) \pm H(s)^{-1}x_2(s)), \quad (3.15)$$

care descrie schema din figura 3.6, b).

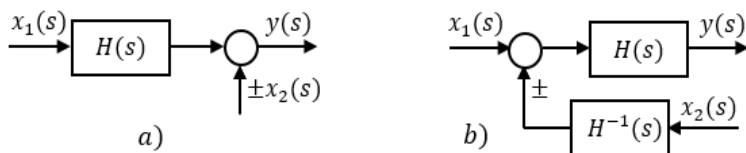


Fig. 3.6. Deplasarea unui sumator de la ieșirea la intrarea blocului

6. *Deplasarea unui punct de ramificare de la intrarea la ieșirea unui bloc.* Se dă structura inițială (fig. 3.7, a) și se impune deplasarea punctului de ramificare de la intrarea în bloc la ieșirea lui (fig. 3.7, b).

Pentru schema inițială se prezintă transferul prin f.d.t. $H(s)$ și a ramificației prin relațiile:

$$y(s) = H(s)x(s), \quad x(s) = x(s). \quad (3.16)$$

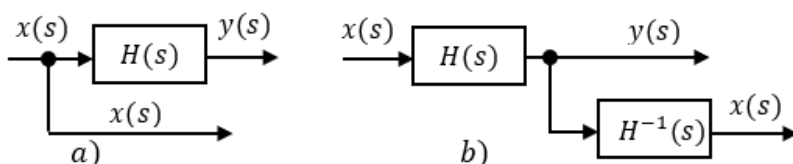


Fig. 3.7. Deplasarea punctului de ramificare de la intrarea la ieșirea blocului

Cea de-a doua relație din (3.16) se scrie în forma echivalentă:

$$x(s) = H(s)H^{-1}(s)x(s) = x(s), \quad (3.17)$$

căreia îi corespunde schema din figura 3.7, b).

7. *Deplasarea unui punct de ramificare de la ieșirea la intrarea unui bloc.* Se dă structura inițială (fig. 3.8, a) și se deplasează punctul de ramificare de la ieșirea în bloc la intrarea lui (fig. 3.8, b).

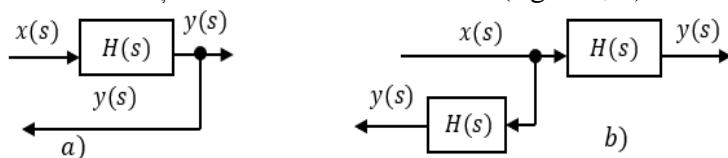


Fig. 3.8. Deplasarea punctului de ramificare de la ieșirea la intrarea blocului

Schema inițială prezintă transferul cu f.d.t. $H(s)$ și a ramificației prin relațiile:

$$y(s) = H(s)x(s), \quad y(s) = y(s). \quad (3.18)$$

Cea de-a doua relație din (3.18) se scrie în forma echivalentă:

$$y(s) = H(s)x(s), \quad (3.19)$$

care descrie schema echivalentă din figura 3.8, b).

8. *Comutativitatea sumatoarelor.* Se consideră structura inițială cu două sumatoare (fig. 3.9, a), care însumează semnalele $x_1(s)$, $x_2(s)$, $x_3(s)$ și se schimbă cu locurile semnalul $x_2(s)$ cu semnalul $x_3(s)$ de la intrarea sumatoarelor (fig. 3.9, b).

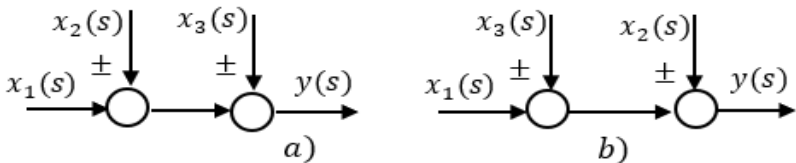


Fig. 3.9. Comutativitatea sumatoarelor

Schema inițială se descrie prin relația:

$$y(s) = (x_1(s) \pm x_2(s)) \pm x_3(s), \quad (3.20)$$

care în baza comutativității și asociativității operației de însumare relația (3.20) se prezintă în forma echivalentă:

$$y(s) = (x_1(s) \pm x_3(s)) \pm x_2(s), \quad (3.21)$$

care descrie schema din figura 3.9, b).

9. *Deplasarea unui sumator din interiorul unei conexiuni cu reacție la ieșire.* Din schema inițială din figura 3.10, a) se determină în forma operațională mărimea $y(s)$ de ieșire la acțiunea semnalelor $x_1(s)$

și $x_2(s)$ de intrare și după unele transformări se obține:

$$\begin{aligned}
 y(s) &= H_1(s)(x_1(s) \pm H_2(s)y(s)) \pm x_2(s) = \\
 &= H_1(s)x_1(s) \pm H_1(s)H_2(s)y(s) \pm x_2(s), \\
 y(s) &= \frac{H_1(s)}{1 \mp H_1(s)H_2(s)} x_1(s) \pm \frac{1}{1 \mp H_1(s)H_2(s)} x_2(s), \quad (3.22)
 \end{aligned}$$

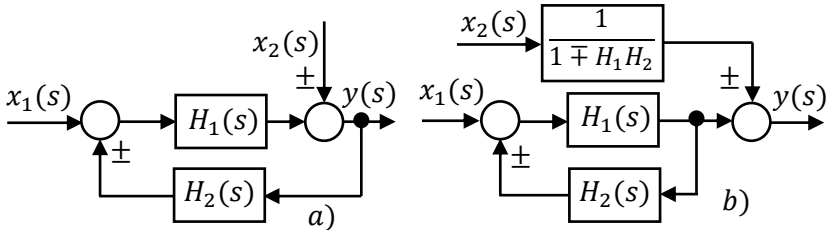


Fig. 3.10. Deplasarea sumatorului din interiorul conexiunii la ieșire

10. *Deplasarea unui sumator de la ieșirea unei conexiuni cu reacție în interior.* Din structura inițială din figura 3.11, a) în baza (3.19) în condiția când f.d.t. este unitară de pe lângă mărimea $x_2(s)$ se obține:

$$\begin{aligned}
 y(s) &= H_1(s)(x_1(s) \pm H_2(s)y(s)) \pm x_2(s) = \\
 &= H_1(s)x_1(s) \pm H_1(s)H_2(s)y(s) \pm x_2(s), \\
 y(s) &= \frac{H_1(s)}{1 \mp H_1(s)H_2(s)} x_1(s) \pm \frac{1}{1 \mp H_1(s)H_2(s)} x_2(s). \quad (3.23)
 \end{aligned}$$

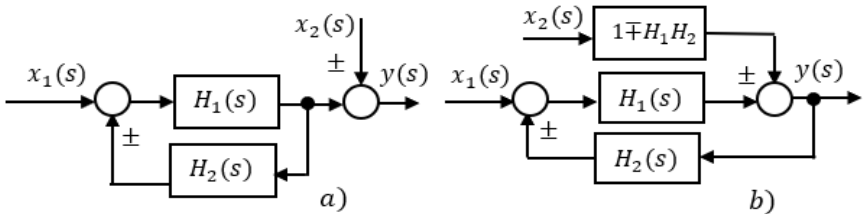


Fig. 3.11. Deplasarea sumatorului de la ieșirea conexiunii în interiorul buclei

Componenta a două din (3.23) se prezintă în forma echivalentă:

$$y(s) = \pm(1 \mp H_1(s)H_2(s)) \frac{1}{1 \mp H_1(s)H_2(s)} x_2(s) = \pm x_2(s), \quad (3.24)$$

de unde rezultă că f.d.t. de pe canalul $\pm x_2(s)$ este $(1 \mp H_1(s)H_2(s))$, care este rezultatul acțiunii semnalului $x_2(s)$ asupra mărimii de ieșire din structura din figura 3.11, b).

Pentru eficientizarea transfigurărilor efectuate în structura sistemului automat se parcurg următoarele etape:

1. Se obțin elemente echivalente pentru elementele conectate în serie după regula 1.
2. Se reduc la elemente echivalente elementele conectate în paralel, folosind regula 2.
3. Se determină elemente echivalente pentru elementele conectate în reacție, utilizând regula 3.
4. Se deplasează convenabil blocuri, puncte de ramificare și sumatoare, utilizând regulile din punctele 4-10.
5. Pentru structuri complexe, în funcție de necesitate, se repetă operațiile de la pașii 1-4 pentru a realiza scopul dorit.

3.3 Funcții de transfer ale sistemului de reglare automată

Se consideră schema bloc structurală (fig. 3.12) a unui sistem de reglare automată liniar continuu sub acțiunea semnalelor de referință $r(s)$ și a perturbației $p(s)$, constituit din elementele dinamice cu f.d.t. $H_1(s)$ - $H_5(s)$, $H_r(s)$, $H_p(s)$ și semnalele mărimii de ieșire $y(s)$, a reacției $y_r(s)$ și a erorii $\varepsilon(s)$.

Pentru structura sistemului automat se determină următoarele funcții de transfer:

1. A sistemului de reglare automată deschis.
2. A sistemului de reglare automată închis (cu reacție).
3. A sistemului de reglare automată pentru eroare.
4. A sistemului automat de reglare automată cu perturbații.

Se consideră cazul când semnalul perturbației $p(s) = 0$ și sistemul este supus numai acțiunii semnalului de referință.

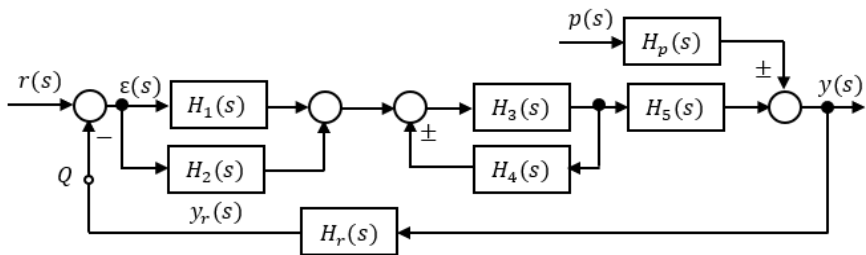


Fig. 3.12. Schema bloc structurală a sistemului de reglare automată

1. Funcția de transfer a sistemului automat deschis. În acest caz, se întrerupe reacția inversă a sistemului în punctul Q și se obține structura sistemului deschis. Se analizează canalul direct de la intrare–ieșire și se constată ce tipuri de conexiuni elementare există. În cazul dat, în canalul direct sunt două tipuri de conexiuni: elementele cu f.d.t. $H_1(s)$ și $H_2(s)$ sunt conectate în paralel, iar elementele $H_3(s)$ și $H_4(s)$ sunt în conexiune în reacție. Pentru aceste conexiuni se calculează f.d.t. echivalente:

$$H'_1(s) = H_1(s) + H_2(s) = \frac{B_1(s)}{A_1(s)}, \quad (3.25)$$

$$H'_3(s) = \frac{H_3(s)}{1 \mp H_3(s)H_4(s)} = \frac{B_3(s)}{A_3(s)}. \quad (3.26)$$

Ca rezultat, funcția de transfer a sistemului deschis se prezintă din elementele din canalul direct înseriate cu f.d.t. $H'_1(s)$, $H'_3(s)$ și $H_5(s)$ și f.d.t. echivalentă este raportul a două polinoame:

$$H_d(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = H'_1(s)H'_3(s)H_5(s) = \frac{B_d(s)}{A_d(s)}. \quad (3.27)$$

Mărimea de ieșire a sistemului deschis se exprimă în forma:

$$y(s) = H_d(s)r(s) = \frac{B_d(s)}{A_d(s)}r(s). \quad (3.28)$$

2. Funcția de transfer a sistemului automat închis. Structura sistemului automat închis (fig. 3.12) este constituită în canalul direct cu f.d.t. $H_d(s)$ a sistemului deschis și în canalul invers cu f.d.t. $H_r(s)$ în conexiune cu reacție și se determină f.d.t. a sistemului închis:

$$H_0(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{H_d(s)}{1+H_d(s)H_r(s)} = \frac{B(s)}{A(s)}, \quad (3.29)$$

iar mărimea de ieșire se exprimă în forma operațională:

$$y(s) = H_0(s)r(s) = \frac{B(s)}{A(s)}r(s). \quad (3.30)$$

3. Funcția de transfer a erorii sistemului automat la acțiunea referinței. Pentru calculul f.d.t. a erorii sistemului închis se utilizează relația (3.10) și se obține relația în formă operațională a mărimii erorii:

$$\varepsilon(s) = \frac{1}{1+H_d(s)H_r(s)}r(s) = H_\varepsilon(s)r(s), \quad (3.31)$$

unde $H_\varepsilon(s) = \frac{1}{1+H_d(s)H_r(s)}$ este funcția de transfer a erorii sistemului.

4. Funcția de transfer a sistemului automat la acțiunea perturbației. Se consideră structura sistemului automat din figura 3.12 cu calculul f.d.t. $H_d(s)$ a sistemului deschis după relația (3.27) și acțiunea perturbației (fig. 3.13).

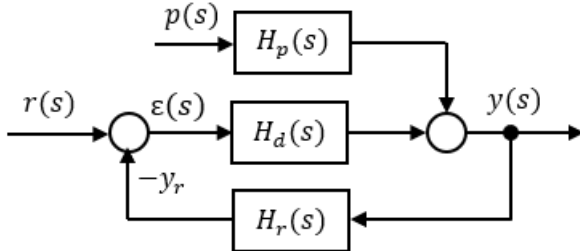


Fig. 3.13. Schema structurală a sistemului la acțiunea perturbației

Se obține pe cale analitică transferul referință-ieșire și perturbație-ieșire în formă operațională:

$$\begin{aligned}
y(s) &= H_d(s)\varepsilon(s) + H_p(s)p(s) = \\
&= H_d(s)(r(s) - y_r(s)) + H_p(s)p(s) = \\
&= H_d(s)r(s) - H_d(s)H_r(s)y(s) + H_p(s)p(s).
\end{aligned}$$

Din ultima expresie se calculează mărimea de ieșire în funcție de semnalele de referință și perturbație și se obține relația:

$$\begin{aligned}
y(s) &= \frac{H_d(s)}{1+H_d(s)H_r(s)}r(s) + \frac{H_p(s)}{1+H_d(s)H_r(s)}p(s) = \\
&= H_{yr}(s)r(s) + H_{yp}(s)p(s), \tag{3.32}
\end{aligned}$$

unde $H_{yr}(s) = \frac{H_d(s)}{1+H_d(s)H_r(s)}$ este f.d.t. a transferului referință–mărimea de ieșire, $H_{yp}(s) = \frac{H_p(s)}{1+H_d(s)H_r(s)}$ – f.d.t. a transferului perturbație–ieșire.

Dacă asupra sistemului automat acționează mai multe semnale de perturbații, atunci în relația (3.32) în partea dreapta se vor însuma termeni $H_{yp_i}(s)p_i(s)$, unde indexul $i = \overline{1, r}$ indică numărul perturbațiilor care acționează asupra sistemului:

$$\begin{aligned}
y(s) &= \frac{H_d(s)}{1+H_d(s)H_r(s)}r(s) + \sum_{i=1}^r \frac{H_{p_i}(s)}{1+H_d(s)H_r(s)}p_i(s) = \\
&= H_{yr}(s)r(s) + \sum_{i=1}^r H_{yp_i}(s)p_i(s).
\end{aligned}$$

În cazul când reacția inversă în sistemul automat este unitară f.d.t. $H_r(s) = 1$, atunci expresiile (3.29), (3.31) se simplifică și au forma:

$$H_0(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{H_d(s)}{1+H_d(s)} = \frac{B(s)}{A(s)}, \tag{3.33}$$

$$H_\varepsilon(s) = \frac{\varepsilon(s)}{r(s)} = \frac{1}{1+H_d(s)} = \frac{B_\varepsilon(s)}{A_\varepsilon(s)}. \tag{3.34}$$

În continuare, sunt analizate două exemple de sisteme automate pentru care se deduc ecuațiile diferențiale, funcțiile de transfer și transfigurarea schemelor structurale.

Exemplul 3.1. Se consideră schema de principiu electrică a sistemului de reglare automată a rotațiilor motorului cu curent continuu reprezentată în figura 3.14. Motorul de curent continuu are o largă utilizare în practica automatizărilor diverselor procese și a acționărilor electrice.

Se cere: 1. Să se descrie modul de funcționare al sistemului de reglare automată a rotațiilor motorului de curent continuu (MCC).

2. Să se construiască schema bloc funcțională a sistemului.

3. Să se determine ecuațiile diferențiale ale elementelor funcționale ale sistemului.

4. Să se determine funcțiile de transfer ale elementelor funcționale ale sistemului.

5. Să se calculeze funcțiile de transfer ale sistemului deschis, închis și ale erorii sistemului la acțiunea semnalului de intrare referință.

6. Să se determine ecuațiile diferențiale ale sistemului deschis, închis și ale erorii sistemului.

7. Să se determine caracteristicile statice ale sistemului deschis, închis și ale erorii sistemului.

Soluționare:

1. *Descrierea modului de funcționare al sistemului automat.* Evidențiem obiectul de reglare și elementele funcționale ale sistemului. Obiectul de reglare este motorul de curent continuu MCC 1 cu excitație separată, la care se reglează viteza unghiulară ω sau rotațiile n prin modificarea tensiunii rotorice u_r sau tensiunii de excitație u_e , sau modificarea ambelor tensiuni rotorice u_r și excitație u_e . Motorul este antrenat la cuplul de sarcină (momentul de sarcină) M_s .

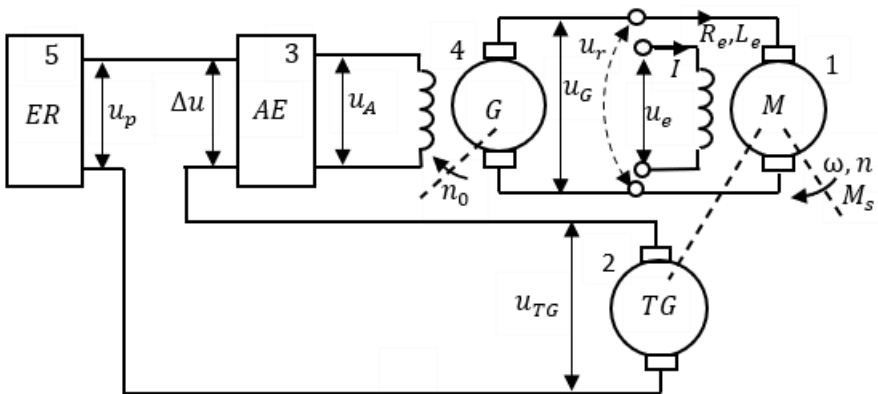


Fig. 3.14. Schema de principiu electrică a sistemului de reglare automată a rotațiilor motorului cu curent continuu

Aplicând tensiunea de excitație la bobina de excitație (statorul), se produce fluxul magnetic în interiorul statorului. Aplicând tensiunea rotorică la bobina rotorului, se produce câmpul magnetic al rotorului și, datorită interacționării acestor câmpuri, rotorul se va roti cu o viteză proporțională tensiunii rotorice. Cea mai utilizată metodă de reglare a rotațiilor motorului este metoda prin reglarea tensiunii rotorice u_r , datorită faptului că astfel se introduce fluxul de putere mai mare în comparație cu reglarea tensiunii de excitație cu o putere mai mică.

Pentru a măsura rotațiile n ale motorului se utilizează traductorul de tip tahogenerator (TG) 2 de curent continuu, rotorul căruia se cuplează mecanic cu rotorul motorului. Mărimea de intrare a tahogeneratorului TG sunt rotațiile (viteza) motorului, iar mărimea de ieșire este tensiunea tahogeneratorului u_{TG} , care este proporțională rotațiilor n ale motorului.

În scopul menținerii rotațiilor motorului la valoarea dorită se alege tensiunea de referință (prescriere) u_p , care este produsă la ieșirea elementului de referință (ER) 5.

Mărimea tensiunii u_{TG} , prin canalul de reacție, se transmite și se compară cu tensiunea u_p de referință determinând eroarea:

$$\Delta u = u_p - u_{TG},$$

care, fiind o mărime de valoare mică, se transmite amplificatorului electronic (AE) 3 și, la ieșirea acestuia, se obține tensiunea amplificată u_A . Tensiunea amplificată u_A se transmite bobinei de excitație a generatorului de curent continuu (G) 4, care produce fluxul magnetic al statorului. Pentru a obține tensiunea de ieșire a generatorului u_G , rotorul generatorului se rotește forțat de un motor electric de curent alternativ cu rotații n_0 constante. Tensiunea generatorului u_G se aplică la bornele rotorului motorului și, astfel, se stabilizează turațiile motorului proporționale tensiunii de eroare Δu . Generatorul este elementul de execuție (EE) care realizează reglarea tensiunii rotorice u_r a motorului.

De exemplu, dacă s-a produs creșterea prin salt a momentului de sarcină M_s ca perturbare, atunci se reduc rotațiile motorului n , ceea ce conduce la reducerea tensiunii u_{TG} și rezultă creșterea tensiunii Δu , care se transmite prin canalul direct amplificator-generator-motor și, astfel, turațiile se stabilizează la valoarea inițială și, invers, dacă s-a redus momentul de sarcină M_s , cresc turațiile motorului n și tensiunea u_{TG} respectiv, reducând tensiunea Δu , care se transmite prin canalul direct amplificator-generator-motor și turațiile se stabilizează la valoarea dată.

Astfel, în sistemul automat se realizează stabilizarea turațiilor motorului datorită principiului de reglare (conducere) cu reacție inversă negativă tipică pentru sistemele automate liniare.

2. *Construirea schemei bloc funcționale a sistemului.* Pentru construirea schemei bloc funcționale pentru motorul ca obiect de reglare (OR) și elementele funcționale tahogeneratorul TG, amplificatorul A, generatorul G se introduc simboluri

dreptunghiuri, în interiorul cărora se înscriu abrevierile respective, iar comparatorul, care nu există ca element constructiv, se prezintă prin compararea fizică a două tensiuni și se simbolizează cu un cerculeț. Toate simbolurile se trasează și se plasează conform principiului de funcționare al sistemului și blocurile se unesc cu săgeți cu direcția transmiterii informației, deasupra cărora se înscriu simbolurile mărimilor fizice existente în sistemul automat (fig. 3.15).

3. Se determină ecuațiile diferențiale, care descriu dinamica obiectului de reglare și a elementelor funcționale: amplificatorul, generatorul și tahogeneratorul.

Obiectul de reglare este motorul de curent continuu cu mărimile de comandă tensiunea rotorică u_r și de excitație u_e , perturbația M_s și mărimea de ieșire viteza unghiulară ω sau rotațiile n . Viteza ω și turațiile n sunt legate funcțional prin relația:

$$\omega = \frac{\pi}{30} n = \frac{3,14}{30} n \approx 0,105n.$$

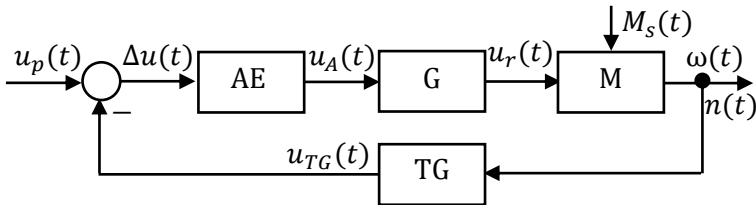


Fig. 3.15. Schema bloc funcțională a sistemului automat

Se prezintă într-o formă simplificată determinarea ecuației diferențiale a motorului de curent continuu, care descrie dinamica acestuia.

Rotațiile n ale motorului sunt funcție de trei argumente: tensiunea rotorică u_r , tensiunea de excitație u_e și de perturbație–momentul de sarcină M_s în forma:

$$n(t) = f(u_e(t), u_r(t), M_s(t)).$$

Această relație se simplifică dacă se au în vedere următoarele condiții: tensiunea de excitație u_e este o mărime constantă și se exclude din relație și se analizează regimul de funcționare în gol al motorului $M_s = 0$.

Astfel, relația după simplificare prezintă rotațiile motorului $n(t)$ funcție numai de tensiunea rotorică de reglare u_r :

$$n(t) = f(u_r(t)).$$

Circuitul electric rotoric se descrie conform legii a II-a Kirchhoff:

$$u_r(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e(t),$$

unde $u_r(t)$ este tensiunea aplicată la bornele circuitului rotoric, R , L – rezistența și inductanța rotorului, $i(t)$ – curentul rotoric, $e(t)$ – tensiunea contraelectromotoare.

Circuitul electric rotoric unde se formează tensiunea contraelectromotoare se descrie de relația:

$$e(t) = k_e n(t),$$

unde k_e este coeficient de proporționalitate constant al motorului, care se determină în datele tehnice.

Rotorul în mișcare de rotație în jurul unei axe fixe se descrie de legea Newton în forma:

$$J \frac{dn(t)}{dt} = M_d(t) - M_s(t),$$

unde J este momentul de inerție al tuturor părților rotative, M_d – cuplul dinamic dezvoltat de motor, $M_s = 0$ – cuplul mecanic de sarcină.

Momentul dinamic M_d al motorului se prezintă în prima aproximare ca proporțional curentului rotoric i :

$$M_d = k_m i,$$

unde k_m este coeficientul de proporționalitate constant al motorului, care se determină din datele tehnice.

Din expresiile de mai sus se exprimă curentul rotoric descris prin relația:

$$i(t) = \frac{J}{k_m} \frac{dn(t)}{dt}.$$

Coefficienții motorului k_e și k_m se exprimă prin relația:

$$\frac{k_e}{k_m} = \frac{2\pi}{60} \approx 0.105.$$

Expresia circuitului electric după unele transformări are forma:

$$u_r(t) = \frac{JR}{k_m} \frac{dn(t)}{dt} + \frac{JL}{k_m} \frac{d^2n(t)}{dt^2} + k_e n(t),$$

care reprezintă ecuația diferențială a motorului.

Această ecuație se aduce la forma standard, împărțind toți termenii la coeficientul k_e și se scrie mărimea de ieșire ca funcție în partea stângă:

$$\frac{JL}{k_m k_e} \frac{d^2n(t)}{dt^2} + \frac{JR}{k_m k_e} \frac{dn(t)}{dt} + n(t) = \frac{1}{k_e} u_r(t).$$

Se introduc notațiile:

$$k = \frac{1}{k_e}, T_m = \frac{JR}{k_m k_e}, \frac{JL}{k_m k_e} \cdot \frac{R}{R} = \frac{JR}{k_m k_e} \cdot \frac{L}{R} = T_m T_e, T_e = \frac{L}{R},$$

unde k este coeficientul de transfer al motorului, T_e – constanta de timp electrică cu dimensiunea secundă, T_m – constanta de timp electromecanică cu dimensiunea secundă.

Cu notațiile introduse, ecuația diferențială are forma:

$$T_m T_e \frac{d^2 n(t)}{dt^2} + T_m \frac{dn(t)}{dt} + n(t) = k u_r(t),$$

care reprezintă modelul matematic aproximat ca element cu inerție de ordinul doi.

În cazul când inductanța L bobinei este o mărime mică, atunci din raportul $T_e \ll T_m$ rezultă că primul termen din ecuație se neglijează în comparație cu termenul al doilea și se obține ecuația diferențială de ordinul unu:

$$T_m \frac{dn(t)}{dt} + n(t) = k u_r(t),$$

care descrie un element cu inerție de ordinul unu.

Dacă constanta de timp electromecanică $T_m \ll 0$, atunci motorul se descrie ecuația diferențială de ordinul zero:

$$n(t) = k u_r(t).$$

Pentru a transforma turațiile $n(t)$ în unghiul $\alpha(t)$, se utilizează reductorul, care se prezintă ca element integrator, descris de ecuația diferențială:

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = k_r n(t)$$

sau ecuația integrală:

$$\alpha(t) = k_r \int_0^t n(t) dt,$$

în care α este unghiul de rotație la ieșirea reductorului, $k_r = 1/i_{red}$ – coeficientul de transfer al reductorului, iar i_{red} – coeficientul de reducere al reductorului.

Ecuația diferențială pentru cazul care descrie transferul tensiune u_r rotorică-unghiul α la ieșirea reductorului are forma:

$$T_m T_e \frac{d^3 \alpha(t)}{dt^3} + T_m \frac{d^2 \alpha(t)}{dt^2} + \frac{d\alpha(t)}{dt} = k_1 u_r(t),$$

unde $k_1 = k k_r$ este coeficientul de transfer motor-reductor.

Dacă constantele de timp T_m, T_e ale motorului sunt neglijabile, atunci ecuația diferențială are forma:

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = k_1 u_r(t)$$

sau

$$\alpha(t) = k_1 \int_0^t u_r(t) dt,$$

care reprezintă un element integrator.

Amplificatorul electronic funcționează datorită mișcării electronilor, care au masă mică și viteză mare de mișcare în comparație cu mișcarea maselor mecanice ale motorului, ceea ce conduce la neglijarea constantei de timp a amplificatorului și acesta se prezintă ca element ideal descris de ecuația diferențială de ordinul zero:

$$u_A(t) = k_A \Delta u(t),$$

unde k_A este coeficientul (factorul) de transfer al amplificatorului.

Generatorul de curent continuu reprezintă elementul de execuție, care realizează transferul tensiunea u_A amplificatorului-tensiunea u_G generatorului. Pentru circuitul de excitație al generatorului cu tensiunea de intrare u_A , aplicând legea a II-a Kirchhoff, se obține ecuația diferențială de forma:

$$u_A(t) = R_G i_e(t) + L_G \frac{di_e(t)}{dt},$$

unde R_G, L_G este rezistența și inductanța bobinei de excitație a generatorului, i_e – curentul în circuit.

Ecuația diferențială se aduce la forma normată, împărțind toți termenii ecuației la R_G și, introducând notațiile respective, se obține:

$$T_G \frac{di_e(t)}{dt} + i_e(t) = k_E u_A(t),$$

unde $T_E = L_G/R_G$ este constanta de timp, $k_E = 1/R_G$ – coeficientul de transfer.

Pentru a stabili legătura dintre tensiunea de excitație u_A și tensiunea de ieșire u_G a generatorului, se utilizează caracteristica neliniară statică $u_G = f(i_e)$ (fig. 3.16), care reprezintă caracteristica sarcinii generatorului și, pentru tensiunea de ieșire nominală u_G , pe această caracteristică se determină curentul necesar de excitație i_e .

Utilizând aproximarea caracteristicii neliniare cu secanta OA, dusă prin origine și punctul A cu coordonatele (i_e, u_G) , care formează unghiul φ în raport cu axa absciselor. Din triunghiul dreptunghiular obținut, la care ipotenuza este secanta, iar catetele sunt segmentele de pe axe: pe axa absciselor se află segmentul care exprimă

curentul i_e și pe axa ordonatelor segmentul egal cu tensiunea u_G . Din acest triunghi se determină tangenta unghiului ca definiție a tangentei:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{u_G}{i_e} = k_2,$$

unde k_2 este coeficientul de transfer.

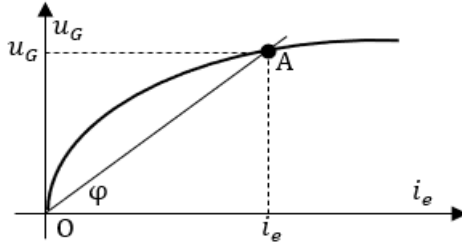


Fig. 3.16. Caracteristica statică a generatorului

Din expresia tangentei se exprimă curentul de excitație și se obține:

$$i_e = \frac{u_G}{k_2}.$$

Ecuția diferențială, după unele transformări, prezintă ecuația diferențială de ordinul unu, care descrie transferul $u_A - u_G$ a generatorului:

$$T_G \frac{du_G}{dt} + u_G(t) = k_G u_A(t),$$

unde T_G este constanta de timp a generatorului, $k_G = k_E k_2 = k_2 / R_G$ – coeficientul de transfer al generatorului.

Tensiunea generatorului u_G se aplică la bornele rotorului motorului și este tensiunea de comandă a motorului.

Tahogeneratorul prezintă un generator de curent continuu, la care statorul este un magnet permanent, producând fluxul magnetic, iar rotorul este acționat cu rotorul motorului și la bornele tahogeneratorului se excită tensiunea u_{TG} , care este proporțională cu rotațiile motorului, prezentând ecuația diferențială de ordinul zero:

$$u_{TG}(t) = k_{TG} n(t),$$

unde k_{TG} este coeficientul de transfer, care se determină ca aproximație de pe caracteristica statică a tahogeneratorului.

Astfel, tahogeneratorul se prezintă ca element ideal, la care s-a neglijat constanta de timp mică în comparație cu constantele de timp ale motorului.

4. Se determină funcțiile de transfer după ecuațiile diferențiale obținute în

punctul 3 pentru obiectul de reglare și elementele funcționale – amplificatorul, generatorul și tahogeneratorul.

Pentru *motorul* cu transferul $u_r - n$ se obține f.d.t.:

$$\frac{n(s)}{u_r(s)} = H_M^n(s) = \frac{k}{T_m T_e s^2 + T_m s + 1}$$

și pentru motorul cu transferul $u_r - \alpha$ se obține f.d.t.:

$$\frac{\alpha(s)}{u_r(s)} = H_M^\alpha(s) = \frac{k_1}{s(T_m T_e s^2 + T_m s + 1)} = \frac{k_1}{T_m T_e s^3 + T_m s^2 + s}$$

Se prezintă ecuația operațională a motorului pentru rotații și unghi în forma:

$$n(s) = H_M^n(s) u_r(s),$$

$$\alpha(s) = H_M^\alpha(s) u_r(s).$$

Pentru *amplificatorul electronic* cu transferul $\Delta u - u_A$ se obține f.d.t.:

$$\frac{u_A(s)}{\Delta u(s)} = H_A(s) = k_A.$$

Se prezintă ecuația operațională a *amplificatorului electronic* în forma:

$$u_A(s) = H_A(s) \Delta u(s) = k_A \Delta u(s).$$

Pentru *generator* cu transferul $u_A - u_G$ se obține f.d.t.:

$$\frac{u_G(s)}{u_A(s)} = H_G(s) = \frac{k_G}{T_G s + 1}.$$

Se prezintă ecuația operațională a generatorului în forma:

$$u_G(s) = H_G(s) u_A(s).$$

Pentru *tahogenerator* cu transferul $n - u_{TG}$ se obține f.d.t.:

$$\frac{u_{TG}(s)}{n(s)} = H_{TG}(s) = k_{TG}.$$

Se prezintă ecuația operațională a tahogeneratorului în forma:

$$u_{TG}(s) = H_{TG}(s) n(s).$$

5. Se determină funcțiile de transfer ale sistemului. Se prezintă schema bloc structurală a sistemului automat, utilizând schema bloc funcțională în care în interiorul blocurilor abrevierile se substituie cu funcțiile de transfer respective (fig. 3.17, a).

În baza schemei structurale a sistemului închis (fig. 3.17, a) se calculează funcțiile de transfer ale sistemului deschis, închis și ale erorii sistemului.

Funcția de transfer a sistemului deschis. Pentru determinarea f.d.t. a sistemului deschis se deconectează reacția sistemului închis în punctul L (fig. 3.17, a) și se analizează structura sistemului deschis de la intrare la ieșire și se constată ce tipuri de conexiuni există în sistem.

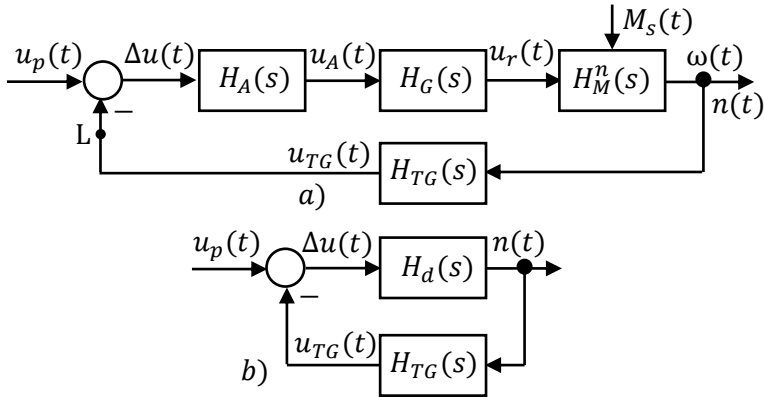


Fig. 3.17. Schema bloc funcțională a sistemului automat

În cazul dat, în sistemul deschis există conexiunea serie a elementelor dinamice amplificator-generator-motor și, conform regulii, transferul $u_p - n$ se obține funcția de transfer a sistemului deschis:

$$\begin{aligned} \frac{n(s)}{u_p(s)} = H_d(s) &= H_A(s)H_G(s)H_M^n(s) = k_A \frac{k_G}{T_G s + 1} \frac{k}{T_m T_e s^2 + T_m s + 1} = \\ &= \frac{c_0}{d_0 s^3 + d_1 s^2 + d_2 s + d_3} = \frac{C(s)}{D(s)}, \end{aligned}$$

unde $c_0 = k_A k_G k = k_d$ este coeficientul de transfer al sistemului automat deschis, $d_0 = T_m T_e$, $d_1 = T_G T_m + T_e T_m$, $d_2 = T_G + T_m$, $d_3 = 1$.

Funcția de transfer $H_d(s)$ a sistemului deschis este determinată de raportul polinoamelor $C(s)$ și $D(s)$, care sunt funcții de parametrii obiectului de reglare, amplificatorului și generatorului.

Funcția de transfer a sistemului închis. Se prezintă schema structurală a sistemului închis (fig. 3.17, b) cu canalul direct descris cu funcția de transfer $H_d(s)$.

Structura obținută a sistemului închis cu reacție negativă prezintă conexiune în reacție și, aplicând regula, se determină funcția de transfer:

$$\begin{aligned} \frac{n(s)}{u_p(s)} &= H_0(s) = \frac{H_d(s)}{1+H_d(s)H_{TG}(s)} = \frac{C(s)/D(s)}{1+\frac{C(s)}{D(s)}H_{TG}(s)} = \frac{C(s)}{D(s)+C(s)k_{TG}} = \\ &= \frac{k_d}{d_0s^3+d_1s^2+d_2s+d_3+k_dk_{TG}} = \frac{b_0}{a_0s^3+a_1s^2+a_2s+a_3} = \frac{B(s)}{A(s)}, \end{aligned}$$

unde $b_0 = c_0 = k_A k_G k = k_d$ este coeficientul de transfer al sistemului deschis, $a_0 = d_0 = T_G T_m T_e$, $a_1 = d_1 = T_G T_m + T_e T_m$, $a_2 = d_2 = T_G + T_m$, $a_3 = d_3 + k_A k_G k k_{TG} = 1 + k_A k_G k k_{TG}$, polinoamele $B(s) = b_0 = k_d$ și $A(s) = a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3$, care sunt funcții de parametrii motorului, amplificatorului, generatorului și tahogeneratorului.

Funcția de transfer a erorii sistemului se determină prin relația:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon(s)}{u_p(s)} &= H_\varepsilon(s) = \frac{1}{1+H_d(s)H_{TG}(s)} = \frac{1}{1+\frac{C(s)}{D(s)}H_{TG}(s)} = \\ &= \frac{D(s)}{D(s)+C(s)H_{TG}(s)} = \frac{d_0s^3+d_1s^2+d_2s+d_3}{a_0s^3+a_1s^2+a_2s+a_3} = \frac{D(s)}{A(s)}, \end{aligned}$$

care este raportul polinomului $D(s)$ la polinomul $A(s)$, unde $D(s)$ este polinomul numitorului funcției de transfer a sistemului deschis și $A(s)$ este polinomul numitorului funcției de transfer a sistemului închis.

6. Se determină ecuațiile diferențiale ale sistemului. Procedura de obținere a ecuației diferențiale a sistemului se reduce la prezentarea ecuațiilor în operatori și substituirea variabilei complexe cu operatorul de derivare $s = p = d/dt$.

Ecuația diferențială a sistemului deschis. Se prezintă ecuația operațională a sistemului deschis:

$$n(s) = H_d(s)u_p(s) = \frac{c_0}{d_0s^3+d_1s^2+d_2s+d_3}u_p(s),$$

care se aduce la forma prezentată într-o linie cu partea stângă și dreaptă și se deschid parantezele, introducând variabilele sub operator $s = p$, obținând ecuația în operatori:

$$n(d_0p^3 + d_1p^2 + d_2p + d_3) = c_0u_p,$$

$$d_0p^3n + d_1p^2n + d_2pn + d_3n = c_0u_p.$$

În ecuația în operatori se substituie $p = d/dt$ și se obține ecuația diferențială

a sistemului deschis în forma:

$$d_0\ddot{n}(t) + d_1\dot{n}(t) + d_2\dot{n}(t) + d_3n(t) = c_0u_p(t),$$

care este o ecuație diferențială de ordinul trei după mărimea de ieșire.

Ecuația diferențială a sistemului închis. Se prezintă ecuația operațională a sistemului închis:

$$n(s) = H_0(s)u_p(s) = \frac{b_0}{a_0s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3}u_p(s),$$

care se aduce la forma ecuației în operatori $s = p$:

$$n(a_0p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3) = b_0u_p,$$

$$a_0p^3n + a_1p^2n + a_2pn + a_3n = c_0u_p.$$

În ecuația în operatori se substituie $p = d/dt$ și se obține ecuația diferențială a sistemului închis în forma:

$$d_0\ddot{n}(t) + d_1\dot{n}(t) + d_2\dot{n}(t) + d_3n(t) = c_0u_p(t),$$

care este o ecuație diferențială de ordinul trei după mărimea de ieșire cu coeficienții calculați în funcția de transfer.

Ecuația diferențială a erorii sistemului. Se prezintă ecuația operațională a erorii sistemului:

$$\varepsilon(s) = H_\varepsilon(s)u_p(s) = \frac{d_0s^3 + d_1s^2 + d_2s + d_3}{a_0s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3}u_p(s),$$

care se aduce la forma ecuației în operatori $s = p$:

$$\varepsilon(a_0p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3) = u_p(d_0p^3 + d_1p^2 + d_2p + d_3),$$

$$a_0p^3\varepsilon + a_1p^2\varepsilon + a_2p\varepsilon + a_3\varepsilon = d_0p^3u_p + d_1p^2u_p + d_2pu_p + d_3u_p.$$

În ecuația în operatori se substituie $p = d/dt$ și se obține ecuația diferențială a erorii sistemului în forma:

$$a_0\ddot{\varepsilon}(t) + a_1\dot{\varepsilon}(t) + a_2\dot{\varepsilon}(t) + a_3\varepsilon(t) = d_0\ddot{u}_p(s) + d_1\dot{u}_p(s) + d_2\dot{u}_p(s) + d_3u_p(s),$$

care este o ecuație diferențială de ordinul trei după mărimea de ieșire și mărimea de

intrare cu coeficienții calculați în funcția de transfer.

7. Se determină expresiile analitice ale caracteristicilor statice. Caracteristica statică prezintă regimul staționar al sistemului, care nu depinde de timp și acțiunea derivatelor se reduce la zero.

Astfel, ecuațiile analitice ale caracteristicilor statice se obțin din ecuațiile diferențiale, egalând cu zero toate derivatele.

Caracteristica statică a sistemului deschis are forma:

$$d_3 n = c_0 u_p, n = \frac{c_0}{d_3} u_p = k_d u_p,$$

unde $k_d = \frac{c_0}{d_3} = k_A k_G k$ este coeficientul de transfer al sistemului deschis.

Caracteristica statică a sistemului închis se obține din ecuația diferențială:

$$d_3 n = c_0 u_p, n = \frac{c_0}{d_3} u_p = k_0 u_p,$$

în care k_0 este coeficientul de transfer al sistemului închis de forma:

$$k_0 = \frac{c_0}{d_3} = \frac{k_d}{1+k_d k_{TG}} = \frac{k_A k_G k}{1+k_A k_G k k_{TG}},$$

care este exprimat prin coeficienții de transfer ai elementelor din structura sistemului.

Caracteristica statică a erorii sistemului se obține din ecuația diferențială:

$$a_3 \varepsilon = d_3 u_p, \varepsilon = \frac{d_3}{a_3} u_p = k_\varepsilon u_p,$$

unde k_ε este coeficientul de transfer al erorii sistemului închis și are forma:

$$k_\varepsilon = \frac{d_3}{a_3} = \frac{1}{1+k_d k_{TG}} = \frac{1}{1+k_A k_G k k_{TG}},$$

care este exprimat prin coeficienții de transfer ai elementelor din structura sistemului.

Eroarea ε a sistemului automat este proporțională semnalului de referință u_p și invers proporțională produsului coeficienților de transfer k_d din canalul direct și a coeficientului traductorului k_{TG} din canalul de reacție. Eroarea sistemului va fi cu atât mai mică cu cât va fi mai mare produsul coeficienților $k_d k_{TG} = k_A k_G k k_{TG}$.

După expresiile analitice ale caracteristicilor statice, în figura 3.18 sunt prezentate caracteristicile statice ale sistemului deschis (3.18, a), sistemului închis (3.18, b) și a erorii sistemului (3.18, c).■

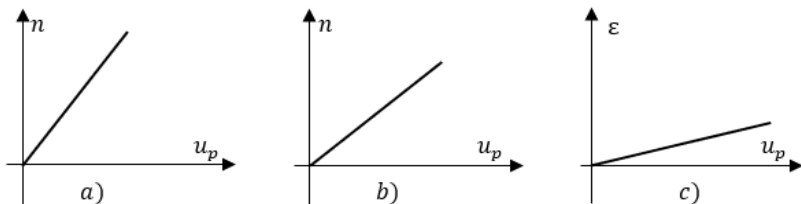


Fig. 3.18. Caracteristicile statice ale sistemului automat

Exemplul 3.2 [21]. Se consideră structura unui sistem automat (fig. 3.19) cu funcțiile de transfer cunoscute supus acțiunii semnalelor de intrare $x_1(s)$ și $x_2(s)$.

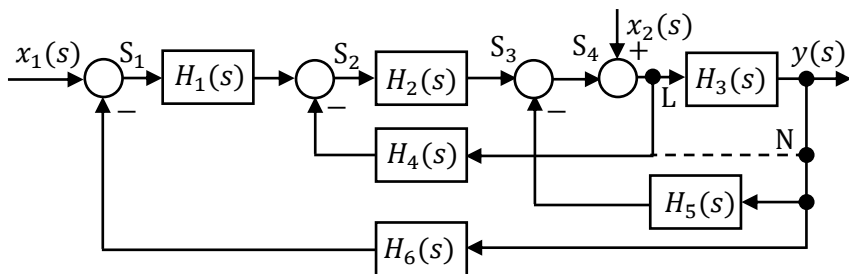


Fig. 3.19. Structura sistemului de reglare automată

Se cere să se determine relația transferului intrare-ieșire $y(s)$ în funcție de semnalele de intrare $x_1(s)$ și $x_2(s)$.

Soluționare. Soluționarea acestei probleme pe cale analitică este dificilă.

Se analizează structura sistemului și se aleg regulile convenabile pentru transfigurare și se parcurg următorii pași.

1. Sumatorul S_2 se suprapune peste sumatorul S_1 (regula 5) și semnalul ieșirii elementului cu f.d.t. $H_4(s)$ înmulțit cu f.d.t. $H_1^{-1}(s)$ se transmite sumatorului S_1 .

2. Se calculează f.d.t. echivalentă a elementelor cu f.d.t. $H_1(s)$ și $H_2(s)$ din canalul direct ca și conexiune serie (regula 1) și se obține:

$$H_{12}(s) = H_1(s)H_2(s).$$

3. Sumatorul S_4 se trece la stânga sumatorului S_3 (regula 8).

4. Punctul de ramificare L trece în punctul N din reacție și semnalul de la intrarea elementului cu f.d.t. $H_3(s)$ înmulțit cu f.d.t. $H_3^{-1}(s)$ (regula 6) se transmite la ieșirea lui și, astfel, elementul cu f.d.t. $H_4(s)$ este conectat în reacție și formează conexiunea serie (regula 1) cu elementele cu f.d.t. $H_1^{-1}(s)$, $H_4(s)$, $H_3^{-1}(s)$ și f.d.t. echivalentă este de forma:

$$H'_4(s) = H_1^{-1}(s)H_4(s)H_3^{-1}(s).$$

5. Se determină f.d.t. echivalentă a conexiunii cu reacție (regula 3) a elementelor cu f.d.t. $H_3(s)$ și $H_5(s)$ și se obține:

$$H'_3(s) = \frac{H_3(s)}{1+H_3(s)H_5(s)}.$$

6. Se calculează f.d.t. echivalentă a reacției sistemului ca conexiune în paralel (regula 2) a elementelor cu f.d.t. $H_6(s)$ și $H'_4(s)$ și se obține:

$$H'_6(s) = H_6(s) + H'_4(s).$$

În urma efectuării transfigurărilor după pașii 1-6 s-a obținut structura sistemului dată în figura 3.20, a).

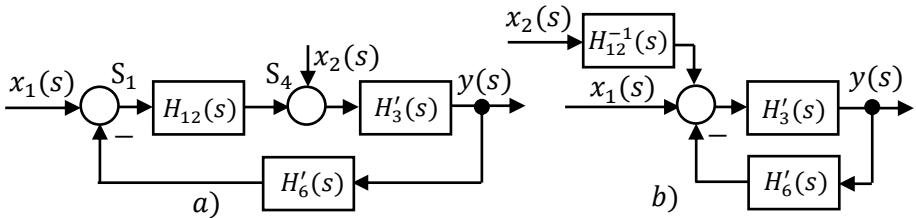


Fig. 3.20. Schema structurală transfigurată a sistemului automat

1. În structura din figura 3.20, a) sumatorul S_4 se suprapune peste sumatorul S_1 și, astfel, semnalul $x_2(s)$ înmulțit la f.d.t. $H_{12}^{-1}(s)$ (regula 5) se aplică la sumatorul S_1 (fig. 3.20, b).

2. Se calculează mărimea de ieșire în formă operațională a structurii sistemului din fig. 3.20, b ca conexiune în reacție (regula 3) cu două semnale de intrare și după unele transformări se obține:

$$\begin{aligned} y(s) &= \frac{H'_3(s)}{1+H'_3(s)H'_6(s)} x_1(s) + \frac{H'_3(s)H_{12}^{-1}(s)}{1+H'_3(s)H'_6(s)} x_2(s) = \\ &= H_{01}(s)x_1(s) + H_{02}(s)x_2(s), \end{aligned}$$

unde f.d.t. $H_{01}(s) = \frac{H'_3(s)}{1+H'_3(s)H'_6(s)}$ și $H_{02}(s) = \frac{H'_3(s)H_{12}^{-1}(s)}{1+H'_3(s)H'_6(s)}$ este legătura funcțională a mărimii de ieșire $y(s)$ în raport cu semnalele de intrare $x_1(s)$ și $x_2(s)$. ■

Exemplul 3.3. În figura 1.10 se reprezintă schema de principiu electrică a sistemului de urmărire automată a unghiului α arborelui motorului cu elementele numerotate: 1 este obiectul de reglare, care reprezintă cuplul de sarcină M_s , 2 –

traductorul de măsurare a unghiului α arborelui care se realizează cu rezistența R_α , 3 – elementul de referință se realizează cu rezistența R_r , 4 – comparatorul reprezintă puntea formată din rezistențele R_r și R_α , 5 – amplificatorul electronic, 6 – generatorul ca amplificator de putere, 7 – motorul electric ca element de execuție.

Se reprezintă modul de funcționare al sistemului. Puntea formată din rezistențele R_r și R_α și alimentată cu tensiunea u_0 , realizează compararea unghiului de referință α_r și a unghiului α , care determină starea curentă a obiectului de reglare, obținându-se eroarea sistemului:

$$\Delta\alpha = \alpha_r - \alpha,$$

care se convertește de punte în tensiunea Δu . Inițial, puntea este în stare de echilibru – la ieșirea ei semnalul $\Delta u = 0$.

Pentru pornirea sistemului se acționează cursorul rezistenței R_r și se formează semnalul de referință α_r , iar cursorul rezistenței R_α este în stare inițială și, astfel, puntea se dezchilibrează, producând tensiunea $\Delta u \neq 0$. Tensiunea Δu se prelucreează consecutiv de amplificatorul 5 – generatorul 6 – motorul 7 și arborele motorului se deplasează la unghiul α și, prin canalul de reacție – linia întreruptă realizează legătura mecanică a arborelui motodului cu cursorul traductorului R_α , care conduce la echilibrarea punții cu tensiunea $\Delta u = 0$ și, astfel, tensiunea rotorică $u_r = 0$, iar arborele poziționându-se la unghiul α .■

Exemplul 3.4. Automatizarea unui proces termic realizat în cuptorul industrial. Schema de principiu electrică a sistemului de reglare automată a temperaturii în cuptor este reprezentată în figura 3.21.

Elementele funcționale ale sistemului sunt: 1 este cuptorul ca obiect de reglare, în care este necesar a stabili temperatura, 2 - traductorul de temperatură R_t conectat în puntea 3, 4 - amplificatorul electronic, 5 - motorul de curent continuu M cu excitație separată este elementul de execuție, 6 - reductorul Red., 7 - autotransformatorul este organul de reglare, 8 - elementul de încălzire. EÎ este rezistența R de pe care se degajează energia în cuptor. Puntea este alcătuită din 4 rezistențe R_t, R_r, R_1, R_2 .

Pentru a pune în funcțiune sistemul pe reostatul R_r se deplasează cursorul în poziția care indică temperatura necesară de stabilizare în cuptor și, astfel, puntea se dezchilibrează și la ieșirea ei se obține tensiunea Δu . Această tensiune se amplifică de amplificatorul AE și tensiunea de la ieșire u_A se transmite circuitului rotoric al motorului M (tensiunea de excitație este conectată) și la ieșirea lui se obțin rotațiile n . Motorul prin reductor transformă rotațiile în unghiul α și acționează cursorul autotransformatorului și la ieșirea lui crește tensiunea de la zero la tensiunea u , care se transmite elementului de încălzire. Astfel, temperatura în cuptor va crește și, prin traductor, puntea se echilibrează, transmițând semnalul prin reacție până când se stabilizează temperatura dată și sistemul a atinge regimul staționar de funcționare.■

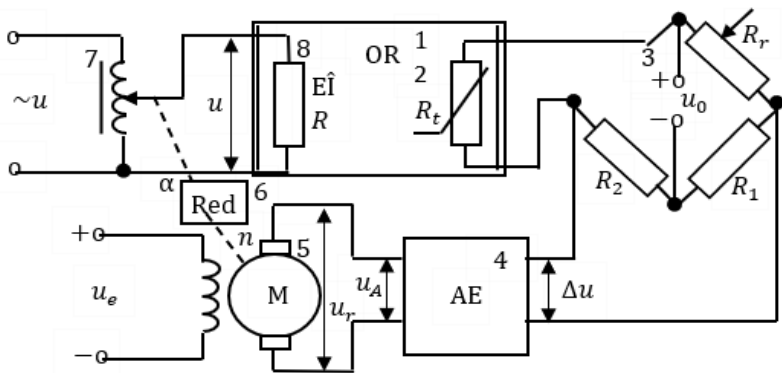


Fig. 3.21. Schema de principiu a sistemului de reglare automată a temperaturii în cuptor industrial cu termometru rezistiv

Exemplul 3.5. Automatizarea procesului termic în cuptor industrial, utilizând traductorul de temperatură – termocuplul TC. Schema de principiu electrică a sistemului de reglare automată a temperaturii în cuptor este reprezentată în figura 3.22.

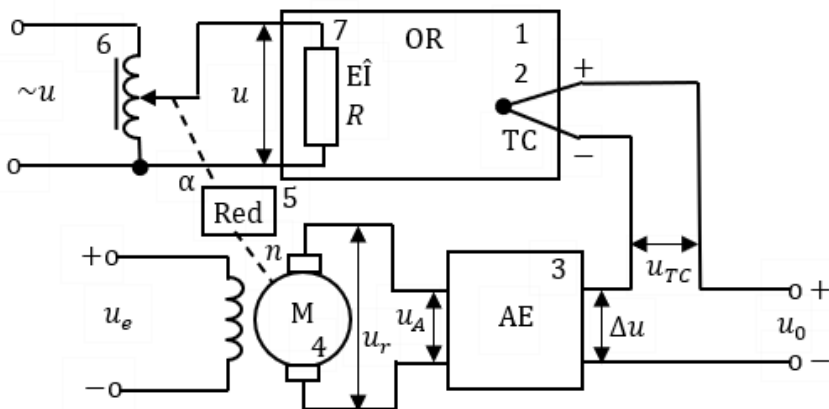


Fig. 3.22. Schema de principiu a sistemului de reglare automată a temperaturii în cuptor industrial cu termocuplu

Elementele funcționale, funcționarea și descrierea acestui sistem de reglare automată este similară cu a sistemului descris din exemplul 3.4. Semnalul erorii în sistem este tensiunea Δu care se determină cu relația:

$$\Delta u = u_0 - u_{TC},$$

unde u_0 este semnalul de referință, u_{TC} – tensiunea termocuplului care este proporțională temperaturii în cuptorul industrial.

Semnalul erorii Δu se transmite circuitului format din elementele amplificator-motorul-reductorul-elementul de reglare a tensiunii-elementul de încălzire, care introduce cantitatea de căldură în cuptor.

Când temperatura în cuptor atinge valoarea de referință cu eroarea admisă, atunci eroarea $\Delta u = 0$ și procesul se stabilizează. ■

Chestionar și probleme

1. Ce reprezintă schema bloc structurală a sistemului de reglare automată?
2. De ce este necesar a construit schema funcțională și structurală a sistemului automat?
3. Ce tipuri de conexiuni se utilizează în schemele funcționale și structurale ale sistemului automat?
4. De ce se utilizează regulile de transfigurare a schemelor structurale ale sistemului automat?
5. Construiți schema bloc funcțională și structurală după schema de principiu a sistemului de urmărire automată a unghiului arborelui motorului din figura 1.10.
6. Explicați modul de funcționare a traductorului rezistiv al unghiului arborelui motorului din schema din figura 1.10 și determinați ce model de element tipic reprezintă.
7. Construiți schema bloc funcțională și structurală după schema de principiu a sistemului de reglare automată a temperaturii în cuptorul industrial din figura 3.21.
8. Explicați modul de funcționare a traductorului rezistiv de temperatură din schema din figura 3.21.
9. Fiind cunoscuți parametrii k și T ai traductorului rezistiv de temperatură din schema din figura 3.21, scrieți ecuația diferențială și funcția de transfer a traductorului și determinați dimensiunea coeficientului de transfer k .
10. Construiți schema bloc funcțională după schema de principiu a sistemului de reglare automată a temperaturii în cuptorul industrial din figura 3.22. Explicați modul de funcționare a termocuplului ca traductor de temperatură.
11. Pentru valorile numerice ale parametrilor $k = 0.5$ și $T = 5$ s ale termocuplului din schema din figura 3.22 scrieți ecuația diferențială și funcția de transfer a traductorului și determinați dimensiunea coeficientului k .
12. Care este sensul fizic al coeficientului de transfer k și al constantei de timp ale traductoarelor din sistemele analizate în exemplele 3.3-3.5?
13. Explicați care sunt elementele de execuție în sistemele analizate din fig. 3.21-3.23 și modul lor de funcționare?
14. De ce traductorul din structura sistemului automat se conectează în canalul reacției inverse?
15. Explicați care sunt elementele de comparare (sumatoare) ale semnalului de referință și a mărimii măsurate în sistemele analizate în exemplele 3.3-3.5.

4 STABILITATEA SISTEMELOR AUTOMATE

4.1 Introducere

Se consideră funcția de transfer a sistemului automat ca o funcție rațională a raportului polinoamelor cu coeficienți reali, prezentată în formă factorizată sau poli-zerouri:

$$H(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{b_0 \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{a_0 \prod_{i=1}^n (s - p_i)}, \quad (4.1)$$

unde $y(s)$ este ieșirea sistemului, $x(s)$ – mărimea de intrare, polinomul zerourilor $B(s) = 0$ are rădăcinile z_j , care sunt zerourile finite ale f.d.t. $H(s)$, polinomul polilor $A(s) = 0$ are rădăcinile p_i , care prezintă polii finiți ai f.d.t. $H(s)$ [1-4, 8, 9, 11-13, 6-21].

Dinamica unui sistem de reglare automată este determinată de transferul intrare mărginită-ieșire mărginită, în baza căreia se evidențiază proprietățile structurale ale sistemului.

1. Stabilitatea structurală (stabilitatea internă) a sistemului care se determină de proprietățile interne ale sistemului.

2. Performanțele regimului de funcționare al sistemului automat.

Funcției de transfer (4.1) a sistemului îi corespunde ecuația diferențială cu soluția acesteia:

$$y(t) = y_l(t) + y_f(t), \quad (4.2)$$

unde $y_l(t)$ este soluția omogenă, care reprezintă componenta liberă a răspunsului tranzitoriu la modificarea condițiilor inițiale sau la aplicarea semnalului de intrare și care transportă sistemul din starea inițială dată în starea viitoare ca regim staționar, $y_f(t)$ – componenta regimului permanent sau regimului staționar, determinat de semnalele de intrare aplicate asupra sistemului (condiții inițiale, semnale de referință, perturbații).

În funcție de distribuția polilor p_i lui $H(s)$ (4.1), în planul complex, sistemele automate liniare invariante în timp se clasifică în două clase.

1. Sisteme stabile polii cărora sunt toți alocați în $\{Rep_i < 0\}$.
2. Sisteme instabile, care au cel puțin câte un pol alocat în $\{Rep_i \geq 0\}$.

În funcție de distribuția zerourilor z_j în planul complex, sistemele automate liniare invariante în timp și stabile se împart în două categorii:

1. Sisteme automate stabile zerourile cărora sunt toate alocate în $\{Rep_i < 0\}$ și se numesc sisteme de defazaj minim.
2. Sisteme automate stabile, care au unul sau mai multe zerouri alocate în $\{Rep_i \geq 0\}$ sunt sisteme de defazaj neminim.

Din analiza aplicațiilor uzuale ale sistemelor automate liniare invariante în timp majoritatea sunt sisteme de defazaj minim.

4.2 Noțiune de stabilitate și condiții de stabilitate ale sistemului automat

Noțiunile de stabilitate se definesc în sensul teoriei Leapunov, care a fost elaborată în anul 1892 [1, 4, 8, 11-13, 18].

Stabilitatea este o noțiune matematică bazată pe transferul intrare mărginită-ieșire mărginită care determină posibilitățile de funcționare ale sistemului de reglare automată.

Se utilizează noțiunile de stabilitate pentru sistemul automat: sistem *stabil*, sistem *instabil* și sistem *la limită de stabilitate*.

Pentru analiza stabilității interne a sistemului se utilizează partea stângă a ecuației diferențiale, care descrie proprietățile interne ale sistemului (4.1) când semnalul de intrare este nul, dată în formă operațională:

$$y_l(p)A(p) = y_l(p)(a_0p^n + a_1p^{n-1} + \dots + a_{n-1}p + a_n) = 0, \quad (4.3)$$

unde $y_l \neq 0$ este componenta liberă a soluției ecuației diferențiale.

Din (4.3) rezultă că polinomul caracteristic este egal cu zero:

$$A(p) = a_0p^n + a_1p^{n-1} + \dots + a_{n-1}p + a_n = 0. \quad (4.4)$$

Polinomul este monic dacă coeficientul $a_0 = 1$:

$$A'(p) = p^n + a'_1 p^{n-1} + \dots + a'_{n-1} p + a'_n = 0. \quad (4.5)$$

Condițiile necesare de stabilitate impun ca polinomul caracteristic $A(p)$ sau monic $A'(p)$ să fie hurwitzian:

- 1) toți coeficienții $\overline{a_0, a_n}$ acestuia să fie pozitivi ;
- 2) să existe toate rădăcinile $\overline{p_1, p_n}$ polinomului.

Pentru polinoame de ordinul unu și doi condițiile necesare de stabilitate devin și suficiente.

Polinomul caracteristic $A(p)$ sau monic $A'(p)$ se numește hurwitzian dacă toate zerourile sale sunt alocate în semiplanul stâng al rădăcinilor $\{Rep_i < 0\}$.

Expresiile (4.4) și (4.5) reprezintă o ecuație algebrică de gradul n cu parametrii $\overline{a_0, a_n}$ cunoscuți și soluționând-o se obțin n rădăcini $\overline{p_1, p_n}$, care pot fi de tipul:

1. Rădăcini nule $p = 0$.
2. Rădăcini reale pozitive sau negative $p = \pm\alpha$.
3. Rădăcini imaginare pozitive și negative (perechi) $p = \pm j\omega$.
4. Rădăcini complexe $p = \pm\alpha \pm j\omega$.

Soluția ecuației caracteristice (4.4) are forma:

$$y_l(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{p_i t}, \quad (4.6)$$

în care c_i sunt coeficienții necunoscuți ce se determină din condițiile inițiale, p_i – rădăcinile cunoscute ale ecuației (4.4), $e^{p_i t}$ – arată evoluția rădăcinii în timp.

Pentru o rădăcină reală α_i cunoscută componenta tranzitorie are forma:

$$y_i(t) = c_i e^{\alpha_i t}. \quad (4.7)$$

Dacă rădăcina $\alpha_i < 0$, atunci când timpul $t \rightarrow \infty$ componenta $y_i(t)$ tinde la zero, și invers, dacă $\alpha_i > 0$, atunci componenta $y_i(t)$ tinde la ∞ și când $\alpha_i = 0$ mărimea $y_i(t) = c_i = \text{const}$ (fig. 4.1).

Unei perechi de rădăcini complexe $p_i = \alpha_i + j\omega_i$ și $p_{i+1} =$

$= \alpha_i - j\omega_i$ îi corespund două componente tranzitorii exprimate printr-o singură expresie de forma:

$$y_i(t) = c_i e^{\alpha_i t} \sin(\omega_i t + \varphi_i), \quad (4.8)$$

care reprezintă o sinusoidă cu pulsația ω_i și amplitudinea ce se modifică în timp după exponentă.

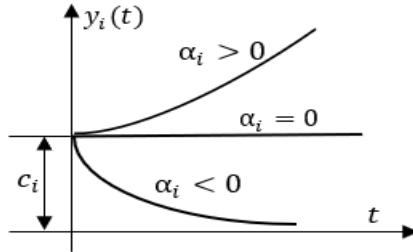


Fig. 4.1. Componenta tranzitorie a rădăcinii reale

Dacă partea reală a rădăcinilor $\alpha_i < 0$, atunci procesul tranzitoriu oscilant se stinge, și invers, dacă $\alpha_i > 0$, atunci procesul oscilant tinde la infinit. În cazul când $\alpha_i = 0$ și rădăcinile sunt imaginare, procesul tranzitoriu prezintă oscilații neamortizate în formă de sinusoidă cu pulsația ω_i . Mărimea φ_i este defazajul datorită inerției transferului intrare-ieșire și arată întârzierea semnalului de ieșire în raport cu cel de intrare.

În cazul când ecuația caracteristică (4.4) conține k rădăcini multiple, atunci în soluția (4.6) în locul k componente de tipul $c_k e^{p_k t}$ se conține o singură componentă de forma [10]:

$$(c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{k-1} t^{k-1}) e^{p_k t}. \quad (4.9)$$

În baza teoriei Leapunov, condițiile necesare și suficiente de stabilitate internă a sistemului automat se stabilesc în funcție de evoluția componentei libere $y_l(t)$ a soluției ecuației caracteristice (4.6) [4, 8, 11, 13, 18].

Definiția 1. Sistemul de reglare automată este asimptotic *stabil*,

dacă componenta liberă $y_l(t)$ a soluției ecuației caracteristice când timpul $t \rightarrow \infty$ tinde la zero:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_l(t) = 0. \quad (4.10)$$

Se formulează definițiile de stabilitate sau instabilitate internă ale sistemului automat.

Definiția 2. Se spune că sistemul de reglare automată este *stabil*, dacă toate rădăcinile $\overline{p_1, p_n}$ ecuației caracteristice (4.4) au partea reală negativă $Re p_i < 0$.

Definiția 3. Se spune că sistemul automat este *instabil*, dacă ecuația caracteristică (4.4) are una sau mai multe rădăcini cu partea reală pozitivă $Re p_i > 0$.

Definiția 4. Se spune că starea sistemului automat este *la limită de stabilitate* (nedefinită, nedeterminată), dacă ecuația caracteristică (4.4) are rădăcini nule și/sau rădăcini imaginare.

Având în vedere planul complex al rădăcinilor p (fig. 4.2), definițiile 2-4 se formulează în modul următor.

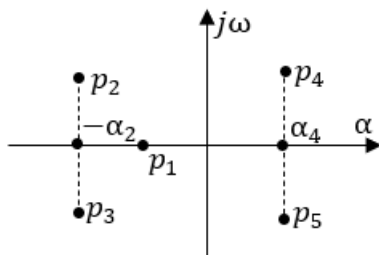


Fig. 4.2. Planul complex al rădăcinilor

Definiția 5. Sistemul automat este *stabil*, dacă toate rădăcinile $\overline{p_1, p_n}$ ecuației caracteristice (4.4) sunt alocate în semiplanul stâng C^- ($Re p_i < 0$) al planului complex al rădăcinilor.

Conform definiției, rezultă că aceasta este echivalentă cu alocarea în $\{Re p_i < 0\}$ a polilor funcției de transfer a sistemului în buclă închisă.

Definiția 6. Sistemul de reglare automată este *instabil*, dacă ecuația caracteristică (4.4) are una sau mai multe rădăcini alocate în semiplanul drept C^+ ($Re p_i > 0$) al planului complex al rădăcinilor.

Definiția 7. Sistemul de reglare automată este *la limita de stabilitate* (stare nedeterminată), dacă ecuația caracteristică (4.4) are rădăcini nule și/sau rădăcini imaginare alocate pe axa imaginară.

Dacă asupra sistemului acționează semnale de intrare referință sau perturbație mărginite, atunci noțiunile de stabilitate externă se formulează astfel.

Sistemul automat este *stabil*, dacă regimul tranzitoriu este finit și sistemul atinge regimul staționar (fig. 4.3, curba 1).

Sistemul automat este *instabil*, dacă regimul transitoriu tinde la $\pm\infty$ (fig. 4.3, curba 2).

Sistemul automat este *la limita de stabilitate* când starea lui este nedefinită (regim critic) (fig. 4.3, curba 3).

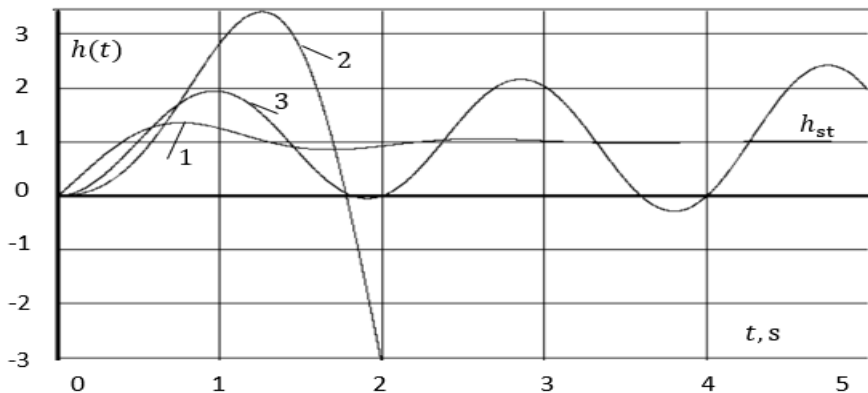


Fig. 4.3. Răspunsuri indiciale ale sistemului automat

Determinarea stabilității interne a sistemului automat este însoțită de proceduri de soluționare a ecuațiilor algebrice de grad superior care este dificilă.

Pentru simplificarea procedurilor de analiză a stabilității interne a sistemului automat închis se utilizează criteriile de stabilitate.

4.3 Criterii de stabilitate

Criterii de stabilitate sunt unele reguli sau algoritmi care permit după coeficienții $\overline{a_0, a_n}$ cunoscuți ai polinomului caracteristic al sistemului închis determinarea semnelor părții reale a rădăcinilor [1, 4, 5, 8, 11-13, 17, 18].

Au fost elaborate două tipuri de criterii.

1. Criteriile algebrice Routh și Hurwitz, care se bazează pe polinomul caracteristic al sistemului automat închis și stabilesc condițiile necesare și suficiente de negativitate ale rădăcinilor în formă de limitări impuse anumitor combinații ale coeficienților ecuației caracteristice.

2. Criteriile frecvențiale Cremer-Leonhard (Mihailov) și Nyquist de stabilitate, care determină legătura funcțională dintre stabilitatea și forma locului de transfer al sistemului automat.

4.3.1 Criteriul Routh

Criteriul Routh a fost elaborat de matematicianul englez E. Routh în anul 1877 [1, 4, 8, 11-13].

Analiza stabilității sistemului automat cu utilizarea criteriului Routh se reduce la următorul algoritm.

Se consideră polinomul caracteristic cu coeficienții cunoscuți ai sistemului automat:

$$A(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n. \quad (4.11)$$

Se verifică condițiile necesare de stabilitate ale polinomului caracteristic:

- 1) toți coeficienții $\overline{a_0, a_n}$ ai polinomului să fie pozitivi;
- 2) să existe toate rădăcinile $\overline{p_1, p_n}$ ale ecuației caracteristice a sistemului automat închis.

Condițiile suficiente de stabilitate ale sistemului se verifică aplicând criteriul Routh care se reduce la următoarea procedură.

Din coeficienții $\overline{a_0, a_n}$ ai polinomului caracteristic se construiește tabelul 4.1, în care se introduc calculele coeficienților necesari.

Tabelul 4.1. Calculul coeficienților criteriului Routh

Nr. rând	Coeficienții α_j	Coloane				
		1	2	3	...	k
1		$c_{11} = a_0$	$c_{21} = a_2$	$c_{31} = a_4$...	$c_{k1} = a_n$
2		$c_{12} = a_1$	$c_{22} = a_3$	$c_{32} = a_5$...	$c_{k2} = a_{n-1}$
3	$\alpha_3 = \frac{c_{11}}{c_{12}} = a_0/a_1$	c_{13}	c_{23}	c_{33}	...	c_{k3}
4	$\alpha_4 = \frac{c_{12}}{c_{13}}$	c_{14}	c_{24}	c_{34}	...	c_{k4}
...
$n + 1$	α_{n+1}	$c_{1,n+1}$	$c_{2,n+1}$	$c_{3,n+1}$...	$c_{k,n+1}$

În primul rând al tabelului 4.1 se înscriu coeficienții polinomului cu indexii pari $a_0, a_2, a_4, \dots, a_n$, iar în rândul doi – coeficienții cu indexii impari $a_1, a_3, a_5, \dots, a_{n-1}$.

Următoarele rânduri 3, 4, ..., $n + 1$ se completează în ordinea calculelor coeficienților c_{ij} , unde $i = \overline{1, k}$ este numărul coloanelor, iar $j = \overline{1, n + 1}$ – numărul rândurilor, pornind de la coeficienții α_j ($j \geq 3$) din coloana zero și coeficienții din coloanele 1, 2, ..., k până se completează coloana unu în ordinea următoare:

$$\alpha_3 = c_{11}/c_{12} = a_0/a_1, c_{13} = c_{21} - \alpha_3 c_{22} = a_2 - \alpha_3 a_3,$$

$$c_{23} = c_{31} - \alpha_3 c_{32} = a_4 - \alpha_3 a_5, \dots,$$

$$\alpha_4 = c_{12}/c_{13} = a_1/c_{13}, c_{14} = c_{22} - \alpha_4 c_{23} = a_3 - \alpha_4 c_{23}, \dots$$

.....
 Forma de calcul ale coeficienților se prezintă:

$$\alpha_j = c_{1,j-2}/c_{1,j-1}, c_{ij} = c_{i+1,j-2} - \alpha_j c_{i+1,j-1}.$$

Pentru celulele din tabelul 4.1, când coeficienții au indexii negativi, prezintă zerouri.

Condițiile necesare și suficiente de stabilitate a sistemului automat conform criteriului Routh se prezintă:

Definiție. La valorile cunoscute ale coeficienților $\overline{a_0, a_n}$ ai polinomului caracteristic sistemul automat este stabil dacă toți coeficienții coloanei unu din tabelul 4.1 (este evidențiată) sunt pozitivi:

$$c_{11} = a_0 > 0, c_{12} = a_1 > 0, c_{13} > 0, c_{1i} > 0, \dots, c_{1,n+1} > 0.$$

Dacă nu toți coeficienții coloanei unu din tabelul 4.1 sunt pozitivi, atunci sistemul automat este instabil.

Din analiza coeficienților coloanei 1 ai tabelului 4.1 când sunt coeficienți negativi, se constată numărul de schimb de semne de la „+” la „-”, și invers, de la „-” la „+”, care indică numărul de rădăcini pozitive ale polinomului caracteristic ce conduc la instabilitate.

Exemplul 4.1. Se dă polinomul caracteristic de gradul 4 al sistemului închis:

$$A(p) = a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4 = 5p^4 + 6p^3 + 7p^2 + 3p + 4.$$

Se cere să se analizeze stabilitatea sistemului, utilizând criteriul Routh.

Soluționare. Se verifică condițiile necesare de stabilitate: toți coeficienții sunt pozitivi și sunt toate cele patru rădăcini ale polinomului.

Se verifică condițiile suficiente de stabilitate, utilizând criteriul Routh.

Din coeficienții polinomului se construiește tabelul Routh și calculele se dau în tabelul 4.2.

Se calculează coeficienții din rândul trei, pornind de la coloana zero:

$$\alpha_3 = c_{11}/c_{12} = a_0/a_1 = 5/6,$$

$$c_{13} = c_{21} - \alpha_3 c_{22} = a_2 - \alpha_3 a_3 = 7 - (5/6)3 = 27/6,$$

$$c_{23} = c_{31} - \alpha_3 c_{32} = 4 - \left(\frac{5}{6}\right) \cdot 0 = 4.$$

Se calculează coeficienții din rândul 4, pornind de la coloana zero:

$$\alpha_4 = c_{12}/c_{13} = a_1/c_{13} = 6/(27/6) = 36/27,$$

$$c_{14} = c_{22} - \alpha_4 c_{23} = a_3 - \alpha_4 c_{32} = 3 - (36/27)4 = -63/27,$$

$$c_{24} = c_{32} - \alpha_4 c_{33} = 0 - \alpha_4 \cdot 0 = 0.$$

Se calculează coeficienții din rândul 5, pornind de la coloana zero:

$$\alpha_5 = c_{13}/c_{14} = \frac{27/6}{-63/27} = -\frac{729}{378} = -1.9286,$$

$$c_{51} = c_{23} - \alpha_5 c_{24} = 4 - \alpha_5 \cdot 0 = 4.$$

Tabelul 4.2. Calculul coeficienților criteriului Routh

Nr. rând	Coeficientul α_i	Coloane		
	0	1	2	3
1		$c_{11} = a_0 = 5$	$c_{21} = a_2 = 7$	$c_{31} = a_4 = 4$
2		$c_{12} = a_1 = 6$	$c_{22} = a_3 = 3$	$c_{32} = 0$
3	$\alpha_3 = \frac{a_0}{a_1} = \frac{5}{6}$	$c_{13} = 27/6$	$c_{23} = 4$	$c_{33} = 0$
4	$\alpha_4 = \frac{a_1}{c_{13}} = \frac{36}{27}$	$c_{14} = -\frac{63}{27}$	$c_{24} = 0$	$c_{34} = 0$
5	$\alpha_5 = \frac{c_{13}}{c_{14}} = -1.9286$	$c_{15} = 4$	$c_{25} = 0$	$c_{35} = 0$

Se analizează coeficienții coloanei 1 din tabelul 4.2 (este evidențiată) și se constată coeficientul negativ $c_{14} = -63/27$ și, rezultă că sistemul automat este instabil. În coloana 1 din tabelul 4.2 există două schimburi de semne între rândurile 3 și 4 de la „+” la „-” și între rândurile 4 și 5 de la „-” la „+” care indică două rădăcini pozitive din cele 4 rădăcini ale ecuației caracteristice ale sistemului închis. ■

4.3.2 Criteriul Hurwitz

Criteriul Hurwitz a fost elaborat de matematicianul german A. Hurwitz în anul 1895 [1, 4, 8, 11-13].

Se consideră polinomul caracteristic cu coeficienții cunoscuți:

$$A(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n. \quad (4.12)$$

Se verifică condițiile necesare de stabilitate ale polinomului.

Condițiile suficiente de stabilitate se verifică, utilizând criteriul Hurwitz prin următoarea procedură. Din coeficienții $\overline{a_0}, \overline{a_n}$ ai polinomului caracteristic se construiește determinantul Hurwitz Δ_n de dimensiunea $n \times n$:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}. \quad (4.13)$$

Din (4.13) se calculează determinanții particulari $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_1 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3 + 0 \cdot a_3 a_4 + a_0 a_1 a_5 - \\ &- 0 \cdot a_2 a_5 - a_1 a_1 a_4 - a_0 a_3 a_3 > 0, \dots, \Delta_n = \Delta_{n-1} a_n > 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Condițiile necesare și suficiente de stabilitate ale sistemului automat conform criteriul Hurwitz sunt:

Definiție. Sistemul automat este stabil dacă și numai dacă toți determinanții particulari $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \dots, \Delta_n > 0$ sunt pozitivi.

Dacă un determinant oarecare este negativ, atunci calculele se opresc și se constată că sistemul automat este instabil.

Exemplul 4.2. Se consideră polinomul caracteristic de gradul 4 al sistemului:

$$A(p) = a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4 = 5p^4 + 6p^3 + 7p^2 + 3p + 4.$$

Se cere să se analizeze stabilitatea sistemului, utilizând criteriul Hurwitz.

Soluționare. Se verifică condițiile necesare de stabilitate: toți coeficienții sunt pozitivi și sunt toate cele patru rădăcini ale polinomului caracteristic.

Se verifică condițiile suficiente de stabilitate, utilizând criteriul Hurwitz.

Din coeficienții a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 ai polinomului se construiește determinantul de ordinul patru și se calculează determinanții particulari de ordinul 1, 2, 3, 4:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & 4 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 = a_1 = 6 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 6 \cdot 7 - 5 \cdot 3 = 27 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 5 & 7 & 4 \\ 0 & 6 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 6 \cdot 7 \cdot 3 + 0 \cdot 3 \cdot 4 + 0 \cdot 5 \cdot 6 - 0 \cdot 7 \cdot 0 - 6 \cdot 6 \cdot 4 - 5 \cdot 3 \cdot 3 = -63 < 0.$$

La valorile date ale coeficienților polinomului caracteristic determinantul $\Delta_3 = -63 < 0$ este negativ și, conform criteriului Hurwitz, sistemul este instabil. ■

Analizând stabilitatea sistemului caracterizat de polinomul dat, aplicând criteriile Routh și Hurwitz, ambele criterii au confirmat același rezultat – sistemul automat este instabil.

Utilizând criteriul Hurwitz, se determină coeficientul critic de transfer al sistemului deschis când sistemul automat închis este la limită de stabilitate (regimul critic) în condiția când determinantul superior se egalează cu zero:

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} a_n = 0, a_n \neq 0, \Delta_{n-1} = 0. \quad (4.15)$$

Din expresia $\Delta_{n-1} = 0$ se determină coeficientul critic de transfer k_{cr} al sistemului deschis, care se conține în termenul liber a_n al polinomului caracteristic al sistemului închis.

Exemplul 4.3. Se consideră structura sistemului automat deschis alcătuită din trei elemente identice înseriate și descrisă prin funcția de transfer:

$$H_d(s) = \frac{k}{(Ts+1)^3}.$$

Se cere să se calculeze valoarea critică a coeficientului de transfer al sistemului deschis, utilizând criteriul Hurwitz.

Soluționare. Se determină funcția de transfer a sistemului închis:

$$H_0(s) = \frac{H_d(s)}{1+H_d(s)} = \frac{k}{(Ts+1)^3+k} = \frac{k}{T^3s^3+3T^2s^2+3Ts+1+k} =$$

$$= \frac{k}{a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} = \frac{k}{A(s)},$$

unde $a_0 = T^3$, $a_1 = 3T^2$, $a_2 = 3T$, $a_3 = 1 + k$.

Ecuția caracteristică a sistemului închis este:

$$A(s) = T^3 s^3 + 3T^2 s^2 + 3Ts + 1 + k = a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0.$$

Din coeficienții ecuației caracteristice a sistemului închis se construiește determinantul sistemului de ordinul 3:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}.$$

Pentru determinarea coeficientului critic k_{cr} al sistemului deschis se utilizează condiția (4.15) prezentată pentru sistemul analizat de ordinul $n = 3$:

$$\Delta_3 = \Delta_2 a_3 = 0, a_3 \neq 0, \Delta_2 = 0.$$

Din determinantul Δ_2 se calculează valoarea critică a coeficientului de transfer al sistemului deschis:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 = 3T^2 3T - T^3(1 + k) = 0,$$

$$9 - 1 - k = 0, k_{cr} = 8. \blacksquare$$

Concluzie. Rezultă că valoarea critică k_{cr} a coeficientului de transfer al sistemului deschis analizat cu elemente identice nu depinde de valorile absolute ale constantelor de timp.

Cu creșterea numărului n de elemente identice coeficientul critic se reduce.

Pentru a obține o valoare mai mare a coeficientului de transfer critic k_{cr} este necesar ca diferența dintre valorile constantele de timp să fie cât mai mari.

Exemplul 4.4. Se consideră structura sistemului automat deschis alcătuită din trei elemente cu inerție cu parametrii cunoscuți înseriate și descrisă prin funcția de transfer:

$$H_d(s) = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)} = \frac{k}{(0.1s + 1)(5s + 1)(10s + 1)} = \frac{k}{a_0 s^3 + d_1 s^2 + d_2 s + d_3},$$

unde $d_0 = T_1 T_2 T_3 = 0.1 \cdot 5 \cdot 10 = 5$, $d_1 = T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3 = 0.1 \cdot 5 + 0.1 \cdot 10 + 5 \cdot 10 = 51.5$, $d_2 = T_1 + T_2 + T_3 = 0.1 + 5 + 10 = 15.1$, $d_3 = 1$.

Se cere să se calculeze valoarea critică a coeficientului de transfer al sistemului deschis, utilizând criteriul Hurwitz.

Soluționare. Se determină funcția de transfer a sistemului închis:

$$H_0(s) = \frac{H_d(s)}{1+H_d(s)} = \frac{k}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)(T_3 s+1)+k} = \frac{k}{a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} = \frac{k}{A(s)},$$

unde $a_0 = d_0 = T_1 T_2 T_3 = 5$, $a_1 = d_1 = T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3 = 51.5$, $a_2 = d_2 = T_1 + T_2 + T_3 = 15.1$, $a_3 = 1 + k$.

Ecuția caracteristică a sistemului închis este:

$$A(s) = a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0.$$

Din coeficienții ecuației caracteristice a sistemului închis se construiește determinantul sistemului de ordinul 3:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 51.5 & 1+k & 0 \\ 5 & 15.1 & 0 \\ 0 & 51.5 & 1+k \end{vmatrix}.$$

Pentru determinarea coeficientului critic k_{cr} al sistemului deschis se utilizează condiția (4.15) prezentată pentru sistemul analizat de ordinul $n = 3$:

$$\Delta_3 = \Delta_2 a_3 = 0, a_3 \neq 0, \Delta_2 = 0.$$

Din determinantul Δ_2 se calculează valoarea critică a coeficientul de transfer al sistemului deschis:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 51.5 & 1+k \\ 5 & 15.1 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 = 51.5 \cdot 15.1 - 5 \cdot (1+k) =$$

$$772.65 - 5k = 0, k_{cr} = \frac{772.65}{5} = 154.53.$$

Coeficientul $k_{cr} = 154.53$ din exemplul 4.4 este mai mare de 19.32 ori decât $k_{cr} = 8$ din exemplul 4.3. ■

În baza acestui exemplu se prezintă relațiile funcționale dintre coeficientul critic k_{cr} al sistemului deschis și constantele de timp.

Se prezintă determinantul Δ_2 în forma:

$$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 =$$

$$= (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3)(T_1 + T_2 + T_3) - T_1 T_2 T_3 (1 + k) = 0$$

și împărțind toți termenii la $T_1 T_2 T_3$, după unele transformări, se obține expresia coeficientului critic exprimată prin raportul constantelor de timp:

$$k_{cr} = 2 + \frac{T_1}{T_2} + \frac{T_1}{T_3} + \frac{T_2}{T_1} + \frac{T_2}{T_3} + \frac{T_3}{T_1} + \frac{T_3}{T_2}.$$

Concluzie. Coeficientul critic k_{cr} de transfer al sistemului deschis depinde de raportul constantelor de timp și nu depinde de valorile lor absolute. O analiză mai detaliată demonstrează că coeficientul critic are valoarea mai mare cu cât este mai mare diferența dintre valoarea celei mai mari constante de timp și valoarea celei mai mici constante de timp.

4.4 Criterii frecvențiale

Criteriile frecvențiale Mihailov și Nyquist sunt formulate pe baza principiului argumentului funcției complexe [1, 3-5, 8, 11-13, 18, 21]. Pentru analiza stabilității sistemului, criteriile frecvențiale utilizează funcțiile frecvențiale (locul de transfer) ale sistemului care se obțin din f.d.t. $H(s)$ cu substituirea $s = j\omega$ și se obține $H(j\omega)$. La variația lui $\omega = 0 \cdots \infty$ vârful vectorului amplitudinii $A(\omega)$ descrie o curbă care reprezintă hodograful în planul complex al variabilei ω .

4.4.1 Principiul argumentului funcției complexe

Fie dată funcția analitică (olomorvă) complexă de argumentul p :

$$F(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_0 \sum_{j=1}^m (p - z_j)}{a_0 \sum_{i=1}^n (p - p_i)}, \quad (4.16)$$

care în condiția $B(p) = 0$ are m zerouri și $A(p) = 0$ are n poli și toate

zerourile și toți polii sunt alocăți în interiorul unui cerc [8, 13].

Definiție. Dacă se variază argumentul funcției p după un cerc în direcția pozitivă (după acele ceasornicului), atunci creșterea totală a argumentului funcției $F(p)$ este unghiul $\varphi = 2\pi(n - m)$.

Fie dată ecuația caracteristică a sistemului în buclă închisă:

$$A(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0, \quad (4.17)$$

care are n rădăcini p_1, p_2, \dots, p_n . Admitem m rădăcini ale lui $A(p)$ alocate în semiplanul drept C^+ , atunci $n - m$ rădăcini sunt alocate în semiplanul stâng C^- .

Polinomul $A(p)$ se prezintă prin rădăcinile sale în forma:

$$A(p) = a_0 (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n). \quad (4.18)$$

În (4.18) se substituie $p = j\omega$ și se obține expresia în domeniul frecvență:

$$A(j\omega) = a_0 (j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_n), \quad (4.19)$$

iar modulul expresiei (4.19) este:

$$|A(j\omega)| = a_0 |j\omega - p_1| \cdot |j\omega - p_2| \dots |j\omega - p_n|. \quad (4.20)$$

Se prezintă interpretarea geometrică a expresiilor complexe $(j\omega - p_i)$ ca vectori în planul complex al rădăcinilor $p_i = \pm\alpha_i \pm j\omega_i$, unde $\alpha > 0$, $\omega > 0$. Acești vectori au începutul lor în rădăcinile p_i ai planului complex, iar vârful lor este situat pe axa imaginară a planului complex în punctul $j\omega_i$ (fig. 4.4, a) la care sunt orientați toți vectorii.

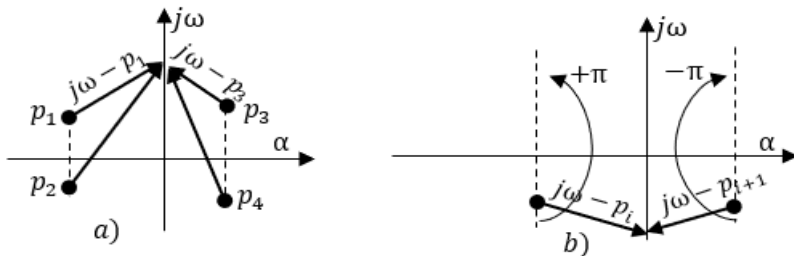


Fig. 4.4. Planul rădăcinilor polinomului caracteristic al sistemului

Se modifică valoarea argumentului $-\infty < \omega < \infty$ și se calculează valoarea argumentului funcției $A(j\omega)$:

$$\Delta_{-\infty < \omega < \infty} \arg A(j\omega) = \sum_{i=1}^n \Delta_{-\infty < \omega < \infty} \arg(j\omega - p_i). \quad (4.21)$$

Pentru determinarea valorii totale a argumentului (4.16) se calculează suma variațiilor argumentelor a două componente ($j\omega - p_i$) și ($j\omega - p_{i+1}$) (fig. 4.4, *b*) în funcție de alocarea rădăcinilor în semiplanul stâng și drept.

Pentru rădăcina p_i din semiplanul stâng la variația lui $\omega = -\infty \dots \infty$ vârful vectorului se rotește în contrasens la unghiul $+180^\circ$ sau π și argumentul este:

$$\Delta_{-\infty < \omega < \infty} \arg(j\omega - p_i) = \pi, \quad (4.22)$$

iar dacă rădăcina p_{i+1} este în semiplanul drept și la variația lui $\omega = -\infty \dots \infty$, atunci vârful vectorului se rotește în sens pozitiv la unghiul -180° sau $-\pi$ și argumentul va fi:

$$\Delta_{-\infty < \omega < \infty} \arg(j\omega - p_{i+1}) = -\pi, \quad (4.23)$$

Deoarece în semiplanul stâng sunt $n - m$ rădăcini, iar în semiplanul drept m rădăcini, atunci la variația lui $\omega = -\infty \dots \infty$ variația totală a argumentul funcției $A(j\omega)$ va fi:

$$\Delta_{-\infty < \omega < \infty} \arg A(j\omega) = \pi(n - m) - \pi m = \pi n - \pi m - \pi m = \pi(n - 2m), \quad (4.24)$$

din care rezultă că la variația lui $\omega = -\infty \dots \infty$ vectorul $A(j\omega)$ se va roti la un număr de rotații egal cu $\pi(n - 2m)$.

Dacă variația lui $\omega = 0 \dots \infty$, atunci (4.24) are forma:

$$\Delta_{0 < \omega < \infty} \arg A(j\omega) = \frac{\pi}{2}(n - 2m). \quad (4.25)$$

Dacă sistemul automat este stabil, atunci rădăcinile $m = 0$ și toate n rădăcinile ecuației caracteristice sunt alocate în semiplanul stâng și argumentul funcției $A(j\omega)$ din (4.25) are forma:

$$\Delta \arg A(j\omega) = \frac{\pi}{2} n. \quad (4.26)$$

$0 < \omega < \infty$

4.4.2 Criteriul Mihailov

Acest criteriu frecvențial, cunoscut și sub denumirea de criteriu Cremer-Leonhard, se bazează pe principiul argumentului (4.26) și se utilizează pentru analiza stabilității sistemului automat după polinomul $A(p)$ caracteristic al sistemului închis [4, 8-9, 11-13, 17-19].

Se consideră polinomul caracteristic al sistemului închis cu coeficienții cunoscuți și prezentat ca ecuație algebrică:

$$A(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0. \quad (4.27)$$

În (4.27) se substituie operatorul $p = j\omega$ și se obține funcția frecvențială sau hodograful ca funcție complexă și, aplicând ridicarea la putere a termenilor respectivi cu valorile lui $j^2 = -1$, $j^3 = -j$, $j^4 = 1, \dots$ (unde $j = \sqrt{-1}$), se grupează termenii reali și imaginari obținând expresia de forma:

$$\begin{aligned} A(j\omega) &= a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1}j\omega + a_n = \\ &= (a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \dots) + j(a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + \dots) = \\ &= U(\omega) + jV(\omega) = 0, \end{aligned} \quad (4.28)$$

unde $U(\omega) = (a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \dots)$ este funcția frecvențială reală, $V(\omega) = (a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 - \dots)$ - funcția frecvențială imaginară.

Pentru analiza stabilității sistemului automat se modifică $\omega = 0 \dots \infty$, se calculează funcțiile frecvențiale $U(\omega)$ și $V(\omega)$ și se completează tabelul 4.3.

Tabelul 4.3. Calculul funcției frecvențiale $A(j\omega)$

ω	0	0.5	1	2	5	10	15	...	∞
$U(\omega)$	a_n	$\pm\infty$
$V(\omega)$	0	$\pm\infty$

După datele din tabelul 4.3 se construiește locul de transfer $A(j\omega)$ în planul complex reprezentat în figura 4.5.

Definiție. Pentru stabilitatea sistemului închis este necesar și suficient ca la variația $\omega = 0 \dots \infty$ hodograful $A(j\omega)$ să înceapă pe semiaxa reală pozitivă la valoarea lui $\omega = 0$ și cu creșterea lui ω să se rotească contrasens, să nu formeze inele și să parcurgă exact n cadrane.

Altfel spus, în baza principiului argumentului, variația totală a argumentului hodografului $A(j\omega)$ va fi exact egală cu $\frac{\pi}{2}n$.

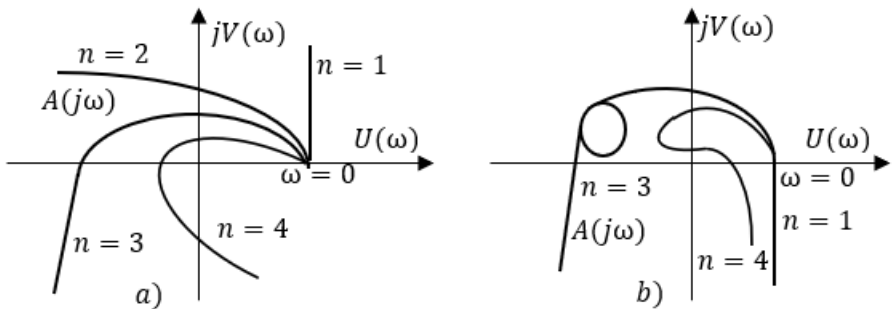


Fig. 4.5. Hodograful Mihailov:

a) pentru sisteme stabile, b) pentru sisteme instabile

În figura 4.5, a) sunt reprezentate locurile de transfer pentru sisteme stabile de ordinul 1, 2, 3, 4, iar în figura 4.5, b) – locurile de transfer pentru sistemele instabile de ordinul 1, 3, 4, pentru care nu sunt respectate condițiile de stabilitate ale criteriului: alura 1 este inversată direcției de variație, alura 3 formează inele și alura 4 nu trece consecutiv cadranele.

Exemplul 4.5. Se dă ecuația caracteristică a sistemului automat în buclă închisă cu coeficienții cunoscuți:

$$A(p) = a_0p^5 + a_1p^4 + a_2p^3 + a_3p^2 + a_4p + a_5 = 0,$$

unde $a_0 = 2, a_1 = 4, a_2 = 7, a_3 = 8, a_4 = 5, a_5 = 3$.

Se cere să se verifice stabilitatea sistemului, utilizând criteriul Mihailov.

Soluționare. În ecuația caracteristică se substituie $p = j\omega$ și se determină partea reală și imaginară care vor fi egale cu zero:

$$\begin{aligned} A(j\omega) &= a_0(j\omega)^5 + a_1(j\omega)^4 + a_2(j\omega)^3 + a_3(j\omega)^2 + a_4j\omega + a_5 = \\ &= (a_5 - a_3\omega^2 + a_1\omega^4) + j(a_4\omega - a_2\omega^3 + a_0\omega^5) = 0, \end{aligned}$$

$$U(\omega) = a_5 - a_3\omega^2 + a_1\omega^4 = 3 - 8\omega^2 + 4\omega^4 = 0,$$

$$V(\omega) = a_4\omega - a_2\omega^3 + a_0\omega^5 = 5\omega - 7\omega^3 + 2\omega^5 = \omega(5 - 7\omega^2 + 2\omega^4) = 0.$$

S-au obținut două ecuații algebrice bipătratic. A doua ecuație are o rădăcină nulă $\omega_1 = 0$.

Ecuațiile bipătratic se rezolvă prin utilizarea substituției $\omega^2 = x$ și, în continuare, se obțin ecuațiile pătratice care se rezolvă în modul următor.

Prima ecuație de gradul doi se rezolvă și se determină rădăcinile:

$$4x^2 - 8x + 3 = 0,$$

$$x_{1,2} = \omega_{2,4}^2 = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{4 \cdot 2} = \frac{4 \pm \sqrt{64 - 48}}{8} = \frac{4 \pm \sqrt{16}}{8} = \frac{4 \pm 4}{8},$$

$$\omega_2^2 = \frac{4+4}{8} = 1, \omega_2 = 1, \omega_4^2 = \frac{4-4}{8} = 0, \omega_4 = 0.$$

Pentru ecuația a doua de gradul doi se rezolvă și se determină rădăcinile:

$$2x^2 - 7x + 5 = 0,$$

$$x_{1,2} = \omega_{3,5} = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{4} = \frac{7 \pm 3}{4},$$

$$\omega_3^2 = \frac{7+3}{4} = \frac{10}{4} = 2.5, \omega_3 = \sqrt{2.5} = 1.5811,$$

$$\omega_5^2 = \frac{7-3}{4} = \frac{4}{4} = 1, \omega_5 = 1.$$

Din acest criteriu rezultă consecința: sistemul automat va fi stabil, dacă și numai dacă pentru rădăcinile ecuațiilor algebrice $U(\omega) = 0$ și $V(\omega) = 0$ este adevărată inegalitatea:

$$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_4 < \omega_5 = 0 < 1 < 1,5811 < 0 < 1.$$

Concluzie: Deoarece nu se respectă inegalitatea rădăcinilor rezultă că la valorile date ale coeficienților ecuației caracteristice sistemul este instabil. ■

4.4.3 Criteriul Nyquist

Criteriul a fost elaborat de matematicianul american H. Nyquist în anul 1932. În comparație cu criteriile teoretice Routh, Hurwitz și Mihailov, care se bazează pe ecuația caracteristică a sistemului automat în buclă închisă, criteriul Nyquist are sens fizic și are următoarele avantaje [1, 3, 4, 8, 11-13, 17-21].

1. Se aplică la sistemul automat deschis, ceea ce simplifică procedura de calcul a funcției de transfer a sistemului.

2. Este un criteriu experimental, deoarece locul de transfer $H_d(j\omega)$ al sistemului în circuit deschis se poate ridica pentru sistemul real pe cale experimentală, aplicând la intrare semnale armonice și înregistrând semnalul de ieșire și se calculează funcția frecvențială $H_d(j\omega)$.

Toate calculele se efectuează pentru locul de transfer $H_d(j\omega)$ al sistemului deschis și, după evoluția locului de transfer $H_d(j\omega)$, prin definiție se determină stabilitatea sistemului automat închis.

Pentru analiza stabilității sistemului automat liniar în buclă închisă cu reacție unitară criteriul Nyquist se prezintă în modul următor.

Se consideră f.d.t. a sistemului deschis ca raportul a două polinoame:

$$H_d(s) = \frac{C(s)}{D(s)} = \frac{c_m s^m + c_{m-1} s^{m-1} + \dots + c_1 s + c_0}{d_n s^n + d_{n-1} s^{n-1} + \dots + d_1 s + d_0}, \quad (4.29)$$

unde polinomul $C(s)$ are gradul m , polinomul $D(s)$ - gradul n și $m < n$.

Analiza stabilității asimptotice a sistemului automat după criteriul Nyquist se bazează pe principiul argumentului, iar în calitate de contur se utilizează axa imaginară a planului complex al rădăcinilor ecuației caracteristice a sistemului automat și semicercumferința cu raza infinit.

Se consideră sistemul automat deschis descris cu f.d.t. $H_d(s)$ care poate avea trei stări.

1. Sistemul deschis este stabil.

2. Sistemul deschis este instabil.
3. Sistemul deschis este la limită de stabilitate.

În baza funcției de transfer (4.29) se construiește funcția de forma:

$$F(s) = 1 + H_d(s) = 1 + \frac{C(s)}{D(s)} = \frac{D(s)+C(s)}{D(s)} = \frac{A(s)}{D(s)}. \quad (4.30)$$

Numărătorul $A(s)$ funcției (4.30) este ecuația caracteristică a sistemului automat în circuit închis cu gradul n , iar numitorul $D(s)$ este ecuația caracteristică a sistemului automat deschis cu gradul n .

1. *Se analizează cazul sistemului automat deschis stabil.* În cazul Dat, sistemul este static și la valoarea $\omega = 0$ locul de transfer $H_d(j\omega)$ se determină de coeficientul de transfer al sistemului care este $k = c_0/d_0$. În baza principiului argumentului la valoarea lui $\omega = 0 \dots \infty$ variația totală a argumentului polinomului caracteristic al sistemului în circuit deschis este:

$$\Delta \arg D(j\omega) \Big|_{0 < \omega < \infty} = \frac{\pi}{2} n. \quad (4.31)$$

În cazul când sistemul în buclă închisă este stabil, este necesar să fie satisfăcută egalitatea:

$$\Delta \arg (D(j\omega) + C(j\omega)) \Big|_{0 < \omega < \infty} = \frac{\pi}{2} n. \quad (4.32)$$

Se calculează argumentul funcției $F(j\omega)$ din expresia (4.30):

$$\Delta \arg F(j\omega) \Big|_{0 < \omega < \infty} = \Delta \arg (D(j\omega) + C(j\omega)) \Big|_{0 < \omega < \infty} - \Delta \arg D(j\omega) \Big|_{0 < \omega < \infty} = \frac{\pi}{2} n - \frac{\pi}{2} n = 0. \quad (4.33)$$

Rezultatul obținut din (4.33) confirmă că sistemul deschis este stabil dacă la variația lui $\omega = 0 \dots \infty$ variația totală a argumentului funcției $F(j\omega)$ este egală cu zero.

Pentru a construi locul de transfer $F(j\omega) = P_1(\omega) + jQ_1(\omega)$ se variază $\omega = 0 \dots \infty$ și se calculează partea reală și imaginară și se

trasează curba frecvențială (fig. 4.6, a), ce corespunde sistemului stabil, deoarece nu înconjură punctul de referință cu coordonatele $(0, j0)$.

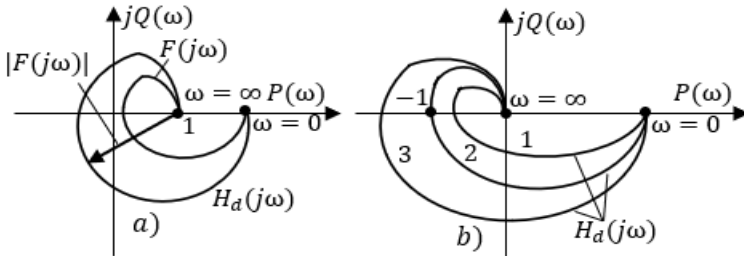


Fig. 4.6. Locul de transfer $H_d(s)$ al sistemului automat

Fiindcă funcția $F(j\omega) = 1 + H_d(j\omega)$ se deosebește cu $+1$ de funcția $H_d(j\omega)$, atunci se poate prezintă $H_d(j\omega) = F(j\omega) - 1$ și condițiile de stabilitate pot fi raportate direct la funcția $H_d(j\omega)$ și punctul de referință va fi punctul cu coordonatele $(-1, j0)$, numit punct critic pentru sistemul automat (fig. 4.6, b).

Pentru a construi locul de transfer $H_d(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$ se variază $\omega = 0 \cdots \infty$, se calculează partea reală $P(\omega)$ și imaginara $Q(\omega)$ și se trasează curba frecvențială (fig. 4.6, b).

Se formulează condițiile de stabilitate ale sistemului închis.

Definiție. Sistemul automat în circuit închis este stabil dacă și numai dacă la modificarea lui $\omega = 0 \cdots \infty$ locul de transfer $H_d(j\omega)$ al sistemului în circuit deschis nu înconjoară punctul critic cu coordonatele $(-1, j0)$ (fig. 4.6, b, curba 1).

Dacă locul de transfer $H_d(j\omega)$ trece prin punctul critic $(-1, j0)$, atunci sistemul automat în circuit închis este la limita de stabilitate (fig. 4.6, b, curba 2).

Dacă locul de transfer $H_d(j\omega)$ înconjoară punctul critic $(-1, j0)$, atunci sistemul automat închis este instabil (fig. 4.6, b, curba 3).

Sensul fizic al criteriului Nyquist constă în următoarele. Dacă la intrarea sistemului automat în buclă închisă se aplică un semnal armonic $x(t) = A \sin \omega t$ cu amplitudine relativ mică, atunci la o anumită frecvență ω_π pentru care defazajul $\varphi(\omega)$ în sistem va fi egal cu $-\pi$ sau -180° și faza semnalului reacției negative va coincide cu faza semnalului de intrare și semnalele se însumează.

Când $\omega = \omega_\pi$ modulul $|H_d(j\omega)| = 1$, atunci și după dispariția semnalului de intrare $x(t) = 0$ în conturul sistemului se instalează autooscilații și sistemul închis este la limita de stabilitate ca în figura 4.6, *b*), curba 2.

Când $\omega = \omega_\pi$ modulul $|H_d(j\omega)| < 1$, atunci după dispariția semnalului de intrare $x(t) = 0$ autooscilațiile se vor stinge, iar sistemul în buclă închisă este stabil ca în figura 4.6, *b*, curba 1.

Când $\omega = \omega_\pi$ modulul $|H_d(j\omega)| > 1$, atunci în conturul sistemului amplitudinea semnalului crește nemărginit (semnalul $x(t) \neq 0$), sistemul în buclă închisă este instabil ca în figura 4.6, *b*, curba 3.

Astfel, punctul critic $(-1, j0)$ are un rol deosebit: corespunde operației de inversare a reacției negative în reacție pozitivă și este punctul limită dintre regimurile de amplificare și atenuare a semnalelor din blocul $H_d(j\omega)$.

2. *Se analizează cazul sistemului automat în circuit deschis care este instabil.* În acest caz, rezultă că există una sau mai multe rădăcini m cu partea reală pozitivă a ecuației caracteristice sistemului închis, alocate în semiplanul drept C^+ . Deci, în structura sistemului deschis există unul sau mai multe elemente instabile.

În baza principiului argumentului (4.31)-(4.33) variația totală a argumentului polinomului caracteristic $D(j\omega)$ al sistemului deschis este:

$$\Delta \arg_{0 < \omega < \infty} D(j\omega) = \frac{\pi}{2}(n - 2m). \quad (4.34)$$

În cazul când sistemul în buclă închisă este stabil și $m = 0$, are loc egalitatea:

$$\Delta \arg_{0 < \omega < \infty} (D(j\omega) + C(j\omega)) = \frac{\pi}{2}n. \quad (4.35)$$

Se calculează argumentul funcției $F(j\omega)$ din expresia (4.33):

$$\Delta \arg_{0 < \omega < \infty} F(j\omega) = \Delta \arg_{0 < \omega < \infty} (D(j\omega) + C(j\omega)) -$$

$$-\Delta \arg D(j\omega) = \frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{2}(n - 2m) = \frac{m}{2} 2\pi. \quad (4.36)$$

$0 < \omega < \infty$

Pentru analiza stabilității sistemului automat închis se dă locul de tranfer al sistemului deschis $H_d(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$, pentru care se variază $\omega = 0 \cdots \infty$, se calculează $P(\omega)$ și $Q(\omega)$ și se trasează locul de tranfer $H_d(j\omega)$ (fig. 4.6, a) și în baza alurei $H_d(j\omega)$ se creează condițiile de stabilitate pentru sistemul închis.

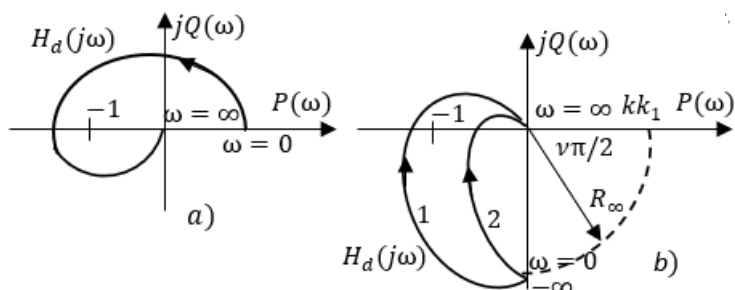


Fig. 4.7. Locul de tranfer $H_d(s)$ al sistemului deschis

Definiție. Sistemul de reglare automată închis este stabil dacă și numai dacă la modificarea lui $\omega = 0 \cdots \infty$ locul de tranfer $H_d(j\omega)$ al sistemului deschis înconjoară punctul critic cu coordonatele $(-1, j0)$ de $m/2$ ori în sens pozitiv (contra acelor), unde m sunt rădăcinile ecuației caracteristice sistemului deschis alocate în semiplanul drept C^+ (fig. 4.7, a).

3. Se analizează cazul sistemului automat deschis la limită de stabilitate. În acest caz, f.d.t. $H_d(s)$ a sistemului deschis se descrie:

$$H_d(s) = \frac{C(s)}{s^v D_1(s)} = \frac{1}{s^v} \frac{C(s)}{D_1(s)}, \quad (4.37)$$

unde v este gradul de astatism al sistemului, care prezintă numărul de elemente integratoare cu constanta de timp de integrare $T = 1$ și indică numărul de poli egali cu zero ($s_i = 0, i = \overline{1, v}$) a lui $H_d(s)$, alocați în origine (pe axa imaginară), iar polinomul $D_1(s)$ nu are rădăcini alocate

în semiplanul drept C^+ .

Locul de transfer pentru expresia (4.37) are forma:

$$H_d(j\omega) = \frac{C(j\omega)}{(j\omega)^v D_1(j\omega)} = \frac{1}{(j\omega)^v} \frac{C(j\omega)}{D_1(j\omega)}. \quad (4.38)$$

În cazul dat, utilizarea definițiilor criteriului Nyquist de mai sus nu sunt valabile, deoarece principiul argumentului nu prevede cazul când rădăcinile polinomului sunt alocate pe axa imaginară. Când $\omega = 0$ locul de transfer $H_d(j\omega)$ tinde la $\pm\infty$ și nu se poate determina dacă hodograful $H_d(j\omega)$ înconjoară sau nu punctul critic $(-1, j0)$.

În acest caz, sistemul deschis este un sistem astatic (fig. 4.7, *b*).

Printr-o operație artificială, polii s_i se modifică adăugând o constantă d , obținând expresia $(s_i \pm d)$ și se presupune că $d \rightarrow 0$, atunci cazul analizat se transformă în cazul 1 - sistem stabil sau 2 - sistem instabil și astfel se analizează stabilitatea sistemului automat.

În cazul când gradul de astatism $v = 1$ cu $s_i = -d$, sistemul astatic (4.38) se transformă în sistem static stabil cu f.d.t. de forma:

$$H_{d1}(s) = \frac{C(s)}{(s+d)D_1(s)} = \frac{1}{d} \frac{C(s)}{(\frac{1}{d}s+1)D_1(s)} = \frac{k_1}{Ts+1} \frac{C(s)}{D_1(s)}, \quad (4.39)$$

unde elementul integrator s-a transformat în element cu inerție de ordinul unu cu parametrii coeficientul de transfer $k_1 = 1/d$ și constanta de timp $T = 1/d$.

Locul de transfer al sistemului în circuit deschis are forma:

$$H_{d1}(j\omega) = \frac{1}{d} \frac{C(j\omega)}{(\frac{1}{d}j\omega+1)D_1(j\omega)} = \frac{k_1}{Tj\omega+1} \frac{C(j\omega)}{D_1(j\omega)}. \quad (4.40)$$

Se variază $\omega = 0 \dots \infty$, se calculează locurile de transfer din (4.38)-(4.40) cu gradul de astatism $v = 1$ și se trasează în planul complex $H_d(j\omega)$ (fig.4.6, *b*, curba 1) și $H_{d1}(j\omega)$ (fig. 4.7, *b*, curba 2).

Pentru hodograful $H_d(j\omega)$ la valoarea lui $\omega = 0$ punctul inițial tinde la $-\infty$ pe semiaxa imaginară negativă, iar pentru hodograful $H_{d1}(j\omega)$ la valoarea lui $\omega = 0$ punctul inițial se află pe semiaxa reală

pozitivă $kk_1 = k/d$.

Dacă gradul de astatism $\nu = 2$, atunci locul de transfer $H_d(j\omega)$ are forma:

$$H_d(j\omega) = \frac{c(j\omega)}{(j\omega)^2 D_1(j\omega)} = \frac{1}{(j\omega)^2} \frac{c(j\omega)}{D_1(j\omega)} = -\frac{1}{\omega^2} \frac{c(j\omega)}{D_1(j\omega)}, \quad (4.41)$$

care la valoarea lui $\omega = 0$ punctul inițial tinde la $-\infty$ pe semiaxa reală.

Astfel, pentru aceste cazuri expunerea criteriului Nyquist are următoarea formă.

Definiție. Locurile de transfer $H_d(j\omega)$ la valoarea lui $\omega = 0$ au punctele inițiale în $\pm\infty$ și acest punct prin arce cu raza $R_{\pm\infty}$ care începe în originea planului, iar vârful se află pe punctul inițial al hodografului, se rotesc la unghiul $\nu\frac{\pi}{2}$ și se aduc pe semiaxa reală pozitivă. Astfel, locul de transfer se modifică $H_d^m(j\omega)$ și corespunde cazului unu sau doi.

Pentru locul de transfer modificat $H_d^m(j\omega)$ se aplică după caz definițiile unu sau doi de stabilitate a sistemului închis.

4. *Forma generalizată a criteriului Nyquist.* În cazurile când locul de transfer $H_d(j\omega)$ are formă complexă și intersectează semiaxa reală negativă la stânga de punctul critic, pe segmentul $(-\infty, -1]$, atunci se aplică o definiție generalizată a criteriului Nyquist.

Se introduc noțiunile de intersecție pozitivă (+) pe segmentul $(-\infty, -1]$, când cu creșterea lui $\omega = 0 \cdots \infty$ locul de transfer $H_d(j\omega)$ intersectează acest segment de sus în jos și intersecție negativă (-) – de jos în sus (fig. 4.8, a).

Definiție. Pentru sistemul automat închis stabil este necesar și suficient ca la variația lui $\omega = 0 \cdots \infty$ diferența dintre numărul de intersecții pozitive și negative ale hodografului $H_d(j\omega)$ pe segmentul $(-\infty, -1]$ să fie egală cu $m/2$, unde m sunt rădăcinile pozitive ale ecuației caracteristice ale sistemului deschis.

Exemplul 4.6. Se consideră structura sistemului automat deschis prezentată în conexiune serie a trei elemente cu inerție identice, având funcția de transfer:

$$H_d(s) = \frac{k}{(Ts+1)^3}.$$

Se cere să se determine valoarea critică k_{cr} a coeficientului de transfer al sistemului deschis, utilizând criteriul Nyquist.

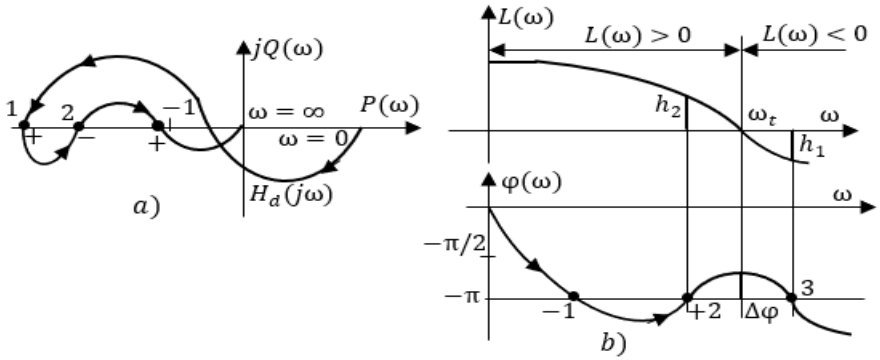


Fig. 4.8. Locul de transfer $H_d(s)$ generalizat a) și caracteristicile logaritmice b)

Soluționate. Se prezintă locul de transfer al sistemului deschis:

$$H_d(j\omega) = \frac{k}{(j\omega T + 1)^3},$$

pentru care se determină caracteristicile amplitudine-frecvență și fază-frecvență:

$$A(\omega) = |H_d(j\omega)| = \frac{k}{(\sqrt{T^2\omega^2 + 1})^3},$$

$$\varphi(\omega) = \arg H_d(j\omega) = -3\arctg\omega T.$$

Sistemul automat deschis este la limita de stabilitate când caracteristica amplitudine-frecvență intersectează punctul critic $(-1, j0)$ la o frecvență $\omega = \omega_{cr}$ pentru care se realizează condițiile:

$$A(\omega_{cr}) = 1, \varphi(\omega_{cr}) = -\pi = -180^\circ.$$

Se determină valorile $A(\omega_{cr})$ și $\varphi(\omega_{cr})$ și se obține:

$$A(\omega_{cr}) = \frac{k_{cr}}{(\sqrt{T^2\omega_{cr}^2 + 1})^3} = 1, -3\arctg\omega_{cr}T = -180^\circ.$$

Se determină valoarea argumentului: $\arctg\omega_{cr}T = 180/3 = 60^\circ$.

Pentru a calcula $\arctg\omega_{cr}T$ cu argumentul $\omega_{cr}T$ mai mare ca unitate se determină argumentul arccotangentei de 60° : $\text{arctg}0.5774 = 60^\circ$ și valoarea acesteia

se prezintă ca mărime inversată $\frac{1}{0.5774} = 1.732 = \sqrt{3}$ care este argumentul arctangentei de 60: $\omega_{cr}T = 1.732 = \sqrt{3}$.

În expresia amplitudinii la valoarea ω_{cr} se determină valoarea critică a coeficientul de transfer k_{cr} :

$$A(\omega_{cr}) = \frac{k_{cr}}{(\sqrt{T^2\omega_{cr}^2+1})^3} = \frac{k_{cr}}{(\sqrt{3+1})^3} = \frac{k_{cr}}{2^3} = 1, k_{cr} = 8.$$

Se constată că valoarea coeficientului critic nu depinde de valoarea absolută a constantelor de timp. ■

4.5 Analiza stabilității sistemului automat după caracteristicile logaritmice

Din formularea criteriului Nyquist generalizat se obțin următoarele proprietăți în scară logaritmică (fig. 4.8, b).

Când caracteristica $L(\omega) = 20\lg A(\omega)$ intersectează semiaxa negativă a absciselor pe segmental $(-\infty, -1]$, caracteristica de fază $\varphi(\omega)$ intersectează o linie cu valoarea $\pm\pi(2i + 1)$, $i = 0, 1, 2, \dots$

Intersecției pozitive (fig. 4.8, a, punctul 2) a locului de transfer $H_d(j\omega)$ pe segmentul $(-\infty, -1]$ îi corespunde intersecția caracteristicii de fază $\varphi(\omega)$ când $L(\omega) > 0$ a liniilor $\pm\pi(2i + 1)$ de jos în sus (fig. 4.8, b, punctul 2), iar intersecției negative (fig. 4.8, a, punctul 1) îi corespunde intersecția de sus în jos (fig. 4.8, b, punctul 1).

Intersectarea lui $\varphi(\omega)$ cu liniile $\pm\pi(2i + 1)$ nu prezintă pericol în privința stabilității sistemului la intersecția lui $H_d(j\omega)$ cu segmentul $[-1, 0]$ când modulul $|H_d(j\omega)| < 1$ caracteristica logaritmică $L(\omega) = 20\lg|H_d(j\omega)| < 0$. Din aceste considerente, valorile $L(\omega) < 1$ nu prezintă interes, fiindcă nu influențează asupra stabilității sistemului.

Definiție. Sistemul automat este stabil dacă diferența dintre numărul de intersecții pozitive și negative ale caracteristicii de fază $\varphi(\omega)$ cu linii $\pm\pi(2i + 1)$ pentru valori ale caracteristicii $L(\omega) > 0$ este egală cu $m/2$, unde m este numărul rădăcinilor pozitive ale ecuației caracteristice a sistemului deschis alocate în semiplanul drept C^+ .

Pe caracteristica logaritmică $L(\omega)$ sunt prezentate marginile de stabilitate în amplitudine h_1 și h_2 (fig. 4.8, b) și marginea de fază $\Delta\varphi$.

4.6 Rezerva de stabilitate a sistemului automat

Din experiența proiectării și exploatării sistemelor automate se constată că asigurarea stabilității sistemului este necesară, dar nu și suficientă pentru o bună funcționare a sistemului.

În regimul de funcționare al sistemului automat parametrii interni se modifică la acțiunea factorilor atât interni, cât și externi, care poate conduce la destabilizarea sistemului.

Din acest motiv, în faza de proiectare este necesar să se asigure o rezervă de stabilitate a sistemului automat [1, 2-5, 8, 11-13, 18, 21, 22].

Rezerva de stabilitate a sistemului se asigură prin introducerea rezervei sau marginii de amplitudine $h = M_A(\omega) = M_A$ și rezervei sau marginii de fază $\Delta\varphi = M_\varphi$. Pentru determinarea indicilor h și $\Delta\varphi$ ai rezervei de stabilitate a sistemului, ce caracterizează locul de transfer $H_d(j\omega)$ al sistemului deschis în raport cu punctul critic $(-1, j0)$, se utilizează forma grafică din figura 4.9.

Fie un sistem automat deschis cu f.d.t. $H_d(s)$ și care în stare închisă este intern stabil (fig. 4.9, a). Se prezintă noțiunile de frecvență superioară și inferioară de tăiere a fazei și frecvență de tăiere a amplitudinii care sunt utilizate în tratarea criteriului Nyquist pentru determinarea indicilor M_A și M_φ .

Frecvența superioară de tăiere a fazei $\omega_{s,\pi}$ pentru care locul de transfer $H_d(j\omega)$ întretaie axa reală în intervalul $[-1, 0]$ (fig. 4.9, a, b).

Definiție. Se numește rezervă sau margine de amplitudine superioară pe frecvența $\omega_{s,\pi}$ mărimea:

$$M_{A,s} = \frac{1}{|H_d(j\omega_\pi)|} = \frac{1}{|H_d(j\omega_{180})|}, \quad (4.42)$$

care prezintă distanța h de la punctul de intersecție a locului de transfer $H_d(j\omega_\pi)$ pe axa reală negativă în intervalul $[-1, 0]$ și punctul critic $(-1, j0)$ și $M_{A,s} > 0$ când $|H_d(j\omega_\pi)| < 1$. Dacă sunt mai multe puncte de tăiere pe intervalul $[-1, 0]$, atunci în calcul se utilizează punctul cel

mai apropiat de punctul critic $(-1, j0)$ și $|H_d(j\omega_\pi)|$ care are cea mai mare valoare.

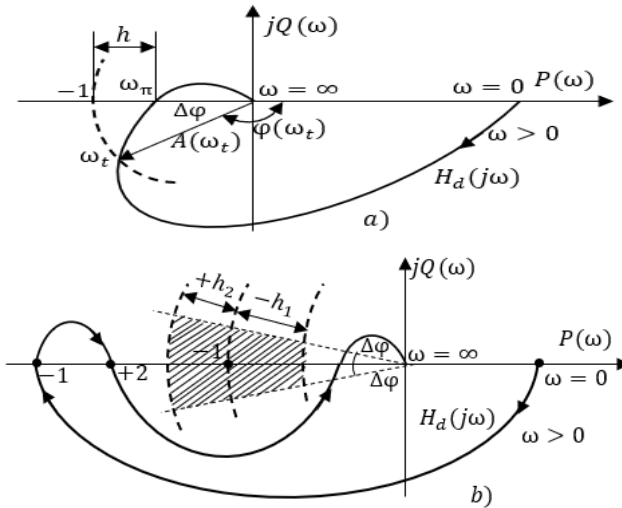


Fig. 4.9. Locul de transfer $H_d(j\omega)$ și rezerva de stabilitate ale sistemului

Dacă nu există intersecții pe interval $[-1, 0]$, atunci marginea $M_{A,S} = \infty$.

Indicatorul $M_{A,S}$ caracterizează măsura marginii de stabilitate sau robusteții, indicând mărimea maximă cu cât poate crește amplificarea în sistemul deschis fără ca sistemul închis să se destabilizeze.

La proiectarea sistemelor automate se recomandă mărimea $h = M_{S,A} = 4 \div 12\text{dB}$ sau $M_{A,S} > 2$.

Frecvența inferioară de tăiere a fazei $\omega_{i,\pi}$ pentru care locul de transfer $H_d(j\omega)$ întretaie axa reală în intervalul $(-\infty, -1]$ (fig. 4.9, b, punctul 2).

Definiție. Se numește rezervă sau margine de amplitudine inferioară pe frecvența $\omega_{i,\pi}$ mărimea:

$$M_{A,i} = \frac{1}{|H_d(j\omega_\pi)|} = \frac{1}{|H_d(j\omega_{180})|}, \quad (4.43)$$

care reprezintă distanța h de la punctul de intersecție a locului de transfer $H_d(j\omega_\pi)$ pe axa reală negativă în intervalul $(-\infty, -1]$ și punctul critic $(-1, j0)$ când $|H_d(j\omega_\pi)| > 1$. Dacă sunt mai multe puncte de tăiere pe intervalul $(-\infty, -1]$, atunci în calcul se utilizează punctul cel mai apropiat de punctul critic $(-1, j0)$ și $|H_d(j\omega_\pi)|$ care are cea mai mică valoare.

Indicatorul $M_{A,i}$ caracterizează o altă măsură a marginii de stabilitate sau robusteții, indicând mărimea maximă cu cât poate să se reducă amplificarea în sistemul deschis fără ca sistemul închis să se destabilizeze.

La proiectarea sistemelor automate se recomandă marginea inferioară $M_{A,i} > 0.5$.

Frecvența de tăiere a amplitudinii ω_t pentru care $|H_d(j\omega)|$ intersectează descrescător circumferința cu raza egală cu 1 (fig. 4.9, a) și $|H_d(j\omega_t)| = 1$.

Definiție. Se numește rezervă sau margine de fază a sistemului deschis mărimea:

$$\Delta\varphi = M_\varphi = \pi - \arg H_d(j\omega_t) = \pi - |\varphi(\omega_t)| = 180^\circ - |\varphi(\omega_t)|, \quad (4.44)$$

care indică câtă fază negativă se poate adăuga sistemului deschis, astfel ca sistemul închis să-și piardă stabilitatea. Pentru proiectare se impune $\Delta\varphi = M_\varphi = 30 \dots 60^\circ$ sau $M_\varphi > 30^\circ$.

În cazul când $\arg H_d(j\omega_{s,\pi}) = -180^\circ$, amplitudinea are valorile $A(\omega_{s,\pi}) = 0.25 \div 0.63$.

Marginea de fază asigură toleranța la incertitudini de tip întârziere care apar frecvent în sistemele automate și își păstrează stabilitatea pentru o întârziere mai mică decât raportul M_φ/ω_t [1].

Dacă indicatorii $M_{A,s}$, $M_{A,i}$ și M_φ simultan nu sunt satisfăcuți, atunci sistemul automat este aproape de instabilitate și mici incertitudini care intervin în modelul $H_d(j\omega)$ vor conduce la instabilitatea sistemului.

Există sisteme automate cu legături inverse în canalul direct, în care sistemul poate deveni instabil nu numai la creșterea coeficientului

de transfer din canalul direct, dar și la reducerea lui (fig. 4.9, b). În aceste cazuri, se introduce rezerva de stabilitate în amplitudine dublă $2h$ (h_1 margine superioară și h_2 margine inferioară) și margine în fază $\pm\Delta\varphi$, care formează sectorul hașurat ca în figura 4.9, b).

În teoria modernă a sistemelor automate se consideră că marginile de amplitudine și fază nu sunt indicatori satisfăcători ai robusteții stabilității sistemului, deoarece există sisteme care satisfac marginile M_A și M_φ , dar la incertitudini relativ mici combinate ale amplitudinii și fazei pierd stabilitatea [1].

Exemplul 4.7 [1]. Se consideră funcția de transfer a sistemului deschis:

$$H_d(s) = \frac{0.38(s^2 + 0.1s + 0.55)}{s(s+1)(s^2 + 0.06s + 0.5)}.$$

Pentru acest sistem s-au determinat indicatorii $M_{A,s} = \infty$, $M_{A,t} = 0$, și $M_\varphi = 70^\circ$, care satisfac cerințele de proiectare și distanța de la punctul critic la locul de transfer $\inf_\omega |1 + H_d(j\omega)| = 0.347$. ■

Acești indici se înlocuiesc cu un singur indicator numit margine vectorială M_V , care exprimă sintetic măsura corectă a stabilității robuste. Marginea vectorială M_V este distanța minimă de la punctul critic $(-1, j0)$ până la intersecția cu locul de transfer $H_d(j\omega)$ (fig. 4.10) dată de relația:

$$M_V = |1 + H_d(j\omega)| = S(j\omega)^{-1} = \frac{1}{1 + H_d(j\omega)}, \quad (4.45)$$

unde $S(j\omega)$ este funcția de sensibilitate a sistemului închis, care indică cât de sensibilă este f.d.t. $H_0(s)$ a sistemului închis la variații ale modelului sistemului nominal.

Această margine se definește ca fiind valoarea maximă a funcției de sensibilitate M_S a sistemului închis pe transferul perturbației:

$$M_S = \max_{0 < \omega < \infty} |S(j\omega)^{-1}| = \max_{0 < \omega < \infty} \left| \frac{1}{1 + H_d(j\omega)} \right|. \quad (4.46)$$

Valoarea maximă a modulului funcției de sensibilitate coincide cu valoarea minimă a expresiei $1/|1 + H_d(j\omega)|$, care este distanța minimă de la locul de transfer până la punctul critic. Mărimea M_S este

reprezentată în figura 4.10 ca fiind invers proporțională cu raza $1/M_V$ a cercului centrat $(-1, j0)$ și tangent la locul de transfer $H_d(j\omega)$.

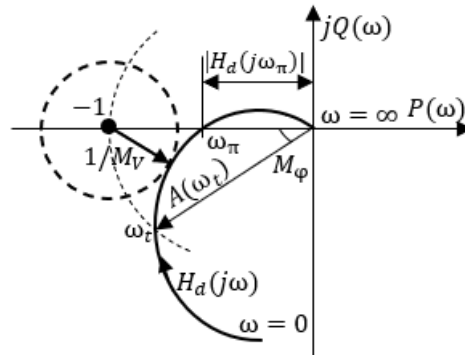


Fig. 4.10. Marginea vectorială M_V

Pentru proiectare se impune $M_V > 0.5$, iar $M_S = 1.3 \dots 2$.
Relațiile dintre M_A , M_ϕ și M_V se dau prin relațiile:

$$M_A \geq \frac{1}{1-M_V}, M_\phi \geq 2 \arcsin \frac{M_V}{2} \geq M_V \text{ rad}, \quad (4.47)$$

iar relațiile dintre M_A , M_ϕ și M_S sunt:

$$M_A \geq \frac{M_S}{M_S-1}, M_\phi \geq 2 \arcsin \frac{1}{2M_S} \text{ rad}. \quad (4.48)$$

Pentru determinarea rezervei de stabilitate se aplică diferite metode.

1. Dacă este cunoscută ecuația caracteristică a sistemului, atunci se determină rădăcinile și după valoarea lor se stabilește gradul de stabilitate $\eta = \min|\text{Re}p_i|$, care reprezintă distanța dintre rădăcina reală (sau partea reală a rădăcinii complexe $p_i = -\alpha_i \pm j\omega_i$.) alocată pe semiaxa negativă și axa imaginară a planului complex al rădăcinilor $\alpha_{\min} < \eta$. Acest parametru se calculează din cerințele de funcționare ale procesului. În acest caz, rezerva de stabilitate se impune $M_A = \alpha_{\min} < \eta$.

2. Se aplică criteriul de stabilitate Hurwitz din condiția că penultimul determinant:

$$\Delta_{n-1} = \varepsilon > 0, \quad (4.49)$$

unde ε se determină din cerințele de funcționare ale procesului.

3. După criteriile Mihailov și Nyquist se introduce un domeniu cu raza ε unde locurile de transfer $A(j\omega)$ și $H_d(j\omega)$ să nu-l intersecteze (fig. 4.11, a, b).

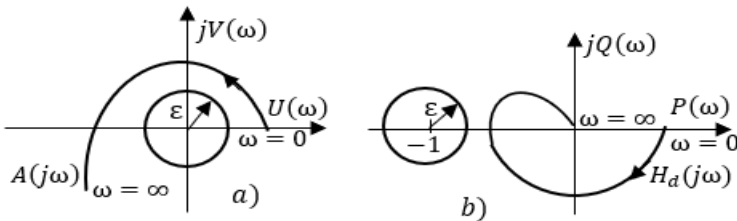


Fig. 4.11. Rezerva de stabilitate a sistemului automat

4.7 Metode de separare în spațiul parametrilor

4.7.1 Conceptul de separare

Pentru a determina influența variațiilor parametrilor sistemului automat asupra stabilității se utilizează metode de separare în planul parametrilor sistemului [11-13, 17, 19].

Fie dată ecuația caracteristică a sistemului automat închis în forma:

$$A(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0, \quad (4.50)$$

unde coeficientul $a_0 = 1$ este operația de normare în raport cu coeficientul de pe lângă termenul cu gradul superior.

Se consideră rădăcinile ecuației caracteristice p_1, p_2, \dots, p_n .

Fie un spațiu cu coordonatele din parametrii \bar{a}_1, \bar{a}_n care este numit spațiul parametrilor.

În cazul când variază coeficienții $\overline{a_1, a_n}$ ecuației caracteristice (4.50), atunci rădăcinile p_1, p_2, \dots, p_n ale ecuației caracteristice descriu unele spații în spațiul parametrilor, iar în planul rădăcinilor numit și locul rădăcinilor vor trasa niște curbe.

Fie o ecuație caracteristică dată de gradul trei:

$$A(p) = D(p) = p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0, \quad (4.51)$$

care are trei rădăcini p_1, p_2, p_3 alocate în planul complex al rădăcinilor ca în figura 4.12, a) și spațiul parametrilor ca în figura 4.12, b).

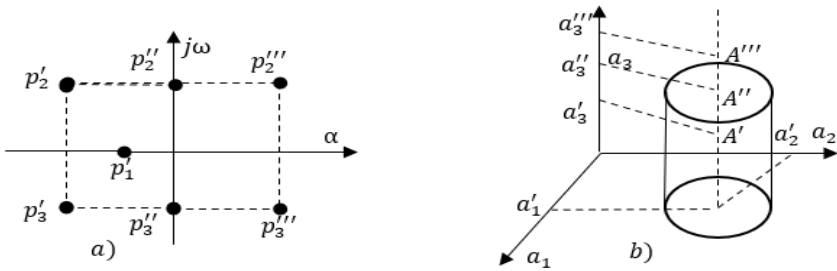


Fig. 4.12. Planul rădăcinilor a) și spațiul parametrilor b)

În planul rădăcinilor se prezintă o rădăcină reală p_1' și două rădăcini complexe p_2', p_3' alocate în semiplanul stâng, ceea ce constată că sistemul automat este stabil, iar în spațiul valorilor parametrilor a_1', a_2', a_3' se regăsesc în interiorul cilindrului reprezentate prin punctul A' .

Se modifică parametrul a_3'' al sistemului astfel, încât punctul A' va atinge suprafața discului exterior și este notat A'' , iar două rădăcini complexe ating axa imaginară notate p_2'', p_3'' și sistemul este la limita de stabilitate.

Dacă se mai modifică parametrul sistemului a_3''' , atunci punctul A''' se va regăsi în afara cilindrului, iar cele două rădăcini complexe p_2''', p_3''' sunt alocate în semiplanul drept și sistemul automat este instabil.

În cazul când parametrul $a_3 = \text{const}$ și se modifică parametrii a_1 și a_2 atunci și spațiul va deveni o curbă ca în planul din figura 4.13

și această linie va separa planul în 4 domenii cu un număr egal de rădăcini situate în semiplanul stâng și drept.

Deplasarea rădăcinilor dintr-un domeniu peste această linie în alt domeniu al planului poate fi o rădăcină nulă sau două imaginare.

Astfel, această linie se prezintă ca axa imaginară a planului complex al rădăcinilor.

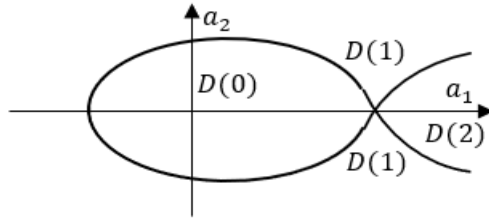


Fig. 4.13. Domenii de separare

Notarea domeniilor este funcție de rădăcinile pozitive și negative ale ecuației caracteristice ale sistemului. Se notează $D(0)$, $D(1)$, $D(2)$, $D(3)$, unde cifra din paranteze indică numărul de rădăcini pozitive. Domeniul cu $D(0)$ indică că toate cele trei rădăcini sunt negative și rezultă că sistemul este stabil în acest domeniu. Pentru domeniile $D(3)$, $D(2)$, $D(1)$ sistemul este instabil.

Pentru ecuații caracteristice cu gradul $n > 3$ spațiile devin complexe și problema separării pe domenii devine dificilă, care pierde sensul clar geometric.

Din analiza efectuată se constată că dacă la variația parametrilor o rădăcină reală devine nulă $p = 0$ sau dacă două ating axa imaginară $p_k = \pm j\omega_k$, atunci ecuația (4.51) are forma:

$$A(j\omega_k) = D(j\omega_k) = (j\omega_k)^3 + a_1(j\omega_k)^2 + a_2j\omega_k + a_3 = 0, \quad (4.52)$$

care este linia de separare, ceea ce prezintă axa imaginară și curba este numită D separare pe domenii.

În calitate de parametri variabili ai sistemului automat se utilizează coeficientul de transfer k , constante de timp T_i etc.

4.7.2 Metoda de separare pe un parametru

Fie că trebuie să se determine influența unui parametru k asupra stabilității sistemului automat și este cunoscută ecuația caracteristică, iar parametrul k în ecuație are o dependență liniară de forma:

$$D(p) = kA(p) + B(p) = 0, \quad (4.53)$$

unde $A(p)$ este partea care depinde de parametrul k , $B(p)$ – partea care nu depinde de parametrul k .

Expresia (4.53) se prezintă în domeniul frecvență, utilizând substituția $p = j\omega$ și se obține:

$$D(j\omega) = kA(j\omega) + B(j\omega) = 0. \quad (4.54)$$

Se calculează valoarea parametrului k din (4.54) și se determină funcția frecvențială prin partea reală și imaginară:

$$k = -\frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} = \frac{B(j\omega)A(-j\omega)}{A(j\omega)A(-j\omega)} = P(\omega) + jQ(\omega). \quad (4.55)$$

Se variază $\omega = 0 \dots \infty$, se calculează valorile lui $P(\omega)$ și $Q(\omega)$ și în sistemul de coordonare $P(\omega)$ - $Q(\omega)$ se construiește curba (fig. 4.14). Pentru valorile lui $\omega = -\infty \dots 0$ se completează simetric.

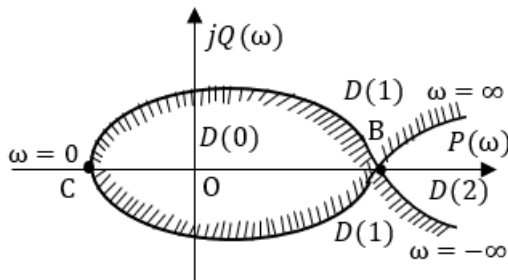


Fig. 4.14. Domenii de separare pe un parametru

Pentru a determina domeniile de stabilitate, curba se hașurează conform axei imaginare când $\omega = -\infty \dots \infty$ din partea stângă.

Definiție. Ca domeniu de stabilitate este domeniul în care hașurarea este orientată în interior și este domeniul cu cel mai mare număr de rădăcini negative.

Prin aplicarea unor calcule se determină în ce domenii sunt plasate rădăcinile ecuației caracteristice.

Pot exista cazuri când domenii de stabilitate nu există, astfel, cu variația acestui parametru sistemul nu poate fi stabilizat.

Fie parametrul variat este coeficientul de transfer $k > 0$ al sistemului în buclă deschisă, atunci acesta poate varia pe segmentul CB al axei absciselor, deoarece este o mărime reală (fig. 4.14).

Rezultă că sistemul este stabil dacă coeficientul de transfer k va avea valori din interiorul segmentului CB.

Coeficientul k este o mărime pozitivă și poate avea valori numai pe segmentul OB. Valoarea negativă a lui k poate fi atunci când reacția în sistem este pozitivă. Când valoarea lui k va coincide cu punctul B pe axa absciselor, atunci acesta are valoarea critică k_{cr} și sistemul automat este la limita de stabilitate.

Exemplul 4.8. Se consideră funcția de transfer a sistemului deschis:

$$H_d(s) = \frac{k}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}.$$

Se cere să se determine domeniul de stabilitate conform figurii 4.14 și valoarea critică a coeficientului de transfer k_{cr} al sistemului deschis.

Soluționare. Se calculează f.d.t. a sistemului în buclă închisă:

$$H_0(s) = \frac{H_d(s)}{1+H_d(s)} = \frac{k}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)+k} = \frac{B(s)}{A(s)}.$$

Ecuția caracteristică a sistemului este:

$$A(s) = (T_1s + 1)(T_2s + 1)(T_3s + 1) + k = a_0s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3 = 0,$$

unde $a_0 = T_1T_2T_3$, $a_1 = T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3$, $a_2 = T_1 + T_2 + T_3$, $a_3 = 1 + k$.

Se aplică criteriul Hurwitz și se calculează determinantul de ordinul doi în condiția $T_1 = T_2 = T_3 = T$ din care se calculează coeficientul critic k_{cr} al sistemului deschis:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_{n-1} = \Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 = (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3)(T_1 + T_2 + T_3) - \\ - T_1 T_2 T_3 (1 + k) = 3T^2 3T - T^3 (1 + k) = 9 - 1 - k = 0,$$

$$k_{cr} = 8.$$

Concluzie: sistemul închis va fi stabil, dacă $0 < k < k_{cr}$. Pentru stabilitatea sistemului se alege o valoare cu rezervă de stabilitate, de exemplu $k = 0.85k_{cr}$.

Se verifică domeniul de stabilitate.

Pentru un punct din domeniul $D(0)$, de exemplu originea $(0, j0)$, se determină rădăcinile ecuației caracteristice a sistemului deschis:

$$A(s) = (T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1) = 0,$$

$$s_1 = -\frac{1}{T_1}, s_2 = -\frac{1}{T_2}, s_3 = -\frac{1}{T_3}.$$

Astfel, toate cele trei rădăcini sunt negative și sunt alocate în interiorul domeniului $D(0)$.■

4.8 Stabilitatea structurală a sistemului automat

Având în vedere că proprietățile de stabilitate ale sistemului în buclă închisă depind de proprietățile interne ale acestuia, exprimate prin parametrii $\overline{a_0}, \overline{a_n}$, care sunt coeficienții ecuației caracteristice, trebuie analizată problema stabilității structurale a sistemului [1, 4, 8, 11-13, 17, 19, 21, 22].

Sistemul automat închis este structural stabil dacă prin modificarea valorilor parametrilor (semnele constante) sistemul se stabilizează. Dacă în aceste cazuri sistemul automat nu se stabilizează, atunci în structura lui se introduc elemente de corecție.

Se consideră funcția de transfer a sistemului deschis:

$$H_d(s) = \frac{c_m s^m + \dots + c_1 s + c_0}{d_n s^n + \dots + d_1 s + d_0} = \frac{C(s)}{D(s)}, m < n, \quad (4.56)$$

unde $d_i > 0$, $i = \overline{1, n}$, $c_j > 0$, $j = \overline{1, m}$, polinoamele $C(s)$ sunt de gradul $m \geq 0$ și $D(s)$ este de gradul n și sunt relative prime între ele (nu au factori comuni) și $c_0 = d_0 = 1$.

Se determină ecuația caracteristică de gradul n a sistemului în buclă închisă:

$$P(s) = 1 + H_d(s) = 1 + \frac{C(s)}{D(s)} = C(s) + D(s) = 0. \quad (4.57)$$

Sistemul în buclă deschisă se caracterizează prin următoarele:

1. Polinomul $C(s)$ este hurwitzian, deci, nu are rădăcini nule și pozitive.

2. Polinomul $D(s)$ se prezintă în forma factorizată:

$$D(s) = s^\nu \prod_1^q (a_i s^2 + 1) \prod_1^r (b_j s - 1) P_1(s), \quad (4.58)$$

unde $\nu \geq 0$ este gradul de astatism, constantele de timp $a_i > 0$, $i = \overline{1, q}$, $b_j > 0$, $j = \overline{1, r}$, $q \geq 0$, $r \geq 0$. În cazurile când $q = 0$ și/sau $r = 0$, au loc prin definiție polinomul $\prod_1^{q=0} (a_i s^2 + 1) \equiv 1$ și/sau polinomul $\prod_1^{r=0} (b_j s - 1) \equiv 1$, iar $P_1(s)$ este polinom hurwitzian de gradul $n - l$ cu $l = \nu + 2q + r$.

O condiție necesară și suficientă ca sistemul automat închis să fie stabil structural se cere să fie satisfăcute inegalitățile [11, 17, 21]:

a) $\nu + r \leq m + 1$;

b) m, n și l cu valori conform tabelului 4.4.

Tabelul 4.4. Condiții de stabilitate pentru indexii m, n și l

Tipul de l	Valoarea și tipul de m		
	$m = 0$	$m > 0$, par	$m > 0$, impar
l par	$n > 2l$	$m + n > 2l - 1$	$m + n > 2(l - 1)$
l impar	$n > 2(l - 1)$	$m + n > 2(l - 1)$	$m + n > 2l - 1$

Exemplul 4.9. Se consideră structura sistemului deschis cu conexiune serie a f.d.t. $H_R(s)$ a regulatorului și f.d.t. $H_{PF}(s)$ a părții fixate, care se descrie cu f.d.t.:

$$H_{PF}(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 1}.$$

Funcția de transfer a sistemului deschis este:

$$H_d(s) = H_R(s)H_{PF}(s) = H_R(s) \frac{k}{T^2s^2+1}.$$

Se cere să se determine f.d.t. $H_R(s)$ a regulatorului astfel, încât sistemul să fie structural stabil.

Soluționare. Se analizează trei cazuri.

Cazul 1. Funcția de transfer $H_R(s)$ a regulatorului are polii și zerourile în semiplanul stâng și rezultă: $\nu = 0$, $q = 1$, $r = 0$ și se calculează $l = \nu + 2q + r = 2$.

Inegalitatea a) are forma: $0 \leq m + 1$.

1.1. Se adoptă $m = 0$ și inegalitatea b) are forma $n > 2l = 2 \cdot 2 = 4$. Se adoptă $n = 5$ și rezultă că f.d.t.:

$$H_R(s) = \frac{k_R}{s^3 + p_1s^2 + p_2s + p_3},$$

unde $k_R > 0$ și polinomul numitorului este hurwitzian.

Sistemul este structural stabil.

1.2. Se adoptă $m = 1$. Inegalitatea b) are forma după tabelul 4.4 $n + m > 2(l - 1)$, $n + 1 > 2(2 - 1) = 2$. Se adoptă $n = 2$ și rezultă f.d.t. a regulatorului:

$$H_R(s) = k_R(q_1s + 1), k_R > 0, q_1 \geq 0.$$

Cazul 2. Funcția de transfer $H_R(s)$ a regulatorului are un pol în $s = 0$, iar restul polilor și toate zerourile sunt situate în semiplanul stâng C^- .

Rezultă: $\nu = 1$, $q = 1$, $r = 0$, $l = 3$.

Inegalitatea a) are forma: $1 \leq m + 1$.

2.1. Cazul când se adoptă $m = 0$ și inegalitatea b) are forma $n > 4$. Se adoptă $n = 5$ și rezultă că f.d.t. a regulatorului:

$$H_R(s) = \frac{k_R}{s(s^2 + p_1s + p_2)}, k_R > 0, p_1, p_2 > 0.$$

2.2. Când se adoptă $m = 1$, iar inegalitatea b) are forma $n + 1 > 5$ și se adoptă $n = 5$ și rezultă că f.d.t. a regulatorului:

$$H_R(s) = \frac{k_R(q_1s+1)}{s(s^2+p_1s+p_2)}, k_R > 0, q_1 > 0, p_1 > 0, p_2 > 0.$$

Cazul 3. Funcția de transfer $H_R(s)$ a regulatorului se adoptă arbitrar, de exemplu, de forma:

$$H_R(s) = \frac{k_R}{p_1s+1}, k_R > 0, p_1 > 0.$$

Se calculează f.d.t. a sistemului deschis:

$$H_d(s) = H_R(s)H_{PF}(s) = \frac{k_R}{p_1s+1} \frac{k}{T^2s^2+1} = \frac{k_Rk}{T^2p_1s^3+T^2s^2+p_1s+1}.$$

Ecuția caracteristică a sistemului în buclă închisă este:

$$A(s) = 1 + H_d(s) = 1 + \frac{k_Rk}{T^2p_1s^3+T^2s^2+p_1s+1},$$

$$A(s) = T^2p_1s^3 + T^2s^2 + p_1s + 1 + k_Rk = 0.$$

Se calculează penultimul determinant:

$$\Delta_2 = T^2p_1 - T^2p_1(1 + k_Rk) = T^2p_1 - T^2p_1 - k_Rk = -k_Rk < 0.$$

Sistemul în buclă închisă este structural instabil pentru oricare valori ale parametrilor $k_R > 0$ și $p_1 > 0$ ai regulatorului.

Concluzii. Cea mai simplă soluție este soluția de la cazul 1.2, unde s-a obținut un regulator de tipul PI.■

Un caz particular frecvent întâlnit în aplicații se evidențiază când $q = r = 0$ și $l = \nu$, iar $\nu \in \{0, 1, 2\}$.

F.d.t. a sistemului în circuit deschis are forma:

$$H_d(s) = \frac{k}{s^p} \frac{c_ms^m + \dots + c_1s + c_0}{d_ns^n + \dots + d_1s + d_0} = \frac{k}{s^p} \frac{C(s)}{D(s)}, \quad (5.59)$$

unde polinoamele $C(s)$, $D(s)$ sunt hurwitziene și relativ prime între ele.

Sistemul în circuit închis este structural stabil:

- 1) pentru astatism $\nu = 0, 1$ și orice m, n cu $\nu + n > m \geq 0$;
- 2) pentru astatism $\nu = 2$ și orice m, n cu $\nu + n > m \geq 1$.

Pentru astatism de gradul $\nu = 0, 1, 2$ condițiile a) și b) de stabilitate structurală ale sistemului se dau în tabelul 4.5.

Tabelul 4.5. Condiții de stabilitate pentru indexii m, n și l

Grad astatism ν	Condiția 1)	Condiția 2)		
		$m = 0$	$m = 2, 4, 6, \dots$	$m = 1, 3, 5, \dots$
0	$m \geq 0$	$n \geq 1$	$m + n \geq 0$	$m + n \geq 0$
1	$m \geq 0$	$n \geq 0$	$m + n \geq 0$	$m + n \geq 1$
2	$m \geq 1$	-	$m + n \geq 2$	$m + n \geq 1$

Rezultă că pentru $\nu + n > m \geq 0$ și $\nu = 0, 1$ toate inegalitățile sunt satisfăcute. Pentru $\nu = 2$ condiția a) este $m \geq 1$ și condiția b) de asemenea este satisfăcută.

Pentru sisteme automate cu structură complexă analiza stabilității structurale este dificilă și nu se pot obține astfel de condiții ca cele pentru sistemul cu o buclă închisă.

4.9 Sensibilitatea sistemului de reglare automată

4.9.1 Preliminarii

Sistemele automate sunt supuse acțiunilor mediului în care funcționează și, ca urmare, parametrii lor se modifică în timp conform schimbărilor în timp ale factorilor mediului ambiant, învechirii materialelor și elementelor funcționale etc.

Sensibilitatea caracterizează proprietățile sistemului în funcție de variația parametrilor acestuia [1, 3, 4, 8, 11-13, 18, 21].

În sistemul automat cu structura deschisă variațiile parametrilor influențează direct transferul intrare-ieșire.

Spre deosebire, în sistemul automat închis cu reacție negativă, variațiile parametrilor sunt sesizate de sistem datorită variației subsecvente a abaterii. Sistemul automat, acționând în sensul diminuării abaterii, determină efectiv o reducere a efectului variației parametrilor asupra mărimii de ieșire a sistemului.

Se consideră structura sistemului închis (fig. 4.15), unde canalul direct se descrie cu f.d.t. $H_d(s)$, iar canalul reacției negative cu f.d.t. a traductorului $H_{tr}(s)$.

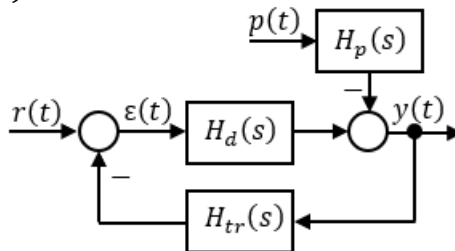


Fig. 4.15. Structura sistemului automat în circuit închis

Se determină f.d.t. a sistemului închis:

$$H_0(s) = \frac{H_d(s)}{1+H_d(s)H_{tr}(s)} = \frac{y(s)}{r(s)}. \quad (4.60)$$

Se prezintă mărimea de ieșire în formă operațională:

$$y(s) = H_0(s)r(s) = \frac{H_d(s)}{1+H_d(s)H_{tr}(s)}r(s). \quad (4.61)$$

Dacă se consideră componenta $|H_d(s)H_{tr}(s)| \gg 1$, atunci expresia (4.61) are forma:

$$y(s) \approx \frac{H_d(s)}{H_d(s)H_{tr}(s)}r(s) \approx \frac{1}{H_{tr}(s)}r(s). \quad (4.62)$$

Ipoteza că $|H_d(s)H_{tr}(s)| \gg 1$ și rezultatul (4.62) arată că mărimea $y(s)$ este afectată cel mai mult de variațiile parametrilor traductorului cu f.d.t. $H_{tr}(s)$ și într-o măsură mult mai mică de variațiile parametrilor elementelor de pe calea directă.

Rezultă că traductorul trebuie să aibă o precizie specificată și parametrul cât mai constanți în timp și cât mai puțin dependenți de factorii mediului ambiant. Rezultă că sistemul automat nu poate avea performanțe mai ridicate decât traductorul din structura acestuia.

Pentru determinarea sensibilității (senzitivității) unui sistem automat în raport cu variațiile parametrilor se utilizează funcțiile de sensibilitate ale sistemului [1, 3, 4, 8, 11-13, 18, 21].

Pentru o înțelegere naturală a funcțiilor de sensibilitate se face o comparație între efectele variațiilor parametrilor în structurile sistemului deschis și cel închis.

Mărimea de ieșire a sistemului deschis este:

$$y(s) = H_d(s)r(s). \quad (4.63)$$

Dacă variază parametrul f.d.t. $H_d(s)$, atunci aceasta va deveni

$H_d(s) + \Delta H_d(s)$. Astfel, variația f.d.t. $\Delta H_d(s)$ conduce la variația mărimii de ieșire $\Delta y(s)$, care datorită liniarizării, se exprimă astfel:

$$\Delta y(s) = \Delta H_d(s)r(s). \quad (4.64)$$

Pornind de la structura sistemului închis cu reacție negativă, mărimea de ieșire dată de f.d.t. (4.61)-(4.62) și înlocuind în aceasta $H_d(s)$ cu $H_d(s) + \Delta H_d(s)$ se obține:

$$y(s) + \Delta y(s) = \frac{H_d(s) + \Delta H_d(s)}{1 + (H_d(s) + \Delta H_d(s))H_{tr}(s)} r(s), \quad (4.65)$$

din care se calculează $\Delta y(s)$ și după unele transformări se obține:

$$\begin{aligned} \Delta y(s) &= \frac{H_d(s) + \Delta H_d(s)}{1 + (H_d(s) + \Delta H_d(s))H_{tr}(s)} r(s) - y(s) = \\ &= \frac{H_d(s) + \Delta H_d(s)}{1 + (H_d(s) + \Delta H_d(s))H_{tr}(s)} r(s) - \frac{H_d(s)}{1 + H_d(s)H_{tr}(s)} r(s) = \\ &= \frac{\Delta H_d(s)}{[1 + (H_d(s) + \Delta H_d(s))H_{tr}(s)][1 + H_d(s)H_{tr}(s)]} r(s). \end{aligned} \quad (4.66)$$

Dacă $|H_d(s)| \gg \Delta H_d(s)$, atunci din (4.66) se obține:

$$\Delta y(s) = \frac{\Delta H_d(s)}{(1 + H_d(s)H_{tr}(s))^2} r(s). \quad (4.67)$$

Comparând expresia (4.67) cu expresia (4.66) rezultă că efectul lui $\Delta H_d(s)$ asupra lui $\Delta y(s)$ este mult mai redus pentru sistemul automat închis, cu atât mai mult când se realizează relația $|H_d(s)H_{tr}(s)| \gg 1$.

4.9.2 Sensibilitatea la variația parametrilor canalului direct

Sensibilitatea notată S_0^H a sistemului automat deschis la variația

parametrilor căii directe se definește sub forma raportului dintre variația relativă a f.d.t. a sistemului închis și variația relativă a căii directe:

$$S_0^{H_d} = \frac{\Delta H_0(s)/H_0(s)}{\Delta H_d(s)/H_d(s)} = \frac{\Delta H_0/H_0}{\Delta H_d/H_d}. \quad (4.68)$$

Aplicând limita pentru $\Delta H_d \rightarrow 0$ în (4.68), se obține:

$$S_0^{H_d} = \frac{\partial H_0/H_0}{\partial H_d/H_d} = \frac{\partial(\ln H_0)}{\partial(\ln H_d)}. \quad (4.69)$$

Pentru cazul sistemului deschis relația (4.69) este:

$$S^{H_d} = \frac{\partial(\ln H_d)}{\partial(\ln H_d)} = 1. \quad (4.70)$$

Sensibilitatea este o funcție complexă. Pentru determinarea efectivă a gradului de sensibilitate se utilizează valorile funcției de sensibilitate. Valoarea nulă a modulului acesteia arată că sistemul corespunzător este insensibil (robust) la variația parametrilor.

Relația (4.70) arată că sistemul deschis are o sensibilitate ridicată la variația parametrilor.

Rezultă că o valoare strict pozitivă a sensibilității indică un anumit grad de sensibilitate la variația parametrilor.

Dacă asupra sistemului închis acționează referința și perturbația, atunci ecuația transferului intrare-ieșire și perturbația-ieșire este:

$$\begin{aligned} y(s) &= \frac{H_d(s)}{1+H_d(s)H_{tr}(s)}r(s) \pm \frac{H_p(s)}{1+H_d(s)H_{tr}(s)}p(s) = \\ &= H_0(s)r(s) \pm H_{0p}(s)p(s), \end{aligned} \quad (4.71)$$

unde s-a notat:

$$H_0(s) = \frac{H_d(s)}{1+H_d(s)H_{tr}(s)}, \quad (4.72)$$

$$H_{0p}(s) = \frac{H_p(s)}{1+H_d(s)H_{tr}(s)}, \quad (4.73)$$

în care $H_0(s)$ prezintă f.d.t. a sistemului în buclă închisă referința – ieșire, iar $H_{0p}(s)$ - f.d.t. a sistemului în buclă închisă perturbație-ieșire.

După analogie cu expresia (4.69) se obține funcția de sensibilitate pentru perturbație-ieșire în forma:

$$S_{0p}^{H_d} = \frac{\partial H_{0p}/H_{0p}}{\partial H_d/H_d} = \frac{\partial(\ln H_{0p})}{\partial(\ln H_d)}. \quad (4.74)$$

Dacă sistemul este descris de (4.71) cu f.d.t. $H_0(s)$ și $H_{0p}(s)$, atunci aplicând (4.72) și (4.73), se obține sensibilitatea sistemului închis la acțiunea referinței:

$$S_0^{H_d} = \frac{\partial H_0/H_0}{\partial H_d/H_d} = \frac{1}{1+H_d(s)H_{tr}(s)} = H_\varepsilon(s), \quad (4.75)$$

și respectiv sensibilitatea sistemului închis la acțiunea perturbației:

$$S_{0p}^{H_d} = \frac{\partial H_{0p}/H_{0p}}{\partial H_d/H_d} = \frac{-H_d(s)H_{tr}(s)}{1+H_d(s)H_{tr}(s)}. \quad (4.76)$$

Dacă se îndeplinește condiția $|H_d(s)H_{tr}(s)| \gg 1$, atunci rezultă că funcțiile de sensibilitate $S_0^{H_d} \approx 0$ (4.75) indică o sensibilitate foarte redusă pentru sistemul fără acțiunea perturbației și $|S_{0p}^{H_d}| \approx 1$ (4.76) are o sensibilitate ridicată în raport cu variația parametrilor căii directe.

4.9.3 Sensibilitatea la variația parametrilor canalului perturbației

Dacă variază parametrii f.d.t. $H_p(s)$ ai canalului perturbației, atunci aceasta se prezintă cu abaterea care s-a produs $H_p(s) + \Delta H_p(s) = H_p + \Delta H_p$ și se determină sensibilitatea sistemului automat cu f.d.t. din (4.74) obținând relația:

$$S_{0p}^{H_p} = \frac{\partial H_{0p}/H_{0p}}{\partial H_p/H_p} = \frac{\partial(\ln H_{0p})}{\partial(\ln H_p)} = \frac{\partial H_{0p}}{\partial H_p} \frac{H_p}{H_{0p}} = 1, \quad (4.77)$$

care indică o sensibilitate ridicată a sistemului automat în raport cu acțiunea perturbației.

4.9.4 Sensibilitatea la variația parametrilor canalului de reacție

În acest caz, se analizează variațiile parametrilor traductorului și atunci f.d.t. $H_{tr}(s)$ se modifică $H_{tr}(s) + \Delta H_{tr}(s) = H_{tr} + \Delta H_{tr}$. Pentru cazul analizat se definesc două funcții de sensibilitate ale sistemului închis în raport cu intrările referința și perturbația.

La acțiunea referinței asupra sistemului sensibilitatea este:

$$S_0^{H_{tr}} = \frac{\partial H_0/H_0}{\partial H_{tr}/H_{tr}} = \frac{\partial(\ln H_0)}{\partial(\ln H_{tr})} = \frac{\partial H_0}{\partial H_{tr}} \frac{H_{tr}}{H_0} = -\frac{H_d(s)H_{tr}(s)}{1+H_d(s)H_{tr}(s)} \quad (4.78)$$

și la acțiunea perturbației asupra sistemului sensibilitatea este:

$$S_{0p}^{H_{tr}} = \frac{\partial H_{0p}/H_{0p}}{\partial H_{tr}/H_{tr}} = \frac{\partial(\ln H_{0p})}{\partial(\ln H_{tr})} = \frac{\partial H_{0p}}{\partial H_{tr}} \frac{H_{tr}}{H_{0p}} = -\frac{H_d(s)H_{tr}(s)}{1+H_d(s)H_{tr}(s)}. \quad (4.79)$$

În condiția $|H_d(s)H_{tr}(s)| \gg 1$ rezultă că sensibilitățile din (4.78) și (4.79) se aproximează:

$$|S_0^{H_{tr}}| = |S_{0p}^{H_{tr}}| \approx 1 \quad (4.80)$$

și rezultă sensibilitatea ridicată la variația parametrilor căii de reacție.

Relațiile obținute (4.75)-(4.77), (4.78)-(4.80) descriu noi aspecte ale principiului abaterii. Se evidențiază că sensibilitatea transferului $r(t) \rightarrow y(t)$ al sistemului automat, evaluată prin relația (4.75), este redusă.

Însă nu se poate da o afirmație similară despre sensibilitățile evaluate prin $S_{0p}^{H_d}$, $S_{0p}^{H_p}$, $S_0^{H_{tr}}$, $S_{0p}^{H_{tr}}$.

În cazurile când parametrii sistemului se modifică în timp la acțiunea factorilor mediului sau altor cauze, este necesar să se adopte soluții de proiectare care să asigure reducerea sensibilității, dar păstrând stabilitatea sistemului.

Exemplul 4.10. Se consideră sistemul deschis descris de funcția de transfer:

$$H_d(s) = \frac{k}{s(T_1s+1)},$$

unde parametrii nominali au variațiile: coeficientul de transfer $k = 100 \pm 10 \text{ s}^{-1}$ și constanta de timp $T_1 = 0.03 \pm 0.01 \text{ s}$.

Se cere să se determine abaterea medie pătratică a indicelui de rezonanță al sistemului închis.

Soluționare. Se determină funcția de transfer a sistemului închis:

$$H_0(s) = \frac{H_d(s)}{1+H_d(s)} = \frac{k}{T_1s^2+s+k} = \frac{1}{\frac{T_1}{k}s^2+\frac{1}{k}s+1} = \frac{1}{T^2s^2+2\xi Ts+1},$$

unde expresia f.d.t. a sistemului închis reprezintă modelul elementului oscilator, notând $T_1/k = T^2$, $1/k = 2\xi T$ și se obțin relațiile $kT_1 = 1/4\xi^2$, $T_1 = T/2\xi$.

Parametrii T și T_1/k ai elementului oscilator se exprimă prin parametrii T_1 și k ai sistemului deschis $T = 1/\omega_n = \sqrt{T_1/k}$, $\xi = 1/2\sqrt{kT_1}$.

Indicele de rezonanță M se determină de relația în domeniul frecvență și după minimizare la condiția $kT_1 > 2$ se exprimă în forma:

$$M = \frac{A_{\max}}{A(0)} = \left| \frac{H_d(j\omega)}{1+H_d(j\omega)} \right|_{\max} = \left| \frac{k}{T_1(j\omega)^2+j\omega+k} \right| = \frac{2kT_1}{\sqrt{4kT_1-1}} = \frac{2 \cdot 100 \cdot 0.03}{\sqrt{4 \cdot 100 \cdot 0.03 - 1}} = 1.81.$$

Se calculează sensibilitatea sistemului la variația coeficientului de transfer $\Delta k = \alpha_1$ și a constantei de timp $\Delta T = \alpha_2$:

$$S_0^k = S_1 = \left(\frac{\partial M}{\partial k} \right)_0 = \left[\frac{2T_1(2kT_1-1)}{(4kT_1-1)^{3/2}} \right]_0 = \left[\frac{2 \cdot 0.03 \cdot (2 \cdot 100 \cdot 0.03 - 1)}{(4 \cdot 100 \cdot 0.03 - 1)^{3/2}} \right]_0 = 0.0082 \text{ s},$$

$$S_0^T = S_2 = \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_0 = \left[\frac{2k(2kT_1-1)}{(4kT_1-1)^{3/2}} \right]_0 = \left[\frac{2 \cdot 100 \cdot (2 \cdot 100 \cdot 0.03 - 1)}{(4 \cdot 100 \cdot 0.03 - 1)^{3/2}} \right]_0 = 27.41 \text{ s}^{-1}.$$

Se determină abaterea medie pătratică maximală a indicelui de rezonanță:

$$\Delta M_{\max} = \sqrt{\sum_{j=1}^2 (S_j \alpha_j)^2} = \sqrt{(S_1 \alpha_1)^2 + (S_2 \alpha_2)^2} =$$

$$= \sqrt{(0.0082 \cdot 10)^2 + (27,41 \cdot 0.01)^2} = 0.2860.$$

Valoarea maximală de variație a indicelui de rezonanță a sistemului închis este:

$$M_{\max} = M \pm \Delta M_{\max} = 1.81 \pm 0.2860,$$

iar media pătratică maximală relativă este:

$$\Delta_{\max} = \frac{\Delta M_{\max}}{M} = \frac{0.2860}{1.81} = 0.158 \text{ (15.8 \%)}.$$

Pentru o calitate bună a sistemului automat indicele de rezonanță are valorile $M = 1.1 \dots 1.5$

Indicele de rezonanță al sistemului închis descris ca element oscilator se exprimă prin gradul de amortizare $M = 1/2\xi\sqrt{1 - \xi^2}$.

Se prezintă analiza sensibilității sistemului automat la variația parametrilor și influența asupra mărimii de ieșire.

Exemplul 4.11. Se consideră structura sistemului automat alcătuită din regulator cu funcția de transfer $H_R(s)$ și partea fixată cu funcția de transfer $H_P(s)$ înseriate pe canalul direct și în canalul de reacție traductorul cu f.d.t. $H_r(s)$. Funcțiile de transfer ale sistemului au forma: $H_P(s) = k_0 H_{P0}(s)$, $H_R(s) = k_R H_{R0}(s)$, $H_r(s) = k_r H_{r0}(s)$, unde k_0 , k_R , k_r sunt coeficienții de transfer ai obiectului, regulatorului și ai traductorului.

Se cere să se stabilească gradul de sensibilitate al sistemului în funcție de parametrul variat k_0 și influența acestuia asupra ieșirii sistemului.

Soluționare. Pentru transferul intrare referința $r(s)$ -ieșirea $y(s)$ a sistemului se determină expresia operațională a ieșirii la variația lui k_0 :

$$y(s) = H_0(s)r(s) = \frac{H_R(s)H_P(s)}{1+H_R(s)H_P(s)H_r(s)}r(s) = \frac{H_R(s)k_0H_{P0}(s)}{1+H_R(s)k_0H_{P0}(s)H_r(s)}r(s),$$

unde $H_0(s)$ este f.d.t. a sistemului închis.

Se dau variațiile coeficientului $k_0 + \Delta k_0$ și se calculează variația mărimii de ieșire $\Delta y(s)$ cu funcția de sensibilitate:

$$\begin{aligned} \Delta y(s) &= \frac{\partial y(s)}{\partial k_0} \Delta k_0 = \frac{\partial (H_0(s)r(s))}{\partial k_0} \Delta k_0 = \\ &= \frac{H_R(s)H_{P0}(s)(1+H_R(s)k_0H_{P0}(s)H_r(s)) - H_R(s)k_0H_{P0}(s)H_R(s)H_{P0}(s)H_r(s)}{(1+H_R(s)k_0H_{P0}(s)H_r(s))^2} r(s) \Delta k_0 = \end{aligned}$$

$$= \frac{H_R(s)H_{P0}(s)}{(1+H_R(s)k_0H_{P0}(s)H_r(s))^2} r(s)\Delta k_0.$$

Expresia $\Delta y(s)$ se prezintă prin coeficienții de transfer ai regulatorului k_R și traductorului k_r :

$$\Delta y(s) = \frac{k_R H_{R0}(s) H_{P0}(s)}{(1+k_R H_{R0}(s) k_0 H_{P0}(s) k_r H_{r0}(s))^2} r(s) \Delta k_0.$$

Rezultă că $\Delta y(s)$ este proporțională lui Δk_0 .

Dacă $k_r \rightarrow \infty$ variația semnalului de ieșire $\Delta y(s) \rightarrow 0$ și rezultă că creșterea lui k_r conduce la reducerea influenței lui Δk_0 asupra ieșirii $y(s)$ a sistemului.

După analogie se interpretează și variația lui k_R asupra lui $y(s)$.

Concluzie. Reacția inversă negativă compensează influența variației parametrilor din canalul direct asupra ieșirii sistemului. ■

Exemplul 4.12. Se consideră structura sistemului automat (fig. 4.16), alcătuită din regulator cu funcția de transfer $H_R(s)$, partea fixată cu funcția de transfer $H_P(s)$, înseriate pe canalul direct și în canalul de reacție traductorul cu f.d.t. $H_r(s)$. Asupra sistemului acționează semnalele de intrare referința $r(t)$ și perturbația $p(t)$, care acționează la intrarea părții fixate. Funcțiile de transfer ale sistemului au forma $H_P(s) = k_0 H_{P0}(s)$, $H_R(s) = k_R H_{R0}(s)$, $H_r(s) = k_r H_{r0}(s)$, unde k_0 , k_R , k_r sunt coeficienții de transfer ai obiectului, regulatorului și ai traductorului.

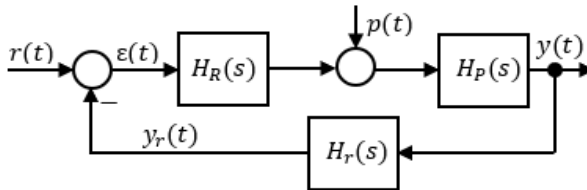


Fig. 4.16. Structura sistemului automat

Se cere să se stabilească gradul de sensibilitate al sistemului în funcție de variația perturbației $p(t)$ și influența acesteia asupra ieșirii sistemului automat.

Soluționare. Pentru transferul intrare perturbația $p(s)$ -ieșire $y(s)$ a sistemului se determină expresia operațională a ieșirii la variația lui $p(s)$:

$$y(s) = H_{0p}(s)p(s) = \frac{H_P(s)}{1+H_R(s)H_P(s)H_r(s)} p(s),$$

unde $H_{0p}(s)$ este f.d.t. a sistemului închis la acțiunea perturbației.

Se dau mici variații perturbației $p(s) + \Delta p(s)$ și se calculează variația mărimii de ieșire $\Delta y(s)$ cu funcția de sensibilitate:

$$\begin{aligned}\Delta y(s) &= \frac{\partial y(s)}{\partial p(s)} \Delta p(s) = \frac{\partial(H_{0p}(s)p(s))}{\partial p(s)} \Delta p(s) = \\ &= \frac{H_{P0}(s)}{1+H_R(s)H_{P0}(s)H_r(s)} \Delta p(s) = \frac{H_{P0}(s)}{(1+k_R H_R(s)H_{P0}(s)k_r H_r(s))^2} \Delta p(s).\end{aligned}$$

Rezultă că $\Delta y(s)$ este proporțională lui $\Delta p(s)$.

Dacă $k_r \rightarrow \infty$ variația semnalului de ieșire $\Delta y(s) \rightarrow 0$, rezultă că creșterea lui k_r conduce la reducerea influenței variației $\Delta p(s)$ asupra ieșirii $y(s)$ a sistemului.

După analogie se interpretează și variația lui k_R asupra ieșirii $y(s)$.

Concluzie. În sistemul cu reacție inversă negativă se obține invarianța ieșirii sistemului în raport cu perturbația. ■

Exemplul 4.13 [21]. Se consideră sistemul de reglare automată a rotațiilor motorului electric de curent continuu (fig. 3.14) cu modificările: amplificatorul se substituie cu regulatorul P cu f.d.t. $H_R(s) = k_R$, generatorul ca element de execuție se substituie cu redresorul cu funcția de transfer $H_r(s) = k$ la care coeficientul de transfer se modifică în timp, modelul matematic al motorului obținut în ex. 2.4 descris de f.d.t.:

$$H_m(s) = \frac{k_m}{(Ls+R)(Js+k_s)+k_e k_m}$$

și în canalul de reacție tahogeneratorul cu funcția de transfer $H_t(s) = k_t$.

Funcțiile de transfer ale sistemului deschis pe transferul referință-ieșire și transferul perturbație-ieșire sunt date de relațiile:

$$H_d(s) = H_R(s)H_r(s)H_m(s) = \frac{k_R k k_m}{(Ls+R)(Js+k_s)+k_e k_m}, \quad H_{dp}(s) = \frac{-(Ls+R)}{(Ls+R)(Js+k_s)+k_e k_m},$$

Se cere să se studieze funcțiile de sensibilitate ale sistemului închis referință-ieșire S_0^k și perturbație-ieșire S_{0p}^k la variația parametrului k pentru regimul staționar și să se găsească valoarea parametrului de acord k_R al regulatorului P care asigură valori acceptabile ale funcțiilor de sensibilitate.

Soluționare. Funcțiile de transfer ale sistemului în buclă închisă referință-ieșire $H_0(s)$ și pe canalul perturbație-ieșire $H_{0p}(s)$ se determină în regim staționar și sunt necesare pentru a calcula sensibilitatea sistemului care se descriu prin expresiile:

$$\begin{aligned}H_0(s)_{s=0} &= \frac{H_d(s)}{1+H_d(s)H_t(s)} = \frac{k_R k k_m}{(Ls+R)(Js+k_s)+k_e k_m + k_R k k_m k_t} = \frac{a k_R k}{b + c k_R k}, \\ H_{0p}(s)_{s=0} &= -\frac{H_{dp}(s)}{1+H_d(s)H_t(s)} = -\frac{Ls+R}{(Ls+R)(Js+k_s)+k_e k_m + k_R k k_m k_t} = -\frac{R}{b + c k_R k},\end{aligned}$$

unde coeficienții $a = k_m$, $b = Rk_s + k_e k_m$, $c = k_m k_t$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

Funcțiile de sensibilitate ale sistemului închis în regim staționar sunt:

$$S_0^k = \frac{1}{1+H_d(0)H_r(0)} = \frac{b}{b+ck_Rk}, \quad |S_{0p}^k| = \frac{H_d(0)H_r(0)}{1+H_d(0)H_r(0)} = \frac{ck_Rk}{b+ck_Rk},$$

unde acestea satisfac egalitatea $S_0^k + |S_{0p}^k| = 1$.

Variind coeficientul k , s-au efectuat calculele pentru funcțiile de sensibilitate S_0^k , S_{0p}^k și curbele sunt date în figura 4.17.

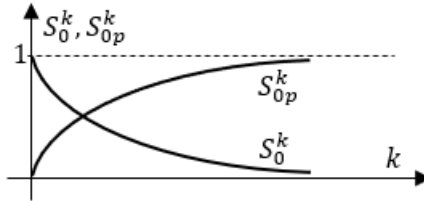


Fig. 4.17. Curbele funcțiilor de sensibilitate ale sistemului automat închis

Dacă se acordă o importanță egală celor două funcții de sensibilitate, atunci soluția corespunzătoare va fi:

$$S_0^k = |S_{0p}^k|, \quad \frac{b}{b+ck_Rk} = \frac{ck_Rk}{b+ck_Rk}, \quad b = ck_Rk,$$

de unde se obține: $k_Rk = b/c$.

În cazul în care este cunoscută valoarea $k_{R\min}$ și $k_{R\max}$ a parametrului de acord al regulatorului P, atunci valoarea lui k_R se poate alege din condiția:

$$k_R = \frac{1}{2}(k_{R\min} + k_{R\max}) = \frac{b}{2c} \left(\frac{1}{k_{\max}} + \frac{1}{k_{\min}} \right).$$

Pentru a găsi soluția $S_0^k = |S_{0p}^k|$ trebuie minimizată funcția pătratică:

$$J(k) = \frac{(S_0^k)^2 + |S_{0p}^k|^2}{2} = \frac{\left(\frac{b}{b+ck_Rk} \right)^2 + \left(\frac{ck_Rk}{b+ck_Rk} \right)^2}{2},$$

$$\frac{dJ(k)}{dk} = \frac{bck_R}{(b+ck_Rk)^3} (-b + ck_Rk) = 0,$$

de unde se determină ceea ce s-a obținut deja: $k_Rk = b/c$.

Într-o formă generală se poate considera funcționala de forma:

$$J(k) = \frac{\alpha_1(S_0^k)^2 + \alpha_2|S_{0p}^k|^2}{2}, \quad \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0,$$

unde α_1 și α_2 , cu condiția $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ sunt coeficienți de ponderare prin care se impune un avantaj celor două funcții de sensibilitate.

Reieșind din aceste condiții, se determină:

$$\frac{dJ(k)}{dk} = \frac{bck_R[-ab+(1-\alpha_1)ck_Rk]}{(b+ck_Rk)^3} = 0$$

și soluționând expresia se obține $k_Rk = \frac{ab}{(1-\alpha_1)c}$ cu valoarea lui $\alpha_1 \in (0,1)$ fixată, iar valoarea coeficientului de acord k_R se poate alege după relația:

$$k_R = \frac{1}{2}(k_{R\min} + k_{R\max}) = \frac{ab\left(\frac{1}{k_{\max}} + \frac{1}{k_{\min}}\right)}{2(1-\alpha_1)c}. \blacksquare$$

Chestionar și probleme

1. Formulați definiția fizică a noțiunii de stabilitate a sistemului automat.
2. Prezentați condiția matematică a stabilității asimptotice a sistemului.
3. Care este modelul matematic pe baza căruia se analizează stabilitatea sistemului?
4. De ce la analiza stabilității sistemului se utilizează ecuația caracteristică?
5. Enumerați condițiile necesare și suficiente de stabilitate ale sistemului.
6. De ce părțile reale ale rădăcinilor ecuației caracterisrice trebuie să fie negative pentru ca sistemul să fie stabil?
7. De ce la analiza stabilității sistemului se aplică criteriile de stabilitate?
8. Se consideră funcția de transfer de gradul trei a sistemului astatic deschis:

$$H_d(s) = \frac{k}{s(T_1s+1)(T_2s+1)} = \frac{5}{s(9s+1)(3s+1)}.$$

Se cere să se analizeze stabilitatea sistemului închis, aplicând criteriile Routh și Hurwitz.

9. Se consideră funcția de transfer din p. 8 și se cere să se determine valoarea critică a coeficientului de transfer al sistemului deschis.
10. Se consideră funcția de transfer de gradul trei a sistemului astatic deschis:

$$H_d(s) = \frac{k(Ts+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1)} = \frac{3(2s+1)}{s(4s+1)(2s+1)}.$$

Se cere să se analizeze stabilitatea sistemului închis după criteriul Mihailov.

11. Care sunt avantajele criteriului de stabilitate Nyquist?
12. Explicați tratarea fizică a noțiunii de punct critic utilizat în criteriul Nyquist.

13. Se consideră funcția de transfer din p. 10 și se cere să se analizeze stabilitatea sistemului închis, aplicând criteriul Nyquist.

14. Dați o interpretare a noțiunii de domenii de separare pe un parametru.

15. Se consideră funcția de transfer a sistemului deschis alcătuit din două elemente cu inerție de gradul unu identice și un element untegrator și se cere să se calculeze valoarea critică a coeficientului de transfer al sistemului deschis.

16. Care este esența marginii (rezervei) de stabilitate a sistemului automat și cum poate fi exprimată?

17. Explicați noțiunile de margine de stabilitate a în amplitudine și fază.

18. Formulați definiția de stabilitate structurală a sistemului automat.

19. Care elemente dinamice tipice ridică și care reduc stabilitatea sistemului?

20. Demonstrați cum influențează timpul mort prezent în structura sistemului asupra stabilității?

21. Ce reprezintă noțiunea de sensibilitate pentru sistemul automat?

22. Se consideră funcția de transfer de gradul trei a sistemului astatic deschis cu parametrii cunoscuți:

$$H_d(s) = \frac{k}{s(T_1s+1)(T_2s+1)} = \frac{5}{s(6s+1)(3s+1)}.$$

Se cere pentru variațiile parametrilor de la valorile nominale a coeficientului de transfer $\Delta k = \pm 0.5$ și a constantei de timp $\Delta T_1 = \pm 1$ să se determine valorile numerice ale funcțiilor de sensibilitate ale sistemului închis.

5 PERFORMANȚELE SISTEMELOR AUTOMATE

5.1 Preliminarii

Calitatea sistemului de reglare automată se determină de un ansamblu de proprietăți, care garantează funcționarea efectivă atât a obiectului de reglare, cât și a întregului sistem.

În teoria sistemelor automate și practica automatizărilor termenii calitatea sistemului și calitatea conducerii (reglării) se utilizează într-un sens mai restrâns, având în vedere proprietățile regimului tranzitoriu și staționar ale sistemului automat.

Funcțiile esențiale calitative ale sistemului de reglare automată sunt *urmărirea referinței și rejecția perturbațiilor*.

În raport cu aceste cerințe calitative, se impun și cerințe specifice care reprezintă *siguranța în funcționare, calitatea producției, operabilitatea procesului, conformitatea cu standardele de mediu etc.*

Astfel, proiectarea unui sistem automat impune nu numai aspectele alegerii algoritmului de conducere, dar și întregul ansamblu de măsuri ce conferă soluției de automatizare *fiabilitate și robustețe, operabilitatea sigură în regimuri critice de funcționare și costuri minime*.

Cerințele de performanță ale sistemului automat se definesc în raport cu anumite mărimi exogene (referințe, perturbații) care acționează asupra sistemului.

Cerințele calitative de performanță ale sistemului automat sunt:

- 1) stabilitatea;
- 2) precizia;
- 3) performanțele tranzitorii;
- 4) robustețea stabilității și a performanțelor.

Determinarea calității regimului de funcționare al sistemului de reglare automată se efectuează în domeniul timpului și în domeniul frecvență la acțiunea semnalelor de intrare referință și perturbație și se reduce la stabilirea proprietăților statice și dinamice ale sistemului [1, 3, 4, 8, 9, 11-13, 14-23].

Analiza sistemului automat presupune verificarea stabilității,

preciziei, comportării tranzitorii și robusteții și evaluarea unor indici de performanță, care să satisfacă evoluția sistemului în domeniul admisibil sau inadmisibil.

5.2 Indicii de calitate ai răspunsului indicial al sistemului

Calitatea funcționării unui sistem automat se evaluează pe baza unor indicatori de apreciere ai calității sistemului.

Se consideră structura sistemului automat (fig. 5.1) alcătuită din regulator cu f.d.t. $H_R(s)$ și partea fixată cu f.d.t. $H_{PF}(s)$, asupra căruia acționează semnalele exogene—referința $r(s)$ și perturbația $p(s)$ (perturbația acționează prin f.d.t. $H_p(s)$), unde canalul direct se descrie prin f.d.t. $H_d(s) = H_R(s)H_{PF}(s)$, iar reacția negativă este unitară.

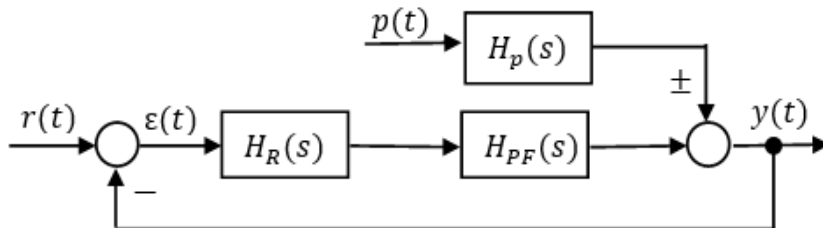


Fig. 5.1. Structura sistemului automat închis

Se consideră funcția de transfer a sistemului automat ca o funcție rațională a raportului polinoamelor cu coeficienți reali, care poate fi reprezentată sub formă factorizată sau poli-zero-uri în forma:

$$H(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{b_0 \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{a_0 \prod_{i=1}^n (s - p_i)}, \quad (5.1)$$

unde $y(s)$ este mărimea de ieșire a sistemului, $r(s)$ – mărimea de intrare, polinomul zerourilor $B(s) = 0$ are rădăcinile z_j , care sunt zerourile finite ale f.d.t. $H(s)$, polinomul polilor $A(s) = 0$ are rădăcinile p_i , care reprezintă polii finiți ai f.d.t. $H(s)$ [1, 3, 8, 11-13, 14-22].

Pornind de la modelul sistemului automat de ordinul doi cu $k = 1$ și parametrii sistemului, gradul de amortizare ξ și pulsația nominală ω_n la acțiunea intrării treaptă unitară $r(s) = 1(s)$, se prezintă funcția de transfer a sistemului închis:

$$H_0(s) = \frac{1}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{h(s)}{r(s)}. \quad (5.2)$$

Se prezintă mărimea de ieșire în formă operațională:

$$h(s) = H_0(s)1(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{s}. \quad (5.3)$$

Aplicând transformata Laplace inversă relației (5.3), răspunsul indicial al sistemului (fig. 5.2) se prezintă prin relația:

$$h(t) = \left(1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_n t \sqrt{1-\xi^2} + \varphi)\right) 1(t) = h_l(t) + h_f(t), \quad (5.4)$$

unde defazajul $\varphi = \sin^{-1}\sqrt{1-\xi^2} = \arcsin\omega_n T = \arccos\xi$.

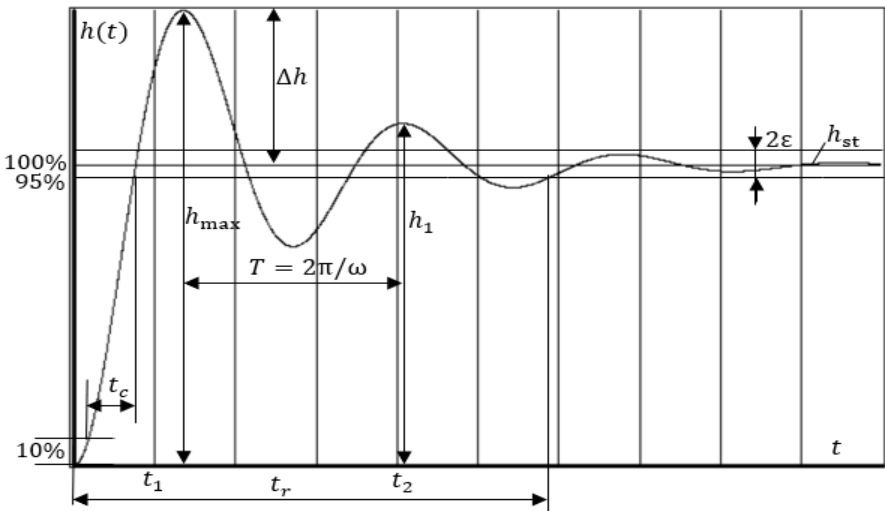


Fig. 5.2. Răspunsul indicial al sistemului de reglare automată

În (5.4) $h_l(t)$ este componenta liberă a răspunsului indicial și descrie trecerea (tranziția) sistemului din starea inițială dată (nulă sau nenulă) în starea dată – regimul staționar, iar $h_f(t) = h_{st}$ – componenta forțată sau regimul staționar h_{st} , care este determinată de semnalul de intrare ce acționează asupra sistemului.

Calitatea unui sistem de reglare automată se apreciază după răspunsul indicial oscilant amortizat la intrarea treaptă unitară [1, 4, 8, 11-13, 14-18, 21].

Calea analitică de rezolvare a acestei probleme pornește de la modelul matematic al sistemului automat în forma ecuației diferențiale, care descrie dinamica sistemului.

Se determină calitatea sistemului automat după răspunsul indicial $h(t)$ oscilant amortizat, pentru care se utilizează două tipuri de indici de calitate:

Indicii de calitate determinați după regimul staționar h_{st} .

Eroarea staționară sau precizia sistemului ε_{st} , se alege convențional o mărime finită în raport cu regimul staționar h_{st} (de exemplu $\varepsilon_{st} = 0.05$ sau 5 % din h_{st}):

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_{st} = r(t) - h(t) = 1(t) - h(t), \quad (5.5)$$

unde $r(t) = 1(s)$ este intrarea de referință treaptă unitară ca semnal etalon al mărimii de ieșire a sistemului, iar $h(t)$ - mărimea curentă a răspunsului indicial al sistemului.

Indicii de calitate determinați după răspunsul indicial $h(t)$ (fig. 5.2).

1. Timpul de creștere t_c ce caracterizează timpul de trecere al sistemului din starea inițială dată de la 5-10 % până la 95 % din regimul staționar și $1/t_c$ este indicator al rapidității răspunsului indicial al sistemului.

2. Timpul de reglare t_r ce caracterizează timpul de trecere al sistemului din starea inițială dată (nulă sau nenulă) în banda regimului staționar cu satisfacerea inegalității:

$$|h(t) - h_{st}| \leq \varepsilon, t \geq t_r > 0. \quad (5.6)$$

Se constată că regimul tranzitoiriu are o durată finită, astfel având rezultate practice apreciabile, deoarece teoretic durata regimului tranzitoiriu tinde la infinit.

Pentru răspunsul indicial oscilant amortizat de ordinul doi cu o deviație de 0.05 se fetermină timpul de stabilizare din (5.4) prin relația:

$$t_r \approx - \frac{\ln 0.05 \sqrt{1 - \xi^2}}{\xi \omega_n}$$

la valoarea maximă a funcției $\sin(\omega t \sqrt{1 - \xi^2} + \varphi) = 1$.

Pentru sisteme automate cu valoarea lui $\xi \in (0.6 \div 0.8)$ timpul de reglare se determină prin relația:

$$t_r \approx - \frac{\ln 0.05 \sqrt{1 - \xi^2}}{\xi \omega_n} \approx \frac{4}{\xi \omega_n}.$$

3. Suprareglarea σ sau eroarea dinamică Δh , care determină cea mai mare abatere h_{\max} de la regimul staționar h_{st} , este mărime absolută sau relativă:

$$\sigma = \frac{h_{\max} - h_{\text{st}}}{h_{\text{st}}} = \frac{\Delta h}{h_{\text{st}}} 100 \%. \quad (5.7)$$

Un sistem de reglare automată se consideră calitativ pentru suprareglarea $\sigma \leq 20 \%$.

4. Numărul de abateri sau oscilații λ de la regimul staționar pe durata timpului de reglare t_r . Se recomandă valori pentru $\lambda \leq 3$.

5. Perioada oscilațiilor $T_p = 2\pi/\omega$ sau pulsația oscilațiilor $\omega = 2\pi/T_p$.

6. Gradul amortizării oscilațiilor ce reprezintă raportul dintre suprareglarea σ_2 (a doua abatere h_2) și suprareglarea σ_1 (primei abateri maxime h_1):

$$\delta = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}. \quad (5.8)$$

7. Factorul de amortizare ψ se exprimă de relația:

$$\psi = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1} = 1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 1 - \delta. \quad (5.9)$$

Intensitatea amortizării răspunsului sistemului este satisfăcătoare dacă $\psi = 0.75 \dots 0.95$.

În cazul răspunsului indicial aperiodic la eroarea staționară ε_{st} stabilită se aplică numai indicii timpul de creștere t_c și de reglare t_r .

Între indicii timpul de reglare t_r și suprareglarea σ există o strânsă corelare și alegerea lor este o problemă de compromis, când unui indice i se atribuie un avantaj practic.

Pentru calculul performanțelor sistemului se aplică două grupe de metode.

1. Metode directe de soluționare a ecuației diferențiale sau simularea structurii sistemului automat.

2. Metode indirecte în cazurile când nu poate fi soluționată ecuația diferențială și atunci se aplică metode indirecte de determinare a performanțelor sistemului: metoda alocării poli-zero-uri, criteriile integrale și metode frecvențiale.

Se folosește și răspunsul sistemului la intrarea rampă unutară și răspunsul la intrarea parabolă unitară.

5.3 Precizia sistemului automat în regim staționar

În sistemul automat stabil există regimul staționar (permanent), care are o importanță deosebită pentru caracterizarea calităților sistemului automat. Eroarea staționară se determină în raport cu fiecare tip de semnal care acționează asupra sistemului, dar eroarea totală a sistemului este suma erorilor pentru fiecare semnal aplicat asupra sistemului automat [1, 4, 8, 11-13, 18, 21].

Dacă asupra sistemului acționează semnalele de referință și perturbația, atunci eroarea sistemului se prezintă ca suma a două componente ale erorilor raportate la semnalele de intrare:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_r(t) + \varepsilon_p(t), \quad (5.10)$$

unde $\varepsilon_r(t)$ este eroarea transferului referință – ieșirea sistemului, $\varepsilon_p(t)$ - eroarea transferului perturbație – ieșirea sistemului.

Pornind de la schema structurală a sistemului automat (fig. 5.1), se determină eroarea staționară a sistemului în raport cu semnalele referinței $r(t)$ și perturbației $p(t)$:

$$\begin{aligned}\varepsilon(s) &= \frac{1}{1+H_d(s)}r(s) + \frac{H_p(s)}{1+H_d(s)}p(s) = \\ &= H_{\varepsilon_r}(s)r(s) + H_{\varepsilon_p}(s)p(s) = \varepsilon_r(s) + \varepsilon_p(s),\end{aligned}\quad (5.11)$$

unde $H_d(s) = H_R(s)H_{PF}(s)$ este f.d.t. a canalului direct sau sistemul în circuit deschis, $H_{\varepsilon_r}(s)$ - f.d.t. a erorii transferului referință-ieșire, $H_{\varepsilon_p}(s)$ - f.d.t. a erorii transferului perturbație-ieșire, $H_p(s)$ – f.d.t. a perturbației.

Pentru diferite semnale de intrare sistemul automat răspunde diferit și eroarea în regim staționar pentru intrări de tip treaptă (poziție) sau în regim permanent pentru intrări de tip rampă (viteză) și parabola (acelerație) pot fi egale cu zero sau diferite de zero.

Se analizează performanțele ce caracterizează eroarea staționară în raport cu semnalul de referință *numită și eroare forțată* $\varepsilon_r(s)$ dată de relația:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r(s) &= r(s) - y(s) = r(s) - H_d(s)\varepsilon_r(s) = \\ &= r(s) - H_0(s)r(s) = r(s)(1 - H_0(s)) = H_{\varepsilon_r}(s)r(s).\end{aligned}\quad (5.12)$$

unde $H_0(s) = \frac{H_d(s)}{1+H_d(s)}$ este f.d.t. a sistemului în buclă închisă.

Pentru a caracteriza proprietățile sistemului automat în regim staționar se evidențiază următoarele tipuri de erori staționare:

1. *Eroarea staționară de poziție (regim pozițional)* la semnalul de referință de tip treaptă unitară pentru care se definește expresia analitică, derivata și imaginea în s în forma:

$$r(t) = 1(t) = \text{const}, \dot{r}(t) = 0, r(s) = 1(s) = \frac{1}{s},$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_r(s) &= r(s) - y(s) = r(s) - H_0(s)r(s) = \\ &= (1 - H_0(s))r(s) = H_{\varepsilon_r}(s)r(s). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Pentru a calcula eroarea în regim staționar la poziție de la expresia (5.12), se aplică teorema valorii finale și se obține eroarea de poziție ε_p :

$$\begin{aligned} \varepsilon_r(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_r(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\varepsilon_r(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sH_{\varepsilon_r}(s)\frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} H_{\varepsilon_r}(s) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1+H_d(s)} = \frac{1}{1+\lim_{s \rightarrow 0} H_d(s)} = \frac{1}{1+k_p} = H_{\varepsilon_r}(0) = \varepsilon_p, \end{aligned} \quad (5.14)$$

unde $k_p = \lim_{s \rightarrow 0} sH_d(s)$ este definit coeficientul erorii de poziție ε_p .

Dacă sistemul conține astatism de gradul unu și doi, atunci coeficientul de eroare la poziție este infinit.

2. *Eroarea staționară la viteză (regim cu viteză constantă)* la semnalul de referință de tip rampă unitară (cu viteză unitară) pentru care se definește expresia analitică, derivatele și imaginea în s și se obține:

$$r(t) = t1(t), \dot{r}(t) = 1, \ddot{r}(t) = 0, r(s) = \frac{1}{s^2}.$$

Pentru a calcula eroarea în regim staționar la viteză de la expresia (5.12) se aplică teorema valorii finale și se obține:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r(t) &= \varepsilon_v(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_v(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\varepsilon_v(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sH_{\varepsilon_r}(s)\frac{1}{s^2} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} H_{\varepsilon_r}(s)\frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1+H_d(s)}\frac{1}{s} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sH_d(s)} = \frac{1}{k_v}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Prin definiție $\lim_{s \rightarrow 0} sH_d(s) = k_v$, care se numește coeficient de eroare la viteză.

Pentru sisteme cu astatism de gradul unu eroarea este finită și egală cu inversul coeficientului de eroare la viteză, iar pentru gradul de astatism $\alpha > 1$ coeficientul de eroare la viteză este infinit și eroarea este egală cu zero.

3. *Eroarea staționară la accelerație (regim cu accelerație constantă)* la semnalul de referință de tip funcție parabolă unitară (cu accelerație unitară) pentru care se definește expresia analitică, derivatele și imaginea în s și se obține:

$$r(t) = t^2 \frac{1(t)}{2}, \dot{r}(t) = t, \ddot{r}(t) = 1, \dddot{r}(t) = 0, r(s) = \frac{1}{s^3}.$$

Pentru a calcula eroarea în regim staționar la accelerație de la expresia (5.12) se aplică teorema valorii finale și se obține:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r(t) = \varepsilon_a(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_a(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \varepsilon_a(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s H_{Er}(s) \frac{1}{s^3} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} H_{Er}(s) \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + H_d(s)} \frac{1}{s^2} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 H_d(s)} = \frac{1}{k_a} = \varepsilon_a, \end{aligned} \quad (5.16)$$

unde se notează $k_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 H_d(s)$, care se numește coeficient de eroare la accelerație.

Pentru sistemele cu astatism $\alpha > 2$, coeficientul de eroare la accelerație $k_a \rightarrow \infty$ și eroarea de accelerație $\varepsilon_a = 0$.

În tabelul 5.1 se dă o analiză a valorii erorii pentru diferite tipuri de întări și tipuri de sisteme.

Dacă intrările nu sunt unitare, erorile în regim staționar sunt proporționale amplitudinilor acestora, fiindcă analizăm sistemele liniare.

Fie o intrare cu componentele de poziție, viteză și accelerație descrisă de relația:

$$r(t) = A_1 u(t) + A_2 t u(t) + A_3 t^2 u(t), \quad (5.17)$$

unde $u(t)$ este semnalul unitar și coeficienții A_1 , A_2 și A_3 reprezintă amplitudinile acestor componente.

Tabelul 5.1. Tipuri de erori

Grad astatism α	Tipuri de intrări, funcția de transfer		
	Treaptă, $1/s$	Rampă, $1/s^2$	Parabolă, $1/s^3$
0	$1/(1+k_p)$	∞	∞
1	0	$1/k_v$	∞
2	0	0	$1/k_a$

Eroarea staționară are forma:

$$\varepsilon_{st} = \frac{A_1}{1+\lim_{s \rightarrow 0} H_d(s)} + \frac{A_2}{1+\lim_{s \rightarrow 0} s H_d(s)} + \frac{A_3}{1+\lim_{s \rightarrow 0} s^2 H_d(s)}. \quad (5.18)$$

Pentru sisteme cu astatism $\alpha = 0, 1, 2$ erorile au valorile:

$$\text{pentru } \alpha = 0, \varepsilon_{st} = \frac{A_1}{1+k_p} + \infty + \infty,$$

$$\text{pentru } \alpha = 1, \varepsilon_{st} = 0 + \frac{A_2}{k_v} + \infty,$$

$$\text{pentru } \alpha = 2, \varepsilon_{st} = 0 + 0 + \frac{A_3}{k_a},$$

unde se observă că pentru diferite tipuri de sisteme și tipuri de intrări eroarea este egală cu zero, finită și infinită.

Exemplul 5.1. Se consideră sistemul automat deschis dat de f.d.t.

$$H_d(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}.$$

Se cere să se calculeze erorile staționare de poziție la viteză și accelerație.

Soluționare. Se determină erorile staționare de poziție, la viteză și la accelerație, utilizând relațiile de calcul (5.14)-(5.16).

Eroarea de poziție (5.14):

$$\varepsilon_{st} = \lim_{s \rightarrow 0} s H_{er}(s) \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} H_{er}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(s+2\xi\omega_n)}{s(s+2\xi\omega_n)+\omega_n^2} = 0.$$

Eroarea la viteză (5.15):

$$\varepsilon_v = \lim_{s \rightarrow 0} s H_{er}(s) \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1+H_d(s)} \frac{1}{s} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s H_d(s)} = \frac{1}{k_v},$$

unde se calculează coeficientul erorii la viteză după relația:

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s H_d(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)} = \frac{\omega_n^2}{2\xi\omega_n} = \frac{\omega_n}{2\xi},$$

iar eroarea de viteză este:

$$\varepsilon_v = \frac{1}{k_v} = \frac{2\xi}{\omega_n}.$$

Rezultă că pentru a obține un răspuns cât mai precis la intrări de tip rampă, coeficientul de amortizare ξ trebuie să fie cât mai mic.

Eroarea la accelerație (5.16):

$$\varepsilon_a = \lim_{s \rightarrow 0} s H_{er}(s) \frac{1}{s^3} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 H_d(s)} = \frac{1}{k_a},$$

$$k_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 H_d(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)} = 0,$$

$$\varepsilon_a = \frac{1}{k_a} = \frac{1}{0} = \infty. \blacksquare$$

Din analiza expresiilor (5.14)-(5.16) se constată că precizia este definită de comportarea f.d.t. $H_{er}(s)$ în vecinătatea originii la valori mici ale lui s .

Pentru calculul erorii staționare (5.10) a sistemului f.d.t. a erorii $H_{er}(s)$ se dezvoltă în serie Taylor și se obține:

$$H_{er}(s) = c_0 + c_1 s + \frac{1}{2!} c_2 s^2 + \dots + \frac{1}{k!} c_k s^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k, \quad (5.19)$$

unde coeficienții erorii se calculează conform relației:

$$c_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k H_{\varepsilon r}(s)}{ds^k} \Big|_{s=0} = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{ds^k} \left(\frac{1}{1+H_d(s)} \right). \quad (5.20)$$

Pentru o formă generală a semnalului de referință dat de expresia:

$$r(t) = t^k \frac{1}{k!}, \quad r(s) = \frac{1}{s^{k+1}} \quad (5.21)$$

eroarea sistemului în formă operațională se dă prin relația:

$$\varepsilon_r(s) = c_0 r(s) + c_1 s r(s) + \frac{1}{2!} c_2 s^2 r(s) + \dots + \frac{1}{k!} c_k s^k r(s), \quad (5.22)$$

iar în domeniul timpului eroarea (5.22) are forma:

$$\varepsilon_r(t) = c_0 r(t) + c_1 \dot{r}(t) + \frac{1}{2!} c_2 \ddot{r}(t) + \dots + \frac{1}{k!} c_k r^{(k)}(t). \quad (5.23)$$

Coeficienții $c_0, c_1, c_2, \dots, c_k, \dots$ din (5.19) și (5.23) se numesc *coeficienții erorii staționare* în raport cu mărimea prescrisă.

Un sistem automat se numește de tipul k în raport cu mărimea de referință dacă primul coeficient al erorii staționare este nenul în ordinea lor naturală este c_k .

Dacă se presupune că f.d.t. $H_d(s)$ a canalului direct se reprezintă prin raportul a două polinoame:

$$H_d(s) = \frac{C(s)}{D(s)}, \quad (5.24)$$

în care polinoamele $C(s)$ și $D(s)$ sunt prime între ele și $C(s) \neq 0$, apoi f.d.t a sistemului în buclă închisă va fi:

$$H_{\varepsilon r}(s) = \frac{1}{1+H_d(s)} = \frac{1}{1+C(s)/D(s)} = \frac{D(s)}{C(s)+D(s)}. \quad (5.25)$$

În aceste condiții, relația pentru eroarea staționară este:

$$\varepsilon_r(s) = c_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{ds^k} \left(\frac{D(s)}{C(s)+D(s)} \right) \Big|_{s=0}, k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.26)$$

Dacă sistemul automat este de tipul $k = 0$, rezultă că coeficientul $c_0 \neq 0$, iar polinomul $D(0) \neq 0$. De unde rezultă că f.d.t. $H_d(s)$ a căii directe nu are nici un pol în origine (în $s = 0$), deci nu există astatism – elemente integratoare. În acest caz, eroarea staționară de poziție în raport cu mărimea de referință este nenulă, dar finită.

Dacă sistemul automat este de tipul $k = 1$, rezultă că coeficientul $c_0 = 0$, $c_1 \neq 0$ și polinomul $D(0) = 0$ și $D(s) = sD_1(s)$, în care $D_1(s)$ nu are nici un zero în origine sau $D_1(s) \neq 0$. De unde rezultă că f.d.t. $H_d(s)$ a căii directe are un pol în origine (în $s = 0$), deci există astatism de gradul unu – un element integrator în structura sistemului. În acest caz, eroarea staționară de poziție în raport cu mărimea de referință este nulă și se datorează prezenței pe calea directă a elementului integrator, iar eroarea staționară de viteză este nenulă, dar finită.

Dacă sistemul automat este de tipul $k = 2$, atunci coeficienții $c_0 = 0$, $c_1 = 0$, iar $c_2 \neq 0$ și rezultă că f.d.t. $H_d(s)$ a căii directe are doi poli în origine (în $s = 0$), deci există astatism de gradul doi – două elemente integratoare în structura sistemului. În acest caz, eroarea staționară de poziție și de viteză în raport cu mărimea de referință sunt nule și se datorează prezenței pe calea directă a două elemente integratoare, iar eroarea staționară de accelerație este nenulă, dar finită.

În general, un sistem automat este de tipul k și f.d.t. a căii directe are k poli în origine și rezultă că calea directă conține k elemente integratoare înseriate. Calitatea unui astfel de sistem este că erorile staționare (5.23) în raport cu mărimea de referință de tip parabolă unitară de ordinul k (cu derivata de ordinul k) sunt nule până la ordinul $k - 1$ inclusiv.

O abordare similară se poate folosi pentru calculul erorilor staționare (de poziționare, de viteză și de accelerație) ale sistemului automat, utilizând f.d.t. a erorii sistemului în raport cu perturbația (ca semnale de tip treaptă unitară, rampă unitară și parabolă unitară):

$$0 = c_{m+1}a_0 + c_m a_1 + \dots + c_0 a_{m+1},$$

de unde rezultă expresia recurentă:

$$c_k = \frac{1}{a_0} \{b_k - \sum_{r=1}^k c_{k-r} a_r\},$$

unde $b_k \equiv 0$ când $k > m$ și $a_r \equiv 0$ când $r > n$.

Exemplul 5.2. Se dă f.d.t. a căii directe de forma:

$$H_d(s) = \frac{k}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

cu parametrii $k = 100 \text{ s}^{-1}$, $T_1 = 0.1 \text{ s}$, $T_2 = 0.01 \text{ s}$.

Semnalul de intrare are forma:

$$r(t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 = 20 + 2t - 0.5t^2 \text{ rad.}$$

Se cere să se calculeze eroarea staționară a sistemului automat închis.

Soluționare. 1. Se determină f.d.t. a erorii sistemului automat în buclă închisă:

$$\begin{aligned} H_{er}(s) &= \frac{1}{1+H_d(s)} = \frac{1}{1+\frac{k}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)}} = \frac{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)+k} = \\ &= \frac{T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2)s + s}{T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2)s + s + k} = \frac{b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s^3}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3} = \frac{B_\varepsilon(s)}{A_\varepsilon(s)}, \end{aligned}$$

unde coeficienții au valorile:

$$b_0 = 0, b_1 = 1, b_2 = T_1 + T_2 = 0.11 \text{ s}, b_3 = T_1 T_2 = 0.001 \text{ s}^2,$$

$$a_0 = k, a_1 = 1, a_2 = T_1 + T_2 = 0.11 \text{ s}, a_3 = T_1 T_2 = 0.001 \text{ s}^2.$$

2. Se determină derivatele semnalului de intrare:

$$\dot{r}(t) = 2 - t, \ddot{r}(t) = -1, \dddot{r}(t) = -0.$$

3. Conform (5.23), în domeniul timpului se prezintă expresia pentru cazul dat când există numai prima și a doua derivată a semnalului de intrare:

$$\varepsilon_r(t) = c_0 r(t) + c_1 \dot{r}(t) + \frac{1}{2!} c_2 \ddot{r}(t).$$

4. În expresia erorii există numai coeficienții c_0 , c_1 și c_2 și se utilizează numai primele trei ecuații algebrice din (5.30) pentru a calcula coeficienții erorii:

$$\begin{aligned} b_0 &= c_0 a_0, \\ b_1 &= c_1 a_0 + c_0 a_1, \\ b_2 &= c_2 a_0 + c_1 a_1 + c_0 a_2, \end{aligned}$$

de unde rezultă:

$$c_0 = \frac{b_0}{a_0} = \frac{0}{k} = 0,$$

$$c_1 = \frac{1}{a_0} (b_1 - c_0 a_1) = \frac{b_1}{a_0} = \frac{1}{k} = \frac{1}{100} = 0.01 \text{ s},$$

$$c_2 = \frac{1}{a_0} (b_2 - c_1 a_1 - c_0 a_2) = \frac{1}{100} (0.11 - 0.01 \cdot 1 - 0 \cdot 0.11) = 0.001 \text{ s}^2.$$

5. Expresia erorii cu coeficienții erorii $c_0 = 0$, $c_1 = 0.01 \text{ s}$, $c_2 = 0.001 \text{ s}^2$ și derivatele semnalului de intrare are forma:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r(t) &= c_0 r(t) + c_1 \dot{r}(t) + \frac{1}{2!} c_2 \ddot{r}(t) = 0.01(2 - t) + \frac{1}{2!} 0.001(-1) = \\ &= 0.02 - 0.0005 - 0.01t = 0.0195 - 0.01t. \end{aligned}$$

6. Se calculează semnalul forțat al ieșirii sistemului:

$$\begin{aligned} y(t) &= r(t) - \varepsilon_r(t) = 20 + 2t - 0.5t^2 - 0.0195 + 0.01t = \\ &= 19.9805 + 2.01t - 0.5t^2. \end{aligned}$$

Din analiza rezultatelor obținute pentru exemplul dat se constată:

1. Eroarea sistemului nu conține componenta constantă a semnalului de referință $r(t)$ $A_0 = 20 \text{ rad}$, fiindcă coeficientul $c_0 = 0$ și sistemul conține un element integrator (sistem de tipul $k = 1$).

2. Componenta semnalului de referință $r(t)$ $A_1 = 2t \text{ rad}$ (semnal de viteză constantă) impune sistemului componenta erorii $c_1 = 1/k \neq 0$, dar este o constantă.

3. Componenta semnalului de referință $r(t)$ $A_2 t^2 = 0,5t^2 \text{ rad}$ (semnal de accelerație constantă) impune sistemului componenta erorii $c_2(2 - t)$, care cu creșterea lui $t \rightarrow \infty$, modulul sistemului nu urmărește exact semnalul referinței. ■

Un tablou mai amplu privind eroarea sistemului automat se poate obține din studiul erorii dinamice a răspunsului indicial al sistemului.

5.4 Estimarea performanțelor sistemului automat după metoda poli-zero

5.4.1 Estimarea gradului de stabilitate și a oscilației

La determinarea procesului tranzitoriu $y(t)$ al sistemului automat se utilizează ecuația diferențială a sistemului închis, care descrie transferul intrare-ieșire.

În formă operațională, mărimea de ieșire $y(s)$ se prezintă ca produsul f.d.t. a sistemului închis și a referinței [1, 4, 8, 11-13, 18]:

$$y(s) = H_0(s)r(s) = \frac{B(s)}{A(s)}r(s) = \frac{k}{A(s)}r(s), \quad (5.31)$$

unde polinomul $B(s) = k$ și nu conține zero.

La analiza stabilității sistemului s-a utilizat ecuația caracteristică $A(s) = 0$ din (5.31).

Pentru determinarea calității unui sistem automat se folosesc polii lui $H_0(s)$ sau rădăcinile $\overline{p_1, p_n}$ ale ecuației caracteristice $A(s) = A(p) = 0$:

$$A(p) = a_0p^n + a_1p^{n-1} + \dots + a_{n-1}p + a_n = 0. \quad (5.32)$$

Pentru un sistem stabil toate rădăcinile $\overline{p_1, p_n}$ sunt alocate în semiplanul stâng $Rep_i < 0$ și modul de reprezentare a polilor se utilizează pentru determinarea calității sistemului și principalul pentru determinarea *apropierii* de situația de instabilitate (de axa imaginară).

În domeniul timpului, această determinare se poate face pe baza abaterilor pe care le evidențiază mărimea răspunsului indicial:

$$h(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} H_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} H_0(s) \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} H_0(s) = \frac{b_m}{a_n}. \quad (5.33)$$

Analiza acestor determinări după abaterile lui $h(t)$ sunt cu atât mai mari și de durată mai mare cu cât polii lui $H_0(s)$ sunt mai apropiați de cazul $Rep_i = 0$ (de axa imaginară a planului complex al rădăcinilor).

Practica proiectării și utilizării sistemului arată că asigurarea stabilității este necesară, dar nu și suficientă pentru o calitate acceptabilă a transferului temporal intrare–ieșire realizat de sistemul automat.

Dacă se presupune că rădăcinile $\overline{p_1}, \overline{p_n}$ ale ecuației caracteristice a sistemului sunt cunoscute și alocate în semiplanul stâng ca în figura 5.3, atunci în planul complex al rădăcinilor se evidențiază domeniul ABCD în care sunt alocate toate rădăcinile ($p_i = -\alpha_i \pm j\omega_i$); sunt prezentate 4 rădăcini: două reale $p_1 = -\alpha_1$, $p_4 = -\alpha_4$ și două complexe $p_{2,3} = -\alpha_2 \pm j\omega_2$.

Domeniul de repartiție a rădăcinilor în planul complex se caracterizează prin următorii parametri:

1. Distanța celei mai apropiate rădăcini reale sau partea reală a rădăcinii complexe de axa imaginară este numită *grad de stabilitate* și notat η .

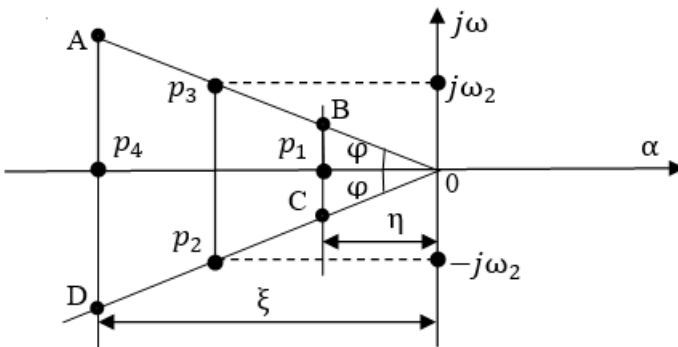


Fig. 5.3. Domeniul de distribuție a polilor lui $H_0(s)$

2. Distanța dintre rădăcina cea mai îndepărtată și axa imaginară notată ξ .

3. Unghiul format de semi-axa reală negativă și două raze duse din origine astfel, încât toate rădăcinile din partea superioară și inferioară a semiplanului stâng să fie încadrate în acest unghi dublu și se exprimă prin valoarea tangentei:

$$\mu = \operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{\omega}{\alpha} \right|, \quad (5.34)$$

notat μ și numit *oscilanță*, care determină componentele *oscilante* ale răspunsului indicial al sistemului automat. Oscilanța μ se determină pentru perechea de rădăcini complex conjugate care are valoarea maximă sau unghiul φ cel mai mare.

O determinare a rapidității răspunsului indicial al sistemului automat se obține și prin utilizarea rădăcinii medii geometrice $\Omega = \omega_p$ (numită frecvența oscilațiilor proprii, care are sens fizic numai pentru sisteme de ordinul doi), ce reprezintă relația funcțională generală numerică a coeficienților funcției de transfer și rădăcinile ecuației caracteristice.

Pentru un sistem de ordinul n frecvența oscilațiilor se determină prin relația:

$$\Omega = \sqrt[n]{|p_1 p_2 \cdots p_n|} = \sqrt[n]{a_n/a_0},$$

care reprezintă distanța lui Ω de la axa imaginară în planul rădăcinilor.

De exemplu, dacă se mărește valoarea lui Ω de c ori, atunci forma răspunsului indicial nu se modifică, dar se reduce timpul de reglare de c ori (t_r/c). Pentru ridicarea valorii lui Ω se crește valoarea coeficientului de transfer al sistemului deschis.

În sistemul automat cu ecuația caracteristică de gradul n cu rădăcinile de multiplicitatea n există răspunsul aperiodic optimal în timp.

Sistemul poate pierde stabilitatea ca urmare a modificării alocării polilor în planul complex.

1. Deplasarea unor poli ai lui $H_0(s)$, situați în $Re p_i < 0$, spre axa imaginară, cauzată de variația parametrilor sistemului sub influența factorilor mediului sau învechirea materialelor.

2. Imposibilității cunoașterii localizării exacte a polilor lui $H_0(s)$, fiindcă estimarea valorilor parametrilor pe care se bazează analiza stabilității este afectată de erori sistematice și aleatorii.

3. Se menționează că dependența dintre rădăcinile $\overline{p_1, p_n}$ ale ecuației caracteristice și coeficienții săi $\overline{a_0, a_n}$ este neliniară:

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = -a_1,$$

$$y_l(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{p_i t} \approx y_\eta(t) = c_\eta e^{-\alpha_i t} = c_\eta e^{-\eta t}, \quad (5.38)$$

unde coeficientul c_η reprezintă valoarea inițială a componentei libere a răspunsului, iar α_i – rădăcina reală cea mai aproape de axa imaginară.

Pentru o rădăcină complexă se obține:

$$y_\eta(t) = e^{-\eta t} \sin \omega t. \quad (5.39)$$

Dacă se dorește ca la $t_r = t_\eta$ și răspunsul $y_\eta(t)$ să prezinte un procent Δ din valoarea inițială c_η , atunci se obține:

$$y_\eta(t) = c_\eta e^{-\eta t} = \Delta \quad (5.40)$$

sau

$$\Delta = e^{-\eta t_r}, \Delta = \frac{1}{e^{\eta t_r}}, e^{\eta t_r} = \frac{1}{\Delta}, \eta t_r = \ln \frac{1}{\Delta}, t_r = \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\Delta}. \quad (5.41)$$

Dacă eroarea este $\Delta = 0.05$ din valoarea lui $y_\eta(t)$, atunci timpul de reglare se determină astfel:

$$t_r = \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{0,05} \approx \frac{3}{\eta}. \quad (5.42)$$

Pentru rădăcina complexă timpul de reglare se determină cu acoperirea de sus:

$$t_r \leq \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{0,05} \leq \frac{3}{\eta}. \quad (5.43)$$

5.4.3 Estimarea suprareglării și a gradului de amortizare

Dacă polul cel mai aproape de axa imaginară este o pereche de rădăcini complex conjugate $p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega$, atunci componenta liberă a răspunsului tranzitoriu are forma:

$$y_l(t) = c e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi), \quad (5.44)$$

unde c este amplitudinea, φ – defazajul.

Pentru determinarea gradului de oscilață al sistemului se utilizează noțiunea de grad de amortizare și factor de amortizare.

Gradul de amortizare δ se exprimă ca raportul dintre mărimea de suprareglare σ_2 la a doua abatere la suprareglarea σ_1 la prima abatere a răspunsului sistemului:

$$\sigma_1 = ce^{-\alpha t_1}, \sigma_2 = ce^{-\alpha(t_1+T_p)} = ce^{-\alpha(t_1+\frac{2\pi}{\omega})}, \quad (5.45)$$

$$\delta = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{ce^{-\alpha(t_1+\frac{2\pi}{\omega})}}{ce^{-\alpha t_1}} = \frac{e^{-\alpha t_1} e^{-2\pi\frac{\alpha}{\omega}}}{e^{-\alpha t_1}} = e^{-2\pi\frac{\alpha}{\omega}} = e^{-\frac{2\pi}{\mu}}, \quad (5.46)$$

unde $T_p = 2\pi/\omega$ este perioada oscilațiilor răspunsului indicial, iar $\omega = 2\pi/T_p$ – pulsația sau frecvența.

După valoarea oscilației μ se calculează suprareglarea limitată a sistemului automat, când mai aproape de axa imaginară este o pereche de rădăcini complex conjugate după relația:

$$\sigma \leq e^{-\frac{\pi}{\mu}} \cdot 100 \%. \quad (5.47)$$

În practică se utilizează mărimea inversă a oscilației $m = 1/\mu$, pentru care se recomandă valorile $m = 0.2 \dots 0.5$.

Factorul de amortizare ψ se exprimă prin relația:

$$\psi = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1} = 1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 1 - \delta = 1 - e^{-\frac{2\pi}{\mu}}, \quad (5.48)$$

unde σ_1, σ_2 sunt prima și a doua suprareglare a sinusoidii $h(t)$ (fig. 5.2).

Legătura funcțională dintre gradul de stabilitate η și factorul de amortizare ψ se dă prin relația:

$$\eta = \frac{2\pi}{\ln\frac{1}{1-\psi}}. \quad (5.49)$$

Determinările prezentate mai sus ale timpului de reglare t_r și suprareglarea σ sau gradul de amortizare δ sunt suficient de severe.

Ambele metode sunt valabile numai atunci când f.d.t. (5.31) a sistemului închis nu conține zerouri:

$$H_0(s) = \frac{k}{A(s)}.$$

Prezența zerourilor care introduc defazaj pozitiv, modifică considerabil forma liberă a răspunsului, ceea ce este dificil a face concluzii asupra calității răspunsului sistemului automat.

Exemplul 5.3. Se consideră funcția de transfer a sistemului deschis:

$$H_d(s) = \frac{0.1}{25s^3 + 10s^2 + s}.$$

Se cere să se determine indicii de calitate ai răspunsului indicial al sistemului timpului de reglare, suprareglarea și factorul de amortizare.

Soluționare. 1. Se determină funcția de transfer a sistemului închis:

$$H_0(s) = \frac{0.1}{25s^3 + 10s^2 + s + 0.1}.$$

2. Se determină rădăcinile ecuației caracteristice ale sistemului automat închis: $p_{1,2} = -0.04286 \pm j0.10498$, $p_3 = -0.3$.

3. Rezultă că gradul de stabilitate al sistemului este $\eta = 0.043$, iar oscilația $\mu = 0.10498/0.04286 = 2.4494$.

4. Se calculează timpul de reglare după relația (5.43) pentru rădăcina complexă:

$$t_r \leq \frac{3}{\eta} = \frac{3}{0.043} = 69.77 \text{ s}.$$

5. Se calculează suprareglarea după relația (5.47) pentru rădăcină complexă:

$$\sigma \leq e^{-\frac{\pi}{\mu}} = e^{-\frac{3.14}{2.4494}} \cdot 100 \% = 27.75 \%.$$

6. Se determină factorul de amortizare după relația (5.48) și se obține:

$$\psi = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1} = 1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \left(1 - e^{-\frac{2\pi}{\mu}}\right) = \left(1 - e^{-\frac{2 \cdot 3.14}{2.4494}}\right) = 0.923.$$

Valorile timpului de reglare, suprareglarea și factorul de amortizare s-au verificat, simulând sistemul automat (fig. 5.4) și s-au obținut valorile: $t_r = 71.06$ s, $\sigma = 25.06$ %, $\psi = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1} = 1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 1 - \frac{0.01811}{0.2502} = 0.928$.

Indicii de performanță calculați analitic și obținuți prin simulare au valori apropiate. ■

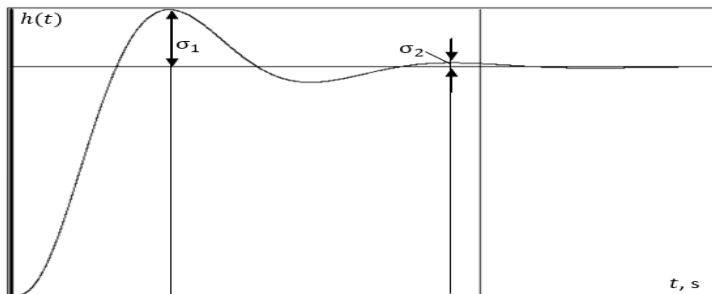


Fig. 5.4. Răspunsul indicial al sistemului la ex. 5.3

5.4.4 Influența repartiției $p - z$ a funcției de transfer $H_0(s)$ asupra răspunsului indicial

Din cele expuse, pentru sistemul stabil cu rădăcinile alocate în semiplanul stâng, se constată concluziile [12].

1. Polul p_i și zeroul z_j alocați în vecinătate se compensează, dacă diferența lor $|p_i - z_j| \leq 0,1|p_i| \approx 0,1|z_j|$.

2. Reducerea amplitudinii componentei oscilante, care prezintă polii complecși și apropierea atât mai rapid de asimptota componentei exponențiale a polului real cu cât este mai mare modulul polului real.

3. Timpul de reglare t_r depinde de valoarea absolută a părții reale a polului dominant, care este polul cel mai apropiat de axa imaginară.

4. Suprareglarea răspunsului indicial depinde de raportul părții imaginare la partea reală a polului complex dominant.

5. Zerourile apropiate de origine, dacă nu sunt compensate, și îndepărtate de origine, dar nu dominante în raport cu polii, conduc la creșterea timpului de reglare și a suprareglării.

5.4.5 Repartiția $p - z$ a funcției de transfer $H_0(s)$ și a imaginii intrării $r(s)$

Sistemul automat trebuie să reproducă semnalul de referință cu erori minimale. Pentru a atinge acest scop este necesar ca $p - z$ să fie repartizați în modul următor [12]:

1. Polii f.d.t. $H_0(s)$ să fie alocați mai departe de polii imaginii intrării $r(s)$ și valorile lor să nu se suprapună, fiindcă apare rezonanță în sistem.

2. Zerourile f.d.t. $H_0(s)$ să fie alocate cât mai aproape de polii lui $r(s)$, astfel se formează dipolul $p - z$ cu z mai aproape de origine, se reduce componenta y_{st} de la referința $r(s)$.

3. Polii-zerourile f.d.t. $H_0(s)$ în raport cu perturbația $p(s)$ se repartizează astfel, încât pentru toți polii lui $r(s)$ f.d.t. $H_0(s)$ să aibă aceeași valoare: $H(p_1) \approx H(p_2) \approx \dots \approx \text{const}$ și, deci, eroarea staționară $\varepsilon \rightarrow \text{min}$.

4. Zerourile lui $H_0(s)$ se repartizează aproape de polii care sunt mai aproape de axa imaginară dipolul $p - z$, care reduce eroarea staționară $\varepsilon \rightarrow \text{min}$.

5. Polii lui $H_0(s)$ alocați cât mai departe de axa imaginară cu atât mai rapid se stinge componenta liberă $y_l(t)$.

5.5 Criterii integrale de estimare a performanțelor sistemului

Este stabilit că fiecare performanță separată caracterizează proprietățile concrete ale sistemului automat. Alegerea unor performanțe locale pentru ca sistemul să posede o calitate mai bună devine o problemă de contradicții, deoarece alte performanțe locale vor fi mai nefavorabile.

În comparație cu performanțele dinamice definite prin criterii locale $\varepsilon, \sigma, t_r, \dots$, care se referă la valori ale erorii în anumite momente ale timpului, criteriile integrale reprezintă indici sintetici de calitate ai sistemului, ce caracterizează în ansamblu regimul tranzitoriu și oferă o informație globală despre dinamica sistemului studiat [1, 4, 8, 11-13, 17].

Această contradicție a condus la ideea definirii unor *indicatori sintetici de calitate* care să înglobeze toate aspectele pentru determinarea calității după răspunsul indicial al sistemului.

Un indicator sintetic de calitate asigură o determinare globală a performanțelor regimului dinamic și staționar al sistemului automat, care se exprimă printr-un număr real pozitiv și poate fi calculat și măsurat experimental. Acest indicator poate fi supus minimizării valorii lui, ceea ce implicit conduce la realizarea unei *optimizări* a sistemului automat, care influențează asupra structurii și valorilor parametrilor sistemului.

Se consideră un răspuns indicial aperiodic $h(t)$ al unui sistem automat dat în figura 5.5, *a*), iar în figura 5.5, *b*) se dă eroarea $\varepsilon(t)$ sistemului.

Pentru determinarea vitezei de răspuns și a abaterilor mărimii de reglare:

$$\Delta y(t) = \varepsilon(t) = r(t) - y(t) = 1(t) - h(t), t \geq 0 \quad (5.50)$$

de la regimul staționar se utilizează criteriile integrale (globale), numite și criterii sintetice, care se formează în funcție de tipul semnalelor externe care acționează asupra sistemului automat.

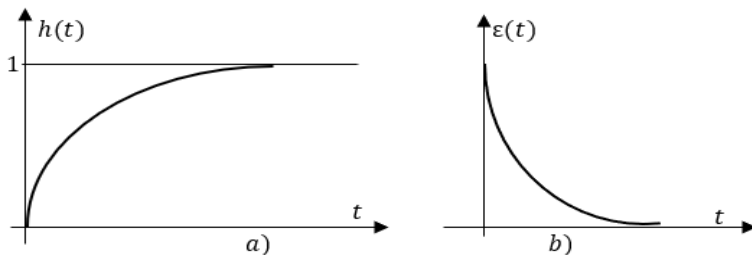


Fig. 5.5. Răspuns indicial aperiodic *a*) și eroarea sistemului *b*)

Dacă se admite că eroarea $\varepsilon(t)$ este abaterea răspunsului indicial al sistemului stabil în raport cu comportarea ideală (fig. 5.5, *a*) ca răspuns la semnalul treaptă, atunci criteriul integral de performanță care poate fi utilizat se definește de funcționala în forma:

$$J = \int_0^{\infty} L(\varepsilon(t), t) dt = \min, \quad (5.51)$$

unde operatorul integralei $L(\varepsilon(t), t)$ este funcție liniară sau neliniară de argumentele eroarea sistemului $\varepsilon(t)$ și timpul de reglare t .

Utilizarea expresiei (5.51) pentru determinarea performanțelor sistemului impune minimizarea erorii și această funcție poate avea diverse forme în dependență de particularitățile procesului de reglare, de forma răspunsului sistemului pentru semnale exogene standard.

Ca indice de calitate pentru răspunsuri aperiodice se calculează aria erorii dintre sistemul de coordonate și curba erorii (fig. 5.5, *b*) cu integrala de forma:

$$J_1 = \int_0^{\infty} \varepsilon(t) dt \rightarrow \min, \quad (5.52)$$

care reprezintă un număr și valoarea acestuia exprimă calitatea sistemului.

Pentru răspunsuri oscilante (fig. 5.6, *a*) se utilizează criteriul exprimat prin integrala pătratică de forma:

$$J_2 = \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt \rightarrow \min. \quad (5.53)$$

Pentru acest criteriu se integrează atât valorile pozitive, cât și valorile negative ale erorii.

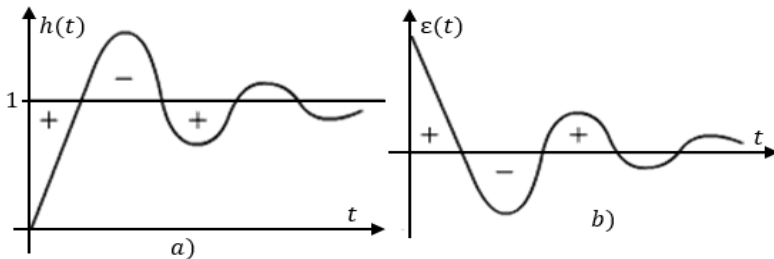


Fig. 5.6. Răspunsul indicial oscilant amortizat *a*) și eroarea sistemului *b*)

Pentru sistemul automat de ordinul doi cu parametrii gradul de amortizare ξ și pulsația nominală ω_n acest indicator are o valoare minimă pentru $\xi \approx 0.5$.

Alt indicator de performanță se definește în funcție de valoarea absolută a erorii:

$$J_3 = \int_0^{\infty} |\varepsilon(t)| dt \rightarrow \min, \quad (5.54)$$

valoarea căruia crește pentru valoarea pozitivă sau negativă și se obține un sistem subamortizat.

Pentru sistemul automat de ordinul doi, acest indicator are o valoare minimă pentru $\xi \approx 0.7$.

Indicatorul (5.53) asigură o bună distincție între răspunsurile indiciale slab amortizate și cele puternic amortizate. Valoarea $J_2 = \min$ se obține pentru o valoare de compromis a amortizării (fig. 5.6, *b*). Acest criteriu poate fi măsurat experimental și este avantajos pentru tratări matematice și pentru simularea numerică.

Indicatorul (5.54) este adecvat pentru studii de simulare numerică, dar este mai dificil de utilizat în abordări matematice.

În indicatorii (5.53) și (5.54) o influență predominantă are valoarea erorii din partea inițială a răspunsului tranzitoriu, care are valori mari imediat după aplicarea unor semnale de tip treaptă.

Indicatorii (5.53) și (5.54) pot fi aplicați și pentru procesele aperiodice.

Pentru a crește influența comportării finale în cadrul indicatorului de performanță, se utilizează criterii complexe care sunt convergente pe orizont infinit de forma:

$$J_4 = \int_0^{\infty} t |\varepsilon(t)| dt \rightarrow \min, \quad (5.55)$$

$$J_5 = \int_0^{\infty} t^2 \varepsilon^2(t) dt \rightarrow \min, \quad (5.56)$$

unde prezența variabilei timpului t în integrant are ca efect o pondere adecvată a valorilor inițiale și finale ale erorii. Valorile inițiale mari în valori absolute ale erorii $\varepsilon(t)$ intră cu o pondere mică, deoarece timpul t are valori mici, iar valorile finale mici ale erorii $\varepsilon(t)$ intră cu o pondere mică, fiindcă timpul t este mare.

În modul acesta crește rolul valorilor mici finale de regim

staționar ale erorii și prin minimizarea criteriilor J_4 sau J_5 se realizează implicit și o reducere a erorii pentru timpul t de valori mari. Indicatorul J_4 are o sensibilitate ridicată la variația parametrilor sistemului automat și obținerea $J_4 = \text{minim}$ poate fi determinat experimental.

Calitatea regimului tranzitoriu poate fi îmbunătățită, dacă o dată cu limitarea valorilor erorii $\varepsilon(t)$ se impune și o limitare a valorii primei derivate a erorii și criteriul are forma:

$$\begin{aligned} J_6 &= \int_0^{\infty} [\varepsilon^2(t) + T^2 \dot{\varepsilon}^2(t)] dt = \\ &= \int_0^{\infty} [\varepsilon(t) + T \dot{\varepsilon}(t)]^2 dt - \int_0^{\infty} 2T \varepsilon(t) \dot{\varepsilon}(t) dt = \\ &= \int_0^{\infty} [\varepsilon(t) + T \dot{\varepsilon}(t)]^2 dt + T \varepsilon^2(0) \rightarrow \text{min}, \end{aligned} \quad (5.57)$$

unde coeficientul de ponderare T este constantă de timp atașată componentei libere a răspunsului aperiodic optimal, care se măsoară în unități de timp.

Regimul tranzitoriu poate fi îmbunătățit, dacă o dată cu limitarea valorilor erorii $\varepsilon(t)$ se impune și o limitare a valorilor derivatelor erorii și criteriul integral are forma generalizată:

$$\begin{aligned} J_7 &= \int_0^{\infty} f(\varepsilon(t), \dot{\varepsilon}(t), \ddot{\varepsilon}(t), \dots, \varepsilon^n(t)) dt = \\ &= \int_0^{\infty} [\alpha_0 \varepsilon^2(t) + \alpha_1 \dot{\varepsilon}^2(t) + \alpha_2 \ddot{\varepsilon}^2(t) + \dots + \alpha_n \varepsilon^{(n)2}(t)] dt = \\ &= \int_0^{\infty} \left[\sum_{i=0}^n \alpha_i \left(\frac{d^i \varepsilon(t)}{dt} \right)^2 \right] dt \rightarrow \text{min}, \end{aligned} \quad (5.58)$$

unde funcția din paranteza pătră este o funcție pozitiv definită, deoarece pentru argumente, care nu sunt simultan nule la valori pozitive și este convergentă la condiția că eroarea staționară $\varepsilon(t) = 0$, iar $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ sunt coeficienții de ponderare ai derivatelor erorii.

Criteriile integrale asigură optimizarea regimurilor dinamice ale sistemului în raport cu intrare referință $r(t)$ și perturbație $p(t)$ de tip

treaptă.

Dacă sistemul are o comportare bună în raport cu semnale $r(t)$ și $p(t)$, atunci sistemul va avea și o comportare satisfăcătoare în raport cu alte tipuri de variații ale semnalelor $r(t)$ și $p(t)$.

În practica proiectării sistemului automat prin utilizarea criteriilor integrale, calculul conduce la exprimarea directă a indicelui de performanță, care substituie operația de integrare în domeniului timpului.

Avantajul esențial al acestei proceduri apare în faza finală de minimizare a indicelui integral, care se tratează ca o problemă de optimizare parametrică, având o rezolvare numerică soluționată ca proiectarea asistată de calculator.

Exprimarea directă a criteriilor integrale presupune obținerea indicelui de performanță care depinde direct de parametrii sistemului de reglare automată.

Explicitatea indicelui de performanță integral în raport cu parametrii sistemului automat se reduce la transformări integrale echivalente din domeniului timpului în domeniul frecvențelor în baza teoremei de trecere Parseval [1, 4, 8, 11-13, 18, 21].

Se dă metoda de calcul a celui mai des utilizat criteriu integral de formă pătratică:

$$\begin{aligned}
 J_2 &= \int_0^\infty \varepsilon^2(t) dt = \int_0^\infty \varepsilon(t) \varepsilon(t) dt = \int_0^\infty \varepsilon(t) \{L^{-1}[\varepsilon(s)]\} dt = \\
 &= \int_0^\infty \varepsilon(t) \left\{ \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \varepsilon(s) e^{st} ds \right\} dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \varepsilon(s) [\varepsilon(t) e^{st} dt] ds = \\
 &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \varepsilon(s) \varepsilon(-s) ds. \tag{5.59}
 \end{aligned}$$

Dacă semnalul de referință este treaptă unitară $r(t) = 1(t)$, atunci f.d.t. a erorii în transformata Laplace este:

$$\varepsilon(s) = \frac{1}{1+H_d(s)} \frac{1}{s} = 1(s) - y(s) = \frac{1}{s} - H_0(s) \frac{1}{s} = \frac{1}{s} [1 - H_0(s)], \tag{5.60}$$

unde $H_d(s)$ este f.d.t. a sistemului deschis, iar $H_0(s)$ – f.d.t. a sistemului închis.

Se calculează expresia (5.59) cu (5.60) și se obține expresia:

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} [1 - H_0(s)][1 - H_0(-s)]r(s)r(-s)ds = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} [1 - H_0(s)][1 - H_0(-s)]\frac{1}{s}\left(-\frac{1}{s}\right)ds. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Se consideră f.d.t. $H_d(s)$ a sistemului deschis, care prezintă raportul polinoamelor:

$$H_d(s) = \frac{M(s)}{sN(s)} \quad (5.62)$$

cu un pol în origine pentru ca eroarea staționară $\varepsilon(t) = 0$ și gradul lui $M(s)$ este m , iar a lui $sN(s) = n$ și se impune condiția $m < n$.

Polinoamele $M(s)$ și $N(s)$ au parametrii cunoscuți.

Funcția de transfer a sistemului închis va fi:

$$H_0(s) = \frac{H_d(s)}{1+H_d(s)} = \frac{M(s)}{sN(s)+M(s)}. \quad (5.63)$$

Se calculează eroarea sistemului (5.60) cu (5.63) și se obține:

$$\begin{aligned} \varepsilon(s) &= \frac{1}{s}[1 - H_0(s)] = \left[1 - \frac{M(s)}{sN(s)+M(s)}\right]\frac{1}{s} = \frac{N(s)}{sN(s)+M(s)} = \\ &= \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + b_{m-2}s^{m-2} + \dots + b_1s + b_0}{a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_1s + a_0} = \frac{B(s)}{A(s)} \end{aligned} \quad (5.64)$$

cu condiția că $m = n - 1$.

Integrala (5.61) se calculează prin integrarea a unor fracții raționale în s și $-s$ în forma:

$$J_2 = \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{B(s)}{A(s)} \frac{B(-s)}{A(-s)} ds. \quad (5.65)$$

Valoarea integralei J_2 din (5.65) se calculează în formă directă

după algoritmul următor.

1. Se calculează cu ajutorul coeficienților a_i din relația (5.64) determinantul de forma:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & -a_2 & a_4 & -a_6 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & -a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_0 & a_2 & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & \end{vmatrix}. \quad (5.66)$$

2. Se calculează determinanții particulari $\Delta_k, k = 0, 1, 2, \dots, n - 1 = m$ prin înlocuirea în Δ a coloanei $k + 1$ cu coloana:

$$\begin{vmatrix} a_1 \\ a_0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix}. \quad (5.67)$$

3. Se calculează mărimile B_0, B_1, \dots, B_m după relațiile:

$$\begin{aligned} B_0 &= b_0^2, \\ B_1 &= b_1^2 - 2b_0b_2, \\ B_2 &= b_2^2 - 2b_1b_3 + 2b_0b_4, \\ &\dots\dots\dots \\ B_k &= b_k^2 - 2b_{k-1}b_{k+1} + 2b_{k-2}b_{k+2} + \cdots + 2(-1)^k b_0b_{2k}, \quad (5.68) \\ &\dots\dots\dots \\ B_m &= b_m^2. \end{aligned}$$

4. Se calculează în formă directă indicele de performanță J_2 :

$$J_2 = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} B_k \Delta_k - 2b_0b_1\Delta}{2a_0^2\Delta} = f(q_1, q_2, \dots, q_r). \quad (5.69)$$

Pentru soluționarea problemei de optimizare parametrică din expresia (5.69) prin derivare se obține un sistem de ecuații algebrice cu parametrii variabili necunoscuți q_1, q_2, \dots, q_r :

$$\frac{\partial J}{\partial q_i} = 0, \quad i = \overline{1, r} \quad (5.70)$$

și aplicând metode de minimizare se determină parametrii optimali, care minimizează integrandul J_2 din (5.69).

În același mod se rezolvă problema de optimizare pentru un criteriu de tipul (5.57) dat în forma:

$$J_6 = \int_0^\infty [\varepsilon^2(t) + \alpha \dot{\varepsilon}^2(t)] dt = J_2 + J'_2, \quad (5.71)$$

unde pentru al doilea termen J'_2 din (5.71) prin aplicarea transformatei Laplace la expresia derivatei erorii se obține:

$$L[\dot{\varepsilon}^2(t)] = s\varepsilon(s) = \frac{c_r s^r + c_{r-1} s^{r-1} + c_{r-2} s^{r-2} + \dots + c_1 s + c_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (5.72)$$

cu raportul gradelor $n - r \geq 2$.

Se calculează integrala prin suma:

$$J'_2 = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} B_k \Delta_k}{2a_0^2 \Delta}, \quad (5.73)$$

unde mărimile B_k se determină prin relațiile:

$$\begin{aligned} B_1 = c_0^2, B_2 = c_1^2, \dots, B_{k+1} = c_k^2 - 2c_{k-1}c_{k+1} + \dots + \\ + 2(-1)^k c_0 c_{2k}, \dots, B_{n+1} = c_1^2, \end{aligned} \quad (5.74)$$

iar determinanții Δ și Δ_k se obțin ca în procedura de mai sus.

Prin înlocuirea în (5.71) a lui J_2 din (5.69) și J'_2 din (5.73) se obține forma directă de exprimare a criteriului J_6 .

Dacă se va proiecta compensatorul în raport cu semnalul perturbației de tip treaptă, atunci expresia (5.63) este similară, dar cu condiția că f.d.t. $H_{0p}(s)$ a sistemului se determină în raport cu perturbația, când referința $r(t) = 0$.

Astfel, se obține:

$$y(s) = H_{0p}(s)p(s) \quad (5.75)$$

și eroarea sistemului în raport cu perturbație este:

$$\varepsilon(s) = r(s) - y(s)|_{r=0} = -y(s) = -H_{0p}(s)p(s). \quad (5.76)$$

Dacă se va calcula integrala J_2 din (5.65) prin (5.69), atunci integrandul va conține parametrii regulatorului cu f.d.t. $H_{Rp}(s)$.

La alegerea parametrilor sistemului după criteriul J_2 adesea se obține un proces oscilant nedorit, fiindcă apropierea răspunsului $y(t)$ de procesul ideal treaptă $r(t)$ rezultă o mărire a vitezei inițiale de răspuns, care duce la un suprareglaj și o micșorare a rezervei de stabilitate.

În unele cazuri funcția $f(q_1, q_2, \dots, q_r)$ din (5.69) poate să nu aibă minim și parametrii regulatorului se aleg după valoarea lui J_2 minimală în interiorul său la frontieră care este determinată conform altor condiții ca rezervă de stabilitate, precizie staționară etc.

Pentru simplificarea procedurilor de calcul al integralei J_2 s-au elaborat relații de calcul al integralei J_2 pentru sisteme de ordinul ridicat ($r = \overline{1, 10}$), iar în tabelul 5.2 sunt date relațiile de calcul J_2 pentru sisteme automate de ordinul 1, 2, 3, 4 [4, 8, 11-13, 17-19].

Exemplul 5.4. Se consideră sistemul automat deschis descris de f.d.t. cu datele numerice asupra căruia acționează semnal treaptă unitară $r(s) = 1(s) = 1/s$:

$$H_d(s) = \frac{k}{s(T_1s+1)(T_2s+1)} = \frac{2}{s(0.2s+1)(5s+1)},$$

unde k este coeficientul de transfer, T_1, T_2 - constantele de timp.

Se cere: 1. Să se determine valoarea criteriului J_2 pentru valorile parametrilor inițiali ai sistemului.

2. Să se calculeze valoarea optimală a coeficientului k_{opt} de transfer, care minimizează criteriul pătratic.

3. Să se calculeze valoarea optimală a criteriului J_2 pentru valoarea optimală a lui k_{opt} .

Tabelul 5.2. Expresii de calcul al integralei J_2

Model de ordinul n al erorii	Expresii de calcul al integralei J_2
$\varepsilon(s) = \frac{b_0}{a_1s+a_0}$	$\frac{b_0^2}{2a_0a_1}$
$\varepsilon(s) = \frac{b_1s+b_0}{a_2s^2+a_1s+a_0}$	$\frac{a_0b_1^2+a_2b_0^2}{2a_0a_1a_2}$
$\varepsilon(s) = \frac{b_2s^2+b_1s+b_0}{a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}$	$\frac{a_0a_1b_2^2+(b_1^2-2b_0b_2)a_0a_3+a_2a_3b_0^2}{2a_0a_3(a_1a_2-a_0a_3)}$
$\varepsilon(s) = \frac{b_3s^3+b_2s^2+b_1s+b_0}{a_4s^4+a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}$	$\frac{b_3^2(-a_0^2a_3+a_0a_1a_2)+(b_2^2-2b_1b_3)a_0a_1a_4}{2a_0a_4(-a_0a_3^2-a_1^2a_4+a_1a_2a_3)} \rightarrow$ $\rightarrow \frac{+(b_1^2-2b_0b_2)a_0a_3a_4+b_0^2(a_2a_3a_4-a_1a_4^2)}{2a_0a_4(-a_0a_3^2-a_1^2a_4+a_1a_2a_3)}$

Soluționare. 1.1. Se determină expresia semnalului erorii sistemului automat la comdiția $m = 2, n = 3$:

$$\varepsilon(s) = H_\varepsilon(s)1(s) = \frac{1}{1+\frac{k}{s(0.2s+1)(5s+1)}} \frac{1}{s} = \frac{s(T_1s+1)(T_2s+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1)+k} \frac{1}{s} =$$

$$= \frac{T_1T_2s^2+(T_1+T_2)s+1}{T_1T_2s^3+(T_1+T_2)s^2+s+k} = \frac{b_2s^2+b_1s+b_0}{a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0},$$

unde $b_2 = T_1T_2 = 0.2 \cdot 5 = 1 \text{ s}^2$, $b_1 = T_1 + T_2 = 0.2 + 5 = 5.2 \text{ s}$, $b_0 = 1$, $a_3 = T_1T_2 = 0.2 \cdot 5 = 1 \text{ s}^2$, $a_2 = 5.2 \text{ s}$, $a_1 = 1$, $a_0 = k = 2$.

1.2. Se calculează determinantul conform relației (5.66):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & -a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & -a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_0a_1a_2 = 5.2k = 5.2 \cdot 2 = 10.4.$$

1.3. Se calculează determinanții particulari $\Delta_k, k = m = 0, 1, 2$ prin înlocuirea în Δ a coloanei $k + 1$ cu coloana $a_1, a_2, 0$:

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} a_1 & -a_2 & 0 \\ a_0 & a_1 & 0 \\ 0 & -a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1^2 a_2 + a_0 a_2^2 = 1 \cdot 5.2 + 2 \cdot 5.2^2 = 59.28,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & 0 \\ 0 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 \end{vmatrix} = a_0^2 a_2 = 2^2 \cdot 5.2 = 20.8,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_0 & -a_2 & a_1 \\ 0 & a_1 & a_0 \\ 0 & -a_0 & 0 \end{vmatrix} = a_0^3 = 2^3 = 8.$$

1.4. Se calculează mărimile B_0, B_1, \dots, B_m după relațiile:

$$B_0 = b_0^2 = 1, B_1 = b_1^2 - 2b_0 b_2 = 5.2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 = 25.04, B_2 = b_2^2 = 1.$$

1.5. Se calculează valoarea integralei (5.69) cu coeficienții $\overline{b_0}, \overline{b_2}, \overline{B_0}, \overline{B_2}$ cu valoarea lui $k = 2$:

$$J_2 = \frac{B_0 \Delta_0 + B_1 \Delta_1 + B_2 \Delta_2 - 2b_0 b_1 \Delta}{2a_0^2 \Delta} = \frac{1 \cdot 59.28 + 25.04 \cdot 20.8 + 1 \cdot 8 - 2 \cdot 1 \cdot 5.2 \cdot 10.4}{2 \cdot 2^2 \cdot 10.4} = 5.768.$$

1.6. Se determină valoarea integralei J_2 după formula din tabelul 5.1 pentru $n = 3$ cu valoarea lui $k = 2$:

$$J_2 = \frac{a_0 a_1 b_2^2 + (b_1^2 - 2b_0 b_2) a_0 a_3 + a_2 a_3 b_0^2}{2a_0 a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3)} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 1 + (5.2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1) 2 \cdot 1 + 5.2 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 1 (1 \cdot 5.2 - 2 \cdot 1)} = 4.475.$$

2.1. Calculul integralei J_2 se obține mult mai simplu dacă se utilizează forma tabelară. Pentru sistemul de ordinul $n = 3$ din tabelului 5.1 rândul trei se prezintă expresia integralei cu datele numerice pentru k necunoscut:

$$J_2 = \frac{a_0 a_1 b_2^2 + (b_1^2 - 2b_0 b_2) a_0 a_3 + a_2 a_3 b_0^2}{2a_0 a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3)} = \frac{k + (5.2^2 - 2)k + 5.2}{2k(5.2 - k)} = \frac{26.04k + 5.2}{10.4k - 2k^2}.$$

2.2. Se determină derivata parțială a integralei în raport cu coeficientul k și se egalează cu zero:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_2}{\partial k} &= \frac{\partial J_2}{\partial k} \left(\frac{26.04k + 5.2}{10.4k - 2k^2} \right) = \frac{26.04(10.4k - 2k^2) - (26.04k + 5.2)(10.4 - 4k)}{(10.4k - 2k^2)^2} = \\ &= \frac{52.08k^2 + 20.8k - 54.08}{(10.4k - 2k^2)^2} = 0. \end{aligned}$$

Din ultima expresie se calculează valoarea optimală a lui k :

$$\begin{aligned} 26.04(10.4k - 2k^2) - (26.04k + 5.2)(10.4 - 4k) &= \\ &= k^2 + 0.3994k - 1.0384 = 0, \end{aligned}$$

$$k_{1,2} = \frac{-0.3994 \pm \sqrt{0.3994^2 + 4 \cdot 1.0384}}{2} = \frac{-0.3994 \pm 2.0768}{2}.$$

Pentru valoarea lui $k > 0$ se obține:

$$k_{\text{opt}} = \frac{-0.3994 + 2.0768}{2} = 0.8387.$$

3.1. Se calculează valoarea optimală a integralei (5.69) la valoarea lui k_{opt} :

$$J_{2\text{opt}} = \frac{26.04k + 5.2}{10.4k - 2k^2} = \frac{26.04 \cdot 0.8387 + 5.2}{10.4 \cdot 0.8387 - 2 \cdot 0.8387^2} = 3.6961.$$

În figura 5.7 se reprezintă răspunsurile indiciale ale sistemului cu datele inițiale ale parametrilor (fig. 5.7, *a*, alura 1) și cu valoarea optimală a coeficientului de transfer k_{opt} al sistemului închis (fig. 5.7, *b*, alura 2).

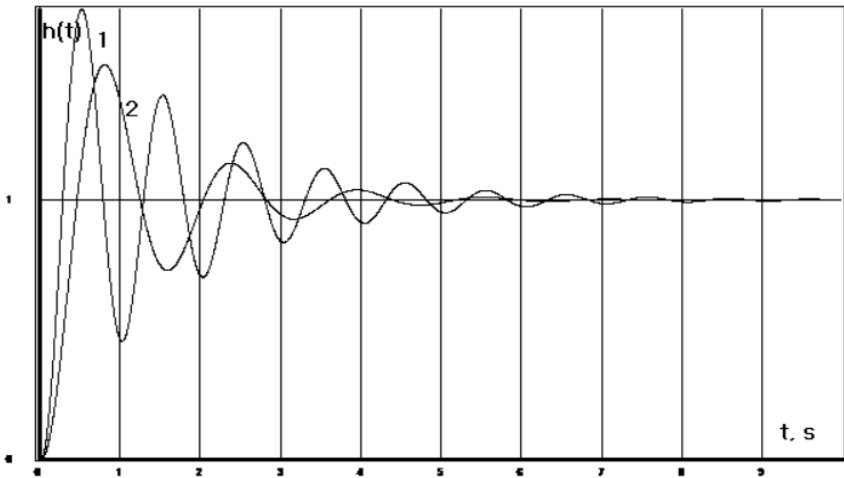


Fig. 5.7. Răspunsuri indiciale ale sistemului automat la ex. 5.4

Exemplul 5.5. Se consideră f.d.t. a sistemului deschis alcătuit din regulator cu acțiune proporțională-derivativă cu f.d.t. $H_{PD}(s)$ și partea fixată cu f.d.t. $H_{PF}(s)$:

$$H_{PD}(s) = k_p + k_d s, H_{PF}(s) = \frac{1}{s(Ts+1)},$$

unde k_p, k_d sunt parametrii de acord ai regulatorului PD, $k_p = 20 \text{ s}^{-1}$, $T = 0.1 \text{ s}$.

Se cere să se calculeze valoarea coeficientului k_d , care determină nivelul semnalului primei derivate și corespunde criteriului pătratic când la intrare se aplică semnalul impuls unitar $\delta(t) = 1$.

Soluționare. 1. Se determină f.d.t. a sistemului deschis:

$$H_d(s) = H_{PD}(s)H_{PF}(s) = (k_p + k_d s) \frac{1}{s(Ts+1)} = \frac{k_p + k_d s}{s(Ts+1)}.$$

2. Se determină f.d.t. a sistemului închis:

$$H_0(s) = \frac{H_d(s)}{1+H_d(s)} = \frac{k_p + k_d s}{Ts^2 + (1+k_d)s + k_p}.$$

3. Mărima de ieșire a sistemului ca răspuns la semnal impuls unitar este:

$$y(s) = H_0(s)\delta(s) = \frac{k_p + k_d s}{Ts^2 + s(1+k_d) + k_p} * 1 = \frac{k_p + k_d s}{Ts^2 + (1+k_d)s + k_p} = \frac{b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0},$$

unde $b_1 = k_d, b_0 = k_p, a_2 = T, a_1 = 1 + k_d, a_0 = k_p$.

4. Pentru sistemul de ordinul doi din tabelul 5.1 se dă expresia de alcul a integralei:

$$J_2 = \frac{a_0 b_1^2 + a_2 b_0^2}{2a_0 a_1 a_2} = \frac{k_p k_d^2 + T k_p^2}{2k_p(1+k_d)T} = \frac{k_d^2 + T k_p}{2T(1+k_d)}.$$

5. Se calculează derivata lui J_2 pe variabila k_d :

$$\frac{dJ_2}{dk_d} = k_d^2 + 2k_d - k_p T = 0.$$

6. Se rezolvă ecuația pătratică pe variabila k_d și la valorile date ale parametrilor sistemului se obține valoarea optimală pentru rădăcina pozitivă:

$$k_d = -1 + \sqrt{1 + k_p T} = -1 + \sqrt{1 + 20 * 0.1} = 0.73,$$

unde parametrul k_d este funcție neliniară de produsul mărimilor $k_p T$ și nu depinde de coeficientul de transfer al părții fixate. ■

5.6 Performanțele sistemului automat la acțiunea semnalelor armonice

Pentru determinarea performanțelor sistemului automat se utilizează indicii de calitate care se calculează după funcțiile frecvențiale: funcția frecvențială reală $P(\omega)$, funcția frecvențială imaginară $Q(\omega)$, funcțiile frecvențiale amplitudine $A(\omega)$ și fază $\varphi(\omega)$ și funcția amplitudine în scară logaritmică $L(\omega) = 20\lg A(\omega)$ și faza $\varphi(\omega)$.

Se prezintă indicii de calitate ai sistemului de reglare automată închis determinați după funcția amplitudine frecvență $A(\omega)$ (fig. 5.8), ce caracterizează răspunsul sistemului la toate frecvențele semnalului sinusoidal aplicat la intrarea sistemului [11, 12, 13, 17, 19].

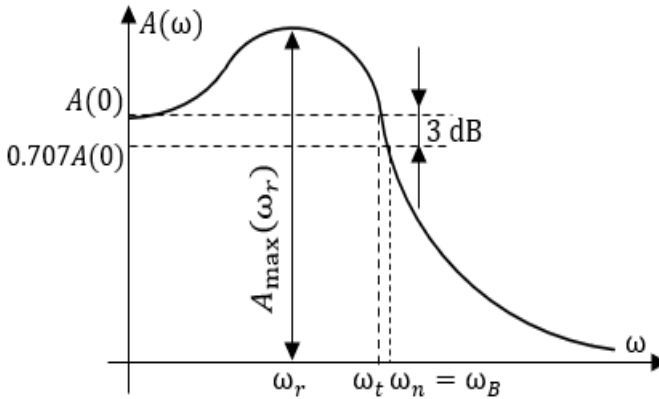


Fig. 5.8. Funcția amplitudine–frecvență $A(\omega)$

1. *Factorul de rezonanță* M se determină ca raportul amplitudinii maxime $A_{\max}(\omega_r)$ la valoarea $A(0)$ când argumentul $\omega = 0$:

$$M = \frac{A_{\max}(\omega_r)}{A(0)}. \quad (5.77)$$

Cu cât este mai mare valoarea acestui indice, cu atât sunt mai mari oscilațiile și este mai mare suprareglarea răspunsului sistemului și, ca urmare, este mai mare și timpul de reglare.

Pentru o calitate bună a sistemului automat închis indicile de rezonanță are valorile $M = 1.1 \dots 1.5$.

2. *Pulsația proprie* sau *de rezonanță* ω_r care se determină pentru valoarea maximă a amplitudinii A_{\max} .

3. *Banda de frecvență joasă* $\omega_n = \omega_B = 3\omega_r$ indică gama de frecvențe care prezintă regimul de lucru al sistemului automat.

4. *Frecvența de tăiere* sau *de frângere* ω_t la care $A(\omega_t) = 1$ (fig. 4.9, a). Cunoscând frecvența de tăiere ω_t se determină timpul de reglare după relația:

$$t_r \approx \frac{(1 \dots 2)2\pi}{\omega_t}. \quad (5.78)$$

5. După locul de transfer al sistemului automat deschis $H_d(j\omega)$ (fig. 4.9, a) se introduc pe caracteristicile de amplitudine $A(\omega)$ și fază $\varphi(\omega)$ rezerva (marginea) de stabilitate în modul $h = \Delta A = 1 - A(\omega_\pi)$, pentru care se recomandă valoarea $\Delta A \geq 0.5 \dots 0.6$ și rezerva (marginea) de fază $\Delta\varphi = \pi - |\varphi(\omega_t)|$ și se recomandă $\Delta\varphi \geq 30 \dots 60^\circ$ ($\Delta\varphi > 30^\circ$).

Rezerva de stabilitate în amplitudine în scară logaritmică se prezintă prin relația:

$$\Delta L = 20|\lg A(\omega_\pi)|$$

și valorii absolute a amplitudinii $\Delta A \geq 0.5 \dots 0.6$ îi corespunde mărimea $\Delta L \geq 6 \dots 8$ dB.

Chestionar și probleme

1. Ce proprietăți ale sistemului automat caracterizează calitatea?
2. După care caracteristică dinamică a sistemului se determină indicii de calitate?
3. Care dintre indicii de calitate ai sistemului caracterizează oscilația și care timpul de reglare?
4. Expuneți procesul indicial al sistemului la intrarea referinței și perturbației pentru suprareglajul $\sigma = 50\%$.
5. Care proprietate a sistemului caracterizează coeficienții erorii?
6. Se consideră f.d.t. a sistemului deschis $H_d(s) = k/(s(Ts + 1))$ asupra căreia acționează semnalul de intrare $r(t) = 5 + 8t$. Calculați coeficienții erorii sistemului.

7. Cum influențează distribuția rădăcinilor ecuației caracteristice din planul complex asupra stabilității și calității sistemului?

8. Cum influențiază alocarea zerourilor în planul complex al rădăcinilor asupra calității sistemului automat?

9. Ce legătură este între rădăcina ecuației caracteristice din planul complex cea mai apropiată de axa imaginară și timpul de reglare?

10. Pentru rădăcinile $p_1 = -2,4$, $p_2 = -1,6$, $p_{3,4} = -1,3 \pm j7$ ecuației caracteristice a sistemului determinați gradul de stabilitate și oscilația sistemului.

11. Pentru rădăcinile $p_1 = -2,4$, $p_2 = -1,6$, $p_{3,4} = -1,3 \pm j7$ ecuației caracteristice a sistemului determinați timpul de reglare.

12. Care parametri ai răspunsului sistemului se utilizează în criteriile integrale?

13. Cum influențează rădăcinile reale și complexe ale ecuației caracteristice asupra răspunsului indicial al sistemului automat?

14. Pentru care procese indiciale ale sistemului se utilizează criteriul liniar?

15. De ce pentru răspunsurile indiciale oscilante ale sistemului se utilizează criteriile integrale pătratice și după modul?

16. Care din două răspunsuri indiciale ale sistemului are performanțe mai ridicate cu valoare mare sau mică a integralei? De ce?

17. Explicați de ce răspunsul indicial al sistemului automat optimizat după criteriul pătratic este oscilant amortizat?

18. Se consideră sistemul automat deschis, alcătuit din regulatorul PI înseriat cu obiectul de reglare cu f.d.t.:

$$H_P(s) = \frac{k}{(T_1s+1)(T_2s+1)} = \frac{0,6}{(3s+1)(5s+1)}.$$

Utilizând criteriul pătratic tabelar se cere să se determine valorile optime ale parametrilor k_p și k_i ai regulatorului.

Calculați valoarea criteriului pătratic la valorile optime ale parametrilor regulatorului PI.

19. Se consideră sistemul deschis, alcătuit din regulatorul PD înseriat cu obiectul cu f.d.t.:

$$H_P(s) = \frac{k}{(T_1s+1)(T_2s+1)} = \frac{4}{(5s+1)(9s+1)},$$

și aplicând criteriul pătratic forma tabelară determinați valorile optime ale parametrilor k_p și k_d ai regulatorului. Calculați valoarea criteriului pătratic la valorile optime ale parametrilor regulatorului PD.

20. Pentru răspunsul indicial al sistemului automat este cunoscut timpul de reglare $t_r = 7s$. Calculați frecvența de tăiere a sistemului.

6 CORECȚIA SISTEMELOR AUTOMATE

6.1 Condiții impuse sistemului automat

Construirea unui sistem automat se realizează prin calculul energetic la alegerea și dimensionarea elementelor funcționale ale sistemului. Reieșind din acest concept, este dificil a garanta sistemului construit stabilitatea și calitatea necesară în regimuri tranzitorii și staționare (precizie în regim staționar, rapiditate, timp de reglare redus, rejectia acțiunilor perturbației etc.) la acțiunea semnalelor de referință și perturbației [8, 9, 11-13, 17, 19, 21].

În etapa actuală de realizare efectivă a corecției unui sistem automat există patru condiții de bază, care necesită a fi satisfăcute.

1. Sistemul automat trebuie să fie robust stabil (stabilizarea regimului de funcționare și garantarea marginii de amplitudine și fază) la modificarea parametrilor sub acțiunea diverșilor factori interni și externi.

2. Sistemul automat trebuie să asigure o anumită exactitate în regimul staționar, ceea ce înseamnă că în regimul staționar eroarea trebuie să fie nulă sau satisfăcător de mică. Eroarea sistemului va fi nulă dacă în structura sistemului există elemente integratoare și eroarea satisfăcător de mica dacă, în lipsa polilor în origine, coeficientul de transfer al sistemului deschis este suficient de mare.

Analizând condițiile 1) și 2) apare problema că acestea sunt contradictorii, deoarece introducerea unui integrator sau creșterea coeficientului de transfer al sistemului deschis conduc spre instabilitatea sistemului (stabilitatea trebuie să fie robustă).

Reieșind din aceste cerințe, se formulează următoarea condiție.

3. Răspunsul indicial al sistemului în raport cu mărimea rescrisă și/sau perturbație trebuie să fie suficient de amortizat ceea ce se impune prin alegerea marginii de amplitudine și de fază.

Satisfacerea condițiilor 1)-3) nu este suficientă pentru realizarea performanțelor impuse sistemului automat și se impune următoarea condiție.

4. Sistemul automat trebuie să răspundă suficient de rapid atât la

modificarea mărimii de referință, cât și la variația perturbației.

Din analiza condițiilor 3) și 4) se constată că, într-o anumită măsură, acestea sunt contradictorii.

În cazul când cerințele de stabilitate și calitate ale sistemului nu pot fi garantate în rezultatul modificării parametrilor interni ai sistemului, atunci în structura sistemului se introduc noi elemente, numite *elemente de corecție*, care au rolul de a garanta stabilitatea și performanțele sistemului [12, 17, 19, 21].

Elementele de corecție pot fi conectate în structura sistemului în trei variante:

1. Conexiune în serie.
2. Conexiune în paralel.
3. Conexiune în reacție.

Elementele de corecție după construcție se impune cerința să fie simple la realizare, care conduc la fiabilitatea ridicată a sistemului.

Elementele de corecție se realizează pe elemente pasive (fără sursă de energie) sau active (cu sursă de energie).

Modelul matematic al elementului de corecție se cere să fie nu mai mare de ordinul doi.

Modelul matematic al elementului de corecție se descrie cu elemente dinamice tipice sau combinație din elemente tipice.

6.2 Conexiune în serie a elementului de corecție

Se consideră structura sistemului automat (fig. 6.1), alcătuită din trei elemente cu f.d.t. $H_1(s)$, $H_2(s)$, $H_3(s)$ în conexiune serie.

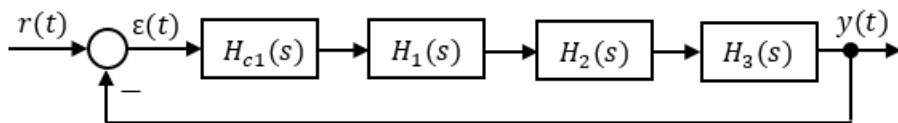


Fig. 6.1. Structura sistemului automat cu element de corecție în serie

Este necesar a ridica valoarea coeficientului de transfer al sistemului deschis, care conduce la ridicarea preciziei sistemului, dar are tendințe de destabilizare a sistemului reducând rezerva de stabilitate.

Pentru a ridica valoarea acestui coeficient se recomandă a utiliza elementul de corecție cu f.d.t. $H_{c1}(s)$ în conexiune serie și cel mai potrivit loc de conectare ar fi în canalul erorii sistemului (fig. 6.1), realizat practic ca un amplificator.

Se identifică ce proprietăți ale sistemului trebuie modificate pentru a determina modelul matematic al elementului de corecție cu f.d.t. $H_{c1}(s)$.

Funcția de transfer echivalentă a sistemului deschis cu elementul de corecție înseriat se determină ca și conexiune serie:

$$H_d(s) = H_{c1}(s)H_1(s)H_2(s)H_3(s) = \frac{B_d(s)}{A_d(s)}. \quad (6.1)$$

În calitate de elemente de corecție pot fi construite ca și conexiune paralelă din elementele tipice proporțional-integrator și proporțional-integrator-derivator date de f.d.t. de forma:

$$H_{c1}(s) = k_p + \frac{1}{T_i s} = k_p + \frac{k_i}{s} = \frac{k_p T_i s + 1}{T_i s} = \frac{k_p s + k_i}{s}, \quad (6.2)$$

unde $k_i = 1/T_i$,

$$\begin{aligned} H_{c1}(s) &= k_p + \frac{1}{T_i s} + T_d s = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s = \\ &= \frac{T_d T_i s^2 + k_p T_i s + 1}{T_i s} = \frac{k_d s^2 + k_p s + k_i}{s}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Aceste două tipuri de elemente de corecție (6.2), (6.3) introduc derivata de ordinul unu (un zero și compensarea unui pol) și derivata de ordinul doi (două zerouri și compensarea a doi poli) de la semnalul erorii și integrarea erorii, care introduc astatism și defazaj pozitiv (derivata) și negativ (integrarea) și, astfel, modificând proprietățile sistemului, care conduc la stabilizarea sistemului și ridicând performanțele sistemului în regimul tranzitoriu și staționar.

Avantajul acestei conexiuni este simplitatea în realizarea practică a construcției elementului funcțional și a modelului matematic.

Alegerea valorii necesare a coeficientului de transfer se efectuează în funcție de valoarea critică a acestuia pentru a garanta precizia regimului staționar și rezerva de stabilitate a sistemului automat închis.

6.3 Conexiunea în paralel a elementului de corecție

Se consideră structura unui sistem automat (fig. 6.2) cu elementele cu f.d.t. $H_1(s)$, $H_2(s)$, $H_3(s)$ înseriate. Analizând structura sistemului, se decide la care element se va utiliza elementul de corecție cu f.d.t. $H_{c2}(s)$. În cazul dat, se prelucrează semnalul erorii cu elementul de corecție în conexiune în paralel la elementul cu f.d.t. $H_1(s)$ din canalul direct.

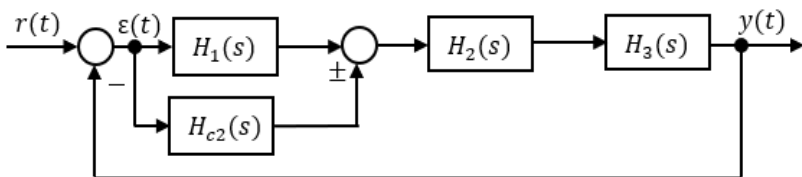


Fig. 6.2 Structura sistemului automat cu element de corecție în paralel

Funcția de transfer echivalentă a sistemului deschis se prezintă ca conexiune serie (elementele $H_1(s)$ și $H_{c2}(s)$ sunt conectate în paralel) a elementelor canalului direct:

$$\begin{aligned} H_d(s) &= (H_1(s) + H_{c2}(s))H_2(s)H_3(s) = \\ &= H_e(s)H_2(s)H_3(s) = \frac{B_d(s)}{A_d(s)}, \end{aligned} \quad (6.4)$$

unde $H_e(s) = H_1(s) + H_{c2}(s)$.

Elementul de corecție poate fi realizat ca element proporțional, derivator și element integrator sau combinația acestora.

Avantajul acestei conexiuni este simplitatea în realizare și introducerea defazajului pozitiv cu elemente derivatoare, ceea ce accelerează procesul și ridică gradul de stabilitate al sistemului, dar are dezavantajul – introduce defazaj negativ (elemental integrator), care

reduce gradul de stabilitate. Astfel, poate fi modificat coeficientul de transfer din canalul direct și introduce defazaj pozitiv-negativ, care influențează asupra gradului de stabilitate al sistemului și ridică performanțele regimului tranzitoriu și staționar al sistemului.

Exemplul 6.1. Se dă structura sistemului (fig. 6.2) alcătuită din trei elemente cu f.d.t.:

$$H_1(s) = k_1, H_2(s) = \frac{k_2}{T_2s+1}, H_3(s) = \frac{k_3}{T_3s+1}$$

și elementul de corecție ca element integrator cu f.d.t.:

$$H_{c2}(s) = \frac{1}{T_i s} = \frac{k_i}{s}.$$

Se cere să se aplice elementul de corecție cu f.d.t. $H_{c2}(s)$ în conexiune paralelă la elementul cu f.d.t. $H_1(s)$ pentru modificarea proprietăților canalului direct.

Soluționare. În structura sistemului se conectează elementul de corecție și se calculează funcția de transfer echivalentă a conexiunii în paralel, obținând:

$$\begin{aligned} H_e(s) &= H_1(s) + H_{c2}(s) = k_1 + \frac{1}{T_i s} = \frac{k_1 T_i s + 1}{T_i s} = \\ &= (k_1 T_i s + 1) \frac{1}{T_i s} = (T_d s + 1) \frac{1}{T_i s}, \end{aligned}$$

unde $T_d = k_1 T_i$ este constanta de timp de derivare.

Elementul echivalent obținut reprezintă conexiunea serie a elementului derivator ideal cu forțare cu coeficientul $k = 1$ și a elementului integrator. Această conexiune are o importanță deosebită în implementarea sistemelor automate, deoarece permite realizarea în practică a elementului derivator ideal cu forțare, care introduce un zero în structura sistemului, compensând un pol (inerția) și, astfel, ridicând gradul de stabilitate și reducând timpul de reglare ale sistemului automat. ■

Exemplul 6.2. Se dă structura sistemului (fig. 6.2) alcătuită din trei elemente cu f.d.t.:

$$H_1(s) = k_1, H_2(s) = \frac{k_2}{T_2s+1}, H_3(s) = \frac{k_3}{T_3s+1}$$

și elementul de corecție, alcătuit din elementul integrator și elementul derivator ideal în conexiune în paralel, cu f.d.t.:

$$H_c(s) = \frac{1}{T_i s} + T_d s.$$

Se cere să se aplice elementul de corecție cu f.d.t. $H_c(s)$ în conexiune paralelă la elementul cu f.d.t. $H_1(s)$ pentru modificarea proprietăților canalului direct al sistemului.

Soluționare. În structura sistemului se introduce elementul de corecție și se calculează funcția de transfer echivalentă a sistemului deschis:

$$\begin{aligned} H_1'(s) &= H_1(s) + H_c(s) = k_1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s = k_1 + \frac{k_i}{s} + k_d s = \\ &= \frac{T_d T_i s^2 + k_1 T_i s + 1}{T_i s} = (T_d T_i s^2 + k_1 T_i s + 1) \frac{1}{T_i s}. \end{aligned}$$

În acest caz, elementul ideal cu f.d.t. $H_1(s)$, la aplicarea corecției în paralel, se transformă în element derivator ideal de ordinul doi înseriat cu elementul integrator, care introduce două zerouri pentru compensarea a doi poli și modifică proprietățile regimului tranzitoriu și staționar ale sistemului, ridicând gradul de stabilitate, reducând timpul de reglare și ridicând precizia sistemului. ■

Exemplul 6.3. Se dă structura sistemului (fig. 6.2) alcătuită din trei elemente cu inerție cu f.d.t.:

$$H_1(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1}, H_2(s) = \frac{k_2}{T_2 s + 1}, H_3(s) = \frac{k_3}{T_3 s + 1}$$

și elementul de corecție cu f.d.t.:

$$H_{c2}(s) = k_c.$$

Se cere să se aplice elementul de corecție cu f.d.t. $H_{c2}(s)$ în conexiune paralelă la elementul cu f.d.t. $H_1(s)$ pentru modificarea proprietăților canalului direct al sistemului automat.

Soluționare. Se calculează funcția de transfer echivalentă a conexiunii în paralel și se obține:

$$H_e(s) = H_1(s) + H_{c2}(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1} + k_c = \frac{T_1 k_c s + k_c + k_1}{T_1 s + 1} = \frac{b_0 s + b_1}{a_0 s + a_1} = \frac{B(s)}{A(s)},$$

unde $b_0 = T_1 k_c / (k_c + k_1)$, $b_1 = 1$, $a_0 = T_1$, $a_1 = 1$.

În cazul dat, elementul cu inerție cu f.d.t. $H_1(s)$, la aplicarea corecției în paralel cu element ideal, s-a transformat în element derivator de ordinul unu cu forțare și păstrând inerția elementului de ordinul unu (element cu anticipare-întârziere la condiția $b_1 = a_1 = 1$ și $b_0 > a_0$), care introduce un zero și compensează polul elementului cu inerție, astfel, modificând proprietățile regimului tranzitoriu și staționar ale sistemului automat. ■

6.4 Conexiunea în reacție a elementului de corecție

Se consideră structura sistemului automat (fig. 6.3) cu elementele cu f.d.t. $H_1(s)$, $H_2(s)$, $H_3(s)$ în canalul direct.

În acest caz, elementul de corecție cu f.d.t. $H_{c3}(s)$ se conectează în canalul de reacție negativă, mai rar pozitivă, la elementul din canalul direct cu f.d.t. $H_2(s)$ pentru ai modifica parametrii interni.

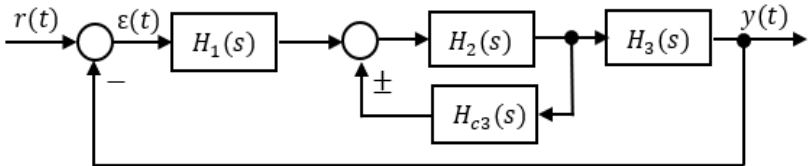


Fig. 6.3. Structura sistemului automat cu element de corecție în reacție

Funcția de transfer echivalentă a acestei conexiuni cu reacție se determină de relația:

$$H_e(s) = \frac{H_2(s)}{1 \mp H_2(s)H_{c3}(s)}. \quad (6.5)$$

Expresia (6.5) în domeniul pulsație la îndeplinirea inegalității:

$$|H_2(j\omega)H_{c3}(j\omega)| \gg 1 \quad (6.6)$$

are forma:

$$H_e(j\omega) = \frac{H_2(j\omega)}{1 \mp H_2(j\omega)H_{c3}(j\omega)} \approx \frac{H_2(j\omega)}{H_2(j\omega)H_{c3}(j\omega)} \approx \frac{1}{H_{c3}(j\omega)}. \quad (6.7)$$

Din (6.7) rezultă avantajul acestei conexiuni: proprietățile acestui circuit se determină numai de proprietățile elementului de corecție din reacție, iar proprietățile elementului cu f.d.t. $H_2(s)$ sunt compensate și nu influențează proprietățile canalului direct ale sistemului automat.

În conexiunea în reacție se utilizează următoarele tipuri de reacții după proprietățile lor :

Reacția *rigidă* care acționează atât în regim tranzitoriu, cât și în regim staționar, realizată cu elemente tipice ideal, oscilant amortizat, inerție de ordinul unu și doi.

Reacția *elastică*, care acționează numai în regim tranzitoriu, realizată cu element derivator ideal sau real.

Reacția *integratoare*, care acționează atât în regim tranzitoriu, cât și în regim staționar, realizată cu element integrator.

Reacția *combinată*, realizată prin combinările primelor trei tipuri de reacții.

Se expun cele mai caracteristice tipuri de reacții *rigide* utilizate în practică.

Exemplul 6.4. Fie un element ideal cu f.d.t.:

$$H(s) = k.$$

Se cere să se aplice reacția rigidă negativă cu f.d.t.:

$$H_r(s) = k_r$$

și să se determine f.d.t. echivalentă, evidențiind noile proprietăți ale structurii obținute.

Soluționare. Se calculează funcția de transfer echivalentă a conexiunii:

$$H_e(s) = \frac{H(s)}{1 \mp H(s)H_r(s)} = \frac{k}{1 \mp k k_r} = \frac{k/k k_r}{\frac{1}{k k_r} \mp 1} \Big|_{k k_r \gg 1} = \mp \frac{1}{k_r} = \mp k_e,$$

unde $k_e = 1/k_r$ este coeficientul echivalent de transfer și, la îndeplinirea condiției $k k_r \gg 1$, își schimbă semnul. Elementul echivalent păstrează proprietatea elementului ideal, dar proprietățile acestei conexiuni se determină numai de proprietățile elementului din reacție, iar proprietățile canalului direct se compensează. ■

Exemplul 6.5. Se dă un element ideal cu f.d.t.:

$$H(s) = k.$$

Se cere să se aplice reacția rigidă negativă cu inerție cu f.d.t.:

$$H_r(s) = \frac{k_r}{T_r s + 1}$$

și să se determine f.d.t. echivalentă și noile proprietăți ale structurii obținute.

Soluționare. Se determină funcția de transfer echivalentă a conexiunii:

$$H_e(s) = \frac{H(s)}{1+H(s)H_r(s)} = \frac{k}{1+k\frac{k_r}{T_r s+1}} = \frac{k(T_r s+1)}{T_r s+1+kk_r} = \frac{k_e(T_r s+1)}{T_e s+1},$$

unde $k_e = k/(1 + kk_r)$ este coeficientul echivalent de transfer, $T_e = k/(1 + kk_r)$ – constanta echivalentă de timp, care se reduc de $1 + kk_r$ ori. Rezultatul arată că utilizarea reacției rigide cu inerție modifică structura elementului ideal și se obține un element cu anticipare-întârziere, care în dependență de raportul constantelor de timp este derivator real sau introduce inerție. ■

Exemplul 6.6. Fie elementul cu inerție de ordinul unu descris de f.d.t.:

$$H(s) = \frac{k}{Ts+1}.$$

Se cere să se aplice reacția rigidă negativă cu f.d.t.:

$$H_r(s) = k_r$$

și să se determine f.d.t. echivalentă și noile proprietăți ale structurii obținute.

Soluționare. Se determină funcția de transfer echivalentă a conexiunii:

$$H_e(s) = \frac{H(s)}{1+H(s)H_r(s)} = \frac{k}{Ts+1+kk_r} = \frac{k_e}{T_e s+1},$$

unde $k_e = k/(1 + kk_r)$ este coeficientul echivalent de transfer, $T_e = T/(1 + kk_r)$ – constanta echivalentă de timp. Rezultatul indică faptul că utilizarea reacției rigide nu modifică structura elementului cu inerție, dar reduce valoarea coeficientului de transfer k și valoarea constantei de timp T de $1 + kk_r$ ori ale elementului inițial. Astfel, utilizarea reacției rigide are avantaj în practică, având posibilitatea de a reduce inerția mare a elementului și, astfel, a ridica performanțele sistemului. ■

Exemplul 6.7. Se consideră elementul oscilant amortizator cu f.d.t.:

$$H(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1}.$$

Se cere să se aplice reacția rigidă negativă cu f.d.t.:

$$H_r(s) = k_r$$

și să se determine f.d.t. echivalentă și noile proprietăți ale structurii obținute.

Soluționare. Se determină funcția de transfer echivalentă a conexiunii:

$$H_e(s) = \frac{H(s)}{1+H(s)H_r(s)} = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1 + kk_r} = \frac{k_e}{T_e^2 s^2 + 2\xi_e T_e s + 1},$$

unde $k_e = k/(1 + kk_r)$ este coeficientul echivalent de transfer, $T_e = T/\sqrt{1 + kk_r}$ – constanta echivalentă de timp și $\xi_e = \xi/\sqrt{1 + kk_r}$ - coeficientul de amortizare.

Se constată că reacția rigidă nu modifică structura elementului din canalul direct, în schimb reduce valoarea lui k de $1 + kk_r$ ori, iar a parametrilor T și ξ de $\sqrt{1 + kk_r}$ ori, care ridică performanțele acestei structuri echivalente în comparație cu cea inițială. ■

Exemplul 6.8. Fie un element integrator descris cu f.d.t.:

$$H(s) = \frac{1}{T_i s} = \frac{k_i}{s}.$$

Se cere să se aplice reacția rigidă negativă cu f.d.t.:

$$H_r(s) = k_r$$

și să se determine f.d.t. echivalentă și noile proprietăți ale structurii obținute.

Soluționare. Se determină funcția de transfer echivalentă a conexiunii:

$$H_e(s) = \frac{H(s)}{1+H(s)H_r(s)} = \frac{1}{T_i s + k_r} = \frac{k_e}{T_e s + 1},$$

unde $k_e = 1/k_r$ este coeficientul de transfer echivalent, $T_e = T_i/k_r$ – constanta de timp.

Reacția rigidă negativă transformă elementul integrator în element cu inerție de ordinul unu cu parametrii $k_e = 1/k_r$ și $T_e = T_i/k_r$. ■

Se dau exemple de aplicare a reacției *integratoare*, care este larg utilizată în practică.

Exemplul 6.9. Fie elementul ideal descris de f.d.t.:

$$H(s) = k.$$

Se cere să se aplice reacția negativă integratoare cu f.d.t.:

$$H_r(s) = \frac{1}{T_i s} = \frac{k_i}{s}.$$

și să se determine f.d.t. echivalentă și noile proprietăți ale structurii obținute.

Soluționare. Se determină funcția de transfer echivalentă a conexiunii:

$$H_e(s) = \frac{H(s)}{1+H(s)H_r(s)} = \frac{k}{1+k\frac{1}{T_i s}} = \frac{T_d s}{T_f s + 1} = T_d s \frac{1}{T_f s + 1},$$

unde $T_d = T_i$ este constanta de timp de derivare, $T_f = T_i/k$ – constanta de filtrare.

Rezultatul are importanță practică, fiindcă reacția integratoare transformă elementul ideal în element derivator real, prezentat ca conexiune serie a elementului derivator ideal cu elementul cu inerție de ordinul unu cu coeficientul de transfer egal cu unu, care reprezintă un filtru trece-jos de ordinul unu în domeniul pulsație. ■

Exemplul 6.10. Se dă un element cu inerție de ordinul unu cu f.d.t.:

$$H(s) = \frac{k}{Ts+1}.$$

Se cere să se aplice reacția negativă integratoare cu f.d.t.:

$$H_r(s) = \frac{1}{T_i s} = \frac{k_i}{s}.$$

și să se determine f.d.t. echivalentă și noile proprietăți ale structurii obținute.

Soluționare. Se determină funcția de transfer echivalentă a conexiunii:

$$H_e(s) = \frac{H(s)}{1+H(s)H_r(s)} = \frac{kT_i s}{T_i s(Ts+1)+k} = \frac{T_d s}{T_1 s^2+T_2 s+1} = T_d s \frac{1}{T_1 s^2+T_2 s+1},$$

unde $T_d = T_i$ este constanta de timp de derivare, $T_1 = T_i T/k$, $T_2 = T_i/k$ – constante de timp de filtrare.

Rezultatul are importanță practică, deoarece reacția integratoare transformă elementul cu inerție de ordinul unu în element derivator real de ordinul doi reprezentat ca o conexiune serie a elementului derivator ideal cu elementul cu inerție de ordinul doi, care reprezintă un filtru trece-jos de ordinul doi în domeniul pulsație. ■

6.5 Concluzii

În unele cazuri este necesar a alege realizarea tipului de conexiune a elementului de corecție.

În baza celor expuse se prezintă legăturile funcționale dintre funcțiile de transfer ale tipurilor de conexiuni în serie, în paralel și în reacție a elementului de corecție în structura sistemului. Se calculează funcțiile de transfer pentru fiecare canal deschis al structurilor cu conexiune în serie, în paralel, în reacție și egalându-le se obține:

$$\begin{aligned} H_d(s)H_{c1}(s) &= H_d(s)(1 + H_{c2}(s)/H_1(s)) = \\ &= H_d(s)/(1 + H_{c3}(s)H_2(s)), \end{aligned}$$

unde $H_d(s) = H_1(s)H_2(s)H_3(s)$ este funcția de transfer a conexiunii serie a elementelor din canalul direct, iar $H_{c1}(s)$, $H_{c2}(s)$, $H_{c3}(s)$ – f.d.t. ale elementelor de corecție în serie, în paralel și în reacție respectiv.

Din egalitatea obținută se exprimă f.d.t. a elementului de corecție în conexiune serie, paralel și reacție prin f.d.t. a conexiunii respective, care va fi realizat:

$$H_{c1}(s) = 1 + H_{c2}(s)/H_1(s) = 1/(1 + H_{c3}(s)H_1(s)),$$

$$\begin{aligned} H_{c2}(s) &= (1 - H_1(s))/(H_{c1}(s)H_1(s)) = \\ &= -H_{c3}(s)H_1(s)H_2(s)(1 + H_{c3}(s)H_1(s)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{c3}(s) &= (1 - H_{c1}(s))/(H_{c1}(s)H_1(s)) = \\ &= -H_{c2}(s)/(H_2(s)(H_1(s) + H_{c2}(s))). \end{aligned}$$

Dacă f.d.t. $H_{c2}(s)$ va avea semnul minus, atunci elementul de corecție în paralel se conectează ca reacție pozitivă și, dacă f.d.t. $H_{c3}(s)$ are semnul minus, atunci semnalul de ieșire al elementului de corecție în paralel se scade din semnalul ieșirii f.d.t. $H_1(s)$.

Chestionar și probleme

1. Cu ce scop se utilizează elementele de corecție în structura sistemului?
2. Ce reprezintă elementele de corecție și cum se conectează în structura sistemului?
3. Cum se realizează modelele elementelor de corecție?
4. Ce tipuri de reacții se utilizează și cu ce elemente tipice se realizează?
5. Care sunt avantajele și dezavantajele reacției rigide, elastice și integrate?
6. Se consideră elementul oscilant amortizator. Aplicați reacția elastică și calculați f.d.t. echivalentă și explicați avantajele și dezavantajele acestei conexiuni.
7. Se consideră elementul cu inerție de ordinul doi. Aplicați reacția integratoare și calculați f.d.t. echivalentă și explicați avantajele și dezavantajele acestei conexiuni.
8. Pentru elementul cu inerție cu parametrii $k = 10$, $T = 7$ s alegeți și aplicați elementul de corecție astfel, încât parametrii elementului să se reducă de 2 ori.
9. Pentru elementul cu inerție de ordinul doi aplicați reacția rigidă și explicați proprietățile elementului echivalent în comparație cu elementul inițial.
10. Pentru elementul cu inerție de ordinul doi aplicați reacția integratoare și explicați proprietățile elementului echivalent în comparație cu elementul inițial.

7 SISTEME DE REGLARE AUTOMATĂ CU PROPRIETĂȚI SPECIFICE

Sunt expuse sistemele automate cu timp mort, sistemele de conducere combinată și sistemele multivariabile [1-4, 8-14, 17-19, 21, 23].

7.1 Sisteme automate cu timp mort

Se consideră structura sistemului (fig. 7.1) asupra căruia acționează intrările de tip treaptă referința $r(t)$ și perturbația $p(t)$. Pe canalul direct sunt conectate în serie regulatorul cu f.d.t. $H_R(s)$ și partea fixată cu timp mort cu f.d.t. $H_{PF}(s)$, iar în canalul de reacție negativă este conectat traductorul cu f.d.t. $H_{tr}(s)$.

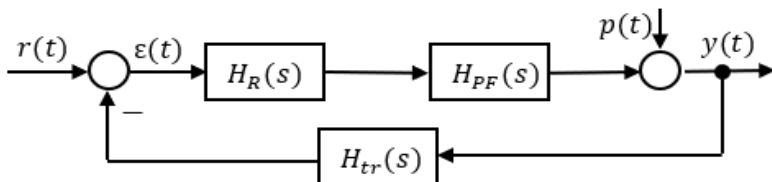


Fig. 7.1. Structura sistemului automat

În sistemul automat timpul mort există în obiecte (proces) sau/și în canalele de măsură – în traductoare [1, 4, 8, 11-13, 17-19, 21].

Se determină f.d.t. a sistemului închis:

$$H_0(s) = \frac{H_R(s)H_P(s)}{1+H_R(s)H_P(s)H_{tr}(s)} = \frac{H_R(s)H(s)e^{-\tau s}}{1+H_R(s)H_{tr}(s)H(s)e^{-\tau s}} = \frac{B(s)}{A(s)}. \quad (7.1)$$

Rezultă ecuația caracteristică a sistemului închis:

$$A(s) = 1 + H_R(s)H_{tr}(s)H(s)e^{-\tau s} = 0. \quad (7.2)$$

Din analiza f.d.t. (7.1) și a ecuației caracteristice (7.2) se constată că în componența acestora există componenta timpului mort.

Prezența timpului mort în sistem influențează puternic negativ

stabilitatea, destabilizând-l și reducând performanțele sistemului.

Astfel, pentru analiza stabilității după ecuația caracteristică (7.2) nu pot fi utilizate criteriile algebrice de stabilitate Routh sau Hurwitz.

În aceste cazuri, analiza stabilității se efectuează aplicând criteriile frecvențiale Mihailov sau Nyquist.

Deoarece termenul cu timp mort $e^{-\tau s}$ nu este un polinom rațional, dar este o funcție transcendentă cu care este dificil de operat și, având o infinitate de rădăcini, apare problema realizabilității fizice a acestei f.d.t. printr-un sistem finit dimensional, care se reduce la o aproximare printr-o funcție rațională strict proprie sau proprie.

Pentru aproximarea funcției transcendente $e^{-\tau s}$ ca realizări finite se aplică următoarele metode [1, 8, 11, 12, 17, 19, 21]:

1. Prezentarea în serie cu un număr limitat de termeni de forma:

$$e^{-\tau s} = 1 - \tau s + \frac{\tau^2 s^2}{2!} - \frac{\tau^3 s^3}{3!} + \frac{\tau^4 s^4}{4!} - \dots + \frac{\tau^{2n} s^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (7.3)$$

2. Prezentarea prin aproximațiile uzuale Pade de ordinul (2+0), (2+1), (1+1) și (2+2) în forma:

$$\begin{aligned} e^{-\tau s} &\approx \frac{1}{1 + \tau s + \frac{\tau^2 s^2}{2}}, & e^{-\tau s} &\approx \frac{1 - \frac{\tau s}{3}}{1 + \frac{2\tau s}{3} + \frac{\tau^2 s^2}{6}}, \\ e^{-\tau s} &\approx \frac{1 - \frac{\tau s}{2}}{1 + \frac{\tau s}{2}}, & e^{-\tau s} &\approx \frac{1 - \frac{\tau s}{2} + \frac{\tau^2 s^2}{12}}{1 + \frac{\tau s}{2} + \frac{\tau^2 s^2}{12}}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

3. Aproximarea prin elemente identice de ordinul n în forma:

$$e^{-\tau s} \approx \frac{1}{(1 + \tau s)^n}. \quad (7.5)$$

Astfel, descrierea sistemului automat se obține în funcții de transfer raționale și analiza stabilității și performanțelor sistemului se efectuează prin metodele expuse pentru sisteme liniare.

7.2 Sisteme automate cu conducere combinată

Sistemele de reglare automată, în care se utilizează principiile de

conducere în funcție de abatere și perturbație, se numesc *sisteme automate cu conducere combinată*. În funcție de acțiunea externă referință ori perturbație, pentru care este organizat circuitul de compensare, sistemele cu conducere combinată se împart în două clase [4, 8, 11-13, 17-19]:

1. Sisteme de reglare combinată.
2. Sisteme combinate de urmărire.

Sistemul automat este invariant în raport cu oricare semnal extern, dacă după stabilirea regimului staționar mărimea reglată și eroarea sistemului nu depind de aceste semnale.

Reglarea combinată se efectuează pentru a reduce influența unei perturbații, cea mai puternică, aplicată asupra obiectului condus. Schema structurală a unui astfel de sistem este reprezentată în figura 7.2, unde $H_A(s)$ este f.d.t. a amplificatorului (A), $H_{EE}(s)$ – f.d.t. a elementului de execuție (EE), $H(s)$ – f.d.t. a obiectului de reglare, $H_C(s)$ – f.d.t. a compensatorului perturbației (C) și $H_p(s)$ – f.d.t. a perturbației.

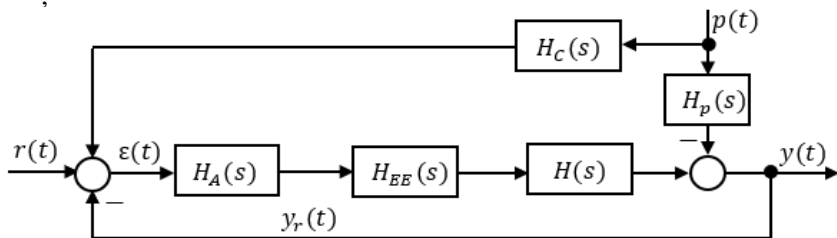


Fig. 7.2. Schema structurală a sistemului cu conducere combinată

Circuitul închis, alcătuit din elementele cu f.d.t. $H_A(s)$, $H_{EE}(s)$ și $H(s)$, realizează reglarea în funcție de abatere care asigură reglarea mărimii conduse $y(s)$ conform mărimii prescrise $r(s)$ și reduce influența perturbațiilor secundare interne și externe. Circuitul suplimentar, în funcție de perturbația principală $p(s)$, alcătuit din compensatorul C cu f.d.t. $H_C(s)$, are ca scop compensarea acțiunii $p(t)$ care acționează asupra mărimii conduse și care se mai numește circuit de compensare. Circuitul de compensare se cuplează, de obicei, în canalul direct ori la intrarea elementului de corecție în serie (dacă acesta

există).

Conform structurii sistemului din figura 7.2, se determină funcția de transfer a transferului perturbație-ieșire $p(t) \rightarrow y(t)$:

$$H_{yp}(s) = \frac{H_C(s)H_A(s)H_{EE}(s)H(s) - H_p(s)}{1 + H_A(s)H_{EE}(s)H(s)}. \quad (7.6)$$

Dacă în (7.6) se dorește compensarea acțiunii perturbației $p(t)$ și obținerea invarianței mărimii de ieșire $y(t)$, atunci se impune condiția ca funcția de transfer perturbație-ieșire să fie egală cu zero și după unele transformări se obține expresia din care se calculează f.d.t a compensatorului:

$$\frac{H_C(s)H_A(s)H_{EE}(s)H(s) - H_p(s)}{1 + H_A(s)H_{EE}(s)H(s)} = 0,$$

$$H_C(s)H_A(s)H_{EE}(s)H(s) - H_p(s) = 0,$$

$$H_C(s) = \frac{H_p(s)}{H_A(s)H_{EE}(s)H(s)} = \frac{B_p(s)}{A_p(s)} = q_0 + q_1s + q_2s^2 + \dots, \quad (7.7)$$

care reprezintă un element dinamic derivator ideal.

Astfel, relația (7.7) este condiția invarianței totale a mărimii de ieșire $y(t)$ a sistemului în raport cu perturbația $p(t)$.

Însă, valorile inițiale ale perturbației și derivatele ei formează componenta de tranziție a mărimii conduse $y(t)$. Dacă valorile inițiale ale perturbației și derivatele ei nu influențează mărimea condusă, atunci invarianța este absolută, pentru care sunt necesare condiții suplimentare.

În sistemul examinat mai sus invarianța absolută va avea loc numai în cazul, când elementele compensatorului C, amplificatorului A și elementul de execuție EE nu vor avea inerție și atunci se va realiza egalitatea (7.7). Din cauza inerției elementelor principale ale sistemului, satisfacerea condițiilor invarianței totale implică mari dificultăți.

Exemplul 7.1. Se consideră elementele sistemului (fig. 7.2) cu proprietățile:

$$H(s) = \frac{k}{T_1^2s^2 + T_2s + 1}, H_A(s) = k_A, H_{EE}(s) = \frac{k_E}{Ts + 1}, H_p(s) = k_p.$$

Se cere să se determine funcția de transfer a elementului compensator.

Soluționare. Condițiile de invarianță se determină după relația (7.6):

$$\begin{aligned}
 H_C(s) &= \frac{H_p(s)}{H_A(s)H_{EE}(s)H(s)} = \frac{k_p}{k_A k_E k} (T_1^2 s^2 + T_2 s + 1)(Ts + 1) = \\
 &= \frac{k_p}{k_A k_E k} (TT_1^2 s^3 + (T_1^2 + TT_2)s^2 + (T + T_2)s + 1) = \\
 &= q_0 + q_1 s + q_2 s^2 + q_3 s^3,
 \end{aligned}$$

unde $q_0 = \frac{k_p}{k_A k_E k}$, $q_1 = \frac{k_p(T+T_2)}{k_A k_E k}$, $q_2 = \frac{k_p(T_1^2 + TT_2)}{k_A k_E k}$, $q_3 = \frac{k_p TT_1^2}{k_A k_E k}$.

Este necesar a realiza elemental de compensare ca un element derivator de ordinul trei. ■

În cazul dat, pentru a realiza invarianța totală, elementul de compensație trebuie să realizeze derivatele de ordinul unu, doi și trei ale semnalului perturbației. În aceste cazuri, realizarea fizică a elementelor derivatoare este dificilă și practic irealizabilă. Astfel, se constată că se obține o invarianță cu o precizie până la o mărime mică δ .

Chiar dacă nu este posibilă realizarea invarianței totale, cu atât mai mult a celei absolute, sistemele combinate au calități importante.

Scopul principal în *sistemul de urmărire* (fig. 7.3) îl constituie reproducerea cât mai precisă la ieșire a evoluției semnalului de referință.

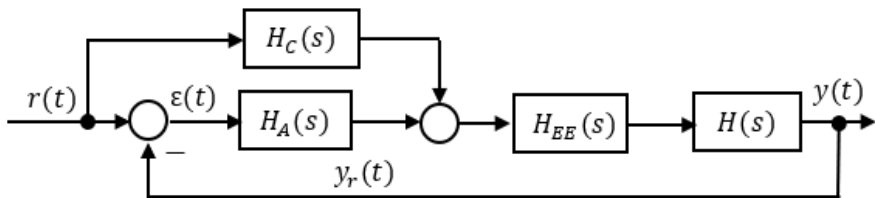


Fig. 7.3. Structura sistemului de reproducere a semnalului de referință

De aceea, circuitul suplimentar se realizează în funcție de acest semnal. În sistemul combinat de urmărire (sistem invariant la semnalul de intrare) reproducerea semnalului prescris se realizează în temei pe baza circuitului de accelerare $H_C(s)$, iar circuitul închis joacă un rol secundar, care are rolul principal în reducerea influenței perturbațiilor

interne și externe nemăsurabile. Circuitul de accelerare se cuplează în sistemul închis în același mod ca și circuitul de compensare a perturbației.

Conform schemei structurale a sistemului (fig. 7.3), funcția de transfer a sistemului în buclă închisă este:

$$H_0(s) = \frac{H_A(s)H_{EE}(s)H(s)+H_C(s)H_{EE}(s)H(s)}{1+ H_A(s)H_{EE}(s)H(s)}. \quad (7.8)$$

Pentru reproducerea cu exactitate a referinței $r(t)$ funcția de transfer în buclă închisă trebuie să fie egală cu unu [8, 12, 18]:

$$H_0(s) = \frac{H_A(s)H_{EE}(s)H(s)+H_C(s)H_{EE}(s)H(s)}{1+ H_A(s)H_{EE}(s)H(s)} = 1. \quad (7.9)$$

Pe baza expresiilor (7.8) și (7.9) după unele transformări se determină funcția de transfer a circuitului de accelerație:

$$H_C(s) = \frac{1}{H_{EE}(s)H(s)} = \frac{B_C(s)}{A_C(s)} = q_0 + q_1s + q_2s^2 + \dots, \quad (7.10)$$

care este un element cu proprietăți preponderent derivatoare dificil de realizat.

Pentru a reproduce ideal la ieșire mărimea urmărită $r(t)$ de sistem, trebuie îndeplinită egalitatea (7.10), care este condiția invarianței erorii de urmărire $\varepsilon(t)$ de mărimea prescrisă $r(t)$.

Practic pot fi realizate elemente derivatoare de ordinul nu mai mare decât doi, fiindcă derivarea semnalului repetată este dificilă și are eroare și, ca rezultat, conduce la intensificarea considerabilă a nivelului de bruijaj. De aceea, în sistemul combinat de urmărire, invarianța erorii de urmărire $\varepsilon(t)$ de mărimea prescrisă $r(t)$ se realizează parțial cu precizia derivatei de ordinele zero, unu și doi. Cu alte cuvinte, poate fi realizat corespunzător un astatism de ordinul unu, doi și trei, în raport cu mărimea urmărită $r(t)$.

Inerția inevitabilă a elementelor derivatoare (deși neînsemnată),

inexactitatea determinării coeficienților funcțiilor de transfer și realizarea acestora duc la faptul că și invarianța parțială se realizează cu o exactitate până la o mărime mică. Indiferent de aceasta, circuitul de accelerare sporește substanțial precizia de urmărire a sistemului, de aceea acesta beneficiază de o utilizare largă. Cu cât mai lent se schimbă mărimea prescrisă $r(t)$, cu atât mai mare va fi efectul invarianței parțiale $\varepsilon(t)$ în funcție de referința $r(t)$.

În încheiere menționăm că circuitul suplimentar nu influențează asupra stabilității circuitului închis, însă e necesar ca însăși această legătură să fie stabilă.

În expresiile (7.7) și (7.10), f.d.t. a regulatorului prezintă elemente derivatoare ideale, deoarece regulatorul $H_C(s)$ și modelul procesului au proprietăți de inerție și integrale. În aceste cazuri, f.d.t. a regulatorului-compensator are forma:

$$H_C(s) = q_0 + q_1s + q_2s^2 + q_3s^3 + \dots, \quad (7.11)$$

care prezintă un element dinamic derivator.

Pentru realizarea relațiilor de forma (7.11) se obțin aproximații care realizează invarianța parțială.

Funcția de transfer a compensatoarelor $H_C(s)$ din (7.7) și (7.10) trebuie să fie stabilă și proprie, deoarece acționează în bucla deschisă a sistemului.

Utilizarea acestor structuri de sisteme asigură rejecția directă a perturbației măsurabile și reproducerea semnalului de referință de către sistemul automat, care asigură o îmbunătățire a performanțelor sistemului pentru intrări lente și foarte lente.

Pentru realizarea invarianței în sistemul automat trebuie să existe două canale de propagare ale intrărilor către mărimea care trebuie să fie invariantă în raport cu aceste intrări.

Sistemele de conducere combinată analizate sunt sisteme de conducere cu două grade de libertate, care conduc la realizarea a două regulatoare pe canalul direct și pe canalul de compensare a perturbației.

7.3 Sisteme automate multivariabile

7.3.1 Modelele matematice ale proceselor multivariabile

Industria modernă, tehnica și știința s-au dezvoltat intensiv în ultimele decenii, care este strâns corelată cu apariția unor procese tehnologice și industriale tot mai complexe și, astfel, determinând necesitatea automatizării acestora. Astfel, s-a rezultat o clasă de sisteme complexe, care au un înalt grad de complexitate și se disting prin mai multe caracteristici specifice cum ar fi:

- existența unui număr relativ mare de mărimi reglate;
- existența mai multor mărimi de intrare ;
- nterinfluența dintre diferitele canale intrare-ieșire.

Sistemele automate complexe caracterizate prin asemenea particularități se numesc sisteme automate *multivariabile* sau *multiple* și formează una dintre categoriile cele mai importante ale sistemelor automate complexe [1, 2, 9, 14, 23]. Sistemele automate multivariabile pot fi liniare sau neliniare, cu semnale deterministe sau cu semnale aleatorii etc.

Procesele tehnologice complexe se caracterizează prin două sau mai multe variabile de intrare și ieșire și se numesc procese multivariabile și rezultă necesitatea de reglare a mai multor variabile.

În corespundere cu dimensiunea procesului se utilizează un număr adecvat de traductoare și elemente de execuție pentru fiecare canal al mărimilor reglate. Schema părții fixate (fig. 7.4) a unui proces

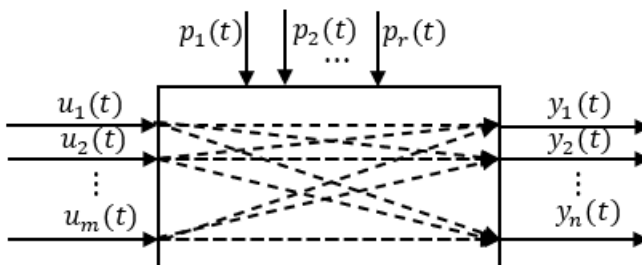


Fig. 7.4. Proces multivariabil

multivariabil, unde sunt însemnările: vectorul $\mathbf{u}(t) = (u_1, \dots, u_m)$ prezintă mărimile de intrare, vectorul $\mathbf{y}(t) = (y_1, \dots, y_n)$ - mărimile măsurate ale procesului, ieșirea, vectorul $\mathbf{p}(t) = (p_1, \dots, p_r)$ - mărimile perturbatoare.

Transferul intrare-ieșire dintre mărimea de ieșire $\mathbf{y}(t)$ este funcție de intrările $\mathbf{u}(t)$ și $\mathbf{p}(t)$:

$$\mathbf{y}(t) = f(\mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t)). \quad (7.12)$$

Conducerea unui proces multivariabil se efectuează pe baza unui obiectiv definit prin mărimea de calitate \mathbf{z} . Aceste mărimi prezintă parametri tehnologici: temperaturi, presiuni, debite, concentrații etc. sau mărimi netehnologice: randamente, cantități producției etc. Cu ajutorul vectorului \mathbf{z} , obiectivul conducerii se exprimă prin necesitatea urmăririi de către \mathbf{z} a unui program impus de tehnolog și prezentat ca vector de referință \mathbf{z}_r .

Intervenția asupra procesului se realizează prin intermediul unui set de mărimi de execuție \mathbf{v} , iar starea curentă a procesului este cunoscută prin mărimile măsurate y_1, \dots, y_n . Deoarece mărimile de calitate nu sunt accesibile, atunci programul de referință se impune de obicei mărimilor măsurate \mathbf{y} .

Relațiile dintre mărimile respective pe canalele directe și de interinfluență au o anumită funcție de transfer. În absența perturbațiilor $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ și, considerând procesul multivariabil liniar, f.d.t. a fiecărui canal se prezintă prin $H_{ij}(s)$, $i = \overline{1, n}$ și $j = \overline{1, m}$, iar modelul matematic al transferului intrare-ieșire al procesului multivariabil se prezintă în forma:

$$y_1(s) = H_{11}(s)u_1(s) + H_{12}(s)u_2(s) + \dots + H_{1m}(s)u_m(s),$$

$$y_2(s) = H_{21}(s)u_1(s) + H_{22}(s)u_2(s) + \dots + H_{2m}(s)u_m(s), \quad (7.13)$$

$$y_n(s) = H_{n1}(s)u_1(s) + H_{n2}(s)u_2(s) + \dots + H_{nm}(s)u_m(s)$$

sau în forma vector-matriceală:

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{H}_P(s)\mathbf{u}(s), \quad (7.14)$$

unde vectorul transpus al ieșirii $\mathbf{y}(s) = [y_1(s), y_2(s), \dots, y_n(s)]^T$, vectorul transpus al intrării $\mathbf{u}(s) = [u_1(s), u_2(s), \dots, u_m(s)]^T$, iar $\mathbf{H}_P(s)$ este matricea de transfer a procesului de forma:

$$\mathbf{H}_P(s) = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) & \cdots & H_{1m}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) & \cdots & H_{2m}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{n1}(s) & H_{n2}(s) & \cdots & H_{nm}(s) \end{bmatrix}. \quad (7.15)$$

Funcțiile de transfer $H_{ii}(s)$ exprimă transferul din canalele directe, iar funcțiile de transfer $H_{ij}(s)$ prezintă transferul dintre canalele de interacțiuni.

Dacă se consideră că la intrările obiectului de reglare acționează semnale treaptă unitară, atunci aplicând transformata Laplace la relația (7.14), mărimea de ieșire are forma:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}_P(t)\mathbf{1}(t) = \begin{bmatrix} h_{11}(t) & h_{12}(t) & \cdots & h_{1m}(t) \\ h_{21}(t) & h_{22}(t) & \cdots & h_{2m}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1}(t) & h_{n2}(t) & \cdots & h_{nm}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (7.16)$$

unde $\mathbf{h}_P(t)$ este matricea de tranziție a obiectului, $h_{ii}(t)$ – răspunsurile indiciale pe canalele principale ($i = \overline{1, n}$) ca răspuns la semnalul treaptă unitară aplicate la intrările respective, $h_{ij}(t)$ – răspunsurile indiciale pe canalele de interinfluență ($i \neq j$), care prezintă răspunsul din canalul i când semnalul de intrare acționează la intrarea canalului j .

Matricea pondere a obiectului de reglare se obține prin derivarea matricei de tranziție:

$$\mathbf{w}(t) = \frac{d\mathbf{h}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} w_{11}(t) & w_{12}(t) & \cdots & w_{1m}(t) \\ w_{21}(t) & w_{22}(t) & \cdots & w_{2m}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{n1}(t) & w_{n2}(t) & \cdots & w_{nm}(t) \end{bmatrix}. \quad (7.17)$$

7.3.2 Reglarea proceselor multivariabile

Reglarea proceselor multivariabile la acțiunea semnalelor de referință \mathbf{u} și a perturbațiilor \mathbf{p} se realizează cu algoritmi de reglare multivariabili sau regulatoare multivariabile (RMV). Regulatoarele pot fi plasate pe cale directă sau pe cale de reacție a sistemului multivariabil.

Regulatoarele RMV au rolul de a asigura atât performanțele impuse pentru fiecare canal de legătură directă intrare-ieșire, cât și de a compensa efectul perturbațiilor și ale interacțiunilor existente între diferite variabile pe diferite canale intrare-ieșire și perturbație-ieșire.

În figura 7.5 se reprezintă structura sistemului multivariabil cu regulatorul pe cale directă.

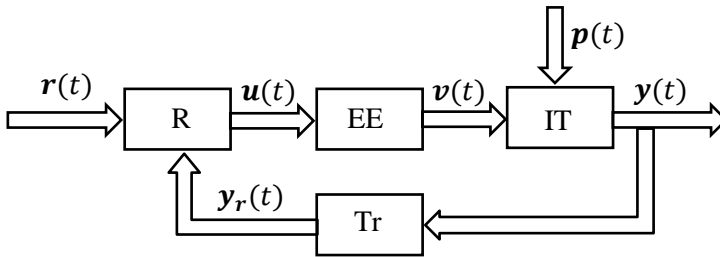


Fig. 7.5. Schema funcțională a sistemului multivariabil de reglare automată

În schemă se utilizează notațiile: IT este instalația tehnologică în care evoluează procesul, EE – elemente de execuție, R – regulatorul automat, Tr – traductoare, \mathbf{r} – vectorul intrărilor, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ – vectorul mărimilor de comandă, \mathbf{v} – vectorul mărimilor de reglare a procesului, \mathbf{z} – vectorul ieșirilor procesului – obiectivul conducerii, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ – vectorul mărimilor măsurate ale procesului, $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_r)$ – vectorul mărimilor perturbatoare.

Datorită complexității SMV, proiectarea acestora are particularități specifice în raport cu sistemele monovariabile.

Astfel, necesitatea compensării interacțiunilor dintre canale impune utilizarea regulatoarelor multivariabile, deoarece utilizarea

regulatele monovariabile destinate conducerii fiecărei mărimi de ieșire y_i , numai în baza legăturilor principale intrare-ieșire, care este o soluție ușor de implementat, dar care conduce la obținerea unor performanțe nesatisfăcătoare.

7.3.3 Algoritmi de reglare a proceselor multivariabile

Reglarea proceselor multivariabile la acțiunea semnalelor de referință \mathbf{u} și a perturbațiilor \mathbf{p} se realizează cu algoritmi de reglare sau regulate multivariabile (RMV). Regulatele pot fi plasate pe cale directă sau pe cale de reacție a sistemului multivariabil (fig. 7.6).

Din figura 7.7 rezultă relațiile intrare-ieșire care descriu aceste forme canonice. Pentru forma canonică P, procesul se descrie prin matricea de transfer de forma:

$$\mathbf{H}(s) = \begin{vmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) \end{vmatrix}, \quad (7.18)$$

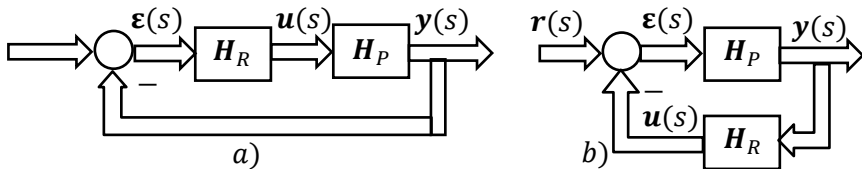


Fig. 7.6. Structuri de sisteme multivariabile

iar mărimea de ieșire se exprimă prin forma:

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{u}(s), \quad (7.19)$$

unde:

$$\mathbf{y}(s) = [y_1(s), y_2(s)]^T, \quad \mathbf{u}(s) = [u_1(s), u_2(s)]^T. \quad (7.20)$$

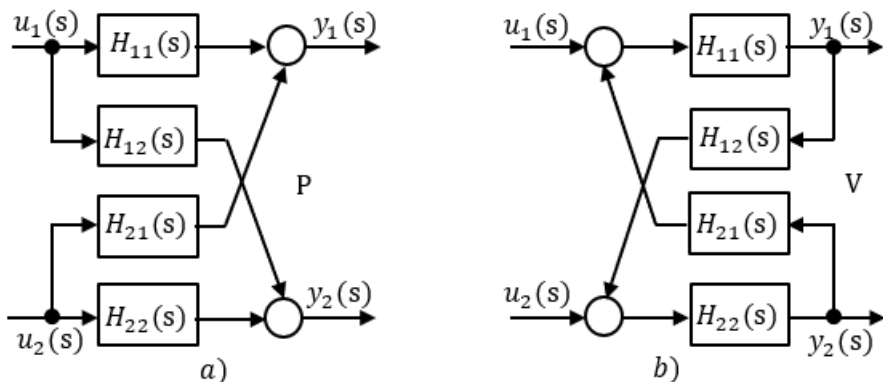


Fig. 7.7. Structuri de procese multivariabile

Pentru forma canonică V se obține:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} H_{11}(s) & 0 \\ 0 & H_{22}(s) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} 0 & H_{12}(s) \\ H_{21}(s) & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Se introduc notațiile:

$$\mathbf{H}_k(s) = \begin{vmatrix} H_{11}(s) & 0 \\ 0 & H_{22}(s) \end{vmatrix}, \mathbf{H}_h(s) = \begin{vmatrix} 0 & H_{12}(s) \\ H_{21}(s) & 0 \end{vmatrix}, \quad (7.22)$$

unde $\mathbf{H}_k(s)$ este matricea diagonală alcătuită din f.d.t. care descriu canalele directe principale, iar $\mathbf{H}_h(s)$ este matricea diagonală formată cu f.d.t. de pe canalele de interacțiune.

Relația (7.21) cu notațiile (7.22) are forma:

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{H}_k(s)\mathbf{u}(s) + \mathbf{H}_k(s)\mathbf{H}_h(s)\mathbf{y}(s) \quad (7.23)$$

sau după unele transformări se obține:

$$\mathbf{y}(s)[\mathbf{I} - \mathbf{H}_k(s)\mathbf{H}_h(s)] = \mathbf{H}_k(s)\mathbf{u}(s),$$

$$\mathbf{y}(s) = [\mathbf{I} - \mathbf{H}_k(s)\mathbf{H}_h(s)]^{-1}\mathbf{H}_k(s)\mathbf{u}(s). \quad (7.24)$$

Deoarece în structura canonică P a procesului intrările acționează asupra tuturor ieșirilor prin f.d.t. $H_{ii}(s)$ și $H_{ij}(s)$, rezultă că această structură poate fi folosită și pentru prezentarea proceselor multivariabile cu dimensiunea $m \neq n$. Însă, forma canonică V se poate utiliza pentru descrierea proceselor multivariabile numai de dimensiunea $m = n$.

Pentru un proces cu două intrări și două ieșiri forma canonică P, structurile sistemelor de conducere cu reglatoare monovariabile și reglatoare multivariabile se dau în figura 7.8.

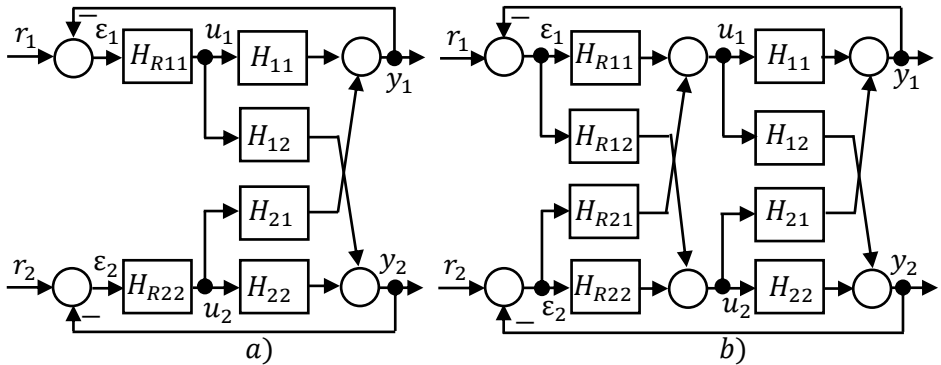


Fig. 7.8. Structuri de SMV cu reglatoare monovariabile a) și multivariabile b)

Structura regulatorului multivariabil conține patru componente cu f.d.t.: primele f.d.t. $H_{R11}(s)$ și $H_{R22}(s)$ numite reglatoare principale, care reglează mărimile respective de ieșire și alte două f.d.t. $H_{R12}(s)$ și $H_{R21}(s)$ numite reglatoare de decuplare, care prin acțiunea lor compensează acțiunile existente între cele două canale.

Numărul de blocuri de reglare din structura regulatorului multivariabil este funcție de dimensiunea procesului analizat.

Intensitatea interacțiunilor din structura părții fixate impune

adoptarea structurii de reglare cu regulatoare monovariabile sau multivariabile. Din aceste considerente este necesar a cunoaște modelul matematic al părții fixate cu interacțiunile dintre canale, canale de legătură directă intrare-ieșire, cât și de a compensa efectul perturbațiilor și al interacțiunilor existente între diferite variabile pe diferite canale intrare-ieșire și perturbație-ieșire.

În cazul utilizării regulatorului multivariabil pentru procesul multivariabil, aceasta conduce la compensarea interacțiunilor dintre canale și se obține o decuplare completă între intrările și ieșirile sistemului multivariabil și fiecare mărime reglată este influențată numai de mărimea de referință a canalului respectiv. Aceste tipuri de sisteme multivariabile se numesc *decuplate* sau *autonome*.

În cazul când regulatorul multivariabil nu asigură decuplarea totală a interacțiunilor, atunci rămân anumite interacțiuni între mărimile de referință și mărimile reglate din canale diferite și sistemul multivariabil este *nedecuplat* sau *neautonom*.

Pentru această clasă de sisteme se efectuează analiza stabilității și calității sistemului automat multivariabil.

La sistemele multivariabile, datorită complexității structurii lor, studiul stabilității este mai dificil decât în cazul sistemelor monovariabile.

Din analiza matricei de transfer a sistemului multivariabil rezultă că fiecare element $H_{ij}(s)$ al matricei este un sistem închis.

Pentru stabilitatea sistemului multivariabil se cere ca toate canale închise să fie stabile.

Partea controlabilă și observabilă a sistemului deschis se prezintă cu matricea de transfer a sistemului deschis:

$$\mathbf{H}_d(s) = \mathbf{H}_R(s)\mathbf{H}_P(s).$$

Pentru stabilitatea SMV este necesar și suficient ca părțile reale ale rădăcinilor ecuației caracteristice ale părții controlabile și observabile ale sistemului deschis să fie negative:

$$\det|\mathbf{I} + \mathbf{H}_d(s)| = 0, \quad (7.25)$$

unde determinantul (7.25) prezintă ecuația caracteristică a sistemului multivariabil, \mathbf{I} - matricea unitară.

Descrierea dinamicii sistemelor automate multivariabile se efectuează și prin modele matematice în forma intrare-stare-ieșire, care vor fi expuse în capitolul 8.

Chestionar și probleme

1. Cum se explică necesitatea descrierii sistemelor cu timp mort?
2. În care elemente din structura sistemului pot să existe timp mort?
3. De ce este necesar a utiliza structuri de sisteme de conducere combinată?
4. Explicați condițiile de invarianță ale sistemului de conducere automată.
5. Cum se realizează circuitul de compensare în sistemul de conducere combinată de urmărire?
6. Ce tip de element dinamic este elementul care realizează invarianța?
7. Dați o tratare a modelului multivariabil al obiectului.
8. Ce reprezintă formele canonice P și V pentru modelul obiectului de reglare?
9. Dați exemple de obiecte multivariabile.
10. Ce reprezintă canalele principale și canalele de interinfluență?
11. Cum se conectează regulatorul în structura SMV?
12. Care este diferența dintre regulatoarele monovariabile și multivariabile?
13. Ce reprezintă matricea de transfer a obiectului de reglare?
14. Explicați noțiunea de sistem multivariabil autonom și neautonom?
15. Care sunt condițiile de stabilitate ale sistemului multivariabil?

8 MODELE MATEMATICE ÎN FORMA ECUAȚILOR DE STARE

8.1 Ecuații de stare

O caracterizare mult mai generală și eficientă a sistemului de reglare automată se obține dacă în modelul matematic, pe lângă informațiile funcționale (intrare-ieșire), se includ și informații structurale prin intermediul unor variabile de stare (intrare-stare-ieșire). Cunoașterea acestor variabile la orice moment de timp permite, în cazul cunoașterii evoluției intrărilor, determinarea evoluției ieșirilor sistemului automat [1-5, 10, 13-15, 18, 20, 23].

Definiție. Variabilele de stare sunt acele variabile, care determină comportarea viitoare a unui sistem, când starea prezentă a sistemului și intrările sunt cunoscute.

Se consideră sistemul multivariabil la intrare și ieșire (fig. 8.1).

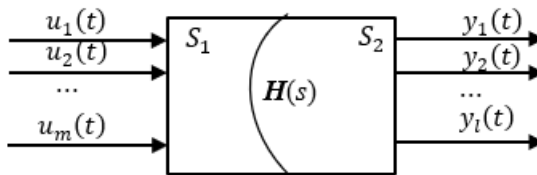


Fig. 8.1. Sistem multivariabil intrare-ieșire

Se presupune că trebuie să existe cel puțin o mărime intermediară între mărimea de intrare u_i și mărimea de ieșire y_i . Aceste mărimi intermediare din cadrul sistemului care pot fi sau nu mărimi fizice reale și care pot fi sau nu mărimi măsurate direct reprezintă variabilele de stare x_n . Aceste mărimi caracterizează complet structura internă a sistemelor dinamice.

Un sistem de reglare automată multivariabil prin mărimile intrare-stare-ieșire se reprezintă schematic prin structura din figura 8.2.

Mulțimea mărimilor de intrare-ieșire și cea a variabililor de stare aparțin unor spații topologice multidimensionale reale (euclidiene):

$$\mathbf{u} \in U \subset R^m; \quad \mathbf{y} \in Y \subset R^l; \quad \mathbf{x} \in X \subset R^n; \quad \mathbf{p} \in P \subset R^r,$$

unde $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ sunt mărimile de intrare (vectorul \mathbf{u} m -dimensional), $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_l)$ - mărimile de ieșire (vectorul \mathbf{y} l -dimensional), $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ - mărimile de stare (vectorul \mathbf{x} n -dimensional), $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_r)$ - mărimile de intrare ale perturbației (vectorul \mathbf{p} r - dimensional); \mathbf{U} este mulțimea din spațiul R^n , \mathbf{Y} - mulțimea din spațiul R^l , \mathbf{X} - mulțimea din spațiul R^n , \mathbf{P} - mulțimea din spațiul R^r .

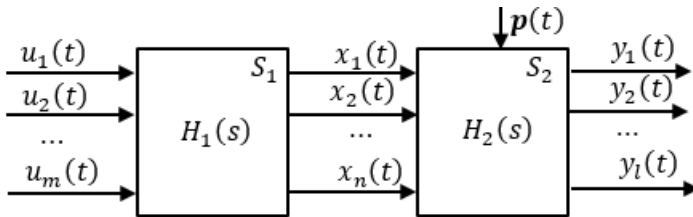


Fig. 8.2. Sistem multivariabil intrare-stare-ieșire

Spațiul R^n la care se mai adaugă o coordonată suplimentară timpul t devine spațiul R^{n+1} și se numește *spațiu de fază*.

Starea unui sistem la timpul t_0 este reprezentată de cea mai mică mulțime de date, în mod obișnuit o mulțime de numere (mărimi) $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0) = \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, din care se poate determina univoc pentru orice timp $t \geq t_0$ (viitor), evoluția sistemului automat presupunând că toate intrările care influențează sistemul automat pentru timp $t \geq t_0$ ca și ecuațiile de funcționare ale sistemului sunt cunoscute. În acest mod, starea unui sistem, definită complet la un moment dat de timp t prin variabilele de stare \mathbf{x} , se poate considera ca o informație minimă asupra evoluției sale anterioară și o reuniune de condiții inițiale pentru caracterizarea evoluției sale ulterioare.

Modelul cel mai general asociat unui sistem este:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}, t), \quad (8.1)$$

$$\mathbf{y} = g(\mathbf{x}, t), \quad (8.2)$$

unde (8.1) este ecuația de stare, iar (8.2) ecuația de ieșire (de legătură).

Dacă perturbația $\mathbf{p} = 0$, atunci modelul (8.1) va avea forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad (8.3)$$

$$\mathbf{y} = g(\mathbf{x}, t). \quad (8.4)$$

Funcțiile f și g pot fi funcții liniare sau neliniare.

Pornind de la ecuațiile (8.1) și (8.2), se definește noțiunea de sistem dinamic neted prin tripletul de mărimi (u, f, g) cu proprietățile următoare:

- 1) u sunt funcții continue (eventual pe porțiuni);
- 2) f - funcții continue și global lipschitziene în raport cu \mathbf{x} și $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{x}f(\mathbf{x}) > 0$;
- 3) g - funcții continue.

Condițiile 1) și 2) asigură existența globală a soluției ecuației (8.1) în raport cu orice intrare \mathbf{u} și inițializare $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Soluția ecuației de stare (8.1) în acest caz este:

$$\mathbf{x}(t) = \varphi(t, t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}), \quad (8.5)$$

unde $\varphi(\cdot)$ se numește *traietorie de stare* care trece la momentul de timp t_0 prin \mathbf{x}_0 .

Dacă sistemul (8.1)-(8.2) nu depinde de timp, atunci se numește invariant în timp și are forma:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (8.6)$$

$$g(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}).$$

Dacă funcțiile $f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ și $g(\mathbf{x})$ sunt liniare, atunci sistemul dinamic este liniar.

Un sistem dinamic liniar invariant multivariabil este definit prin sistemul de ecuații:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (8.7)$$

$$\mathbf{y} = g(\mathbf{x}) = \mathbf{C}\mathbf{x}.$$

Dacă variabilele depind de timp, atunci sistemul (8.7) are forma:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t).\end{aligned}\tag{8.8}$$

În cazurile când ieșirea sistemului depinde și de mărimea $\mathbf{u}(t)$, atunci (8.8) se prezintă:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t).\end{aligned}\tag{8.9}$$

Dacă asupra sistemului acționează și perturbațiile, atunci (8.9) are forma:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}\mathbf{p}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t).\end{aligned}\tag{8.10}$$

În expresiile (8.7)–(8.10) se utilizează notațiile:

\mathbf{A} – matricea coeficienților interni de dimensiunea $n \times n$,

\mathbf{B} – matricea de comandă de dimensiunea $n \times m$,

\mathbf{C} – matricea de ieșire de dimensiunea $l \times n$,

\mathbf{D} – matricea de ieșire de dimensiunea $l \times m$,

\mathbf{E} – matricea perturbațiilor de dimensiunea $l \times r$,

$\mathbf{u}(t)$ – vectorul coloană de comandă (a intrărilor) m – dimensional,

$\mathbf{x}(t)$ – vectorul coloană a stărilor n – dimensional,

$\mathbf{y}(t)$ – vectorul coloană a ieșirilor l – dimensional,

$\mathbf{p}(t)$ – vectorul coloană a perturbațiilor r – dimensional.

Schema structurală a sistemului automat multivariabil descris de sistemul (8.9) se reprezintă în figura 8.3.

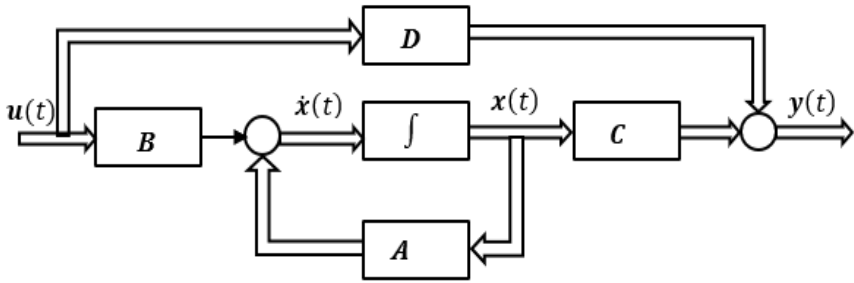


Fig. 8.3. Schema structurală a sistemului automat multivariabil

Pentru un sistem automat monovariabil la intrare și ieșire (fig. 8.4), sistemul de ecuații matriceal-vectoriale are forma:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \\ y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) + \mathbf{d}u(t), \end{aligned} \tag{8.11}$$

unde $\dot{\mathbf{x}}(t) = (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dots, \dot{x}_n(t))$, \mathbf{A} – matricea de dimensiunea $n \times n$, \mathbf{b} – vectorul coloană de comandă de dimensiunea $1 \times n$, \mathbf{c} – vectorul de ieșire de tip coloană de dimensiunea $n \times 1$, iar \mathbf{c}^T – vectorul transpus de dimensiunea $1 \times n$ – rând, \mathbf{d} – vectorul coloană de comandă de dimensiunea $1 \times n$.

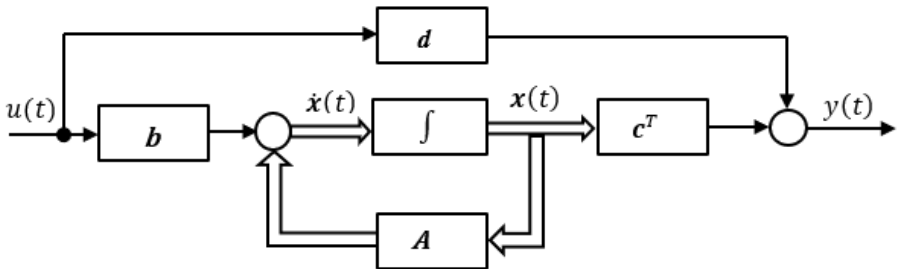


Fig. 8.4. Schema structurală a sistemului automat monovariabil

Alegerea variabilelor de stare sau a vectorului de stare $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ se realizează într-o infinitate de moduri.

Pentru a defini sistemul automat linear invariant (matricele nu depind de timp), sistemului Σ îi asociem tripletul (A, B, C) sau (A, b, c^T) și se notează $\Sigma = (A, B, C)_n$. Dimensiunea n a spațiului stărilor se numește ordinul sau dimensiunea sistemului Σ .

Traectoria de stare a sistemului se obține ca soluție a ecuației de stare pentru o intrare $u(t) \in U$ și o stare inițială $x(0) = x_0$:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau. \quad (8.12)$$

Dacă se introduce notația $\Phi(t)$, numită matrice fundamentală (matricea de tranziție a stărilor) a sistemului, atunci expresia (8.12) este:

$$x(t) = \Phi(t)x_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau, \quad (8.13)$$

unde $\Phi(t) = e^{At}$ și descrie translațiile de stare ale sistemului Σ liber (cu intrare nulă $u(t) = 0$):

$$x(t) = \Phi(t)x_0. \quad (8.14)$$

sau în forma:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t) \\ \varphi_{21}(t) & \varphi_{22}(t) & \cdots & \varphi_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_{n1}(t) & \varphi_{n2}(t) & \cdots & \varphi_{nn}(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{pmatrix}.$$

Din ultima relație rezultă că elementul $\varphi_{ij}(t)$ prezintă reacția variabilei de stare i la semnalul de intrare a condiției inițiale j , iar restul condițiilor inițiale sunt nule.

Pentru calculul funcției exponențiale matriceale se utilizează mai multe metode, dar calculul este dificil [1, 4, 10, 13-14, 18, 20, 23].

O metodă de calcul este prezentarea e^{At} în șirul:

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \cdots + \frac{A^k t^k}{k!} + \cdots,$$

unde I este matricea unitară.

Utilizarea caracteristicii $\Phi(t)$ pentru un proces permite a determina evoluția intrare-ieșire. Având soluția ecuației de stare, se calculează răspunsul liber și răspunsul forțat.

Pentru un sistem neted liniar monovariabil răspunsul sistemului se calculează prin relația:

$$y(t) = \mathbf{c}^T e^{At} \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{c}^T e^{A(t-\tau)} u(\tau) d\tau \quad (8.15)$$

sau dacă se utilizează funcția pondere se obține:

$$w(t) = \mathbf{c}^T \Phi(t) \mathbf{b} = \mathbf{c}^T e^{At} \mathbf{b}. \quad (8.16)$$

Atunci expresia (8.15) cu (8.16) are forma:

$$y(t) = \mathbf{c}^T e^{At} \mathbf{x}_0 + \int_0^t w(t - \tau) u(\tau) d\tau, \quad (8.17)$$

unde funcția pondere a sistemului reprezintă răspunsul cauzal la impuls al sistemului $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T)$.

În cazul funcției treaptă unitară a semnalului de intrare:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } t < 0, \\ 1(t) & \text{pentru } t \geq 0 \end{cases} \quad (8.18)$$

răspunsul sistemului $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T)$ conform relației (8.15) se prezintă:

$$y(t) = \mathbf{c}^T e^{At} \mathbf{x}_0 + \int_0^t h(t - \tau) u(\tau) d\tau. \quad (8.19)$$

Dacă se utilizează produsul de convoluție, atunci expresia (8.19) se scrie în forma:

$$y(t) = \mathbf{c}^T \Phi(t) \mathbf{x}_0 + (h * u)(t), \quad t \geq 0. \quad (8.20)$$

Răspunsul sistemului automat se calculează prin relația:

$$y(t) = y_l(t) + y_f(t), t \geq 0, \quad (8.21)$$

unde $y_l(t) = \mathbf{c}^T \Phi(t) \mathbf{x}_0$ este componenta liberă, $y_f(t) = (h * u)(t)$ – componenta forțată.

8.2 Funcția de transfer a sistemului automat

Aplicarea transformatei Laplace sistemului (8.11), când $\mathbf{d} = 0$ în condiții inițiale nule $\mathbf{x}_0 = 0$ pentru sistemul monovariabil se obține:

$$s\mathbf{x}(s) = \mathbf{A}\mathbf{x}(s) + \mathbf{b}u(s), \quad (8.22)$$

$$y(s) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(s).$$

Efectuând transformările respective în (8.22), se obține:

$$y(s) = \mathbf{c}^T [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{b}u(s) = H(s)u(s), \quad (8.23)$$

Din relația (8.23) se obține funcția de transfer a sistemului:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = H(s) = \mathbf{c}^T [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{b}. \quad (8.24)$$

Pentru un sistem liniar neted f.d.t. este o funcție rațională strict proprie:

$$H(s) = \frac{\mathbf{c}^T \text{adj} [s\mathbf{I} - \mathbf{A}] \mathbf{b}}{\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]} = \frac{B(s)}{A(s)}, \quad (8.25)$$

unde $B(s) = \mathbf{c}^T \text{adj} [s\mathbf{I} - \mathbf{A}] \mathbf{b}$ este polinom de gradul $n - 1$, iar $A(s) = \det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]$ polinomul caracteristic al matricei \mathbf{A} de gradul n .

Pentru un sistem multivariabil se obțin:

1. Matricea pondere:

$$\mathbf{W}(t) = \mathbf{C}\Phi(t)\mathbf{B}. \quad (8.26)$$

2. Matricea de transfer:

$$H(s) = C[sI - A]^{-1}B. \quad (8.27)$$

Pornind de la matricea pondere a sistemului multivariabil (8.26), se obține răspunsul sistemului de forma:

$$y(t) = w_0(t)x_0 + w_{yu}(t)u(t) + w_{yp}(t)p(t), \quad (8.28)$$

unde $w_0(t) = Ce^{At}$ pentru $t \geq 0$,

$$w_{yu}(t) = \begin{cases} Ce^{At}B & \text{pentru } t \geq 0, \\ 0 & \text{pentru } t < 0, \end{cases} \text{răspuns la impuls de comandă,}$$

$w_{yp}(t) = \begin{cases} Ce^{At}E & \text{pentru } t \geq 0, \\ 0 & \text{pentru } t < 0, \end{cases}$ răspuns la impulsul de perturbație.

Matricea de transfer pentru sistemul (8.28) are forma:

$$H(s) = C[sI - A]^{-1}B + D. \quad (8.29)$$

Modelul răspunsului (8.28) este preferat în calcule alor metode din considerente că determinarea matricelor pondere $w_{yu}(t)$ și $w_{yp}(t)$ nu necesită cunoașterea structurii interne a sistemului studiat.

Exemplul 8.1. Se consideră cunoscute pentru sistemul automat matricele stării A , ieșirii C și intrării B :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, C = [2 \quad 0], B = [0 \quad 1]^T.$$

Se cere să se determine matricea de tranziție a stărilor sistemului și funcția pondere a sistemului.

Soluționare. Se prezintă matricea caracteristică:

$$[sI - A] = s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}.$$

Se determină matricea caracteristică inversă:

$$[sI - A]^{-1} = \frac{\text{Cadj}[sI-A]B}{\det[sI-A]} = \frac{1}{s^2+3s+2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}.$$

Se aplică transformata Laplace inversă la fiecare element al matricei și se obține matricea de tranziție a stărilor:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Se determină funcția pondere după relația:

$$\begin{aligned} y(t) &= w(t) = L^{-1}\{C[sI - A]^{-1}B\} = L^{-1}\{C\Phi(t)B\} = \\ &= L^{-1}\left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T \right\} = 2e^{-t} - 2e^{-2t}. \blacksquare \end{aligned}$$

8.3 Realizarea sistemică a funcției de transfer a sistemului automat

8.3.1 Preliminarii

Pentru soluționarea unor probleme de conducere automată se solicită determinarea modelului matematic intrare-stare-ieșire (MM ISI) atunci când se cunoaște modelul matematic intrare-ieșire (MM II) aferent sistemului. Există două modalități de rezolvare a problemei.

1. Pe baza ecuațiilor diferențiale primare care au stat la originea MM II se determină MM ISI la care variabilele de stare $x_i(t)$ au, de regulă, semnificație fizică (dar pot fi și mărimi fictive), fiind *mărimi de stare*.

2. Pe baza MM II se determină prin procedee pur matematice un MM ISI. În acest caz, variabilele de stare nu mai au semnificație fizică.

Asocierea unui MM ISI la un sistem dinamic (sistem fizic sau proces) caracterizat prin MM II se numește *realizare sistemică a f.d.t. $H(s)$* .

În funcție de obiectivele formulate se pot determina diferite forme (variante) de realizare sistemică a f.d.t. $H(s)$. Obiectivele urmărite pentru care se obține o realizare sistemică pot fi diferite.

1. Evidențierea unor proprietăți structurale ale sistemului.

2. Simularea pe calculator numeric a evoluției sistemului.
3. Dezvoltarea unor structuri de reglare.
4. Scrierea avantajoasă a unui algoritm de reglare.
5. Calculul unor indicatori de calitate utilizați ca funcții obiectiv în probleme de optimizare.

Funcția de transfer $H(s)$ pentru un sistem de reglare neted permite obținerea unei realizări a tripletului $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T)$ printr-o alegere convenabilă a variabililor de stare $x_i(t)$. Problema realizării se formulează în modul următor: pentru un model matematic intrare-ieșire se cere să se determine o realizare a tripletului $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T)$ astfel ca f.d.t. $H(s) = \mathbf{c}^T(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$.

Se numește *realizare* a f.d.t. $H(s)$ orice sistem $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T)$ pentru care se satisface egalitatea $H(s) = \mathbf{c}^T(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$.

Dacă se consideră f.d.t. a sistemului automat o rațională strict proprie (coeficientul $a_n = 1$, pentru aceasta toți termenii de la numărător și numitor se împart la a_n) de forma:

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} = \frac{y(s)}{u(s)}, \quad (8.30)$$

căreia îi corespunde ecuația diferențială:

$$\begin{aligned} y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y &= \\ &= b_{n-1}u^{(n-1)} + b_{n-2}u^{(n-2)} + \dots + b_1\dot{u} + b_0u, \end{aligned} \quad (8.31)$$

atunci pentru $H(s)$ se pot obține diverse realizări printr-o alegere corespunzătoare a variabililor de stare $x_i(t)$.

Sunt expuse patru forme de realizare a tripletului $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T)$, care au o largă utilizare la descrierea sistemului prin variabilele de stare $x_i(t)$.

8.3.2 Forma de realizare canonică controlabilă

Se consideră ecuația diferențială care descrie sistemul automat:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = u(t). \quad (8.32)$$

Realizarea dată se obține dacă variabilele de stare $x_i(t)$ se aleg în forma:

$$x_1 = y, x_2 = \dot{y}, x_3 = \ddot{y}, \dots, x_n = y^{(n-1)}. \quad (8.33)$$

Ecuția diferențială (8.32) cu (8.33) se reprezintă prin sistemul de ecuații diferențiale de ordinul unu de forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n &= -a_0x_1 - a_1x_2 - \dots - a_{n-1}x_n + u. \end{aligned} \quad (8.34)$$

Introducând vectorul de stare $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ sistemul (8.34) are forma matriceal-vectorială:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (8.35)$$

sau în forma vector-matriceală:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{bu}, \quad (8.36)$$

unde:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (8.37)$$

Ecuția de legătură ieșire-stare este:

$$y(t) = b_0x_1 + b_1x_2 + \dots + b_{n-2}x_{n-1} + b_{n-1}x_n =$$

$$= [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]x(t) = \mathbf{c}^T x(t), \quad (8.38)$$

unde $\mathbf{c}^T = [b_0 \ b_1 \ b_2 \ \dots \ b_{n-1}] = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]$.

Schema bloc informațională aferentă realizării (8.37)-(8.38) se prezintă în figura 8.5.

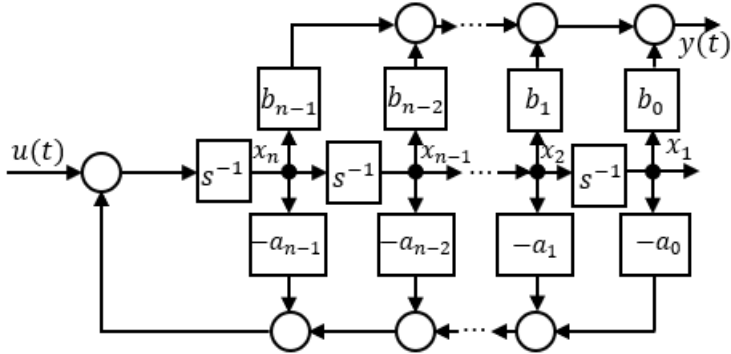


Fig. 8.5. Schema bloc informațională

Pentru obținerea ecuației de legătură se procedează în modul următor.

F.d.t. (8.30) se scrie în forma:

$$H(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{y(s) x_0(s)}{x_0(s) u(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}. \quad (8.39)$$

Din relația (8.39) se obține:

$$x_0(s) = H(s)u(s) \text{ și } y(s) = H(s)x_0(s).$$

Ecuațiile de stare (8.34) se obțin prin convertirea în domeniul timpului a ecuației:

$$x_0(s)[s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0] = u(s), \quad (8.40)$$

căreia îi corespunde sistemul variabilelor de stare:

$$x_1(t) = L^{-1}[x_0(s)], \quad \dot{x}_i = x_{i+1}. \quad (8.41)$$

Dacă se aplică transformata Laplace inversă ecuației algebrice:

$$y(s) = x_0(s)[b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0] \quad (8.42)$$

se obține mărimea de ieșire în domeniul timpului:

$$y(t) = b_0x_1(t) + b_1x_2(t) + \dots + b_{n-1}x_n(t) \quad (8.43)$$

sau în forma:

$$y(t) = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{n-1}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t), \quad (8.44)$$

unde $\mathbf{c}^T = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{n-1}] = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]$.

Exemplul 8.2. Se dă circuitul electric *RLC* cu sursa de energie *SE* (fig. 8.6) și parametrii elementelor $R = 5 \ \Omega$, $L = 0.005 \ \text{H}$, $C = 0.005 \ \text{F}$.

Se cere să se prezinte modelul matematic intrare-stare-ieșire a circuitului.

Soluționare. Alegerea variabilelor de stare se bazează pe expresia energiei acumulate în circuit în bobina cu inductanța L și în condensatorul cu capacitatea C [2,21]:

$$E = \frac{1}{2}Li_L^2 + \frac{1}{2}Ci_C^2,$$

unde i_L este curentul în bobină, i_C – curentul condensatorului.

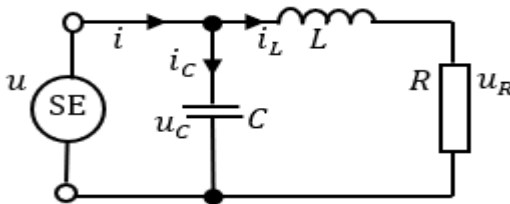


Fig. 8.6. Circuitul electric *RLC*

Se utilizează legea Kirchhoff a curenților în circuit:

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = u(t) - i_L.$$

Aplicând legea Kirchhoff a tensiunilor la partea dreaptă a circuitului, se obține ecuația care determină viteza de modificare a curentului în inductanță:

$$L \frac{di_L(t)}{dt} = -Ri_L(t) + u_C(t).$$

Starea sistemului se caracterizează de două variabile de stare x_1 este tensiunea la bornele condensatorului $u_C(t)$ și x_2 este curentul în inductanță $i_L(t)$.

Mărimea de ieșire este tensiunea la bornele rezistenței $u_R(t)$:

$$u_R(t) = Ri_L(t) = y(t).$$

În baza primelor relații se alcătuieste sistemul de ecuații de stare în forma:

$$C \frac{du_C}{dt} = u(t) - i_L = -i_L + u(t),$$

$$L \frac{di_L(t)}{dt} = -Ri_L(t) + u_C(t) = u_C(t) - Ri_L(t)$$

sau prin variabilele de stare:

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{C}x_2 + \frac{1}{C}u(t) = 0 \cdot x_1 - \frac{1}{C}x_2 + \frac{1}{C}u(t),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{L}x_1 - \frac{R}{L}x_2 = \frac{1}{L}x_1 - \frac{R}{L}x_2$$

și mărimea de ieșire:

$$y(t) = Ri_L(t) = Rx_2.$$

Ecuațiile de stare se prezintă în formă vector-matriceală:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{vmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{vmatrix} \mathbf{x} + \begin{vmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{vmatrix} u,$$

$$y = \begin{vmatrix} 0 & R \end{vmatrix} x_2$$

sau

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u,$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_2,$$

unde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{c}^T = [0 \quad R].$$

De exemplu, pentru datele numerice $R = 5 \Omega$, $L = 0.005 \text{ H}$, $C = 0.005 \text{ F}$, atunci ecuațiile de stare au forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{0.005} \\ \frac{1}{0.005} & -\frac{5}{0.005} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{0.005} \\ 0 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 0 & -200 \\ 200 & -1000 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 200 \\ 0 \end{bmatrix} u,$$

$$y = [0 \quad 5] \mathbf{x}_2. \blacksquare$$

8.3.3 Forma de realizare canonică observabilă

O realizare a f.d.t. $H(s)$ se obține dacă $H(s) = H(s)^T = \mathbf{b}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A}^{-T})^{-1} \mathbf{c}$. Se constată că dacă $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T)$ este o realizare, atunci și $(\mathbf{A}^T, \mathbf{c}, \mathbf{b}^T)$ este o realizare.

Forma de realizare canonică observabilă se obține din (8.31) substituind $s = d/dt$:

$$s^n y + a_{n-1} s^{n-1} y + \dots + a_1 s y + a_0 y =$$

$$= b_{n-1} s^{n-1} u + b_{n-2} s^{n-2} u + \dots + b_1 s u + b_0 u$$

și după unele transformări ia forma:

$$y = \frac{1}{s} (-a_{n-1} y + b_{n-1} u + \frac{1}{s} (-a_{n-2} y + b_{n-2} u + \dots +$$

$$+ \frac{1}{s} (-a_0 y + b_0 u) \dots)), \quad (8.45)$$

căreia îi corespunde schema bloc informațională din figura 8.7.

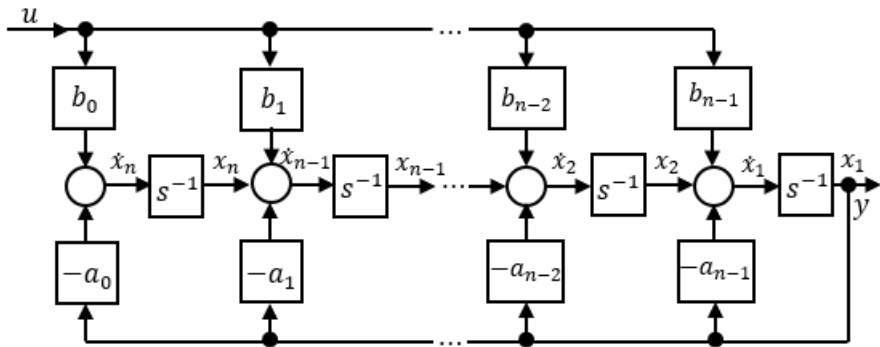


Fig. 8.7. Schema bloc informațională

Din (8.45) și schema informațională se obțin ecuațiile de stare:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -a_{n-1}x_1 + x_2 + b_{n-1}u, \\
 \dot{x}_2 &= -a_{n-2}x_1 + x_3 + b_{n-2}u, \\
 &\dots\dots\dots \\
 \dot{x}_{n-1} &= -a_1x_1 + x_n + b_1u, \\
 \dot{x}_n &= -a_0x_1 + b_0u, \\
 y &= x_1.
 \end{aligned}
 \tag{8.46}$$

Din (8.46) se obține forma canonică observabilă:

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \\
 \mathbf{y} &= \mathbf{C}u,
 \end{aligned}
 \tag{8.47}$$

unde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0].$$

În această realizare elementele matricei de stare \mathbf{A} se obțin din coeficienții funcției de transfer, iar ieșirea este prima variabilă de stare $y = x_1$.

Exemplul 8.3. Se consideră funcția de transfer a sistemului automat:

$$H(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{3s^2 + 5s + 2}{s^3 + 6s^2 + 8s + 4}.$$

Se cere să se prezinte formele de realizare de controlabilitate și observabilitate.

Soluționare.

Utilizând relațiile (8.35)-(8.38), se determină forma de realizare controlabilă:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{vmatrix} u = \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -8 & -6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} u. \end{aligned}$$

Ecuția de legătură ieșire-stare este:

$$\begin{aligned} y(t) &= b_0 x_1 + b_1 x_2 + b_2 x_3 = |b_0 \quad b_1 \quad b_2| \mathbf{x}(t) = \\ &= |2 \quad 5 \quad 3| \mathbf{x}(t) = \mathbf{Cx}(t). \end{aligned}$$

În baza relației (8.47) se obține forma de realizare observabilă:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} = \begin{vmatrix} -a_2 & 1 & 0 \\ -a_1 & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{vmatrix} u = \begin{vmatrix} -6 & 1 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{vmatrix} u,$$

$$y(t) = 1 \cdot x_1(t) + 0 \cdot x_2(t) + 0 \cdot x_3(t) = |1 \quad 0 \quad 0| x_1 = \mathbf{Cx}. \blacksquare$$

8.3.4 Forma de realizare canonică Jordan

Această formă de realizare se obține pentru $H(s)$, evidențiind polii f.d.t. Dacă admitem că polii f.d.t. $H(s)$ sunt reali și diferiți cu ordine de multiplicitate egală cu zero, atunci f.d.t. $H(s)$ ia forma:

$$H(s) = \frac{c_1}{s+p_1} + \frac{c_2}{s+p_2} + \dots + \frac{c_n}{s+p_n}. \quad (8.48)$$

Ieșirea sistemului se calculează ca conexiune în paralel a elementelor de ordinul unu după forma:

$$y(s) = \frac{c_1}{s+p_1}u(s) + \frac{c_2}{s+p_2}u(s) + \dots + \frac{c_n}{s+p_n}u(s). \quad (8.49)$$

Dacă ieșirea fiecărui element este variabila de stare, atunci se obțin relațiile:

$$x_i(s) = \frac{u(s)}{s+p_i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (8.50)$$

Mărimea de ieșire a sistemului se obține în forma:

$$y(s) = \sum_{i=1}^n c_i x_i(s). \quad (8.51)$$

Dacă se aplică transformata Laplace inversă sistemului (8.50), (8.51) se obține sistemul de ecuații a variabilelor de stare și ieșirea sistemului în forma:

$$\dot{x}_i(t) = -p_i x_i(t) + u(t), \quad i = \overline{1, n} \quad (8.52)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^n c_i x_i(t). \quad (8.53)$$

Pentru cazul sistemului de ecuații (8.52)-(8.53) realizarea tripletului $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T)$ are forma:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -p_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -p_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -p_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c}^T = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_{n-1}]. \quad (8.54)$$

În mod similar pot fi obținute diverse forme de realizări ale sistemului de matrice (A, B, C) pentru sistemele automate multivariabile.

După cum rezultă indirect în denumirile asociate, aceste forme permit evidențierea unor proprietăți structurale ale sistemului.

Trecerea de la o formă canonică la alta sau determinarea unei forme canonice pe baza modelului matematic inițial revine la determinarea unei realizări sistemice echivalente.

8.4 Sisteme echivalente

Definiție: Două sisteme multivariabile liniare $S = (A, B, C, D)$ și $\hat{S} = (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$ se numesc echivalente după stare și se notează $(A, B, C, D) \sim (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$, dacă există o matrice de dimensiunea $n \times n$ nesingulară T , astfel încât:

$$\hat{A} = TAT^{-1}, \hat{B} = TB, \hat{C} = CT^{-1}, \hat{D} = D \quad (8.58)$$

sau echivalente după intrare-ieșire dacă pentru aceeași intrare u aplicată sistemelor ieșirile lor forțate sunt egale.

Cazul a două sisteme monovariabile:

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (8.59)$$

$$y = c^T x$$

și

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{b}u, \quad (8.60)$$

$$y = \hat{c}^T \hat{x},$$

sunt echivalente dacă există o matrice de dimensiunea $n \times n$ nesingulară T , astfel încât:

$$\hat{A} = TAT^{-1}, \hat{b} = Tb, \hat{c}^T = c^T T^{-1} \quad (8.61)$$

și respectiv:

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1}\hat{\mathbf{A}}\mathbf{T}, \mathbf{b} = \mathbf{T}^{-1}\hat{\mathbf{b}}, \mathbf{c}^T = \hat{\mathbf{c}}^T\mathbf{T}. \quad (8.62)$$

Dacă transformarea este de forma $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{T}\mathbf{x}$, atunci se obține pentru sistemul monovariabil:

$$\mathbf{T}^{-1}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x} + \mathbf{b}\mathbf{u}, \quad (8.63)$$

$$y = \mathbf{c}^T\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}$$

sau

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x} + \mathbf{T}\mathbf{b}\mathbf{u} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{x} + \hat{\mathbf{b}}\mathbf{u}, \quad (8.64)$$

$$y = \hat{\mathbf{c}}^T\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x} = \hat{\mathbf{c}}^T\mathbf{x}.$$

Se verifică direct că echivalența este o relație de echivalență, adică este reflexivă, simetrică și tranzitivă.

Se constată că două sisteme echivalente după stare au aceeași dimensiune și aceeași f.d.t.:

$$\begin{aligned} \hat{H}(s) &= \hat{\mathbf{c}}^T[s\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}}]^{-1}\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{c}}^T\mathbf{T}^{-1}[s\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1} - \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}]^{-1}\mathbf{T}\mathbf{b} = \\ &= \mathbf{c}^T[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{b} = H(s). \end{aligned} \quad (8.65)$$

Adoptarea unei realizări sau a alteia se va face, reieșind din scopul urmărit (analiza sau sinteza sistemului automat) și totodată ținând seama de eficiența calculului.

Observație: Pentru două sisteme echivalente pe stare, se subînțelege același sistem dar văzut însă în două sisteme de coordonate diferite, legate între ele prin matricea \mathbf{T} , care este doar matricea de transformare.

Realizările echivalente ale unui sistem au următoarele proprietăți importante:

- conduc la aceeași f.d.t. $H(s)$;
- au același polinom caracteristic $A(s)$;

- evidențiază aceleași proprietăți ale sistemului.

Utilitatea diferitelor reprezentări echivalente constă în faptul că ele pot confirma nemijlocit proprietățile structurale ale sistemului.

Căutarea unei anumite forme canonice este adeseori laborioasă și revine la definirea matricei de transformare T .

8.5 Proprietățile structurale ale sistemelor liniare

Se consideră sistemul descris de modelul de stare în forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (8.66)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}.$$

Principalele proprietăți structurale ale sistemului automat (8.64) pe baza cărora se rezolvă problemele de analiză și sinteză sistemică sunt controlabilitatea (accesibilitatea) și observabilitatea (constructibilitatea) [1-6, 9, 13-15, 18, 20].

Controlabilitatea stării sistemului automat $\mathbf{x}(t)$ se obține prin variația vectorului de intrare $\mathbf{u}(t)$, iar *observabilitatea* stării sistemului automat $\mathbf{x}(t)$ se obține prin măsurarea vectorului de ieșire $\mathbf{y}(t)$.

Astfel, rezultă două probleme, care au o deosebită importanță pentru teoria sistemelor automate.

1. Se poate oare **trecurt** sistemul automat din starea inițială $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ în oricare altă stare $\mathbf{x}(t_1)$ pentru timpul $t_1 > t_0$ prin variația respectivă a vectorului de intrare $\mathbf{u}(t)$?

2. Se poate oare, dacă vom observa vectorul ieșirii $\mathbf{y}(t)$ într-un timp nemărginit, să se determine starea inițială $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ a sistemului automat?

Prima problemă se referă la noțiunea de controlabilitate a unui sistem automat.

A doua problemă se referă în cadrul noțiunii de observabilitate a sistemului automat.

Controlabilitatea este proprietatea structurală a sistemului automat care pune în evidență posibilitatea determinării unei astfel de conduceri ca sistemul să se transfere din starea inițială în starea finală.

Definiție. Sistemul automat (obiectul de reglare) este *controlabil*, dacă se obține în timpul t_1 ($t_1 > t_0$) un vector de intrare $\mathbf{u}(t)$, care transferă sistemul din starea inițială (\mathbf{x}_0, t_0) în starea finală $\mathbf{x}(t_1) = (\mathbf{x}(t_1), t_1)$.

Dacă sistemul automat este controlabil pentru orice valoare a lui t_0 și t_1 ($t_1 > t_0$) și o comandă $\mathbf{u}(t)$ ($t_0 \leq t \leq t_1$), care transferă sistemul din starea inițială (\mathbf{x}_0, t_0) în starea finală (\mathbf{x}_1, t_1) , atunci sistemul este *complet controlabil*.

Pentru a determina controlabilitatea stării sistemului automat se utilizează criteriul (sau teorema) Kalman reprezentat prin matricea de controlabilitate \mathbf{R} dată de relația [18]:

$$\mathbf{R} = [\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \mathbf{A}^2\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = \text{rang}\mathbf{R} = n. \quad (8.67)$$

Dacă sistemul de matrice (\mathbf{A}, \mathbf{B}) este controlabil, atunci matricea \mathbf{R} are rangul n .

Dacă matricea \mathbf{R} va avea rangul n pentru $\gamma < n$, atunci rangul se calculează prin relația:

$$\text{rang}\mathbf{R}_\gamma = \text{rang}[\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \mathbf{A}^2\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{A}^{\gamma-1}\mathbf{B}] = n. \quad (8.68)$$

Dacă sistemul de matrice (\mathbf{A}, \mathbf{B}) este controlabil, atunci cel mai mic întreg k care satisface relația (8.68) se notează prin γ și este numit *indice de controlabilitate* al perechii de matrice (\mathbf{A}, \mathbf{B}) sau al sistemului.

Pentru verificarea controlabilității se utilizează metode directe și metode indirecte. Prin metodele directe se evaluează rangul matricei controlabilității \mathbf{R} .

Prin metodele indirecte se utilizează o etapă intermediară de transformare a matricelor sistemului pentru a simplifica operațiile de verificare a rang $\mathbf{R} = n$.

Utilizând definiția controlabilității, se deduce un criteriu de verificare a controlabilității, care pentru un timp t_1 soluția ecuației de stare se dă:

$$\mathbf{0} = \mathbf{e}^{At_1}\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{e}^{A(t_1-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau, \quad (8.69)$$

pentru care e^{At_1} este nesingulară și din (8.69) se obține:

$$-\mathbf{x}_0 = \int_0^{t_1} e^{-A\tau} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (8.70)$$

Prezentând matricea exponențială din (8.70) în serie de forma:

$$e^{-A\tau} = \alpha_0(\tau) \mathbf{I} + \alpha_1(\tau) \mathbf{A} + \alpha_2(\tau) \mathbf{A}^2 + \dots + \alpha_{n-1}(\tau) \mathbf{A}^{n-1} \quad (8.71)$$

expresia (8.70) se transformă în forma:

$$-\mathbf{x}_0 = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{A}^j \mathbf{B} \int_0^{t_1} \alpha_j(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (8.72)$$

Fiecare termen definit de integrală este un vector constant de dimensiunea $m \times l$:

$$\mathbf{v}_j = \int_0^{t_1} \alpha_j(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (8.73)$$

Expresia (8.72) cu aplicarea relației (8.73) are forma:

$$-\mathbf{x}_0 = [\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \mathbf{A}^2\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (8.74)$$

Relația (8.74) evidențiază condiția că orice vector $-\mathbf{x}_0$ se exprimă ca o combinație liniară a coloanelor matricei (8.67).

O formă mai strictă de controlabilitate este normalitatea sistemului (8.66).

Definiție. Sistemul (8.66) este *normalizat* dacă fiecare componentă a vectorului de comandă \mathbf{u} separat asigură controlabilitatea sistemului.

Dacă sistemul (obiectul de reglare) este cu o singură mărime de conducere $\dim \mathbf{u} = 1$, atunci $\mathbf{B} = \mathbf{b}$ și matricea de controlabilitate este:

$$\mathbf{R} = [\mathbf{b} \ \mathbf{A}\mathbf{b} \ \mathbf{A}^2\mathbf{b} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}]. \quad (8.75)$$

În acest caz, sistemul este complet controlabil, dacă determinantul matricei de controlabilitate este diferit de zero:

$$\det \mathbf{R} \neq 0. \quad (8.76)$$

Exemplul 8.4. Se consideră sistemul (8.66) monovariabil în forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ 0 & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

sau în forma:

$$\dot{x}_1 = \mathbf{A}_{11}x_1 + \mathbf{A}_{12}x_2 + \mathbf{b}_1u,$$

$$\dot{x}_2 = \mathbf{A}_{22}x_2,$$

unde matricea \mathbf{A} este reprezentată prin blocurile \mathbf{A}_{11} , \mathbf{A}_{12} , \mathbf{A}_{22} .

Sistemului ecuațiilor de stare îi corespunde structura sistemului din figura 8.8.

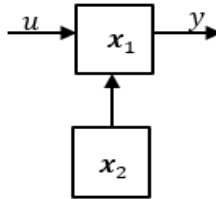


Fig. 8.8. Structura sistemului automat

Din structura sistemului se constată că mărimea de conducere u acționează numai la blocul cu vectorul de stare x_1 , iar partea sistemului cu blocul vectorului de stare x_2 nu este supusă acțiunii mărimii de conducere u .

În concluzie rezultă că blocul cu vectorul de stare x_1 este controlabil, iar blocul cu vectorul de stare x_2 nu este controlabil. ■

Exemplul 8.5. Fie sistemul descris de funcția de transfer de forma:

$$H(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{1}{s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0},$$

căreia îi corespunde ecuația diferențială:

$$\ddot{y}(t) + a_2\dot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = u(t).$$

Se cere să se verifice controlabilitatea sistemului.

Soluționare: Se introduc variabile de stare:

$$x_1 = y, \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2, \dot{x}_2 = \ddot{y} = x_3.$$

Ecuția diferențială intrare-ieșire se prezintă cu sistemul de ecuații diferențiale în variabilele de stare de forma:

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = x_3,$$

$$\dot{x}_3 = -a_0x_1 - a_1x_2 - a_2x_3 + u.$$

Introducând vectorul de stare $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$, sistemul ecuațiilor de stare obține forma vector-matriceală:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

sau forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{bu},$$

unde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

După ordinul sistemului $n = 3$ se determină numărul componentelor în matricea controlabilității care are forma:

$$\mathbf{R} = [\mathbf{b} \ \mathbf{Ab} \ \mathbf{A}^2\mathbf{b}].$$

În continuare se calculează componentele matricii \mathbf{R} :

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{Ab} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -a_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}^2\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 - a_1 - a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 - a_1 - a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_2 \\ a_2^2 - a_1 \end{bmatrix},$$

după care se construiește matricea controlabilității sistemului:

$$\mathbf{R} = [\mathbf{b} \quad \mathbf{Ab} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a_2 \\ 1 - a_2 & a_2^2 - a_1 \end{bmatrix}.$$

Se calculează determinantul matricei:

$$\det \mathbf{R} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a_2 \\ 1 - a_2 & a_2^2 - a_1 \end{vmatrix} = -1,$$

care este diferit de zero și rezultă că sistemul este controlabil. ■

Exemplul 8.6. Sistemul multivariabil se descrie prin sistemul de ecuații de stare:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

sau în forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu},$$

unde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se cere să se verifice controlabilitatea sistemului.

Soluționare. Sistemul după stare este de ordinul $n = 3$, deci matricea de controlabilitate are forma:

$$\mathbf{R} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B}].$$

Se calculează componentele matricei \mathbf{R} :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}^2\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rezultă matricea de controlabilitate:

$$\mathbf{R} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

de unde se determină rangul $r = 2$, care este mai mic decât ordinul sistemului $n = 3$.

Pentru determinarea rangului matricei \mathbf{R} se calculează minorii matricei după care se stabilește rangul.

Conform criteriului de controlabilitate (8.67), sistemul nu este complet controlabil.■

Observabilitatea este o proprietate structurală a sistemului automat care pune în evidență posibilitatea determinării unei stări din prelucrarea mărimii măsurate $\mathbf{y}(t)$ a ieșirii.

Definiție. Sistemul (obiectul de reglare) este *observabil*, dacă pentru măsurările (observările) obținute $\mathbf{y}(t)$ și $\mathbf{u}(t)$ pentru un interval determinat de timp $t_0 \leq t \leq t_1$ se poate obține numai o stare inițială $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$.

Pentru realizarea măsurărilor (observărilor) în sistemul real este necesar a asigura accesibilitatea la mărimile măsurabile ale sistemului.

Sistemul automat este *complet observabil*, dacă sunt observabile toate stările sistemului în orice moment de timp.

Pentru determinarea observabilității sistemului automat se folosește criteriul (sau teorema) Kalman exprimat prin matricea de observabilitate \mathbf{Q} dată de relația:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (8.77)$$

sau în forma transpusă:

$$\mathbf{Q}^T = [\mathbf{c}^T \ \mathbf{A}^T \mathbf{c}^T \ (\mathbf{A}^T)^2 \mathbf{c}^T \ \dots \ (\mathbf{A}^T)^{n-1} \mathbf{c}^T].$$

Dacă perechea de matrice (\mathbf{C}, \mathbf{A}) este observabilă, atunci matricea de observabilitate \mathbf{Q} are rangul n :

$$\text{rang} \mathbf{Q} = n. \quad (8.78)$$

Observabilitatea sistemului automat se obține din proprietățile matricelor \mathbf{A} și \mathbf{C} .

Dacă matricea \mathbf{Q} are rangul n pentru $\mu < n$ exprimat prin relația:

$$\text{rang} \mathbf{Q}_\mu = \text{rang}[\mathbf{c}^T \ \mathbf{A}^T \mathbf{c}^T \ (\mathbf{A}^T)^2 \mathbf{c}^T \ \dots \ (\mathbf{A}^T)^{\mu-1} \mathbf{c}^T], \quad (8.79)$$

atunci cel mai mic întreg k pentru care $\text{rang} \mathbf{Q} = n$ se notează prin μ și se numește indice de observabilitate al perechii de matrice (\mathbf{C}, \mathbf{A}) sau al sistemului.

Dacă sistemul (obiectul de reglare) are o singură mărime de conducere $\dim y = 1$, $y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathbf{d}^T \mathbf{u}$ și matricea de observabilitate are forma:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{cA} \\ \vdots \\ \mathbf{cA}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (8.80)$$

sau forma transpusă:

$$\mathbf{Q}^T = [\mathbf{c}^T \ \mathbf{A}^T \mathbf{c}^T \ (\mathbf{A}^T)^2 \mathbf{c}^T \ \dots \ (\mathbf{A}^T)^{n-1} \mathbf{c}^T].$$

În acest caz, sistemul (obiectul de reglare) este complet observabil, dacă determinantul matricei de observabilitate este diferit de zero:

$$\det \mathbf{Q} \neq 0. \quad (8.81)$$

Problema inversă a construcției vectorului de ieșire $\mathbf{y}(t)$ din vectorul $\mathbf{x}_0(t)$ care se dă reprezintă proprietatea de *constructibilitate*. O pereche de matrice (\mathbf{C}, \mathbf{A}) observabilă este și construibilă, dar sistemul construibil nu este și observabil.

Pornind de la definiția matricelor de controlabilitate \mathbf{R} și observabilitate \mathbf{Q} , se constată că proprietățile de controlabilitate și observabilitate sunt duale. Dacă perechea de matrice (\mathbf{C}, \mathbf{A}) este observabilă, atunci perechea de matrice $(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T)$ este controlabilă și dacă perechea de matrice (\mathbf{A}, \mathbf{B}) este controlabilă, atunci perechea de matrice $(\mathbf{B}^T, \mathbf{A}^T)$ este observabilă.

Acest moment este ușor de verificat, fiindcă dacă $\text{rang} \mathbf{R} = n$, atunci $\text{rang} \mathbf{R}^T = n$.

O realizare minimală pentru un sistem constată că sistemul este complet observabil și complet controlabil și $\text{rang} \mathbf{QR} = n$.

Astfel, studierea tripletului de matrice $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ permite a determina proprietățile principale ale sistemului automat: *accesibilitatea, observabilitatea, controlabilitatea și constructibilitatea*.

Exemplul 8.7. Sistemul este descris de ecuația diferențială de ordinul doi:

$$a_2 \ddot{y}(t) - a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = bu(t),$$

unde coeficienții au valorile numerice $a_2 = 2$, $a_1 = 4$, $a_0 = 1$, $b = 1$.

Ecuația diferențială inițială se prezintă în forma monică (coeficientul $a_2 = 1$) și după transformările respective cu datele numerice are forma:

$$\ddot{y}(t) - 2\dot{y}(t) + 0.5y(t) = 0.5u(t).$$

Se cere să se verifice observabilitatea sistemului.

Soluționare. Se introduc variabilele de stare:

$$x_1 = y, \quad \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2, \quad \dot{x}_2 = \ddot{y}$$

și se obține sistemul ecuațiilor de stare și ecuația ieșirii:

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -0.5x_1 + 2x_2 + 0.5u,$$

$$y = x_1$$

sau în forma vector-matriceală:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} u,$$

$$y = [1 \quad 0]\mathbf{x},$$

sau

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u,$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x},$$

unde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \mathbf{c}^T = [1 \quad 0].$$

Sistemul este de ordinul doi și matricea de observabilitate (8.77) conține două componente:

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{c}^T \quad \mathbf{c}^T \mathbf{A}^T].$$

Se calculează componentele matricei:

$$\mathbf{c}^T = [0 \quad 1], \mathbf{c}^T \mathbf{A}^T = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} -0.5 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Se calculează matricea de observabilitate:

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{c}^T \quad \mathbf{c}^T \mathbf{A}^T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se calculează determinantul matricei de observabilitate:

$$\det \mathbf{Q} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

și rezultă că sistemul este complet observabil, deoarece determinantul nu este egal cu zero. ■

Exemplul 8.8. Se consideră sistemul de ordinul $n = 3$ descris de ecuațiile de stare în forma:

$$\dot{x}_1 = x_2 - u,$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= 5x_1 + 2x_3 + u, \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 + 2x_3 - u, \\ y &= -2x_1 + x_2.\end{aligned}$$

Se cere să se verifice observabilitatea sistemului.

Soluționare. Sistemul de ecuații se prezintă în forma vector-matriceală:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} u,$$

$$y = -2x_1 + x_2,$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u,$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x},$$

unde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{c}^T = [-2 \quad 1 \quad 0].$$

Se determină matricea de observabilitate cu trei componente:

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{c}^T \quad \mathbf{A}^T \mathbf{c}^T \quad (\mathbf{A}^T)^2 \mathbf{c}^T] = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -14 \\ 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & -8 \end{bmatrix},$$

pentru care se calculează determinantul matricei:

$$\det \mathbf{Q} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -14 \\ 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & -8 \end{vmatrix} = 24.$$

Conform condiției (8.81), sistemul este complet observabil. ■

În continuare se analizează un sistem pentru care se obțin forme de descriere intrare-stare inițială-ieșire, proprietăți, realizări minimale.

Exemplul 8.9. Este dat sistemul automat descris prin relația intrare-stare inițială-ieșire de forma:

$$y(t) = e^{-t}x_1(0) + e^{-2t}x_2(0) + e^{-3t}x_3(0) +$$

$$+ \int_0^t [e^{-(t-\theta)} + 2e^{-2(t-\theta)} + e^{-3(t-\theta)}] u(\theta) d\theta.$$

Se cere să se determine:

1. Vectorul funcțiilor de bază.
2. Matricea de tranziție normată a stării.
3. Răspunsul la impuls al stării.
4. Modelul matematic intrare-stare-ieșire (ISI).
5. Verificarea relațiilor dintre matricea de tranziție și răspunsul la impuls al stării sistemului.

Rezolvare 1. Componentele vectorului funcțiilor de bază se obțin prin identificarea răspunsului la intrarea nulă dat de relația:

$$y(t) = y_l(t) + y_f(t),$$

$$y_l(t) = \varphi^T(t)x(0),$$

unde

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \varphi_3(t) \end{bmatrix},$$

$$y_l(t) = \varphi_1(t)x_1(0) + \varphi_2(t)x_2(0) + \varphi_3(t)x_3(0),$$

$$y_f(t) = \int_0^t w(t - \theta)u(\theta) d\theta.$$

În baza expresiilor de mai sus se determină vectorul funcțiilor de bază:

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \\ e^{-3t} \end{bmatrix}.$$

2. Matricea de tranziție a stării se construiește cu componentele vectorului funcțiilor de bază:

$$\boldsymbol{\varphi}_0(t) = \begin{bmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \varphi_3(t) \\ \dot{\varphi}_1(t) & \dot{\varphi}_2(t) & \dot{\varphi}_3(t) \\ \ddot{\varphi}_1(t) & \ddot{\varphi}_2(t) & \ddot{\varphi}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-2t} & e^{-3t} \\ -e^{-t} & -2e^{-2t} & -3e^{-3t} \\ e^{-t} & 4e^{-2t} & 9e^{-3t} \end{bmatrix}.$$

Se calculează matricea de tranziție a stării la condiții inițiale $t = 0$:

$$\boldsymbol{\varphi}_0(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}_{t=0} \neq \mathbf{I}_{3 \times 3}.$$

Rezultă că matricea de tranziție a stării $\boldsymbol{\varphi}_0(t)$ este nenormată.
Pentru normarea acestei matrice se utilizează relația matriceală:

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\varphi}_0(t)\boldsymbol{\varphi}_0^{-1}(0),$$

unde

$$\boldsymbol{\varphi}_0^{-1}(0) = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -6 & -5 & -1 \\ 6 & 8 & 2 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5/2 & 1/2 \\ -3 & -4 & -1 \\ 1 & 3/2 & 1/2 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \begin{bmatrix} 3e^{-t} - 3e^{-2t} + e^{-3t} & \frac{5}{2}e^{-t} - 4e^{-2t} + \frac{3}{2}e^{-3t} & \frac{1}{2}e^{-t} - e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t} \\ -3e^{-t} + 6e^{-2t} - e^{-3t} & -\frac{5}{2}e^{-t} + 8e^{-2t} + \frac{9}{2}e^{-3t} & -\frac{1}{2}e^{-t} + 2e^{-2t} - \frac{3}{2}e^{-3t} \\ 3e^{-t} - 12e^{-2t} + 9e^{-3t} & \frac{5}{2}e^{-t} - 16e^{-2t} + \frac{27}{2}e^{-3t} & \frac{1}{2}e^{-t} - 4e^{-2t} + \frac{9}{2}e^{-3t} \end{bmatrix}.$$

3. Răspunsul la impuls al stării este vectorul de forma:

$$\bar{\boldsymbol{w}}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}(t) \\ \dot{\boldsymbol{w}}(t) \\ \ddot{\boldsymbol{w}}(t) \end{bmatrix},$$

unde $\boldsymbol{w}(t) = e^{-t} + 2e^{-2t} + e^{-3t}$ și se obține din identificarea răspunsului forțat.
Înlocuim pe $\boldsymbol{w}(t)$ în $\bar{\boldsymbol{w}}(t)$ și se obține:

$$\bar{\boldsymbol{w}}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} + 2e^{-2t} + e^{-3t} \\ -e^{-t} - 4e^{-2t} - 3e^{-3t} \\ e^{-t} + 8e^{-2t} + 9e^{-3t} \end{bmatrix}.$$

4. Se determină modelul matematic intrare-stare-ieșire:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{\varphi}(0)\boldsymbol{x}(t) + \bar{\boldsymbol{w}}(0)u(t),$$

$$y(t) = \boldsymbol{\varphi}^T(0)\boldsymbol{x}(t),$$

unde

$$\boldsymbol{\varphi}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b} = \bar{\boldsymbol{w}}(0) = [4 \quad -8 \quad 18]^T,$$

$$\boldsymbol{c}^T = \boldsymbol{\varphi}^T(0) = [1 \quad 1 \quad 1]^T, \boldsymbol{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T.$$

5. Se verifică prin calcul că relația dintre matricea de transfer și răspunsul la impuls al stării este:

$$\bar{\mathbf{w}}(t) = \boldsymbol{\varphi}(0)\bar{\mathbf{w}}(0)$$

și utilizând ecuațiile de stare și de ieșire se obține:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{w}(t - \theta)\mathbf{b}u(\theta)d\theta,$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \boldsymbol{\varphi}(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{c}^T \boldsymbol{\varphi}(t - \theta)u(\theta)d\theta. \blacksquare$$

Exemplul 8.10. Se dă sistemul automat descris prin sistemul ecuațiilor de stare:

$$\dot{x}_1(t) = -3x_1(t) + x_2(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = -2x_1(t) + u(t),$$

$$y(t) = x_1(t).$$

În reprezentarea vector-matriceală de stare sistemul de mai sus ia forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t),$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t),$$

unde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Se cere să se determine:

1. Vectorul funcțiilor de bază.
2. Răspunsul la impuls al sistemului.
3. Ecuația intrare-stare inițială-ieșire.
4. Matricea de tranziție normală a stărilor.
5. Funcția de transfer a sistemului.
6. Matricea de controlabilitate și observabilitate a sistemului și să se

precizeze natura acestora.

Rezolvare.

1. Se calculează vectorul funcțiilor de bază, aplicând transformata Laplace ecuației matriceale de stare și se obține:

$$s\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{x}(s) + \mathbf{b}u(s),$$

$$y(s) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(s).$$

Din acest sistem, după unele transformări, se determină vectorul de stare și se calculează mărimea de ieșire:

$$\mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}u(s),$$

$$y(s) = \mathbf{c}^T(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + \mathbf{c}^T(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}u(s) = y_i(s) + y_f(s).$$

Se prezintă răspunsul sistemului în domeniul timpului:

$$\begin{aligned} y(t) &= L^{-1}[y(s)] = L^{-1}[\mathbf{c}^T(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0)] + L^{-1}[\mathbf{c}^T(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}u(s)] = \\ &= y_i(t) + y_f(t) = \boldsymbol{\varphi}^T(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{w}(t - \theta)\mathbf{b}u(\theta)d\theta, \end{aligned}$$

unde

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}^T(t) &= L^{-1}[\mathbf{c}^T(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] = L^{-1}\left[\frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -2 & s+3 \end{bmatrix}}{s^2 + 3s + 2}\right] = \\ &= L^{-1}\left[\begin{bmatrix} \frac{s}{s^2+3s+2} & \frac{1}{s^2+3s+2} \end{bmatrix}\right] = [-e^{-t} + 2e^{-2t} \quad e^{-t} - e^{2t}]. \end{aligned}$$

2. Se determină răspunsul la impuls al sistemului:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(t) &= L^{-1}[\mathbf{c}^T(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}] = L^{-1}\left[\frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -2 & s+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{s^2+3s+2}\right] = \\ &= L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+3s+2}\right] = e^{-t} - e^{-2t}. \end{aligned}$$

3. Se determină ecuația intrare-stare inițială-ieșire:

$$\begin{aligned} y(t) &= (-e^{-t} + 2e^{-2t})x_1(0) + (e^{-t} - e^{-2t})x_2(0) + \\ &+ \int_0^t [e^{-(t-\theta)} \quad e^{-2(t-\theta)}]u(\theta)d\theta. \end{aligned}$$

4. Matricea de tranziție normată a stărilor se determină prin relația:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}(t) &= L^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] = L^{-1}\left[\frac{\begin{bmatrix} s & 1 \\ (s+1)(s+2) & (s+1)(s+2) \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -2 & s+3 \\ (s+1)(s+2) & (s+1)(s+2) \end{bmatrix}}\right] = \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t} + 2e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & 2e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

de unde se obține:

$$\boldsymbol{\varphi}(0) = I_{2 \times 2}.$$

Matricea de tranziție a stărilor se poate calcula cu aplicarea directă a definiției acesteia prin intermediul vectorului funcțiilor de bază:

$$\boldsymbol{\varphi}_0(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}^T(t) \\ \dot{\boldsymbol{\varphi}}^T(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-t} + 2e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ e^{-t} - 4e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix},$$

iar

$$\boldsymbol{\varphi}_0(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix},$$

dar care nu este normalată.

Pentru normarea matricei se utilizează relația matriceală:

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\varphi}_0(t)\boldsymbol{\varphi}_0^{-1}(0).$$

5. Se determină funcția de transfer a sistemului care este transformata Laplace a răspunsului la impuls, $w(t)$:

$$H(s) = L[w(t)] = L[e^{-t} - e^{-2t}] = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}.$$

Funcția de transfer a sistemului se poate calcula și pe baza relației matriceale:

$$H(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -2 & s+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}.$$

6. Pentru studiul controlabilității sistemului automat se determină matricea fundamentală de controlabilitate:

$$\mathbf{R} = [\mathbf{b} \quad \mathbf{Ab}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} (\mathbf{Ab} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -3 * 0 + 1 * 1 \\ -2 * 0 + 0 * 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pentru ca sistemul să fie complet controlabil este necesar ca $\det \mathbf{R} \neq 0$ și în acest caz $\det \mathbf{R} = -1$. Rezultă că sistemul automat este complet controlabil.

7. Pentru studiul observabilității sistemului se determină matricea fundamentală de observabilitate:

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{c} \quad \mathbf{A}^T \mathbf{c}] = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1.$$

Sistemul automat va fi complet observabil dacă $\det \mathbf{Q} \neq 0$ și în acest caz $\det \mathbf{Q} = 1$. Rezultă că sistemul este complet observabil.

În rezultat, sistemul automat este complet controlabil și complet observabil. ■

Chestionar și probleme

1. Care este diferența dintre modele intrare-ieșire și intrare-stare-ieșire?
2. Ce reprezintă ecuațiile de stare și variabilele de stare?
3. Se consideră ecuația diferențială care descrie sistemul automat:

$$a_4 y^{(4)}(t) + a_3 \ddot{y}(t) + a_2 \dot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = bu(t).$$

Se cere să se obțină ecuațiile de stare și forma vector-matriceală.

4. Ce proprietăți ale sistemului reprezintă matricea A în ecuația vector-matriceală?
5. Cum se determină ieșirea sistemului prin variabilele de stare?
6. Explicați noțiunea de realizare a funcției de transfer a sistemului.
7. Care este sensul fizic al noțiunii de controlabilitate a sistemului?
8. Care este sensul fizic al noțiunii de observabilitate a sistemului?
9. Cum se determină controlabilitatea sistemului?
10. Cum se determină observabilitatea sistemului?
11. Se consideră ecuația diferențială a sistemului automat din exemplul din p.3. Determinați forma de realizare canonică controlabilă.
12. Se consideră ecuația diferențială a sistemului automat din exemplul din p.3. Determinați forma de realizare canonică observabilă.
13. Se consideră funcția de transfer a sistemului deschis:

$$H_d(s) = \frac{k}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{2}{3s^3 + 6s^2 + 5s + 4}.$$

Calculați ecuațiile de stare ale sistemului închis și forma vector-matriceală.

14. Utilizând matricea A obținută în p. 13, prezentați matricea de transfer $H(s)$ a sistemului.
15. Pentru matricea A obținută în p. 14, prezentați ecuația caracteristică a sistemului.
16. Se consideră funcția de transfer a sistemului deschis în punctul 13 și se cere să se verifice controlabilitatea sistemului închis.
17. Se consideră funcția de transfer a sistemului deschis în punctul 13 și se cere să se verifice observabilitatea sistemului închis.
18. Explicați noțiunea de matrice a tranzițiilor de stare.
19. Se consideră sistemul de ordinul $n = 3$ descris de ecuațiile de stare:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + u_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3 + u_1, \\ \dot{x}_3 &= -x_3 + au,\end{aligned}$$

Determinați controlabilitatea sistemului automat.

9 SINTEZA SISTEMULUI DE REGLARE AUTOMATĂ

9.1 Structura sistemului de reglare automată

În etapa actuală de proiectare a sistemului automat există două clase de probleme contradictorii.

1. Sistemul automat trebuie să fie robust stabil (stabilizarea regimului de funcționare și garantarea marginii de amplitudine și fază) la modificarea parametrilor sub acțiunea diversilor factori interni și externi.

2. Sistemul automat să aibă performanțe ridicate în regimurile tranzitorii și staționare (precizie în regim staționar, rapiditate, timp de reglare redus, rejecția acțiunilor perturbației etc.) la acțiunea semnalelor de referință și perturbației.

Construirea unui sistem automat se realizează prin calculul energetic la alegerea și dimensionarea elementelor funcționale ale sistemului (fig. 9.1), alcătuită din elementele din canalul direct: elementul de amplificare (EA) cu f.d.t. $H_A(s)$, elementul de execuție (EE) cu f.d.t. $H_E(s)$, procesul (P) cu f.d.t. $H_P(s)$, iar în canalul de reacție traductorul (Tr) cu f.d.t. $H_{tr}(s)$. Asupra sistemului acționează semnalele de referință $r(s)$ și perturbația $p(s)$. Mărimea $u(s)$ este mărimea de conducere/reglare, $y(s)$ – mărimea de ieșire (mărimea condusă/reglată), $\varepsilon(s)$ – eroarea sistemului, $y_r(s)$ – semnalul reacției.

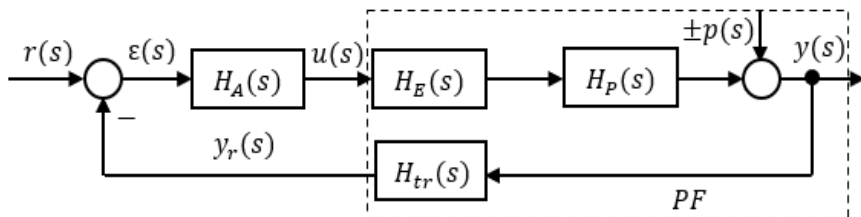


Fig. 9.1. Schema bloc structurală a sistemului de reglare automată

Structura sistemului este alcătuită din minimum de elemente funcționale necesare pentru funcționarea lui și este numită structură convențională a sistemului automat [1, 4, 7-9, 11, 15, 18, 21].

În procesul de funcționare al sistemului automat, ansamblul din

elementul de execuție EE, procesul condus P și traductorul Tr (figura încadrată cu linie întreruptă) nu își modifică parametrii și atunci acest ansamblu este numit partea fixată (PF) a sistemului cu f.d.t. echivalentă a conexiunii în serie:

$$H_{PF}(s) = H_E(s)H_P(s)H_{tr}(s) \quad (9.1)$$

și structura sistemului se reduce la structura dată în figura 9.2.

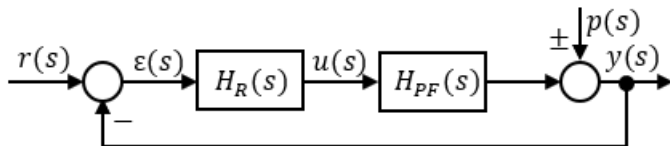


Fig. 9.2. Schema structurală a sistemului de reglare automată

Ambele structuri ale sistemului automat urmăresc același scop de a realiza sistemul stabil și cu performanțe impuse.

Conceptual structura sistemului automat din figura 9.1 poate să nu corespundă cerințelor de stabilitate și performanțelor impuse sistemului. Din aceste considerente este strict necesar ca în structura sistemului să fie introduse elemente adugătoare conectate în modul corespunzător pentru a realiza cerințele impuse sistemului.

În sistemul automat se determină eroarea (abaterea) dintre semnalul referinței ca semnal etalon și semnalul mărimii măsurate a ieșirii sistemului:

$$\varepsilon(t) = r(t) - y(t), \quad (9.2)$$

care are rolul decizional.

Există două posibilități de proiectare a structurii sistemului de reglare automată.

1. În structura sistemului automat (fig. 9.1) se introduc elemente de corecție conectate în modul corespunzător.
2. În structura sistemului automat (fig. 9.2) cu partea fixată cu f.d.t. $H_{PF}(s)$ se substituie amplificatorul cu f.d.t. $H_A(s)$ cu regulatorul

automat cu f.d.t. $H_R(s)$, pentru care se sintetizează algoritmul de reglare – mărimea de conducere care este funcție de eroarea sistemului:

$$u(t) = f(\varepsilon(t)). \quad (9.3)$$

Algoritmii liniari tipici au fost expuși în punctul 1.5.2.

Definiție. Conducerea (reglarea) automată este un proces sistemic decizional pe baza erorii, evoluând în mod automat, duce la anularea erorii staționare $\varepsilon = 0$.

În sistemul de urmărire funcția de reglare – anularea erorii este urmărirea cât mai fidelă de către mărimea de ieșire $y(t)$ a referinței.

În sistemul de rejecție a perturbațiilor se asigură menținerea constantă (la o valoare prescrisă), independent de perturbații, a mărimii de ieșire a sistemului. În cazul măsurării perturbațiilor, decizia în sistemul de rejecție a perturbațiilor măsurabile se realizează pe baza măsurării acestora.

În cazul prezentat eroarea sistemului se prelucrează cu cea mai elementară structură de regulator. Structuri flexibile de reglatoare se obțin când se prelucrează decizional, diferențiat semnalul referinței $r(t)$, mărimii de ieșire $y(t)$, erorii $\varepsilon(t)$ și perturbației $p(t)$, obținând structuri de reglatoare cu multiple grade de libertate, care pot asigura o evoluție dorită a sistemului proiectat atât în raport cu referința, cât și în raport cu perturbața.

În rezultatul proiectării sistemului automat la o referință constantă, acesta trebuie să fie fizic realizabil, stabil și robust la variația parametrilor obiectului condus și să asigure performanțele impuse în regimul tranzitoriu și staționar al sistemului.

9.2 Formularea problemei de proiectare a sistemului de reglare automată

Pentru sinteza unui sistem de reglare automată se impune definirea obiectivelor și cerințelor de performanță necesare în alegerea unei soluții optime de automatizare a procesului condus.

Sinteza unui regulator presupune parcurgerea a trei etape:

1. Sinteza modelului optimal al regulatorului.
2. Sinteza structurii optimale de realizare a modelului optimal al regulatorului.
3. Sinteza parametrilor optimali ai regulatorului, care mai este numită acordarea parametrilor regulatorului.

Pornind de la structura sistemului din figura 9.2, se formulează problema de proiectare a algoritmului de conducere/reglare ce reprezintă o procedură de parcurgere a următoarelor etape:

1. Se consideră modelul matematic al procesului condus în forma funcției de transfer cu parametrii cunoscuți.
2. Se impun performanțele sistemului automat proiectat.
3. Pornind de la modelul obiectului și performanțele impuse, în baza unor proceduri se construiește funcția de transfer a sistemului automat închis:

$$H_0(s) = \frac{H_R(s)H_{PF}(s)}{1+H_R(s)H_{PF}(s)} = \frac{B(s)}{A(s)}, m \leq n \quad (9.4)$$

unde $m \leq n$ este condiția de realizabilitate fizică a sistemului.

4. Se sintetizează algoritmul de conducere din (9.4) în forma funcției de transfer:

$$H_R(s) = \frac{H_0(s)}{1 - H_0(s)} \frac{1}{H_{PF}(s)} = \frac{Q(s)}{P(s)}, m_q \leq n_p, \quad (9.5)$$

unde $Q(s)$ și $P(s)$ sunt polinoamele cu parametrii necunoscuți ai regulatorului și $m_q \leq n_p$ este condiția de realizabilitate fizică a regulatorului.

5. Verificarea realizabilității algoritmilor sintetizați și analiza condițiilor de implementare pe suport tehnic. Algoritmul de conducere elaborat pentru un sistem automat este util și eficient, dacă este implementabil pe suport tehnic cu erori minime. Se face o alegere optimă a echipamentului tehnic care asigură implementarea cât mai precisă a algoritmului de conducere.

6. Validarea soluției obținute prin simularea sistemului și analiza performanțelor acestuia implementat pe procesul condus.

Dacă performanțele obținute corespund cerințelor impuse, atunci procedura de proiectare s-a realizat. În caz contrar, se reia procedura de proiectare cu acordarea parametrilor regulatorului pe procesul în regim de funcționare.

9.3 Modele matematice ale obiectelor de conducere

În realitatea ce ne înconjoară există diverse tipuri de procese industriale, tehnologice, instalații tehnologice, mașini etc., care produc diferite bunuri materiale, diverse servicii în domeniul activității umane.

Procesele pot fi clasificate după mai multe criterii: staționare, nestaționare, termice, electrice, chimice etc. [1-4, 8, 11-13, 16-22].

Din diversitatea proceselor tehnologice se pot evidenția un număr redus de procese simple tipice, care prin combinarea acestora se obțin procese complexe în industrie (nu se referă la procese chimice și biologice):

1. Procese mecanice:
 - 1.1. Procese cu viteză liniară.
 - 1.2. Procese cu viteză unghiulară.
2. Procese termice și de difuzie:
 - 2.1. Procese de încălzire și răcire.
 - 2.2. Procese de uscare și umezire.
 - 2.3. Procese de evaporare.
 - 2.4. Procese de dizolvare.
 - 2.5. Procese de precipitare (depunere) din suspensii.
3. Procese pneumo-hidraulice:
 - 3.1. Procese de umplere/golire a rezervorului cu granule.
 - 3.2. Procese de umplere/golire a rezervorului cu gaze.
 - 3.3. Procese de umplere/golire a rezervorului cu lichid.

În calitate de parametri tehnologici care determină starea procesului se utilizează mărimile: temperatură, debit, presiune, nivel, concentrație etc.

Se evidențiază procese simple și complexe. Procesele simple se prezintă dintr-o capacitate, iar cele complexe – din două și mai multe capacități în care evoluează procesul.

Se prezintă exemple de procese industriale și tehnologice.

1. Se consideră un recipient tehnologic de acumulare a lichidului (fig. 9.3) cu secțiunea transversală S , în care prin conducta C_1 curge fluxul Q_1 , iar prin conducta C_2 se extrage fluxul Q_2 și în rezultat se acumulează o cantitate de lichid de volumul V .

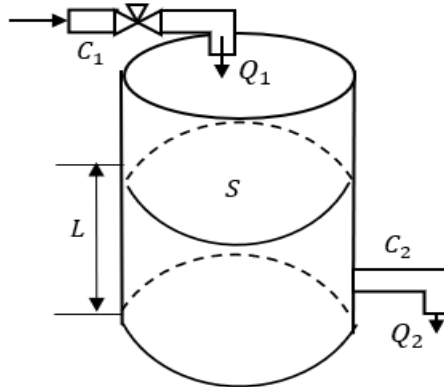


Fig. 9.3. Recipient tehnologic

Pentru descrierea dinamicii acestui proces de acumulare a lichidului în recipient se aplică legea bilanțului material care se exprimă în forma:

$$S\Delta L = (Q_1(t) - Q_2(t))\Delta t, \quad (9.6)$$

sau

$$S \frac{dL(t)}{dt} = Q_1(t) - Q_2(t) = \Delta Q(t) = Q(t), \quad (9.7)$$

unde S este secțiunea transversală, m^2 , L – nivelul lichidului acumulat, m , care este mărimea de ieșire, Q este abaterea ca mărime de intrare.

2. Se consideră o masă m , care este necesar a fi pusă în mișcare. Asupra masei acționează forța P_1 , iar forța de rezistență este forța de frecare P_2 , mărimea de ieșire va fi viteza de mișcare v .

Pentru descrierea dinamicii acestei mase se aplică legea lui Newton care are forma:

$$m \frac{dv(t)}{dt} = P_1(t) - P_2(t) = \Delta P(t) = P(t), \quad (9.8)$$

unde m este masa, kg, v – viteza de mișcare ca ieșire, m/s, P – este mărimea de intrare.

3. Se consideră un motor ideal simbolic prezentat în figura 9.4 cu simbolizările: mărimea de intrare $r(t)$ în baza căreia se dezvoltă momentul dinamic M_d , mărimea de ieșire $n(t)$ sau $\omega(t)$ – viteza unghiulară a rotorului în jurul axei, mărimea M_s – cuplul de sarcină sau perturbația.

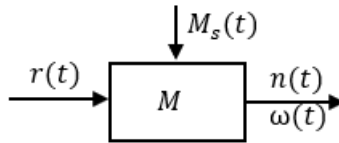


Fig. 9.4. Motor ideal

Pentru descrierea dinamicii motorului ideal (se neglijează momentul de frecare) se aplică legea arborelui (legea Newton, D’Alambert), care are forma:

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} = M_d(\omega) - M_s(\omega) = \Delta M(\omega) = M(\omega), \quad (9.9)$$

unde J este momentul de inerție al rotorului, Nm^2 , ω – viteza unghiulară a rotorului - ieșirea, s^{-1} , M_d – momentul dinamic dezvoltat de motor, Nm, M_s – momentul de sarcină sau de rezistență, Nm, M – este intrarea.

În exemplele de mai sus mărimile S este secțiunea transversală, m – masa, și J – momentul de inerție care exprimă proprietățile interne ale proceselor respective.

Din exemplele analizate, rezultă că ecuațiile diferențiale, care descriu dinamica proceselor, sunt similare după formă și de același ordin.

În baza acestei constatări se dă forma generalizată a descrierii proceselor simbolic reprezentată în figura 9.5 cu următoarele notații. Semnalul mărimii de intrare $x(t)$, ce caracterizează valoarea instantanee a acțiunii energetice sau fluxul de substanță și la procese în mișcare reprezintă forța sau momentul, la procesele hidraulice sau pneumatice este fluxul de intrare al lichidului sau gazului, la procesele termice este cantitatea de căldură etc., $y(t)$ - semnalul mărimii de ieșire, care la mișcare este viteza, la încălzire - temperatura, la umplerea rezervorului cu gaz (lichid) - presiunea etc., L - proprietatea internă care determină intensitatea modificării în timp a mărimii de ieșire.

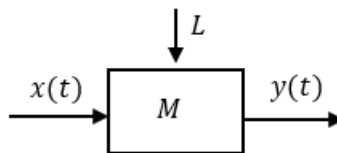


Fig. 9.5. Model de proces

Ecuția diferențială care descrie evoluția (dinamica) unui proces generalizat (fig. 9.5) cu notațiile introduse are forma:

$$L \frac{dy(t)}{dt} = x(t) \quad (9.10)$$

sau

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{1}{L} x(t). \quad (9.11)$$

După integrarea ecuației (9.11) se obține forma integrală:

$$y(t) = \frac{1}{L} \int_0^t x(t) dt. \quad (9.12)$$

Expresia (9.12) descrie dinamica unui element integrator, unde constanta de timp de integrare se determină de valoarea numerică a

parametrului L , ce caracterizează proprietatea internă și exprimă inerția evoluției procesului condus.

Pentru conducerea proceselor, indiferent de tipul proceselor, este necesar să fie cunoscute proprietățile interne și în baza acestora se elaborează algoritmi de conducere.

Se consideră un proces condus cu o capacitate în regim de funcționare care are proprietățile:

1. Proprietatea de acumulare/disipă a energiei, materiei etc. care exprimă inerția procesului.

2. Proprietatea de autoreglare sau autostabilizare a stării procesului.

3. Timpul mort.

Dinamica procesului se descrie prin ecuația diferențială cu inerție de ordinul unu cu timp mort de forma:

$$T_0 \frac{dy(t)}{dt} \pm \rho y(t) = x(t - \tau), \quad (9.13)$$

unde T_0 este constanta de timp a obiectului cu dimensiunea s , care exprimă proprietatea de inerție (acumulare), ρ – coeficientul de autoreglare, adimensional, care exprimă proprietatea procesului de stabilizare după ce a fost excitat de un semnal (prin modificarea condițiilor inițiale sau aplicarea unui semnal), τ – timpul mort cu dimensiunea s , pe durata acestuia la ieșirea obiectului semnalul este egal cu zero.

Mărimile T_0 , ρ , τ se numesc parametrii obiectului condus și exprima proprietățile respective - inerția, autoreglarea și timpul mort.

Ecuația (9.13) mai puțin este aplicată în practică și, din aceste considerente, se aduce la forma canonică, împărțind toți termenii din partea stângă și dreaptă la coeficientul ρ , care are forma:

$$T \frac{dy(t)}{dt} \pm y(t) = kx(t - \tau), \quad (9.14)$$

unde $T = T_0/\rho$ este constanta de timp a procesului, $k = 1/\rho$ – coeficientul de transfer al obiectului condus, τ – timpul mort.

În acest caz, parametrii obiectului condus (reglat) sunt T , k , τ , care exprimă proprietățile procesului real.

După proprietatea de autoreglare a obiectului de reglare rezultă o clasificare a obiectelor (fig. 9.6).

1. Dacă $\rho > 0$, atunci obiectul are regim stabil de funcționare și este numit obiect *static*.

2. Dacă $\rho < 0$, atunci obiectul are regim instabil de funcționare și se numește obiect *instabil*.

3. Dacă $\rho = 0$, atunci obiectul are regim de integrare și se numește obiect *astatic sau neutru*.

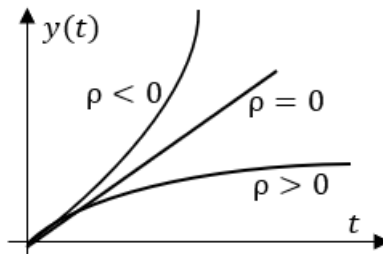


Fig. 9.6. Clasificarea modelelor de procese

Pentru ecuația diferențială (9.14) funcția de transfer are forma:

$$H(s) = \frac{ke^{-\tau s}}{Ts+1}. \quad (9.15)$$

Pentru a obține modelele matematice ale proceselor se utilizează proceduri de identificare:

- 1) metode analitice;
- 2) metode experimentale;
- 3) metode analitico-experimentale.

Metodele analitice constau în aplicarea legilor fundamentale care guvernează procesul pentru a obține modelul matematic al obiectului de reglare. Prin aceste metode este dificil a fi obținut rezultatul scontat.

Metodele experimentale au o largă utilizare și se reduc la ridicarea caracteristicilor de timp (răspunsul indicial, funcția pondere) și funcțiilor frecvențiale și prin proceduri de identificare se determină

modelul matematic al obiectului de reglare în forma funcției de transfer cu parametrii cunoscuți.

Metodele analitico-experimentale se aplică în mod combinat de determinare a modelului matematic al obiectului de reglare cu parametrii cunoscuți.

În această etapă se analizează procesul pentru a cunoaște sursele de energie și modul de utilizare a acestora, a variabilelor măsurabile, a mărimilor de calitate specifice procesului, natura fizică și particularitățile perturbațiilor, care acționează asupra procesului, regimul staționar de funcționare și mediul în care evoluează pentru a adopta o soluție de automatizare.

În urma analizei de proces se vor alege, dimensiona și poziționa *traductoarele și elementele de execuție* în funcție de regimul de funcționare selectat al procesului și a variabilelor măsurabile și controlabile.

Traductoarele (senzorii) au funcția de culegere a informației din proces prin măsurarea și conversia mărimilor fizice ce asigură informația necesară pentru deciziile de conducere a procesului. În cazurile când unele mărimi fizice nu pot fi măsurate, atunci pot fi generate informații despre proces după unele observații și măsurări indirecte, care conduc la ideea de senzor virtual.

Traductoarele se aleg din condiția de satisfacere a unor cerințe: natura fizică a mărimilor măsurate, precizie ridicată de măsurare (rezoluția traductorului), liniaritatea caracteristicii statice, sensibilitatea și capacitatea de rejecție a zgomotelor, finețea și fidelitatea, viteza de răspuns (dinamica), robustețe (viguros, rezistent), preț de cost, compatibilitate cu mediul în care evoluează procesul.

Traductoarele, care conțin în structura lor elemente sensibile și adaptoare de semnal, furnizează mărimea măsurată ca semnal unificat (cel mai utilizat de curent continuu 4-20 mA).

Elementele de execuție reglează fluxurile de energie (substanță) din procesul condus.

Elementele de execuție, datorită proprietățile lor, pot ridica sau reduce performanțele sistemului automat.

Alegerea, dimensionarea și poziționarea elementelor de execuție

se efectuează în baza criteriilor: forța sau cuplul dezvoltat, domeniul de liniaritate al caracteristicii statice cât mai ridicat, dinamica (viteza de răspuns cât mai mare și precizie ridicată) elementului și compatibilitatea cu dinamica procesului, capacitatea organului de execuție pentru asigurarea fluxului de energie necesar compensării perturbațiilor, compatibilitatea elementului de execuție cu mediul industrial, robustețe și siguranță ridicată în funcționare în medii dificile, greutate specifică cât mai redusă și preț de cost cât mai redus.

Performanțele sistemului de reglare automată pot fi influențate de proprietățile neliniare esențiale ale elementelor de execuție.

Tendințele dezvoltării domeniului elementelor de execuție conduce la dezvoltarea unor elemente de execuție inteligente cu ridicată compatibilitate, atât cu instalația tehnologică (procesul), cât și cu sistemele numerice de conducere în timp real.

Ansamblul alcătuit din elementul de execuție, instalația tehnologică (procesul) și traductorul, în regim de funcționare, parametrii acestora nu se modifică și se numește *partea fixată*.

Se consideră dinamica elementelor părții fixate descrisă de f.d.t. cu inerție de ordinul unu a elementului de execuție, a procesului condus și a traductorului:

$$H_E(s) = \frac{k_E}{T_E s + 1}, H_P(s) = \frac{k_P}{T_P s + 1}, H_{tr}(s) = \frac{k_{tr}}{T_{tr} s + 1} \quad (9.16)$$

și se realizează condiția când constantele de timp ale elementului de execuție și ale traductorului sunt cu mult mai mici decât constanta de timp a procesului: $T_E \ll T_P$ și $T_{tr} \ll T_P$.

În acest caz, f.d.t. echivalentă a conexiunii serie a părții fixate este:

$$\begin{aligned} H_{PF}(s) &= H_E(s)H_P(s)H_{tr}(s) = \frac{k_E}{T_E s + 1} \frac{k_P}{T_P s + 1} \frac{k_{tr}}{T_{tr} s + 1} \approx \\ &\approx \frac{k_E k_P k_{tr}}{T_P s + 1} = \frac{k}{T_P s + 1}, \end{aligned} \quad (9.17)$$

unde $k = k_E k_P k_{tr}$ este coeficientul de transfer al părții fixate.

La proiectare se utilizează atât modele intrare-ieșire, cât și modele intrare-stare-ieșire ale obiectelor conduse. Cel mai larg utilizate modele pentru descrierea obiectelor conduse sunt modelele intrare-ieșire *parametrice* (ecuații diferențiale, funcții de transfer) și *neparametrice* (caracteristicile frecvențiale, răspunsul indicial), care se obțin după prelucrarea datelor experimentale.

Pentru determinarea modelului matematic de aproximare al răspunsului procesului se parcurg următoarele etape.

1. Se determină procesul tehnologic și se analizează evoluția procesului.

2. Se determină parametrii procesului cu valoarea nominală și eroarea admisibilă.

3. Se alege și se dimensionează traductorul cu datele necesare pentru măsurarea parametrului tehnologic cu eroarea dată în proces. Se analizează caracteristica statică și dinamică a traductorului.

4. Se alege și se dimensionează elementul de execuție.

5. Se aplică semnalul de probă treaptă unitară, se ridică și se înregistrează răspunsul indicial al procesului.

6. Prelucrarea datelor experimentale și determinarea modelului matematic de aproximare al procesului analizat.

Se dă un exemplu de determinare a modelului matematic al unui proces pe cale experimentală. La intrarea procesului s-a aplicat semnalul treaptă unitară $1(t)$ și s-a ridicat răspunsul indicial $h(t)$, care este reprezentat în figura 9.7.

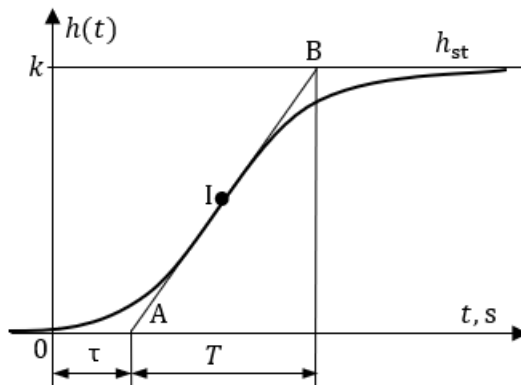


Fig. 9.7. Răspunsul indicial al obiectului de reglare

Procedura de determinare a modelului obiectului după curba experimentală se reduce la etapele:

1) pe curbă se alege punctul de inflexiune I, în care derivata (viteza) își schimbă semnul;

2) în punctul I la curbă se trasează tangenta AB până la intersecția cu axa absciselor și regimul staționar;

3) se determină proiecția tangentei pe axa absciselor și acest segment de timp reprezintă constanta de timp T a procesului;

4) segmentul pe axa absciselor de la originea O până la punctul A de intersecție a tangentei cu axa absciselor reprezintă timpul mort τ al procesului;

5) coeficientul de transfer este valoarea regimului staționar $k = h_{st}/1$.

În rezultatul procedurilor efectuate s-au obținut parametrii unui model de obiect cu inerție de ordinul unu cu timp mort cu funcția de transfer (9.15).

Modelul obținut, prin procedura dată, este o aproximare a procesului, însă pot fi obținute și alte aproximări (modele) de ordin mai ridicat după această curbă, dar procedura este dificilă.

Din aceste considerente s-au elaborat pachete de programe (de exemplu MATLAB), care se aplică pentru identificarea modelului matematic în forma funcțiilor de transfer după curba răspunsului indicial ridicată experimental pentru procesul real.

Pentru clase largi de procese lente și foarte lente se utilizează modele parametrice în forma funcțiilor de transfer. Se dau exemple de funcții de transfer pentru modele de obiecte de reglare cu diferite proprietăți și ordine:

$$H(s) = \frac{k}{T_s+1}, H(s) = \frac{1}{T_s}, H(s) = \frac{e^{-\tau s}}{T_s}, H(s) = \frac{k}{(T_1s+1)(T_2s+1)},$$

$$H(s) = \frac{ke^{-\tau s}}{(T_1s+1)(T_2s+1)}, H(s) = \frac{k}{(T_s+1)^n}, H(s) = \frac{ke^{-\tau s}}{(T_s+1)^n}, \quad (9.18)$$

$$H(s) = \frac{k}{(T_1s+1)(T_2s+1)^n}, H(s) = \frac{ke^{-\tau s}}{(T_1s+1)(T_2s+1)^n}.$$

În (9.18) se dau f.d.t. pentru modele de obiecte de reglare:

- 1) cu inerție de ordinul unu;
- 2) cu astatism (integrare);
- 3) cu astatism și timp mort;
- 4) cu inerție de ordinul doi;
- 5) cu inerție de ordinul doi și timp mort;
- 6) cu inerție cu elemente identice de ordinul n ;
- 7) cu inerție cu elemente identice de ordinul n și timp mort;
- 8) cu inerție de ordinul $n + 1$;
- 9) cu inerție de ordinul $n + 1$ și timp mort,

unde k, T, T_1, T_2, τ, n sunt parametrii modelelor respective.

Se dă o formă generalizată a modelului procesului cu funcția de transfer complexă:

$$H(s) = \frac{ke^{-\tau s}B(s)}{s^\nu A(s)} = \frac{ke^{-\tau s}}{s^\nu} \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^{n-\nu} + a_{n-1} s^{n-\nu-1} + \dots + a_1 s + a_0}, m \leq n, \quad (9.19)$$

unde k este coeficientul de transfer, τ – timpul mort, ν – gradul de astatism, $B(s)$ – polinomul numărătorului de gradul m , care prezintă zerourile modelului obiectului și accelerează procesul, $A(s)$ – polinomul numitorului de gradul $n - \nu$, care reprezintă polii modelului obiectului și exprimă inerția obiectului condus, iar raportul $m \leq n$ reprezintă realizabilitatea fizică a procesului.

Funcția de transfer $H(s)$ a procesului este proprie când $n \geq m$ și atunci $H(\infty)$ este finită, f.d.t. $H(s)$ este strict proprie când $n > m$ și $H(\infty) = 0$ și f.d.t. $H(s)$ este biproprie când $n = m$. Procesul descris de f.d.t. $H(s)$ cu $m > n$ este impropriu.

Primele 6 modelele din (9.18) au un grad redus de aproximare, care descrie comportarea reală a procesului condus în vecinătatea punctului static de funcționare pentru variații de amplitudine redusă ale variabilelor funcționale intrării $u(t)$ și ieșirii $y(t)$.

Pentru descrierea proceselor rapide pot fi approximate cu modele de forma:

$$H_P(s) = \frac{k}{\prod_{k=1}^n (T_k s + 1)(T_\Sigma s + 1)}, \quad (9.20)$$

unde T_k sunt constante de timp dominante, care au valori mai mari de 10 s, iar T_Σ - constanta de timp parazită, care este mult mai mică decât cea mai mică constantă de timp dominantă și se determină ca suma constantelor mici de timp.

Modelele neparametrice se reprezintă prin procese temporale și caracteristicile frecvențiale ca modele simplificate, liniare și de ordin redus, care descriu procesele reale cu un grad mai mare sau mai redus de incertitudine. Incertitudinile la construirea modelelor este rezultatul reducerii ordinului modelelor, de liniarizarea neliniarităților din procesul condus etc.

Incetitudinile se clasifică în două tipuri:

1. Parametrice când sunt incorecte valorile parametrilor modelului obiectului.

2. Structurale când structurile modelului sunt imperfecte.

Dacă este cunoscut răspunsul indicial, atunci prin metode de identificare se determină modelul parametric al procesului.

Un rol tot mai important se atribuie modelelor obiectelor liniare intrare-stare-ieșire la proiectarea sistemelor cu conducere automată cu acțiunea semnalelor intrării $\mathbf{u}(t)$ și a perturbației $\mathbf{v}(t)$ pentru obiectul multivariabil prezentat în forma vector-matriceală:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}\mathbf{p}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t),\end{aligned}\tag{9.21}$$

unde se utilizează notațiile:

\mathbf{A} este matricea coeficienților interni de dimensiunea $n \times n$,

\mathbf{B} – matricea de comandă de dimensiunea $n \times m$,

\mathbf{C} – matricea de ieșire de dimensiunea $l \times n$,

\mathbf{D} – matricea de ieșire de dimensiunea $l \times m$,

\mathbf{E} – matricea de perturbație de dimensiunea $l \times r$,

$\mathbf{u}(t)$ – vectorul intrării de dimensiunea m ,

$\mathbf{x}(t)$ – vectorul de stare de dimensiunea n ,

$\mathbf{y}(t)$ – vectorul ieșirii de dimensiunea l ,

$\mathbf{p}(t)$ – vectorul perturbațiilor de dimensiunea r .

În cazul obiectului monovariabil modelul (9.21) are forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) + \mathbf{e}p(t), \quad (9.22)$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) + \mathbf{d}u(t),$$

unde $\dot{\mathbf{x}}(t) = (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dots, \dot{x}_n(t))$ este derivata vectorului stării, $\mathbf{x}(t)$ – vectorul de stare, \mathbf{A} – matricea coeficienților interni de dimensiunea $n \times n$, \mathbf{b} – vectorul coloană de comandă de dimensiunea $1 \times n$, \mathbf{c} – vectorul de ieșire de tip coloană de dimensiunea $n \times 1$, iar \mathbf{c}^T – vectorul \mathbf{c} transpus de dimensiunea $1 \times n$ – rând, \mathbf{d} – vectorul coloană de comandă de dimensiunea $1 \times n$, \mathbf{e} – vectorul coloană al perturbației de dimensiunea $1 \times n$.

Dacă asupra procesului acționează referința $u(t)$ și perturbația $p(t)$ (fig. 9.8, a), atunci modelul matematic al obiectului de reglare se prezintă în forma (fig. 9.8, b), când mărimea de ieșire a obiectului de reglare în formă operațională se prezintă prin relația din două componente:

$$y(s) = y_u(s) \pm y_p(s) = H_{yu}(s)u(s) \pm H_{yp}(s)p(s), \quad (9.23)$$

unde $y_u(s)$ este componenta răspunsului la acțiunea referinței, $y_p(s)$ – componenta răspunsului la acțiunea perturbației, $H_{yu}(s)$, $H_{yp}(s)$ – funcțiile de transfer, care descriu transferurile intrare-ieșire respective.

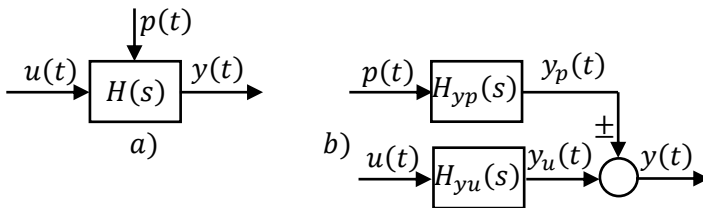


Fig. 9.8. Modelul matematic al obiectului de reglare cu acțiunea referinței și perturbației

9.4 Alegerea și acordarea reguletoarelor

9.4.1 Legile de reglare tipice

Se consideră structura sistemului automat cu reacție (fig. 9.9, a), în care regulatorul R în baza informației erorii $\varepsilon(t)$ elaborează mărimea de comandă $u(t)$ (fig. 9.9, b) cu obiectul de reglare OR după algoritmul (legea) de conducere [1, 4, 7-9, 10, 21, 22] dat prin relația:

$$u(t) = f(\varepsilon(t)). \quad (9.24)$$

Se utilizează mai multe tipuri de algoritmi de reglare: liniari, neliniari, discreți etc.

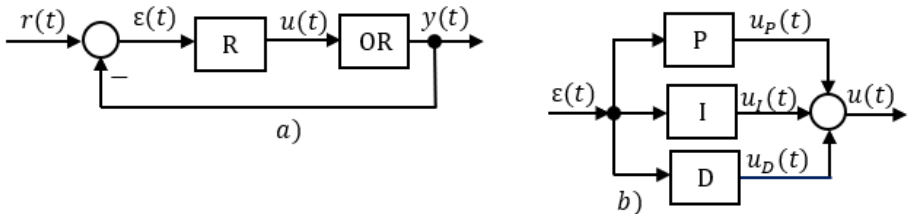


Fig. 9.9. Schema funcțională a sistemului a) și a regulatorului b)

Legile de reglare P, PI și PID au o largă utilizare în automatica industrială.

Ecuțiile diferențiale ale algoritmilor de reglare sunt date în p. 1.5.2. Se prezintă funcțiile de transfer ale algoritmilor P, PI și PID după structura regulatorului din figura 9.9, b) în forma:

$$H_P(s) = k_p, \quad (9.25)$$

$$H_{PI}(s) = k_p + \frac{1}{T_i s} = k_p + \frac{k_i}{s} = \frac{k_p s + k_i}{s}, \quad (9.26)$$

$$H_{PID}(s) = k_p + \frac{1}{T_i s} + T_d s = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s = \frac{k_d s^2 + k_p s + k_i}{s}, \quad (9.27)$$

unde $k_p, T_i, k_i = 1/T_i, T_d = k_d$ sunt parametrii regulatorului.

9.4.2 Metode empirice de acordare a reguletoarelor tipice

Metodele empirice sunt relații stabilite experimental pentru structura sistemului între parametrii regulatorului P, PI, PID și parametrii modelului obiectului de reglare cu inerție de ordinul unu și timp mort și modelul obiectului cu astatism și timp mort pentru procese tranzitorii ale sistemului aperiodice cu durată minimă, oscilante amortizate cu suprareglare $\sigma \leq 20\%$ și cu criteriul integral minimal.

În tabelul 9.1 sunt date relațiile empirice de acordare a parametrilor reguletoarelor P, PI și PID pentru modelul obiectului de reglare cu inerție de ordinul unu și timp mort:

$$\frac{ke^{-\tau s}}{Ts+1}, \quad (9.28)$$

unde k este coeficientul de transfer, T – constanta de timp, τ – timpul mort.

Tabelul 9.1. Relațiile empirice de acordare a reguletoarelor P, PI, PID

Tip regulator	Tipul procesului tranzitoriu		
	Aperiodic cu durată minimă	Oscilant cu $\sigma \leq 20$ și durată minimă	Criteriu integral minimal
P	$k_p = 0.3T/k\tau$	$k_p = 0.7T/k\tau$	$k_p = 0.9T/k\tau$
PI	$k_p = 0.6T/k\tau$	$k_p = 0.7T/k\tau$	$k_p = 1.0T/k\tau$
	$T_i = 0.6T$	$T_i = 0.7T$	$T_i = T$
PID	$k_p = 0.95T/k\tau$	$k_p = 1.2T/k\tau$	$k_p = 1.4T/k\tau$
	$T_i = 2.4\tau$	$T_i = 2.0\tau$	$T_i = 1.3\tau$
	$T_i = 0.4\tau$	$T_i = 0.4\tau$	$T_i = 0.5\tau$

9.4.3 Alegerea și acordarea reguletoarelor pentru procesele lente

Se consideră procese lente care se caracterizează prin modele aproximative cu constante de timp mai mari de 10 s și care conțin și componenta cu timp mort. Pornind de la modelul procesului și performanțele impuse, pentru proiectarea algoritmului de reglare există mai multe metode [1, 7-9, 21].

Dacă în funcționarea unui proces există componenta timpului mort, atunci se recomandă atât alegerea algoritmilor de reglare liniari de tipul PI, PID, cât și algoritmi neliniari bipoziționali sau tripoziționali.

Componenta derivativă D se include în structura algoritmului pentru un proces cu timp mort numai dacă se obține o îmbunătățire a performanțelor sistemului. Pentru valori ale raportului $\tau/T < 0.2$ la cerințele de performanță reduse se recomandă algoritmi neliniari.

Pentru procesele cu constanta de timp medie și timp mort redus cu acțiunea perturbației cu amplitudine medie și frecvență joasă, se recomandă alegerea unui regulator bipozițional sau un regulator de tip P. Pentru perturbații cu frecvență mai mare și cu diverse amplitudini se recomandă regulatorul PI, iar pentru procesele cu mai multe constante de timp și timp mort redus cu acțiunea perturbațiilor se recomandă un algoritm PID.

Pentru procesele cu două și mai multe constante de timp dominante se recomandă algoritmul PI sau PID, care asigură eroarea staționară $\varepsilon = 0$ și o viteză de răspuns mai ridicată. Pentru reglări de nivel se recomandă utilizarea algoritmului de tip PI. Pentru reglări de presiune se recomandă algoritmi PI, parametrii cărora sunt diferiți pentru gaze și lichide, deoarece constanta de timp la lichide este mai redusă decât la gaze. La reglări de debite și amestecuri de fluid, care au constante de timp mici și o amplificare mare se recomandă algoritmi PI. La reglări de temperatură cu raportul τ/T mare se recomandă algoritmi PID.

În tabelele 9.2 și 9.3 se dau recomandări la alegerea tipului de algoritm de reglare pentru diverse modele de f.d.t. ale procesului și parametrul tehnologic reglat [1].

Tabelul 9.2. Alegerea algoritmului de reglare după modelul funcției de transfer al procesului

Nr. crt.	Funcția de transfer a procesului	Tipul algoritmului de reglare			
		P	PI	PD	PID
1	$\frac{k}{Ts + 1}$	Da	Da, dacă se impun cerințe asupra erorii staționare	Da, dacă T este precis determinată	Nu
2	$\frac{k}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$	Da, cu performanțe reduse	Da, cu restricții asupra amplificării	Se utilizează rar	Da, cu restricții asupra amplificării
3	$\frac{k}{\prod_{i=1}^m (T_i s + 1)}$	Rar utilizat, performanțe scăzute	Da	Se utilizează rar	Da
4	$\frac{ke^{-\tau s}}{Ts + 1}$	Da, când raportul $\frac{\tau}{T} < 0,1$ și eroarea staționară este admisibilă	Da	Foarte rar	Neconvenabil, când τ este produs de timpul de transport și există zgomot
5	$ke^{-\tau s}$	Nu	Nu	Nu	Nu
6	$\frac{ke^{-\tau s}}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$	Nu	Da	Nu	Rar, în funcție de tipul τ și de efectul D al componentei

Alegerea și acordarea reguletoarelor pentru procesele cu timp mort este o problemă dificilă la determinarea cu precizie a timpului mort, cât și a influenței nefavorabile a timpului mort asupra stabilității și regimului tranzitoriu al sistemului automat. Pot fi utilizate diverse metode de calcul al algoritmului de reglare pentru procesele cu timp mort.

Tabelul 9.3. Alegerea algoritmului de reglare după parametrul reglat

Nr. crt.	Parametrul reglat	Tipul algoritmului de reglare			
		P	PI	PD	PID
1	Temperatură	Da, dacă raportul $\frac{\tau}{T} < 0.1$	Da	Da	Da, în funcție de raportul $\frac{\tau}{T}$
2	Presiune	Da, dacă nu există timpi morți prea mari	Da	În cazuri speciale	-
3	Debit	Nu	Da	Nu	-
4	Nivel	Da, dacă nu există timpi morți prea mari	Da	-	Da

9.4.4 Alegerea și acordarea reglatoarelor după metodele experimentale

1 Criterii experimentale de acordare a reglatoarelor

Dificultățile care intervin în procedura de identificare cu precizie a proceselor lente, comportarea neliniară în procese și caracterul aleatoriu al unor perturbații care acționează asupra proceselor limitează utilizarea metodelor analitice de acordare a reglatoarelor.

Metodele practice de acordare utilizează experiența acumulată în alegerea și acordarea reglatoarelor [1].

Pentru un sistem dat în regim de funcționare cu mărimea de referință și cu mărimile perturbatoare menținute constante, prin modificarea parametrilor de acord până se atinge limita de stabilitate, se determină parametrii oscilațiilor întreținute, amplitudinea și frecvența. Pe baza acestor parametri se determină valorile optime ale parametrilor de acord ai regulatorului.

Se utilizează criteriile experimentale metoda *Ziegler-Nichols* și metoda *Offereins*.

2 Metoda Ziegler-Nichols

În multe cazuri, procesele industriale există ca atare sau sunt cunoscute modelele matematice ale părții fixate și, deci, acordarea se

efectuează în baza criteriilor experimentale. Metoda Ziegler-Nichols se aplică la acordarea reguletoarelor pentru procesele lente la care perturbațiile sunt determinate de sarcină și au o durată mare [1, 7].

Pentru structura unui sistem de reglare automată cu un regulator PID se fixează la valoarea maximă parametrul componentei integratoare $T_i \rightarrow \infty$ și la valoarea minimă parametrul componentei derivate $T_d = 0$ și, în continuare, se modifică valoarea parametrului componentei proporționale k_p până ce la ieșirea sistemului se instalează oscilații întreținute, care reprezintă regimul critic al sistemului, deci, sistemul este la limita de stabilitate. Pentru acest regim critic al sistemului se stabilesc parametrii critici ai oscilațiilor coeficientul critic k_{cr} și perioada oscilațiilor T_p . În baza parametrilor critici k_{cr} și T_p se calculează valorile optime ale parametrilor de acord ai reguletoarelor P, PI, PID după relații date în tabelul 9.4. Aceste relații s-au obținut din condiția ca la ieșirea sistemului să se stabilească raportul 1/4 dintre amplitudinea celei de-a doua oscilații pozitive și amplitudinea primei oscilații pozitive, ceea ce formează amortizarea într-un sfert de amplitudine.

Tabelul 9.4. Determinarea parametrilor de acord după metoda Ziegler-Nichols

Parametrul reglat	Algoritmul de reglare		
	P	PI	PID
k_p	$0.5k_{cr}$	$0.45k_{cr}$	$0.75k_{cr}$
T_i	-	$0.8T_p$	$0.6T_p$
T_d	-	-	$0.125T_p$

3 Metoda Offereins

Metoda Offereins permite determinarea valorilor parametrilor optimi de acord, utilizând valorile critice ale sistemului coeficientului critic k_{cr} și perioada oscilațiilor T_p . Pentru un răspuns optim al sistemului parametrii regulatorului PI se calculează cu relațiile: $k_p = 0.5k_{cr}$ și $T_i = 3T_{ip}$, unde T_{ip} este valoarea limitată a lui T_i pentru care se depășește limita de stabilitate, menținând valoarea lui k_p , ceea ce mărește raportul k_p/T_i până la depășirea limitei de stabilitate și se

reține valoarea lui T_{ip} .

În cazul utilizării regulatorului PID, acordarea se pornește de la regulatorul PI, apoi prin încercări se utilizează componenta derivativă D care ar ridica performanțele sistemului.

Efectuarea experimentelor presupune însă atingerea limitei de stabilitate, proces care poate dura uneori foarte mult sau poate impune funcționarea sistemului într-un regim nefavorabil.

Din aceste motive se dezvoltă și alte metode specifice pentru acordarea regulatorilor, evitând dezavantajele metodelor indicate.

9.4.5 Metoda gradului maximal de stabilitate

Pentru a evita problemele care apar la utilizarea metodelor indicate în punctele 9.4.2-9.4.4 se propune a folosi la acordarea regulatorilor tipizate metoda gradului maximal de stabilitate (GMS) al sistemului automat proiectat [7, 8, 10].

Ideea metodei constă în următoarele.

Se consideră descrierea unui model matematic al obiectului de reglare descris prin ecuația diferențială:

$$y^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)}(t) = ku(t), \quad (9.29)$$

unde $y(t)$ este mărimea de ieșire a obiectului, $y^{(i)}(t) = d^{(i)}y(t)/dt^{(i)}$ sunt derivatele lui $y(t)$, $u(t)$ – mărimea de conducere, a_i – constante, k – coeficientul de transfer al obiectului.

Se cere de sintetizat algoritmul de conducere cu obiectul (9.29), care are forma:

$$u(t) = -\sum_{i=0}^m q_i y^{(i-1)}(t), \quad m \leq n - 1, \quad (9.30)$$

unde $y^{(-1)}(t) = \int_0^t y(t)dt$, $y^{(0)}(t) = y(t)$, $y^{(1)}(t) = dy(t)/dt$, \dots , $y^{(m-1)}(t) = d^{(m-1)}y(t)/dt^{(m-1)}$ sunt derivatele de ordinul respectiv, care conduc la realizabilitatea fizică a legilor de reglare P, I, D, PI, PID etc., q_i – parametrii de acord ai regulatorului respectiv.

Problema constă în a garanta pentru legea de reglare respectivă gradul maximal de stabilitate al sistemului automat proiectat.

Utilizând expresiile (9.29)-(9.30), se obține ecuația caracteristică a sistemului automat în circuit închis în forma:

$$A(p, q) = p^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i p^i + k \sum_{i=0}^m q_i p^{(i-1)} = 0, \quad (9.31)$$

unde $q = (q_0, q_1, \dots, q_m)$ sunt parametrii de acord necunoscuți ai unui algoritm concret de reglare de tipul (9.30), iar $p = d/dt$ este operatorul de derivare.

Se introduce noțiunea de grad maximal de stabilitate J al sistemului automat proiectat și în ecuația caracteristică (9.31) se substituie $p = -J$, obținând ecuația caracteristică în forma:

$$A(-J, q) = (-J)^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i (-J)^i + k \sum_{i=0}^m q_i (-J)^{(i-1)} = 0, \quad (9.32)$$

unde J este variabila necunoscută.

Ecuația caracteristică (9.32) conține m parametri de acord necunoscuți ai regulatorului și variabila J necunoscută.

Pentru determinarea valorilor lui J și a parametrilor q_i ecuația caracteristică (9.32) se derivează de m ori pe variabila J conform numărului m de parametri de acord prezenți în legea de reglare respectivă și în rezultat se obținute un sistem de ecuații algebrice de forma:

$$\frac{dA_i(-J, q)}{dJ} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m. \quad (9.33)$$

Ultima ecuație din sistemul (9.33) este o ecuație algebrică de gradul respectiv pe necunoscuta J și rădăcinile soluției acesteia reprezintă gradele maximale de stabilitate ale sistemului automat proiectat [7, 8].

Gradul optimal de stabilitate al sistemului automat se determină conform relației [7, 8, 10]:

$$J = J_{\text{opt}} = -\min \max \text{Re} p_i(q), \quad (9.34)$$

unde $\text{Re} p_i$ sunt rădăcinile reale sau părțile reale ale rădăcinilor complexe ale ecuației caracteristice (9.31), alocate în semiplanul stâng al planului complex al rădăcinilor sau în sens geometric este distanța dintre rădăcina reală respectivă (sau partea reală a rădăcinii complexe) cea mai apropiată de axa imaginară.

Utilizând gradul optimal de stabilitate J_{opt} al sistemului automat din ecuațiile algebrice $m - 1$ din (9.33), se determină valorile optime ale parametrilor de acord ai legii de reglare respective:

$$q_i = f_i(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, J), \quad (i = 0, 1, 2, \dots, m). \quad (9.35)$$

Forma expusă mai sus a metodei gradului maximal de stabilitate este forma clasică a acestei metode [7, 8, 10].

Dacă performanțele impuse sistemului sunt satisfăcute, atunci procedura de acordare s-a încheiat, iar dacă performanțele impuse sistemului nu sunt satisfăcute, atunci procedura de acordare se reia de la început cu alt tip de lege de reglare sau prin utilizarea altei metode.

În continuare se dă un exemplu de acordare a reguletoarelor tipice, aplicând metoda empirică și metoda gradului maximal de stabilitate.

Exemplul 9.1. Se consideră modelul obiectului de reglare cu inerție de ordinul unu și timp mort descris cu funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{ke^{-\tau s}}{Ts+1} = \frac{0.3e^{-2s}}{7s+1}.$$

Se cere să se efectueze:

1. Să se acordeze parametrii regulatorului P, PI și PID după metodele empirice pentru procesul tranzitoriu cu criteriul integral minimal și să se determine performanțele sistemului automat.

2. Să se acordeze parametrii regulatorului PI și PID după metoda gradului maximal de stabilitate și să se determine performanțele sistemului automat.

Soluționare.

1.1. S-au determinat parametrii de acord ai regulatorului P, PI și PID după metoda empirică pentru răspunsul sistemului după criteriul integral minimal și datele numerice calculate se dau în tabelul 9.5.

2.1. S-au determinat parametrii de acord ai regulatorului PI și PID după metoda gradului maximal de stabilitate și datele numerice se dau în tabelul 9.5.

Tablul 9.5. Parametrii și performanțele sistemului automat

Metodă acordare	Tip regulator	Parametrii regulatorului			Performanțele sistemului			
		k_p	T_i, s	T_d, s	t_c, s	$\sigma, \%$	t_r, s	λ
Metoda empirică	P	10.5	-	-	3.83	28.90	11.91	2
	PI	11.67	6.993	-	4.23	16.68	148	1
	PID	16.33	2.6	1.0	3.43	52.65	56.37	14
Metoda GMS	PI	24.002	1.1439	-	Sistem instabil			
	PID	8.6618	1.1439	4.2247	11.32	-	11.32	-

S-a simulat sistemul automat cu modelul obiectului cu inerție de ordinul unu și timp mort și cu parametrii regulatorului P, PI, PID acordați după metoda empirică cu datele din tabelul 9.5 și alurile răspunsurilor sunt reprezentate în figura 9.10, notate P, PI și PIDE, iar performanțele sunt date în tabelul 9.5.

S-a simulat sistemul cu modelul obiectului cu inerție de ordinul unu și timp mort și cu parametrii regulatorului PI, PID acordați după metoda gradului maximal de stabilitate cu datele din tabelul 9.5 și alura răspunsului PIDG este reprezentată în figura 9.10, iar performanțele sunt date în tabelul 9.5.

Sistemul cu regulatorul PI acordat după metoda GMS este instabil.

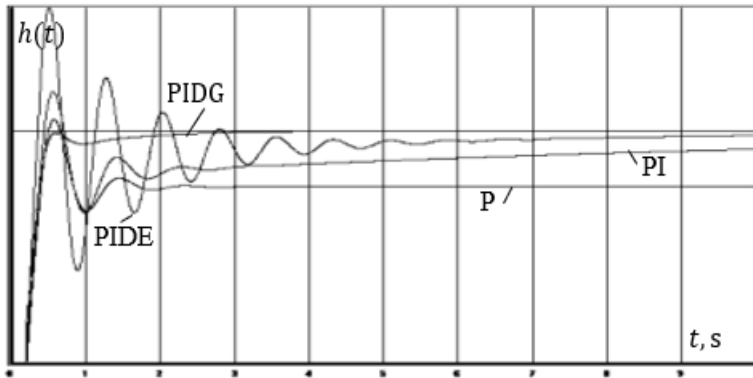


Fig. 9.10. Răspunsurile indiciale ale sistemului automat

Din analiza datelor din tabelul 9.5 rezultă că cele mai ridicate performanțe s-au obținut pentru sistemul cu regulatorul PIDG acordat după metoda gradului maximal de stabilitate.

Chestionar și probleme

1. Ce reprezintă noțiunea de proces tehnic sau tehnologic și parametrii lui? Dați exemple de procese.
2. Numiți proprietățile de bază ale procesului și parametrii modelului obiectului de reglare care îi caracterizează proprietățile.
3. Dați exemple de modele de obiecte de reglare cu diverse proprietăți.
4. Se consideră ecuația diferențială care descrie un proces:

$$a_0\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2y + a_3y = b_0x(t - \tau).$$

Prezentați funcția de transfer și numiți parametrii modelului.

5. Explicați noțiunea de sinteză a sistemului automat.
6. Ce reprezintă algoritmul de reglare și rolul lui în sistemul automat?
7. Explicați ce prezintă algoritmi de reglare tipici.
8. Cum se clasifică algoritmi de reglare tipici și care sunt parametrii?
9. Prezentați pentru algoritmul PID ecuația diferențială, funcția de transfer și explicați sensul fizic al parametrilor regulatorului.
10. Explicați etapele de proiectare a algoritmului de conducere.
11. Se consideră modelul obiectului de reglare cu inerție de ordinul unu și timp mort:

$$H(s) = \frac{ke^{-\tau s}}{Ts + 1} = \frac{5e^{-3s}}{11s + 1}.$$

Calculați parametrii de acord ai algoritmilor de reglare P, PI, PID după metoda empirică conform tabelului 9.1.

12. Utilizând parametrii de acord ai reglatoarelor P, PI, PID calculați la p. 11, prezentați funcțiile de transfer ale reglatoarelor.

BIBLIOGRAFIE

1. *Automatica* / I. DUMITRACHE. București: Ed. Academiei Române, 2009. V.1, 961 p. ISBN 978-973-1883-4.
2. CĂLIN, S.; BELEA, C. *Sisteme automate complexe*. București, Editura tehnică, 1973, 567 p.
3. DORF, R.; BISHOP, R. *Sovremennyye sistemy upravleniya (Modern Control Systems)*. Moskva: Laboratoriya Bazovykh Znaniy, 2004, 832 s. ISBN 5-93208-119-8.
4. GAIDUK, A. R. *Teoria avtomaticheskogo upravleniya*. Uchebnik. M.: Vysshaya shkola, 2010, 415 s. ISBN 978-5-06-006055-3.
5. ILAȘ, C. *Teoria sistemelor de reglare automată*. București: MATRIX ROM, 2001, 175 p. ISBN 973-685-225-3.
6. ILAȘ, C. *Teoria sistemelor de reglare automată. Îndrumar de laborator*. București: MATRIXROM, 2004, 104 p. ISBN 973-685-831-6.
7. IZVOREANU, B. *Ingineria sistemelor automate. Ghid pentru proiectarea de curs*. Chișinău: Tehnica-UTM, 2021, 122 p. ISBN 978-9975-45-737-8.
8. KIM, D. P. *Teoria avtomaticheskogo upravleniya. T. 1. Lineinye sistemy*. M.: FIZMATLIT, 2003, 288 s. ISBN 5-9221-0379-2.
9. KIM, D. P. *Teoria avtomaticheskogo upravleniya. T. 2. Mnogomernyye, nelineinye, optimalinye i adaptivnyye sistemy*. M.: FIZMATLIT, 2004, 464 s. ISBN 5-9221-0534-5.
10. КИМ, D. P.; ДМИТРИЕВА, N. D. *Sbornik zadach po teorii avtomaticheskogo upravleniya. Lineinye sistemy*. M.: FIZMATLIT, 2007, 167 s. ISBN 978-5-9221-0873-7.
11. LUKAS, V. A. *Teoria avtomaticheskogo upravleniya*. Uchebnik dlea vuzov. M.: Nedra, 1990. 416 s. ISBN 5-247-01027-2.
12. MAKAROV, I. M.; MENSII, B. M. *Lineinye avtomaticheskii sistemy (elementy teorii, metody rascheta i spravochnyi material)*. M.: Mashinostroenie, 1982, 504 s.
13. *Metody klassicheskoi i sovremennoi teorii avtomaticheskogo upravleniya. T. 1. Matematicheskie modeli, dinamicheskie harakteristiki i analiz sistem avtomaticheskogo upravleniya*. Uchebnik/ Pod red. K.A.

PUPKOVA, N.D. EGUPOVA. M.: Izd-stvo MGTU im. N.E. Baumana, 2004, 654 s. ISBN 5-7038-2189-4.

14. PANTELEEV, A. V.; BORTAKOVSKII, A. S. *Teoria upravljenja v primerah i zadachah*. Uchebnoe posobie. M.: Vysshaia shkola, 2003, 583 s. ISBN 5-06-004136-0.

15. POZNA, C. *Teoria sistemelor automate*. București: MATRIX ROM, 2005, 329 p. ISBN 973-685-733-6.

16. PREITL, Ș., PREITL, Zsuzsa. *Introducere în automatică: suport de curs*. București: Conspress, 2013, 219 p. ISBN 978-973-100-266-8.

17. *Sbornik zadach po teorii avtomaticheskogo regulirovania i upravljenja*/ Pod red. V.A. BESEKERSKOGO. M.: Nauka, 1978, 512 s.

18. *Teoria avtomaticheskogo upravljenja*. Uchebnik dlea vuzov / Pod red. V. B. IAKOVLEVA. M.: Vysshaia shkola, 2005, 567 s. ISBN 5-06-004096-8.

19. TOPCHEEV, Iu. I.; TZYPLEAKOV, A. P. *Zadachnik po teorii avtomaticheskogo regulirovania*. Uchebnoe posobie dlea vuzov. M.: Mashinostroenie, 1977, 592 s.

20. TUDOROIU, N.; CURIAC, D. *Teoria sistemelor de reglare automată continue. Abordare aplicativă*. Timișoara: Ed. MIRTON, 1993, 151 p.

21. VOICU, M. *Introducere în automatică*. Iași: Editura Dosoftei, 1998, 238 p. ISBN 973-9135-60-9.

22. VOICU, M. și al. *Introducere în automatică. Culegere de probleme*. București: MATRIX ROM, 1999, 213 p. ISBN 973-685-135-4.

23. VOICU, M. *Sisteme automate multivariabile*, Iași: Ed. Gh. Asachi, 1993, 264 p.

ANEXE

Anexa 1

Funcții de timp continue și imaginea Laplace

Nr. crt.	Denumirea funcției	Original $f(t)$	Imaginea $f(s)$
1	Delta impuls	$\delta(t)$	1
2	Treaptă unitară	$1(t)$	$\frac{1}{s}$
3	Funcție rampă	t	$\frac{1}{s^2}$
4	Funcție polinomială	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	Exponențială	$e^{+\alpha t}$	$\frac{1}{s - \alpha}$
6	Exponențială	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s + \alpha}$
7	Sinusoidă	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
8	Cosinusoidă	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
9	Sinusoidă	$\sin(\omega t - \varphi)$	$\frac{\omega \cos \varphi - s \sin \varphi}{s^2 + \omega^2}$
10	Produsul exponentei cu sinusoidă	$e^{-\alpha t} \sin(\omega t - \varphi)$	$\frac{\omega \cos \varphi - (s - \alpha) \sin \varphi}{(s - \alpha)^2 + \omega^2}$

Modele matematice ale elementelor tipice

Tip element	Ecuatia diferentiaală	Soluția ecuației diferențiale	Funcția pondere	Funcția de transfer
Ideal	$y(t) = kx(t)$	$h(t) = k1(t)$	$w(t) = k\delta(t)$	$H(s) = k$
Inerție ordin unu	$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t)$	$h(t) = k \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) 1(t)$	$w(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}} 1(t)$	$H(s) = \frac{k}{Ts+1}$
Integrator	$y(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^t x(t) dt$	$h(t) = \frac{1}{T_i} t 1(t)$	$w(t) = \frac{1}{T_i} 1(t)$	$H(s) = \frac{1}{T_i s}$
Derivator ideal	$y(t) = T_d \frac{dx(t)}{dt}$	$h(t) = T_d \delta(t)$	$w(t) = T_d \delta(t)$	$H(s) = T_d s$
Derivator real	$T_f \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = T_d \frac{dx(t)}{dt}$	$h(t) = \frac{T_d}{T_f} e^{-\frac{t}{T_f}} 1(t)$	$w(t) = \frac{k}{T_f} \delta(t) - \frac{k}{T_f^2} e^{-t/T_f} 1(t)$	$H(s) = \frac{T_d s}{T_f s + 1}$
Oscilant amortizator	$T^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\xi T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t)$	$h(t) = k1(t) + C e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi),$ $C = -1(t) \frac{k1(0) \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}{\omega},$ $\alpha = \frac{\xi}{T}, \omega = \sqrt{1 - \xi^2} / T,$ $\varphi = \arctg \frac{\alpha}{\omega}$	$w(t) = \frac{k}{\omega T^2} e^{-\alpha t} \sin \omega t 1(t)$	$H(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}$
Timp mort	$y(t) = kx(t - \tau)$	$h(t) = k1(t - \tau)$	$w(t) = k\delta(t - \tau)$	$H(s) = k e^{-s\tau}$

Funcții frecvențiale ale elementelor tipice

Tip element	Locul de transfer	Amplitudine frecvență	Fază frecvență	Logaritmică
Ideal	$H(j\omega) = k$	$A(\omega) = k$	$\varphi(\omega) = 0$	$L(\omega) = 20\lg k$
Inerție ordin unu	$H(j\omega) = \frac{k}{T_f j\omega + 1}$	$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(T_f\omega)^2 + 1}}$	$\varphi(\omega) = -\arctg T_f\omega$	$L(\omega) = 20\lg k - 20\lg\sqrt{(T_f\omega)^2 + 1}$
Integrator	$H(j\omega) = \frac{1}{jT_f\omega}$	$A(\omega) = \frac{1}{T_f\omega}$	$\varphi(\omega) = -\pi/2$	$L(\omega) = 20\lg 1 - 20\lg T_f\omega$
Derivator ideal	$H(j\omega) = T_d j\omega$	$A(\omega) = T_d\omega$	$\varphi(\omega) = \pi/2$	$L(\omega) = 20\lg T_d\omega$
Derivator real	$H(j\omega) = \frac{T_d j\omega}{T_f j\omega + 1}$	$A(\omega) = \frac{T_d\omega}{\sqrt{(T_f\omega)^2 + 1}}$ $= T_d\omega / \sqrt{(T_f\omega)^2 + 1}$	$\varphi(\omega) = \pi/2 - \arctg T_f\omega$	$L(\omega) = 20\lg T_d\omega - 20\lg\sqrt{(T_f\omega)^2 + 1}$
Oscilant amortizator	$H(j\omega) = \frac{k}{1 - T^2\omega^2 + j2\xi T\omega}$	$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\xi T)^2}}$	$\varphi(\omega) = \arctg \frac{2\xi T\omega}{1 - T^2\omega^2}$ $= -\arctg \frac{2\xi T\omega}{1 - T^2\omega^2}$	$L(\omega) = 20\lg k - 40\lg \times \sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\xi T)^2}$
Timp mort	$H(j\omega) = ke^{-j\tau\omega}$	$A(\omega) = k$	$\varphi(\omega) = -\omega\tau$	$L(\omega) = 20\lg k$

URI: <http://repository.utm.md/handle/5014/21724>

TEORIA SISTEMELOR AUTOMATE

MANUAL

Autor: Bartolomeu Izvoreanu

Redactor: E. Balan

Bun de tipar 14.11.22	Formatul 60x84 1/16
Coli de tipar 21,75	Tirajul 50 ex.
Hârtie ofset. Tipar RISO	Comanda nr. 101

MD-2004, Chişinău, bd. Ştefan cel Mare şi Sfânt, 168. UTM
MD-2045, Chişinău, str. Studenţilor, 9/9. Editura ”Tehnica-UTM”