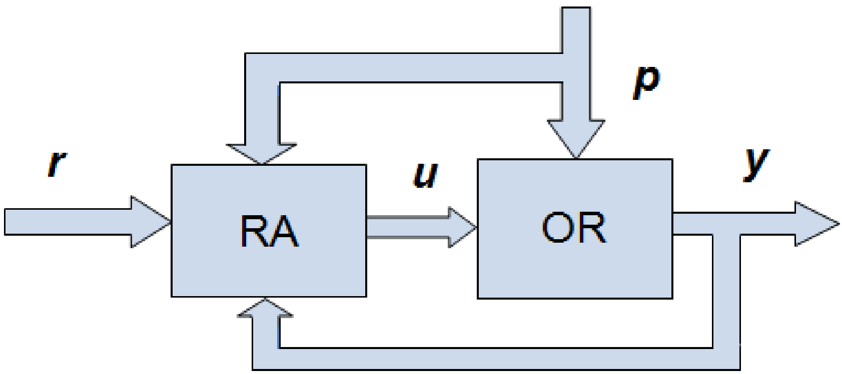
UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI

TEORIA SISTEMELOR

Partea I

Îndrumar la laborator



Chişinău
2014

UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI

Facultatea Calculatoare, Informatică şi Microelectronică

Catedra de Automatică şi Tehnologii Informaţionale

TEORIA SISTEMELOR
Partea I

Îndrumar la laborator

Chişinău
Editura "Tehnica - UTM"
2014

CZU 681.5(076.5)

I 99

50 ani ai Catedrei Automatică
şi Tehnologii Informaţionale

Îndrumarul la laborator este destinat studenţilor care își fac studiile cu frecvență la zi la specialitatea 526.3 - *Automatică şi Informatică* şi specialitatea 526.2 - *Tehnologii Informaţionale* pentru aprofundarea cunoștințelor la cursul *Teoria sistemelor*.

Îndrumarul include patru lucrări de laborator în care se vor studia proprietăţile elementelor tipice şi sistemelor automate prin simulare pe calculator cu aplicarea pachetelor de programe KOPRAS şi MATLAB.

Prin modul de abordare a problemelor propuse se urmăreşte formarea unor deprinderi necesare pentru studierea proprietăţilor elementelor şi sistemelor automate la acţiunea semnalelor de referinţă, a perturbației şi la modificarea parametrilor elementelor sistemului automat.

Autori: conf. univ., dr. B. IZVOREANU
lector sup., ing. I. FIODOROV
conf. univ., dr. Irina COJUHARI
Redactor responsabil: prof. univ., dr. hab. A. GREMALSCHI
Recenzent: prof. univ., dr. hab. E. GUŢULEAC

DESCRIEREA CIP A CAMEREI NAȚIONALE A CĂRȚII

Izvoreanu, B.

Teoria sistemelor: Îndrumar de laborator: [în părți] / B. Izvoreanu, I. Fiodorov, I. Cojuhari; red. resp.: A. Gremalschi: Univ. Tehn. a Moldovei, Fac. Calculatoare, Informatică și Microelectronică, Catedra Automatică și Tehnologii Informaționale. – Chișinău: Tehnica-UTM, 2014
ISBN 978-9975-45-331-8.
Partea 1. -2014. 52 p. Bibliogr.: p. 40 (10 tit.) -50 ex.
ISBN 978-9975-45-332-5.
681.5 (076.5)
I 99

Redactor: Eugenia Balan

Bun de tipar 29.10.14.	Formatul 60x84 1/16
Hârtie ofset. Tipar RISO	Tirajul 50 ex.
Coli de tipar 3,25	Comanda nr. 95

ISBN 978-9975-45-332-5.

Cuprins

Lucrarea nr. 1

ELEMENTE TIPICE ALE SISTEMELOR AUTOMATE

Obiectivul lucrării: studierea proprietăţilor dinamice ale elementelor tipice, ridicarea proceselor tranzitorii, a funcţiilor frecvenţiale şi studierea metodelor de apreciere a parametrilor funcţiilor de transfer ale elementelor.

1 *Noţiuni generale*

Sistemele cu conducere automată (SCA) reprezintă un ansamblu de elemente funcţionale conectate într-un mod anumit pentru ca sistemul să funcţioneze. Aceste elemente îndeplinesc anumite funcţii (de măsurare, de amplificare, de execuţie etc.) şi se deosebesc după principiul de acţiune, construcţie şi natură fizică (electrice, termice, hidraulice etc.).

Dinamica (evoluţia) sistemului depinde de proprietăţile interne ale elementelor sistemului. Pentru a stabili proprietăţile sistemului au însemnătate numai ecuaţiile ce descriu legăturile dintre mărimile de intrare şi mărimile de ieşire în orice moment de timp şi care descriu matematic procesele fizice din aceste elemente. Având diferite destinaţii, principii de funcţionare, construcţii şi natură fizică, elementele sistemelor automate pot fi descrise prin aceleaşi ecuaţii integro-diferenţiale, funcţii de timp (procese tranzitorii sau pondere care prezintă răspunsul sistemului sau elementului la semnalul de intrare), funcţii de transfer şi funcţii frecvenţiale [1-10].

În continuare vom expune modelele matematice în formă generalizată care se utilizează pentru descrierea dinamicii elementelor şi sistemelor automate.

Ecuaţia diferenţială în formă compactă, omiţând variabila timpului este reprezentată astfel:

$$a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \\ + \cdots + b_{m-1}\dot{x} + b_m x, \quad (1.1)$$

unde $x(t)$ şi $y(t)$ sunt semnalul de intrare şi derivatele lui şi respectiv semnalul de ieşire şi derivatele lui sau răspunsul sistemului la semnalul de intrare. Coeficienţii $a_0, a_1, \cdots, a_n$ reprezintă proprietăţile interne ale sistemului şi se numesc constante de timp (cu dimensiunea secunda la puterea egală cu ordinul derivatei), iar coeficienţii $b_0,\ b_1, \cdots, b_m$ reprezintă proprietăţile semnalului de intrare şi de asemenea se numesc constante de timp (cu dimensiunea secunda la puterea egală cu ordinul derivatei).

Funcţiile de timp reprezintă răspunsul sistemului sau elementului la semnalul de intrare aplicat sistemului.

Funcţia de transfer se prezintă ca raportul a două polinoame:

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n}, \quad m \leq n, \qquad (1.2)$$

unde coeficienţii din (1.2) au acelaşi sens ca şi în expresia (1.1), iar $m \leq n$ este condiţia de realizabilitate fizică sau efectul non-anticipaţie. Rădăcinile polinomului $B(s)=0$ z_j $(j=1,\cdots,m)$ sunt zerourile lui $G(s)$ şi exprimă proprietăţile de anticipaţie, iar rădăcinile polinomului $A(s)=0$ p_i $(i=1,\cdots,n)$ sunt polii lui $G(s)$ şi exprimă proprietăţile de inerţie, iar polinomul $A(s)=0$ se numeşte ecuaţia caracteristică a sistemului sau elementului.

Funcţiile frecvenţiale au formase prezintă

$$G(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} = P(\omega) + jQ(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} =$$
$$= A(\omega)(\cos\varphi(\omega) + j\sin\varphi(\omega)), \qquad (1.3)$$
$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)},$$
$$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\frac{Q(\omega)}{P(\omega)},$$
$$L(\omega) = 20\lg A(\omega),$$

unde $G(j\omega)$ este locul de transfer sau amplitudinea-fază, $P(\omega), Q(\omega)$ - partea reală şi imaginară, $A(\omega)$ – amplitudinea-frecvenţă, $\varphi(\omega)$ - faza-frecvenţă, $j = \sqrt{-1}$ - unitate imaginară, ω - frecvenţa care variază de la $-\infty \cdots +\infty$ şi în scară logaritmică în baza 10 (diagrama Bode): amplitudinea-frecvenţă $L(\omega)$ care reprezintă *atenuarea* răspunsului la frecvenţă şi se măsoară în deciBell (dB), faza-frecvenţă $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ reprezintă faza răspunsului la frecvenţă şi se măsoară în grade, mai rar în radiani.

În principiu, majoritatea absolută a dinamicii elementelor şi proceselor se descriu cu ajutorul ecuaţiilor integro-diferenţiale neliniare, însă proprietăţile dinamice la o mare parte de elemente ale sistemelor se aproximează (liniarizează) şi pot fi descrise cu ajutorul ecuaţiilor diferenţiale liniare (ori liniarizate), aceleaşi ecuaţii integro-diferenţiale, funcţii de timp (tranzitorii, indiciale, pondere etc. care prezintă răspunsul sistemului sau elementului la semnalul de intrare), funcţii de transfer şi funcţii frecvenţiale.

Elementele care se descriu prin acelaşi tip de ecuaţii diferenţiale sau funcţii de transfer, dar care se deosebesc numai prin valorile numerice ale parametrilor, se numesc elemente de transfer de acelaşi tip. Elementele dinamice tipice se descriu, de regulă, prin ecuaţii diferenţiale de ordin nu mai mare decât doi, funcţii de timp (tranzitorii, pondere etc.), funcţii de transfer şi funcţii frecvenţiale de ordinul respectiv.

Modelele matematice care descriu proprietăţile interne ale elementelor se clasifică după tipul ecuaţiilor diferenţiale care descriu dinamica elementelor şi proceselor.

În lucrare se studiază elemente de transfer tipice: ideal, inerţie de ordinul unu, integrator, ideal şi real derivativ, oscilant amortizat şi timp mort. Pentru aceste elemente se vor ridica şi analiza procesele indiciale când la intrare se aplică semnalul treaptă unitară şi funcţiile frecvenţiale. Pentru ridicarea funcţiei pondere la intrare se aplică semnalul impuls dreptunghiular.

Pentru a studia proprietăţile dinamice ale elementelor şi sistemelor se folosesc funcţiile şi caracteristicile de timp ale sistemelor liniare. În funcție de tipul semnalului aplicat la intrarea elementului, deosebim funcţia indicială $h(t)$ ca răspuns la semnalul de tip treaptă (unitară) $1(t)$ şi funcţia pondere $w(t)$ ca răspuns la semnalul de tip impuls dreptunghiular (impuls unitar - δ).

Funcţia indicială $h(t)$ a elementului sau sistemului liniar caracterizează transferul intrare-ieşire şi poate fi determinată prin soluţia ecuaţiei diferenţiale construită în timp ori cu ajutorul transformatei Laplace inversă a funcţiei $y(s) = G(s)x(s)$ pentru semnalul de intrare treaptă unitară $r(s) = L[1(t)] = 1/s$:

$$h(t) = y(t) = L^{-1}[G(s)/s]. \qquad (1.4)$$

În lucrare se studiază metoda de determinare experimentală a valorilor parametrilor f.d.t., pe baza caracteristicilor tranzitorii şi frecvenţiale. În fig. 1.1 este reprezentată schema-bloc de simulare a elementului şi ridicare a caracteristicilor tranzitorii şi frecvenţiale ale elementelor studiate în lucrare.

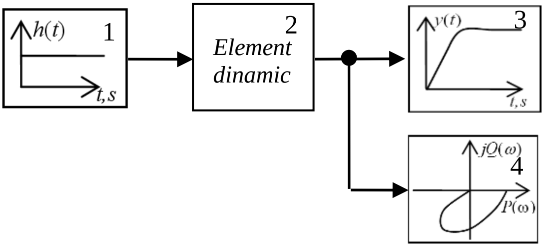


Fig. 1.1. Schema bloc de simulare a elementului dinamic

În fig. 1.1 sunt utilizate însemnările: 1 – elementul care formează semnalul de intrare, 2 – elementul dinamic studiat, 3, 4 – vizualizatorul care reprezintă semnalul ieșirii în domeniul timp şi respectiv în frecvenţă.

De rând cu caracteristicile tranzitorie şi pondere, pentru studierea elementelor şi sistemelor automate se folosesc pe larg funcţiile frecvenţiale. În fig. 1.2 - 1.7, *a*) – *f*) sunt reprezentate caracteristicile: *a*) – procesul indicial $h(t)$, *b*) – funcţia pondere $w(t)$, *c*) – locul de transfer $G(j\omega)$, *d*) – amplitudinea-frecvenţă $A(\omega)$, *e*) – faza-frecvenţă $\varphi(\omega)$, *f*) - amplitudinea-frecvenţă în scară logaritmică $L(\omega)$ a elementelor studiate în lucrare şi indicate punctele specifice folosite pentru determinarea parametrilor funcţiei de transfer a elementelor.

În practica studierii proprietăţilor sistemelor automate este răspândită metoda modelării matematice. Dacă ecuaţiile care descriu dinamica obiectului şi a modelului său sunt identice, atunci studierea proprietăţilor obiectului poate fi redusă la studierea proprietăţilor modelului.

În lucrare modelele matematice a elementelor se realizează prin simulare pe calculator, utilizând pachetele de programe MATLAB sau KOPRAS.

Element ideal (*proporţional*): ecuaţia diferenţială şi funcţia de transfer sunt următoarele:

$$y(t) = kx(t), \tag{1.5}$$

$$G(s) = k, \tag{1.6}$$

unde k este coeficientul de transfer, iar dimensiunea lui va depinde de dimensiunile mărimilor de intrare şi ieşire. Funcţiile indicială, pondere şi frecvenţiale sunt prezentate în fig. 1.2.

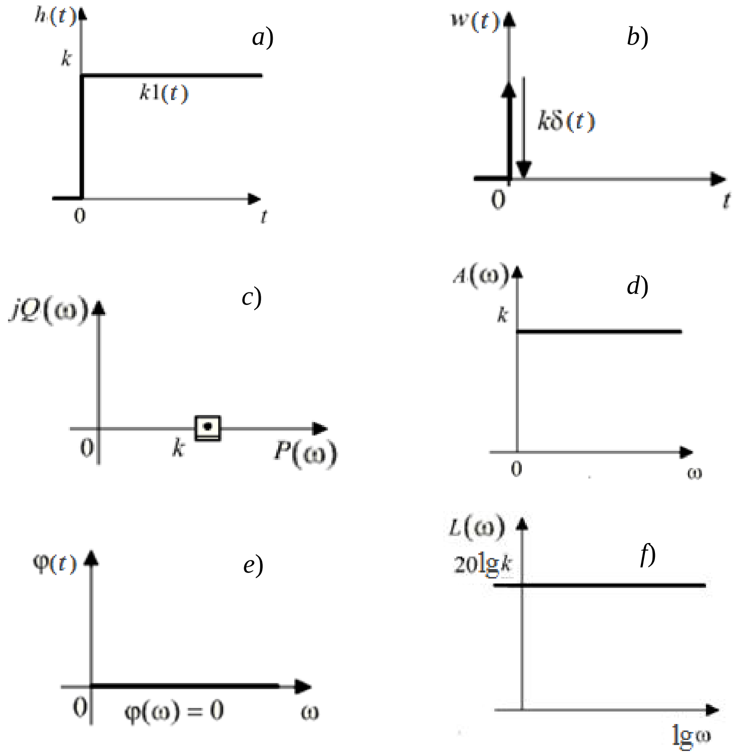


Fig.1.2. Caracteristicile elementului ideal

Element integrator: ecuaţia integrală şi funcţia de transfer sunt următoarele:

$$y(t) = \frac{1}{T_i}\int_0^t x(t)\,, \tag{1.7}$$

$$G(s) = \frac{1}{T_i s} = \frac{k_i}{s}\,, \tag{1.8}$$

unde T_i este constanta de timp de integrare, dimensiunea secundă, $k_i = 1/T_i$ - coeficientul invers constantei de timp. Funcţiile indicială, pondere şi frecvenţiale sunt prezentate în fig. 1.3.

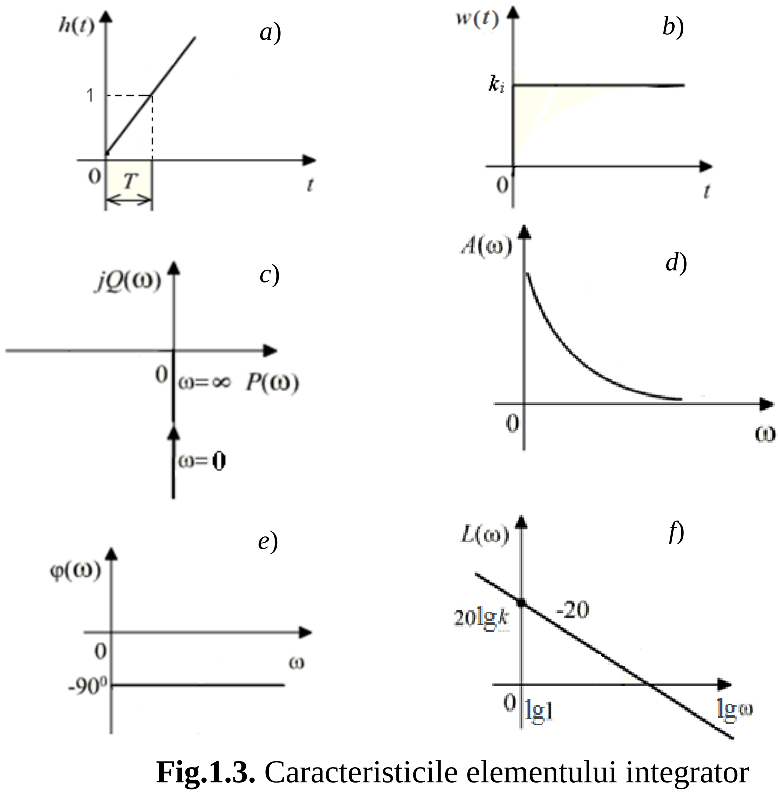


Fig.1.3. Caracteristicile elementului integrator

Element cu inerţie (*întârziere*) *de ordinul unu*: ecuaţia diferenţială şi funcţia de transfer sunt următoarele:

$$T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t)\,, \tag{1.9}$$

$$G(s) = \frac{k}{Ts+1} \ , \tag{1.10}$$

unde k este coeficientul de transfer, T – constanta de timp (dimensiunea secundă). Funcţiile indicială, pondere şi frecvenţiale sunt prezentate în fig. 1.4.

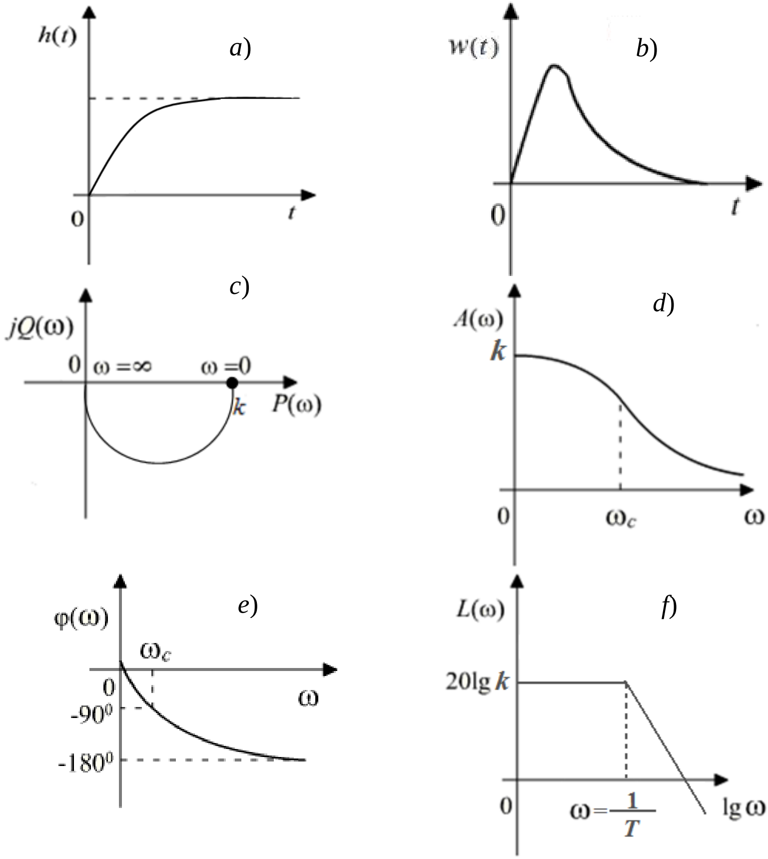


Fig. 1.4. Caracteristicile elementului cu inerţie de ordinul unu

Element ideal şi real derivativ (*sau de anticipare*): ecuaţia diferenţială şi funcţia de transfer sunt următoarele:

Elementul ideal derivativ:

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}\,, \tag{1.11}$$

$$G(s) = T_d s\,, \tag{1.12}$$

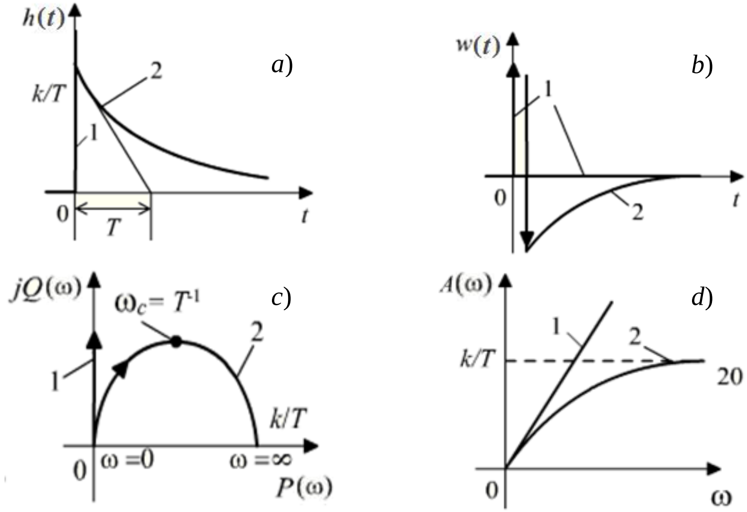
unde T_d este constanta de timp de derivare (dimensiunea secundă).

Elementul real derivativ:

$$T_p \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = T_d \frac{dx(t)}{dt}\,, \tag{1.13}$$

$$G(s) = \frac{T_d s}{T_p s+1} = T_d s \frac{1}{T_p s+1}\,, \tag{1.14}$$

unde T_d este constanta de timp de derivare (dimensiunea secundă), T_p – constanta de timp de filtrare sau parazitară (dimensiunea secundă). Termenul din dreapta al expresiei (1.14) se consideră produsul dintre elementul ideal de derivare şi elementul de filtrare ca element de întârziere de ordinul unu. Funcţiile indicială, pondere şi frecvenţiale sunt prezentate în fig. 1.5: pentru elementul derivativ ideal curbele 1, iar pentru elementul derivativ real curbele 2.



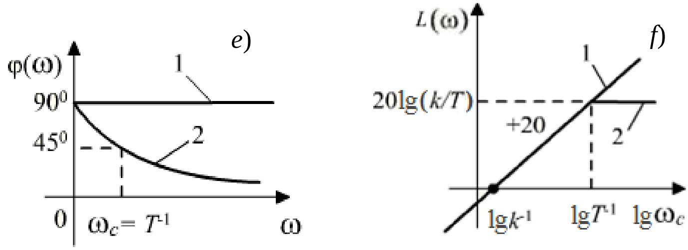


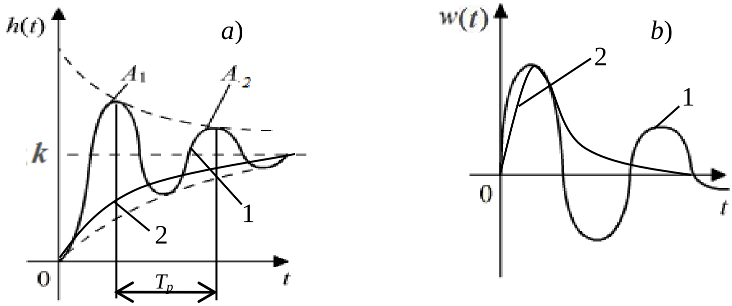
Fig. 1.5. Caracteristicile elementului derivativ

Element oscilant amortizat (inerţie sau întârziere de ordinul doi):

$$T^2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\xi T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t), \qquad (1.15)$$

$$G(s) = \frac{k}{T^2s^2+2\xi Ts+1} = \frac{k}{T_1s^2+T_2s+1} = k\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}, \qquad (1.16)$$

unde k este coeficientul de transfer, T – constanta de timp (dimensiunea secundă), ξ - coeficient de amortizare, adimensional, $T_1 = T^2$, $T_2 = 2\xi T$, iar $\omega_n = \frac{1}{T}$ este pulsaţia naturală (exprimată în radiani/secundă). Funcţiile indicială, pondere şi frecvenţiale sunt prezentate în fig. 1.6, *a*) - *f*): curbele 1 prezintă elementul oscilant amortizat, iar curbele 2 – elementul cu inerţie de ordinul doi.



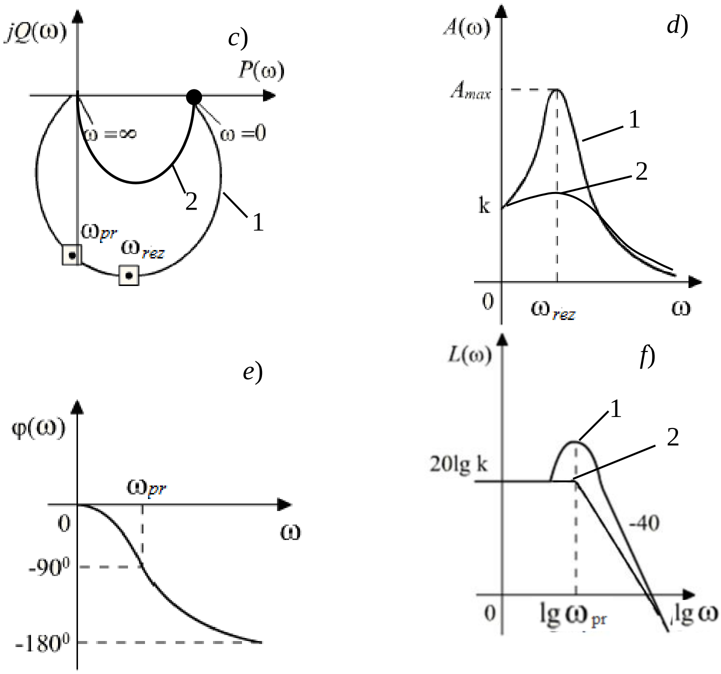


Fig. 1.6. Caracteristicile elementului oscilant amortizat

Elementul este oscilant amortizat dacă $0 < \xi < 1$, iar dacă $\xi=0$, elementul este oscilant neamortizat. Când $\xi \geq 1$ este element cu inerţie de ordinul doi care poate fi reprezentat de două elemente cu inerţie de ordinul unu înseriate.

Element cu timp mort: ecuaţia diferenţială şi funcţia de transfer sunt următoarele:

$$y(t) = kx(t-\tau), \qquad (1.17)$$

$$G(s) = ke^{-\tau s}, \qquad (1.18)$$

unde k este coeficientul de transfer, τ – timp mort (dimensiunea secundă). Funcţiile indicială, pondere şi frecvenţiale ale elementului cu timp mort sunt prezentate în fig. 1.7, *a*) - *f*).

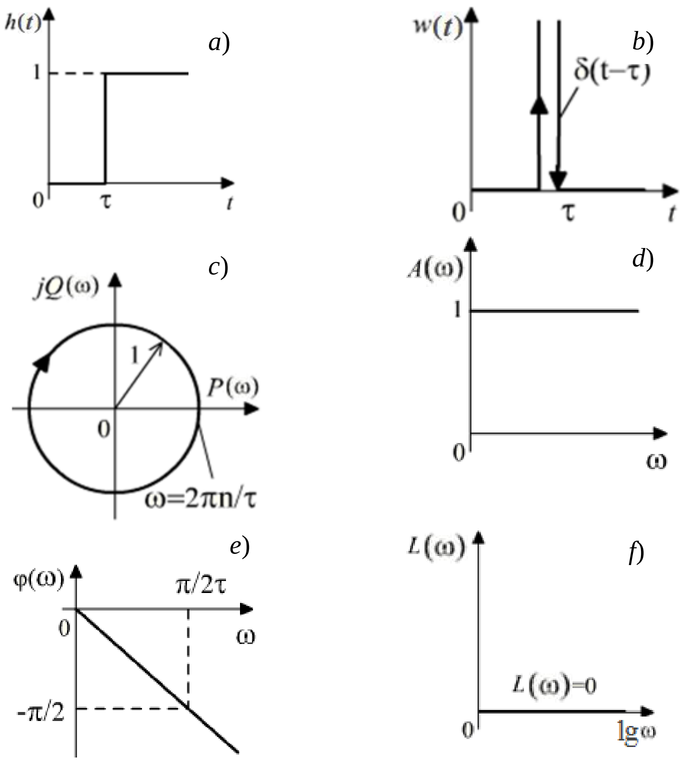


Fig. 1.7. Caracteristicile elementului cu timp mort

Aplicând metoda grafo-analitică, pe baza caracteristicilor tranzitorii (determinate experimental la calculator), determinăm valorile numerice ale parametrilor funcţiei de transfer. De exemplu, pentru elementul oscilant amortizat după caracteristica indicială $h(t)$ (fig. 1.6, *a*) se determină k, A_1, A_2, T_p şi, în continuare, se calculează parametrii f.d.t.: coeficientul de transfer k este egal (în proporţia corespunzătoare) cu ordonată dreptei regimului staţionar spre care tinde mărimea de ieşire (fig. 1.6, *a*), iar restul parametrilor se determină din soluţionarea sistemului de ecuaţii:

$$\xi = \frac{T}{T_p}\ln\left(\frac{A_1}{A_2}\right), \tag{1.19}$$

$$T = \frac{T_p}{2\pi}\sqrt{1-\xi^2}\,, \tag{1.20}$$

unde $T_p = 2\pi/\omega_p$ este nimită perioada proprie a oscilației sinusoidale amortizate, iar ω_p se numește pulsația proprie.

În ANEXELE A–D sunt date metode de soluţionare a ecuaţiilor diferenţiale, modele de semnale utilizate în sistemele automate, modele matematice ale elementelor tipice în domeniile timp şi frecvenţă.

2 *Modul de lucru în laborator*

1. Pe baza ecuaţiilor şi funcţiilor de transfer (1.1) - (1.18) pentru elementele tipice determinaţi expresiile proceselor indiciale $h(t)$ şi funcţiile frecvenţiale $G(j\omega)$, $A(\omega)$, $\varphi(\omega)$ şi $L(\omega)$ ale acestor elemente (vezi ANEXELE A-D). (Acest punct se îndeplineşte în cursul pregătirii de acasă).
2. Utilizând pachetul de programe MATLAB sau KOPRAS, asamblaţi schemele modelelor elementelor tipice cu datele numerice indicate de cadrul didactic pentru parametrii elementelor şi ridicaţi caracteristicile indiciale şi funcţiile pondere ale elementelor ideal, integrator, cu inerţie de ordinul unu, derivativ real, oscilant amortizat şi neamortizat şi cu timp mort.
3. Ridicaţi caracteristicile frecvenţiale ale elementelor tipice: locul de transfer $G(j\omega)$, amplitudinea-frecvenţă $A(\omega)$, faza-frecvenţă $\varphi(\omega)$ şi amplitudinea-frecvenţă la scară logaritmică $L(\omega)$.
4. Pe baza caracteristicilor de frecvenţă, calculaţi parametrii funcţiilor de transfer ai elementelor tipice: coeficientul de transfer, constanta de timp şi coeficientul de amortizare şi comparaţi-le cu datele obţinute în p. 2.

3 *Conţinutul dării de seamă*

1. Funcţiile de transfer, tranzitorii şi de frecvenţă ale elementelor studiate în lucrare.
2. Schemele de modelare a elementelor tipice.

3. Caracteristicile tranzitorii şi de frecvenţă ale elementelor.
4. Concluzii.

4 *Chestionar*

1. În ce constă principiul de clasificare a dispozitivelor fizice în elemente dinamice tipice? Ce se consideră element dinamic tipic?

2. Numiţi elementele dinamice tip liniare, ce pot fi evidenţiate în sistemele automate. Exemple de dispozitive reale ce corespund elementelor dinamice tipice.

3. Ce se numeşte caracteristică tranzitorie indicială? Cum se determină funcţia tranzitorie, dacă cunoaştem funcţia de transfer?

4. Reprezentaţi caracteristicile tranzitorii indiciale ale elementelor tipice.

5. Ce reprezintă caracteristică amplitudinea-fază (loc de transfer), amplitudinea-frecvenţă, faza-frecvenţă?

6. Reprezentaţi caracteristicile lor: locul de transfer $G(j\omega)$, amplitudinea-frecvenţă $A(\omega)$ şi faza-frecvenţă $\varphi(\omega)$.

7. Cum se construiesc caracteristicile de frecvenţă logaritmice asimptote (linii poligonale aproximante)?

8. Explicați cum se determină parametrii funcţiei de transfer pe baza caracteristicii tranzitorii pentru fiecare element-tipic.

9. Explicați cum se determină parametrii funcţiei de transfer pe baza caracteristicilor $G(j\omega)$, $A(\omega)$, $\varphi(\omega)$ pentru fiecare element.

10. Arătaţi cum se va modifica locul de transfer $G(j\omega)$ al elementului oscilant, dacă valoarea coeficientului de amortizare ξ variază de la 0 până la 1.

Lucrarea nr. 2

STUDIEREA REGIMULUI STAŢIONAR AL SISTEMELOR AUTOMATE SUB ACŢIUNI EXTERNE

Obiectivul lucrării: studierea metodelor de majorare a preciziei sistemelor automate şi determinarea influenţei parametrilor sistemului la precizia reproducerii oricăror acţiuni externe.

1 *Noţiuni generale*

La sinteza sistemelor automate trebuie satisfăcute performanţele necesare. În urma modificării semnalului de referinţă $r(t)$ la intrarea sistemului (fig. 2.1) ori perturbaţiei $p(t)$, mărimea de ieşire (răspunsul) poate fi determinată prin expresia:

$$y(t) = y_l(t) + y_f(t), \tag{2.1}$$

unde $y(t)$ este soluţia ecuaţiei diferenţiale ce descrie sistemul, $y_l(t)$ - componenta liberă (regimul tranzitoriu), $y_f(t)$ - componenta forţată (regimul staţionar) ce depinde de evoluţia acţiunilor externe $r(t)$ şi $p(t)$.

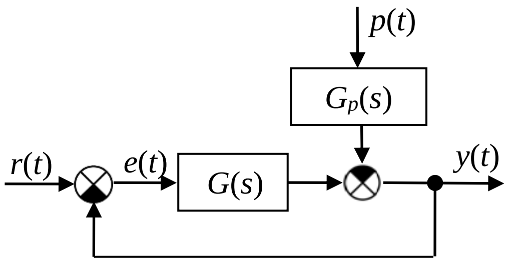


Fig. 2.1. Schema bloc structurală a sistemului automat

Din expresia (2.1) observăm că performanţele sistemului automat pot fi determinate conform componentelor $y_l(t)$ şi $y_f(t)$. În acest sens deosebim două grupuri de performanţe: primul - performanţele regimului tranzitoriu $y_l(t)$, al doilea - performanţele ce caracterizează regimul forţat $y_f(t)$ (regim staţionar), pe baza cărora se determină precizia sistemului [1-10].

Funcţiile de transfer eroare-intrare şi eroare-perturbaţie pentru sistemul automat adus la structura (fig. 2.1) sunt:

$$G_{er}(s) = \frac{E_r(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G(s)}, \tag{2.1}$$

unde $G_{er}(s)$ este funcţia de transfer intrare-eroare, $E_r(s)$ - eroarea sistemului la acţiunea semnalului de referinţă $R(s)$; $G(s)$ – funcţia de transfer a sistemului în buclă deschisă:

$$G_{ep}(s) = \frac{E_p(s)}{P(s)} = \frac{G_p(s)}{1+G(s)}, \tag{2.2}$$

unde $G_{ep}(s)$ este funcţia de transfer eroare-perturbaţie, $E_r(s)$ - eroarea sistemului la acţiunea semnalului de perturbaţie $P(s)$, $G_p(s)$ – funcţia de transfer în canalul perturbaţiei.

Eroarea sistemului la acţiunea referinţei $r(t)$ şi perturbaţiei $p(t)$ este alcătuită din două componente:

$$E(s) = E_r(s) + E_p(s). \tag{2.3}$$

Vom analiza performanţele ce caracterizează eroarea forţată $e_f(t)$ a sistemului. Pentru a aborda problema generală a erorii staţionare la o intrare oarecare, menţionăm că regimul staţionar corespunde valorilor mici ale lui s. Deci, regimul din jurul originii este şi zona de convergenţă a seriei Mac Laurin. Ca urmare a dezvoltării în serie a funcţiei de transfer a erorii obţinem seria:

$$G_{er}(s) = \frac{E_r(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G(s)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k s^k}{k!}, \tag{2.4}$$

unde coeficienţii c_k se calculează prin relaţia:

$$c_k = \frac{\partial^k G_{er}(s)}{\partial s^k}\Big|_{s=0}, \quad 0,1,2,\cdots,n. \tag{2.5}$$

Calculul coeficienţilor c_k după relaţia de bază (2.5) este dificil. Mult mai simplu coeficienţii erorii c_k se calculează dacă f.d.t. a erorii se dezvoltă în serie după gradele lui s:

$$G_{er}(s) = \frac{b_0+b_1 s+b_2 s^2+\cdots+b_m s^m}{a_0+a_1 s+a_2 s^2+\cdots+a_n s^n} = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \cdots =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k. \quad (2.6)$$

Înmulţim termenii din stânga şi dreapta ai expresiei (2.6) cu numitorul acesteia şi egalând coeficienţii din stânga şi dreapta de pe lângă aceleaşi grade ale lui s, obţinem un sistem de ecuaţii algebrice din care se calculează coeficienţii erorii:

$$\begin{gathered} b_0 = c_1 a_0, \\ b_1 = c_1 a_0 + c_0 a_1, \\ b_2 = c_2 a_0 + c_1 a_1 + c_0 a_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_m = c_m a_0 + c_{m-1} a_1 + \cdots + c_0 a_m, \\ 0 = c_{m+1} a_0 + c_m a_1 + \cdots + c_0 a_{m+1}, \end{gathered} \quad (2.7)$$

de unde rezultă expresia recurentă:

$$c_k = \frac{1}{a_0}\{b_k - \sum_{r=1}^{k} c_{k-r} a_r\}, \quad (2.8)$$

unde $b_k \equiv 0$ când $k > m$ şi $a_r \equiv 0$ când $r > n$.

Din expresia (2.4) eroarea sistemului este:

$$E_r(s) = c_0 R(s) + c_1 s R(s) + \frac{1}{2!} c_2 s^2 R(s) + \cdots + \frac{1}{k!} c_k s^k R(s), \quad (2.9)$$

unde coeficienţii $c_0, c_1, \cdots, c_n$ se numesc coeficienţi generalizaţi ai erorii staţionare a sistemului.

Expresia (2.9) în domeniul timpului pentru intrarea $r(t)$ pe întreg intervalul $0 < t < \infty$ este:

$$e_r(t) = c_0 r(t) + c_1 \dot{r}(t) + \frac{1}{2!} c_2 \ddot{r}(t) + \cdots + \frac{1}{k!} c_n r^{(n)}(t). \quad (2.10)$$

Coeficienţii erorii se numesc: c_0 este coeficientul erorii de poziţie; c_1– coeficientul erorii de viteză; c_2 – coeficientul erorii de acceleraţie etc. Similar poate fi exprimată şi eroarea sistemului la semnalul de perturbaţie $e_p(t)$.

Menţionăm că în sistemul static c_0 diferă de zero, iar în sistemul astatic de ordinul întâi c_0 = 0, dar c_1 diferă de zero; în sistemul astatic de ordinul doi coeficienţii c_0 = c_1= 0, $c_2 \neq 0$. Majorarea gradului de astatism în sistem majorează numărul coeficienţilor egali cu zero, însă se complică considerabil asigurarea stabilităţii lui. Dacă funcţia semnalului extern are un număr limitat de derivate deosebite de zero, seria (2.6) are un număr limitat de coeficienţi. Metoda coeficienţilor erorii se foloseşte numai în cazurile când acţiunile se schimbă lent în timp.

În continuare vom analiza un exemplu când sistemul automat se descrie prin funcţia de transfer:

$$G(s) = \frac{k}{s(a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3)} . \quad (2.11)$$

Perturbaţia se reprezintă prin expresia $p(t)=b_0+b_1 t+b_2 t^2$, iar f.d.t. a perturbaţiei este $G_p(s)=k_p$. Că se determine eroarea sistemului la acţiunea acestei perturbaţii.

Determinăm f.d.t. perturbaţie-eroare conform (2.2):

$$G_{ep}(s) = \frac{k_p(a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s)}{a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + k} . \quad (2.12)$$

Deoarece perturbaţia $p(t)$ are derivate de ordinul întâi şi doi, determinăm numai coeficienţii c_0, c_1 şi c_2:

$$c_0=0,\ c_1=k_p/k,\ c_2 = 2b_2 k_p(a_2 k - a_3)/k^2.$$

Determinăm prima şi a doua derivată a perturbaţiei:

$$\dot{p}(t) = b_1 + 2b_2 t \text{ şi } \ddot{p}(t) = 2b_2.$$

Utilizăm expresia (2.10), dar substituim referinţa $r(t)$ cu perturbaţia $p(t)$ şi calculăm eroarea sistemului la acţiunea perturbaţiei:

$$e_p(t) = c_1\dot{p}(t) + c_2(t)\ddot{p}(t) = \frac{k_p(b_1+2b_2 t)}{k} + \frac{2b_2 k_p(a_2 k - a_3)}{k^2} . \quad (2.13)$$

După cum rezultă din (2.13), urmărnd semnalul perturbaţiei $p(t)$, eroarea sistemului analizat creşte proporţională timpului.

Dacă perturbaţia este $p(t)=b_0 + b_1 t$, atunci $\dot{p}(t) = b_1$ în sistem se observă o eroare de viteză constantă exprimată prin relaţia $e_p(t)=k_p b_1/k$. Așadar, din expresiile de mai sus, coeficienţii erorii sunt invers proporţionali coeficientului de transfer al sistemului deschis.

2 *Modul de lucru în laborator*

1. Asamblaţi schema modelului SA (fig. 2.2) pe calculator şi stabiliţi valorile coeficienţilor de transfer, numite de cadrul didactic.

2. Determinaţi valorile erorii statice în raport cu valorile referinţei $r(t)$ şi perturbaţiei $p(t)$ pentru două valori ale coeficientului de transfer al sistemului deschis k=10,100. Valorile funcţiilor $r(t)$ şi $p(t)$ se modifică de la 1-10 peste o unitate. Pentru fiecare valoare a lui k ridicaţi caracteristica tranzitorie.

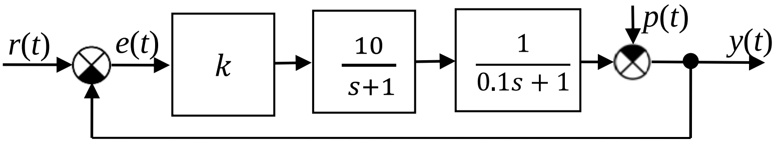


Fig. 2.2. Schema bloc structurală a unui sistem automat static

3. Determinaţi valorile erorii în raport cu referinţa $r(t)=at$ şi perturbaţia $p(t) = bt$ pentru aceleaşi valori ale lui k, ca în p. 2.

4. Înlocuiţi în schema asamblată (fig. 2.2) un element de întârziere cu un element integrator şi repetaţi experimentele din pp. 2 şi 3.

5. Schimbaţi locul de acţiune a perturbaţiei cum este arătat în fig. 2.3 şi repetaţi experimentele din pp. 2 şi 3, excepţie - caracteristica tranzitorie.

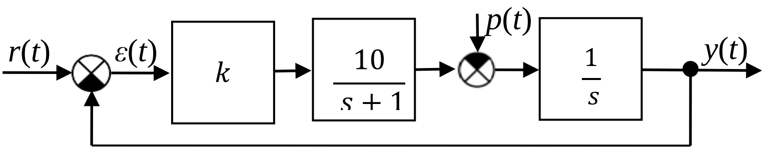


Fig. 2.3. Schema bloc structurală a unui sistem automat astatic

6. Asamblaţi schema modelului sistemului de urmărire (fig. 2.4) pe calculator şi stabiliţi valorile coeficienţilor de transfer necesare.

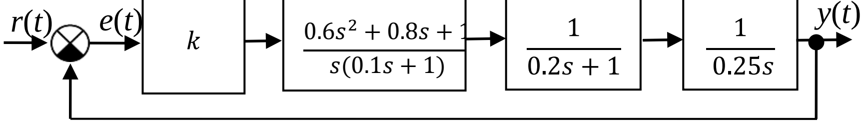


Fig. 2.4. Schema bloc structurală a unui SA astatic cu corecţie

7. Determinaţi valorile erorii în raport cu $r(t)=at+bt^2$ pentru două valori ale coeficientului de transfer al sistemului deschis din limitele k = 1-20. Valorile a, b şi k sunt indicate de către cadrul didactic.

8. Măriţi cu o unitate gradul astatismului şi repetaţi experimentul din p. 7.

9. Conform datelor obţinute în pp. 2-8 trasaţi caracteristicile respective şi comparaţi-le cu cele calculate.

3 C*onţinutul dării de seamă*

1. Schemele structurale ale sistemelor studiate în lucrare.
2. Funcţiile $e(t)= f(r(t))$ şi $e(t)=f(p(t))$ calculate.
3. Graficele proceselor tranzitorii.
4. Concluzii.

4 *Chestionar*

1. Cum influenţează coeficientul de transfer al sistemului deschis asupra preciziei lui?
2. Depinde oare stabilitatea sistemelor automate de coeficientul de transfer al sistemului deschis?
3. Numiţi metodele de ridicare a preciziei sistemelor automate.
4. Depinde oare stabilitatea sistemelor automate de gradul astatismului?
5. Depinde oare eroarea staţionară a sistemului astatic de punctul de acţiune al perturbaţiei?

Lucrarea nr. 3

INFLUENŢA ELEMENTELOR DE CORECŢIE ASUPRA PROPRIETĂŢILOR SISTEMELOR AUTOMATE

Obiectivul lucrării: studierea metodelor de corecţie a proprietăţilor sistemelor automate şi influenţei parametrilor elementelor de corecţie asupra performanţelor sistemelor automate.

1 *Noţiuni generale*

Corecţia proprietăţilor dinamice ale sistemelor automate se foloseşte pentru a îndeplini cerinţele de precizie, stabilitate şi performanţă ale regimului tranzitoriu [1-10]. Din punct de vedere al cerinţelor de precizie (în regim staţionar), elementele de corecţie a dinamicii sistemelor automate modifică coeficientul de transfer sau ordinul de astatism, păstrând stabilitatea şi performanţele regimului tranzitoriu. Corecţia se mai aplică pentru a stabiliza sistemul instabil, a majora domeniul de stabilitate ori pentru a ridica performanţele necesare ale regimului tranzitoriu. Corecţia se realizează cu ajutorul elementelor cu funcţii de transfer special selectate, care se introduc în sistem. Conform metodei de conectare în sistem, elementele de corecţie se împart în elemente de conectare în serie, paralel şi în reacţie (fig. 3.1).

În schemele structurale din fig. 3.1 $G_0(s)$, $G_1(s)$ şi $G_c(s)$ reprezintă funcţiile de transfer ale elementelor de bază ale sistemului, iar $G_c(s)$ este funcţia de transfer a elementului de corecţie. Elementele de corecţie introduc în sistem următoarele acţiuni suplimentare:

• acţiuni integrale şi prin derivate în circuitul închis al sistemelor automate;

• legături inverse de corecţie aplicate la unele elemente ale sistemului automat;

• acţiuni de corecţie în funcţie de perturbaţii ori prescrieri şi derivatelor lor.

Cele mai utilizate sunt următoarele elemente de corecţie cuplate în serie: elemente de anticipare, elemente proporţional-integrative şi elemente proporţionale-integrative-derivative.

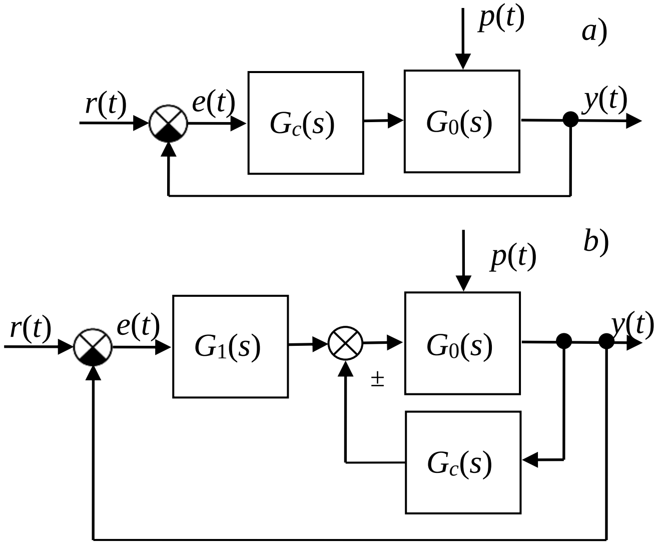


Fig. 3.1. Schema cuplării elementelor de corecţie în SA: *a*) în serie; *b*) în paralel

Elementul de anticipare de ordinul unu se descrie prin următoarea funcţie de transfer:

$$G_{pd}(s) = k_p \pm k_d s. \qquad (3.1)$$

Din (3.1) rezultă că la acest element mărimea-efect este alcătuită din două componente: componenta proporţională mărimii-intrare cu coeficientul k_p şi componenta proporţională derivatei acestei mărimi cu coeficientul k_d. Ultima componentă poate fi pozitivă ori negativă. Introducerea în serie a unui astfel de element în sistemul automat modifică funcţia de transfer a sistemului iniţial deschis $G(s) = C(s)/D(s)$, care devine egală cu produsul funcţiilor de transfer ale sistemului şi elementului de corecţie:

$$G_0(s)G_{pd}(s) = \frac{C(s)(k_p \pm k_d s)}{D(s)}\,. \tag{3.2}$$

Prin urmare, ecuaţia caracteristică a sistemului închis devine egală cu:

$$A(s) = C(s)\big(\,k_p\ \pm\ k_d s\big) + D(s) = 0\,, \tag{3.3}$$

unde $D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n$.

Dacă $C(s) = k$, atunci introducerea în circuitul sistemului a acţiunii derivative cu ajutorul elementului de anticipare de ordinul unu permite a varia mărimea coeficientului pe lângă s în ecuaţia caracteristică a sistemului închis. Introducerea în circuitul sistemului a unui element de anticipare de ordinul doi (ori a două elemente de anticipare de ordinul unu, cuplate în serie) schimbă valoarea coeficienţilor pe lingă s, $s^2, \cdots$. Variaţia acestor coeficienţi modifică condiţiile de stabilitate şi performanţele regimului tranzitoriu ale sistemului automat.

Vom analiza, de exemplu, utilizarea elementelor de anticipare pentru a satisface condiţiile de stabilitate ale sistemelor automate cu astatismul mai mare decât cel de gradul unu. Funcţia de transfer a sistemului astatic cu astatism de gradul ν poate fi adusă la următoarea formă:

$$G_0(s) = \frac{C(s)}{D(s)} = \frac{C(s)}{s^\nu L(s)}\,. \tag{3.4}$$

Prin urmare, ecuaţia caracteristică a sistemului închis este:

$$A(s) = s^\nu L(s) + C(s) = 0. \tag{3.5}$$

Condiţiile necesare de stabilitate a sistemului cer ca toţi coeficienţii ecuaţiei caracteristice să fie pozitivi. Dacă $C(s) = k$, atunci în sistem lipsesc acţiunile derivative, deci din (3.5) urmează că sistemele automate cu gradul de astatism mai mare de 1 ($\nu > 1$) sunt instabile, deoarece în ecuaţia caracteristică lipsesc componentele cu s de la gradul unu până la gradul ν-1.

Introducem în circuitul sistemului un element de anticipare de ordinul ν-1. Ca rezultat, în polinomul caracteristic $A(s)$ apar componentele ce lipseau, deoarece:

$$A(s) = k\big(k_p + k_1 s + k_2 s^2 + \cdots + k_{\nu-1}s^{\nu-1}\big) + s^\nu L(s). \tag{3.6}$$

Din (3.6) reiese că sistemul devine structural stabil. Prin urmare, sistemul astatic de ordinul υ devine structural stabil, dacă în circuitul său sunt introduse acţiuni derivative de la ordinul unu până la ordinul ν-1.

Elementele de anticipare, cuplate în circuitul sistemului automat, modifică, pe lângă domeniul de stabilitate, şi viteza de răspuns a procesului tranzitoriu. Acţiunea derivativ-pozitivă, proporţională vitezei de variaţie a semnalului de intrare, majorează semnalul când acesta creşte, şi invers, îl micşorează suplimentar când începe a se micşora. Prin urmare, o astfel de acţiune forţează decurgerea procesului tranzitoriu, accelerându-l. Acţiunea derivativă-negativă acţionează invers-încetineşte decurgerea procesului tranzitoriu. În realitate, elementele de anticipare au o întârziere substanţială în urma căreia funcţia de transfer ia forma:

$$G_{pd}(s) = \frac{k_p \pm k_d s}{T_{pd} s + 1}, \tag{3.7}$$

unde $T_{pd} \ll k_d/k_p$, cu alte cuvinte este mică.

Elementul de anticipare real poate fi redat ca un element de anticipare ideal, unit în serie cu un element de întârziere. De aceea, toate concluziile de mai sus referitor la influenţa elementelor de anticipare ideale asupra domeniului de stabilitate şi performanţelor sistemelor automate se referă şi la elementele cu anticipare reale cu diferenţa că ele au o influenţă mai slabă. Influenta lor scade până la zero cu majorarea constantei de timp T_{pd} când T_{pd} tinde către k_d/k_p.

În cazul când este necesar a majora gradul de astatism al sistemului, păstrând stabilitatea şi performanţele necesare, se folosesc elemente proporţionale-integrale. Funcţia de transfer a elementului proporţional-integral este:

$$G_{pi}(s) = k_p + \frac{1}{T_i s} = k_p + \frac{k_i}{s} = \frac{k_p s + k_i}{s}. \tag{3.8}$$

După cum se observă din (3.8), un astfel de element este echivalent cu unirii în serie a elementelor integral şi de anticipare de ordinul unu, de aceea acest element permite a mări ordinul astatismului, păstrând stabilitatea structurală a sistemului automat.

Elementele proporţionale-integrative-derivative (PID) se descriu prin funcţia de transfer:

$$G_{pid}(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s = \frac{k_d s^2 + k_p s + k_i}{s}, \qquad (3.9)$$

$$G_{pid}(s) = k_p \pm \frac{1}{T_i s} \pm \frac{T_d s}{T_p s+1} = k_p + \frac{k_i}{s} + \frac{k_d s}{T_p s+1} = \frac{k_d s^2 + k'_p s + k'_i}{T_p s+1}\frac{1}{s}, \qquad (3.10)$$

unde T_p este constanta de timp de filtrare (parazitară).

Expresia (3.9) descrie elementul PID ideal, iar (3.10) este elementul PID real.

După cum se observă din (3.9), (3.10), un astfel de element este echivalent unirii în serie a elementelor integrator şi de anticipare de ordinul doi (real). Prin urmare, elementele proporţionale-integrative-derivative, ca şi elementele proporţional-integrative, majorează ordinul astatismului, dar au o influenţă mai puternică asupra dinamicii sistemului automat.

După cum s-a menţionat mai sus, elementele de corecţie pot fi conectate şi ca legături inverse pentru o parte a sistemului (fig. 3.1, *b*). Dacă introducem pentru elementul cu funcţia de transfer $G_0(s)$ o legătură inversă cu funcţia de transfer $G_c(s)$, atunci funcţia de transfer echivalentă devine:

$$G_{0c}(s) = \frac{G_0(s)}{1 \mp G_0(s) G_c(s)}, \qquad (3.11)$$

unde semnul "plus" la numitor corespunde reacţiei negative, iar semnul "minus" - reacţiei pozitive. Legăturile inverse de corecţie se mai împart, în afară de pozitive şi negative, şi în legături rigide, elastice şi integratoare. Legăturile inverse rigide se realizează cu ajutorul elementelor statice $Gc(0) \neq 0$, care acţionează în regimurile staţionar şi tranzitoriu, pe când reacţia elastică se realizează prin elemente derivative şi acţionează numai în regimul tranzitoriu, de aceea funcţia de transfer a legăturii inverse elastice în regimul staţionar este egală cu zero, iar reacţia integrativă se realizează prin elemente integrative care acţionează în regimurile tranzitoriu şi staţionar.

În continuare vom analiza acţiunea legăturii inverse rigide cu funcţia de transfer $G_c(s) = k_c$ Admitem că se utilizează legătura inversă la un element oscilant amortizat cu funcţia de transfer:

$$G_{0c}(s) = \frac{k}{T^2s^2+2\xi Ts+1}\,. \tag{3.12}$$

Corespunzător (3.12), funcţia de transfer echivalentă devine egală cu:

$$G_{0c}(s) = \frac{k}{T^2s^2+2\xi Ts+1\mp kk_c}\,. \tag{3.13}$$

Împărţim numitorul şi numărătorul la $1 \mp kk_c$ şi obţinem:

$$G_{0c}(s) = \frac{k_e}{T_e^2s^2+2\xi_e T_e s+1}\,, \tag{3.14}$$

unde $k_e = \frac{k}{1\mp kk_c}$, $T_e = \frac{T}{\sqrt{1\mp kk_c}}$, $\xi_e = \frac{\xi}{\sqrt{1\mp kk_c}}$.

Din (3.14) rezultă că reacţia negativă rigidă micşorează inerţia elementului din canalul direct şi coeficientul de amortizare care conduce la majorarea oscilaţiilor. În cazul când $\xi>1$, o astfel de reacţie este justificată, dar dacă $\xi<1$, atunci este nedorită, fiindcă aceasta poate provoca majorarea oscilaţiilor sistemului în genere. Se constată că reacţia rigidă aplicată la un element de întârziere de orice ordin modifică de $(1\mp kk_c)$ ori toţi coeficienţii funcţiei de transfer.

Reacţia rigidă cu întârziere, în afară de coeficienţi, modifică şi funcţia de transfer, în numărătorul căreia se apar factori cu acţiune derivativă.

În calitate de reacţii elastice se folosesc elemente derivative. Elementul derivativ real se descrie prin funcţia de transfer:

$$G_d(s) = \frac{k_d s}{T_d s+1}\,. \tag{3.15}$$

Astfel de legătură inversă se numeşte reacţie de viteză.

Analizăm acţiunea reacţiei de viteză ideală asupra performanţelor dinamice ale sistemului. Funcţia de transfer a elementului derivativ ideal este:

$$G_d(s) = k_d s\,. \tag{3.16}$$

În acest caz, pentru elementul cu funcţia de transfer $G_0(s) = k/L(s)$ obţinem funcția de transfer echivalentă:

$$G_{0e}(s) = \frac{k}{L(s) \mp k k_d s}\,. \tag{3.17}$$

Prin urmare, reacţia de viteză ideală modifică numai coeficientul pe lângă s în numitorul funcţiei de transfer, reacţia negativă îl majorează, iar cea pozitivă îl micşorează.

Reacţia elastică cu întârziere modifică dinamica elementului din canalul direct în acelaşi mod ca şi reacţia rigidă cu întârziere.

Pentru sistemele automate liniare, ambele metode de corecţie sunt echivalente. Cu alte cuvinte, elementul de corecţie în serie poate fi înlocuit cu un element introdus în reacţie, şi invers, păstrând neschimbate proprietăţile dinamice ale sistemului automat. Dar, indiferent de aceasta, corecţia în reacţie are o mai largă utilizare din următoarele considerente:

- legătura inversă se realizează mai uşor, fiindcă la intrarea ei se aplică un semnal cu o putere mai mare decât puterea semnalului în punctul unde este aplicată ieşirea acestei legături;
- legătura inversă negativă micşorează influenţa elementelor neliniare şi instabilitatea parametrilor lor în acea parte a sistemului unde aceasta este aplicată.

Elementele de corecţie conectate în serie sunt mai comode în aplicare în sistemele electrice de curent continuu.

2 *Modul de lucru în laborator*

1. Asamblaţi modelul schemei structurale a sistemului (fig. 3.2) pe calculator şi ridicaţi caracteristica procesului tranzitoriu al sistemului.

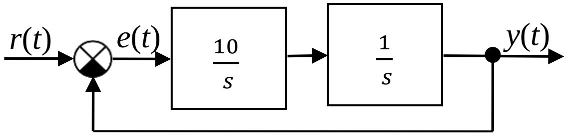


Fig. 3.2. Schema bloc structurală a SA necorectat

2. Introduceţi în modelul sistemului automat elementul de corecţie cu funcţia de transfer:

$$G_{pd}(s) = G_c(s) = \frac{1+Ts}{0.1s+1},$$

aşa cum este indicat în fig. 3.3 şi ridicaţi caracteristicile tranzitorie, amplitudine-frecvenţă şi fază-frecvenţă pentru valorile lui T egale cu 1; 0,5; 0,2.

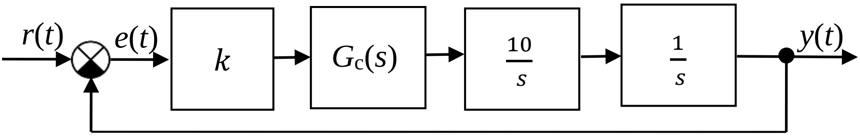


Fig. 3.3. Schema structurală a SA cu corecţie în serie

3. Înlocuiţi în fig. 3.3 elementul de corecţie cu anticipare prin elementul proporţional-integrativ-derivativ cu funcţia de transfer:

$$G_c(s) = G_{pid}(s) = \frac{k_i+0.8s+0.6s^2}{s(0.1s+1)}.$$

Ridicaţi caracteristicile tranzitorie, amplitudine-frecvenţă şi fază-frecvenţă pentru valorile k_i = 1, 2, 4.

4. În schema asamblată în p. 3 introduceţi o reacţie rigidă la un integrator şi ridicaţi caracteristicile tranzitorie, amplitudine-frecvenţă şi faza-frecvenţă pentru valorile lui k_i = 1, 2, 4.

5. Conform datelor obţinute în pp. 2-5 prezentaţi caracteristicile tranzitorii şi frecvenţiale (caracteristicile amplitudine-frecvenţă şi faza-frecvenţă se trasează în acelaşi sistem de coordonate pentru fiecare punct aparte).

3 C*onţinutul dării de seamă*

1. Schemele structurale ale SA studiate în lucrare.
2. Graficele caracteristicilor tranzitorii ale SA.
3. Graficele caracteristicilor frecvenţiale ale SA.

4. Valorile performanţelor SA determinate din caracteristicile sistemelor automate studiate.

5. Concluzii.

4 *Chestionar*

1. Formulați condiţiile necesare şi suficiente de stabilitate a sistemului automat.

2. Ce înseamnă limită a coieficientului de transfer a sistemului deschis şi cum poate fi determinată valoarea lui?

3. Determinaţi f.d.t. a sistemului închis cu schema structurală din fig. 3.2 şi 3.3.

4 Cum se modifică performanţele procesului tranzitoriu, dacă introducem în sistem elemente de corecţie cuplate în serie?

5. Care sunt performanţele procesului tranzitoriu al sistemului automat şi metodele aplicate pentru determinarea lor?

6. Lămuriţi influenţa reacţiilor rigide şi elastice cuplate în sistem asupra caracteristicilor dinamice ale sistemului automat.

7. Efectuați analiza comparativă a elementelor de corecţie introduse în sistem în serie ori în reacţie.

Lucrarea nr. 4

SISTEME AUTOMATE CU CONDUCERE COMBINATĂ

Obiectivul lucrării: studierea proprietăţilor dinamice şi statice ale sistemelor automate cu conducere combinată (sisteme automate invariante).

1 *Noţiuni generale*

Sistemele în care se utilizează principiile de conducere în funcţie de abatere şi perturbaţie se numesc sisteme automate cu conducere combinată. În funcţie de acţiunea externă (prescriere ori perturbaţie), pentru care este organizat circuitul suplimentar, sistemele automate cu conducere combinată se împart în două clase: sisteme cu reglare combinată şi sisteme combinate de urmărire [7, 8].

Sistemul automat este invariant în raport cu oricare semnal extern, dacă după stabilirea regimului staţionar mărimea reglată şi eroarea sistemului nu depind de aceste semnale.

Reglarea combinată se efectuează pentru a micşora influenţa unei perturbaţii, cea mai puternică, aplicată la obiectul condus. Schema structurală a unui astfel de sistem este reprezentată în fig. 4.1. Aici $G_A(s)$ este funcţia de transfer a amplificatorului (A), $G_{EE}(s)$ - funcţia de transfer a elementului de execuţie (EE), $G(s)$ şi $G_p(s)$ - funcţiile de transfer intrare-ieşire şi perturbaţie-ieşire ale obiectului, $G_t(s)$ - funcţia de transfer a traductorului de perturbaţie.

Circuitul închis, alcătuit din elementele $G_A(s)$, $G_{EE}(s)$ şi $G(s)$, realizează reglarea în funcţie de abatere care asigură redarea mărimii conduse $Y(s)$ conform mărimii prescrise $R(s)$ şi micşorează influenţa perturbaţiilor secundare interne şi externe. Circuitul suplimentar, în funcţie de perturbaţia principală $P(s)$ alcătuită din elementul $G_t(s)$, are ca scop compensarea acţiunii $p(t)$ asupra mărimii conduse. De aceea, circuitul suplimentar se mai numeşte circuit de compensare. Circuitul de compensare se cuplează de obicei în circuitul direct ori la intrarea elementului de corecţie în serie (dacă acesta există).

Conform schemei structurale a sistemului din fig. 4.1, determinăm funcţia de transfer perturbație-ieşire:

$$G_{yp}(s) = \frac{G_t(s)G_{EE}(s)G(s)-G_p(s)}{1+G_d(s)}, \tag{4.1}$$

unde $G_0G_d(s)=G_A(s)G_{EE}(s)G(s)$ indică funcţia de transfer în buclă deschisă.

Dacă

$$G_p(s)=G_t(s)G_{EE}(s)G(s), \tag{4.2}$$

atunci funcţia de transfer perturbaţie-ieşire este egală cu zero şi, prin urmare, perturbaţia $p(t)$ nu influenţează asupra mărimii conduse. În aşa caz se spune că mărimea condusă $y(t)$ este invariantă faţă de perturbaţia $p(t)$. Egalitatea (4.2) este condiţia invariantei depline a lui $y(t)$ în raport cu $p(t)$. Se numeşte invarianţă

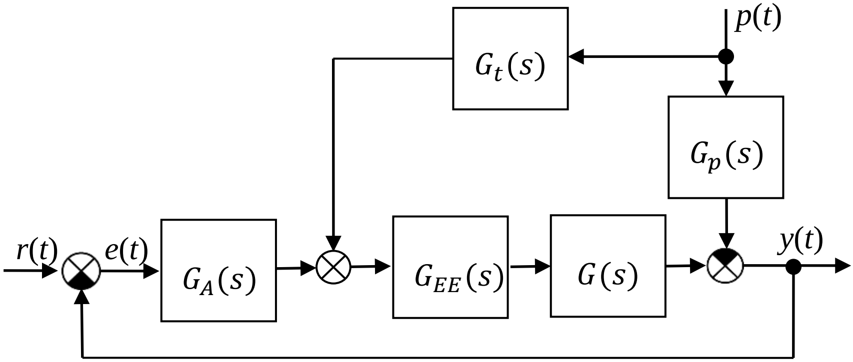


Fig. 4.1. Schema bloc structurală a SA cu conducere combinată

deplină, cu precizia componentei de tranziţie, independenţa mărimii conduse $y(t)$ faţă de evoluţia perturbaţiei. Însă valorile iniţiale ale perturbaţiei şi derivatele ei formează componenta de tranziţie a mărimii conduse. Dacă valorile iniţiale ale perturbaţiei şi derivatele ei nu influenţează asupra mărimii conduse, atunci invarianţa este absolută, pentru care sunt necesare condiţii suplimentare.

În sistemul examinat mai sus invarianţa absolută va avea loc numai în cazul, când elementele traductorul $G_t(s)$ şi elementul de execuţie $G_{EE}(s)$ nu vor avea inerţie şi atunci se va îndeplini egalitatea $G(s)=G_p(s)$. Din cauza inerţiei elementelor principale ale sistemului automat, satisfacerea condiţiilor invarianţei depline implică mari dificultăţi. De exemplu, dacă

$$G(s) = \frac{k}{Ts+1},\ G_{EE}(s) = \frac{k_e}{T_1^2 s^2 + T_2 s + 1}\ ,\ G_p(s) = k_p\ , \qquad (4.3)$$

atunci, condiţiile invarianţei pot fi determinate conform expresiei (4.2):

$$G_t(s) = \frac{G_p(s)}{G(s)G_{EE}(s)} = \frac{k_p}{kk_{EE}}[TT_1^2 s^3 + (T_1^2 + TT_2)s^2 + (T + T_2)s + 1]\ .$$

În cazul dat, pentru a realiza invarianţa deplină, elementul circuitului de compensaţie trebuie să realizeze derivatele de ordinul unu, doi şi trei ale semnalului perturbaţiei. În aceste cazuri realizarea fizică a elementelor derivative este dificilă şi practic irealizabilă. Astfel, se constată că se obţine o invarianţă cu o precizie până la o mărime mică δ. Chiar dacă nu este posibilă realizarea invarianţei depline, cu atât mai mult a celei absolute, sistemele combinate au calităţi importante.

Scopul principal în sistemul de urmărire îl constituie reproducerea cât mai precisă la ieşire a evoluţiei semnalului de prescriere aplicat la intrarea sistemului. De aceea, circuitul suplimentar se realizează în funcţie de acest semnal. În sistemul combinat de urmărire (sistem invariant la semnalul de intrare) (fig. 4.2) reproducerea semnalului prescris se realizează în temei pe baza circuitului de accelerare $G_f(s)$, iar circuitul închis joacă un rol secundar. Rolul principal al acestuia constă în reducerea influenţei perturbaţiilor interne şi externe. Circuitul de accelerare se cuplează în circuitul închis în acelaşi mod ca şi circuitul de compensare a perturbaţiei.

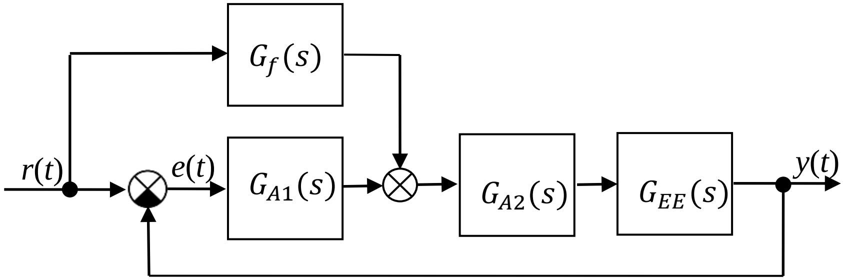


Fig. 4.2. Schema bloc structurală a SA de reproducere a semnalului de referinţă

Conform schemei structurale a sistemului (fig. 4.2), funcţia de transfer în buclă înschisă este egală:

$$G_{\hat{\imath}}(s) = \frac{G_d(s) + G_f(s)G_{A2}(s)G_{EE}(s)}{1 + G_d(s)}, \tag{4.4}$$

unde $G_d(s) = G_{A1}(s)G_{A2}(s)G_{EE}(s)$.

Pentru a reproduce precis semnalul de intrare $r(t)$ funcţia de transfer în buclă închisă trebuie să fie egală cu unu:

$$G_{\hat{\imath}}(s) = 1. \tag{4.5}$$

Pe baza expresiilor (4.4) şi (4.5) determinăm funcţia de transfer a circuitului de acceleraţie:

$$G_f(s) = \frac{1}{G_{A2}(s)G_{EE}(s)}. \tag{4.6}$$

Pentru a reproduce ideal la ieşire mărimea urmărită $r(t)$ de sistem, trebuie îndeplinită egalitatea (4.6), care este condiţia invarianţei erorii de urmărire $e(t)$ de mărimea prescrisă $r(t)$.

Practic pot fi realizate elemente derivative de ordinul nu mai mare decât doi, fiindcă derivarea semnalului repetată de mai multe ori este dificilă şi are eroare şi, ca rezultat, duce la intensificarea considerabilă a nivelului de bruiaj. De aceea, în sistemul combinat de urmărire, invarianţa erorii de urmărire $e(t)$ de mărimea prescrisă $r(t)$ se realizează parţial cu precizia derivatei de ordinele zero, unu şi doi. Cu alte cuvinte, poate fi realizat corespunzător un astatism de ordinul unu, doi şi trei, în raport cu mărimea urmărită.

Inerţia inevitabilă a elementelor derivative (deşi neînsemnată), inexactitatea determinării coeficienţilor funcţiilor de transfer şi relizarea acestora aduc la faptul că şi invarianţa parţială se realizează cu o exactitate până la o mărime mică. Indiferent de aceasta, circuitul de accelerare sporeşte substanţial precizia de urmărire a sistemului, de aceea acesta beneficiază de o utilizare largă. Cu cât mai lent se schimbă mărimea prescrisă $r(t)$, cu atât mai mare va fi efectul invarianţei parţiale $e(t)$ în funcţie de $r(t)$. În încheiere menţionăm că circuitul suplimentar nu influenţează asupra stabilităţii circuitului închis, însă e necesar ca însăşi această legătură sa fie stabilă.

2 *Modul de lucru în laborator*

1. Determinați funcţia de transfer $G_c(s)$ a circuitului suplimentar în schema structurală a sistemului din fig. 4.3.

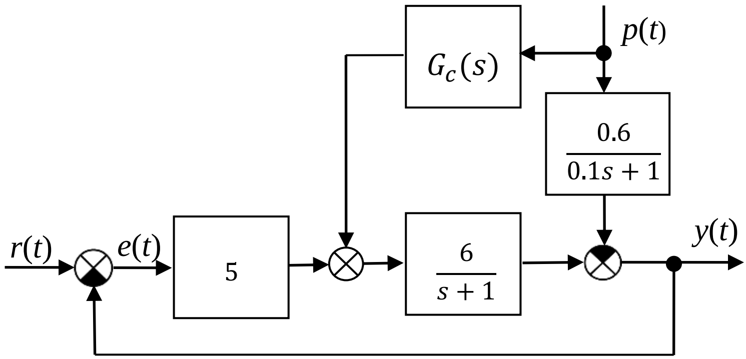


Fig. 4.3. Schema bloc structurală a SA
cu compensarea perturbaţiei

2. Asamblaţi pe calculator schema structurală a sistemului din fig. 4.3 şi instalaţi valorile parametrilor sistemului.
3. Determinaţi eroarea staţionară $e(t)$ în funcţie de perturbaţia $p(t)$, în lipsa şi prezenţa circuitului suplimentar. Valorile $p(t)= p_0$ care se modifică în limitele 1–10 cu pasul unu şi $p(t) = A\sin\omega t$ cu A şi ω, numite de cadrul didactic.
4. Fixaţi valoarea $p(t) = 1$ şi ridicaţi caracteristica tranzitorie în lipsa şi prezenţa circuitului suplimentar ($r(t) = 0$).
5. Determinaţi funcţia de transfer a circuitului suplimentar

în schema structurală a sistemului din fig. 4.4.

6. Asamblaţi pe calculator schema structurală a sistemului din fig. 4.4. Fixaţi valoarea $p(t) = 1(t)$ şi ridicaţi caracteristica tranzitorie în lipsa şi prezenţa circuitului de compensaţie pentru următoarele cazuri:

- funcţia $G_t(s)$ se realizează cu precizia primei derivate;
- funcţia $G_t(s)$ se realizează cu precizia derivatei de ordinul doi.

7. Determinaţi funcţia de transfer $G_f(s)$ pentru sistemul de urmărire din fig. 4.5 şi asamblaţi sistemul pe calculator. Repetaţi p. 6 pentru $r(t) = 1(t)$.

8. Aplicaţi la intrare $r(t) = at + bt^2$ şi determinaţi eroarea sistemului în lipsa şi prezenţa circuitului suplimentar pentru aceleaşi cazuri ca şi în p. 6.

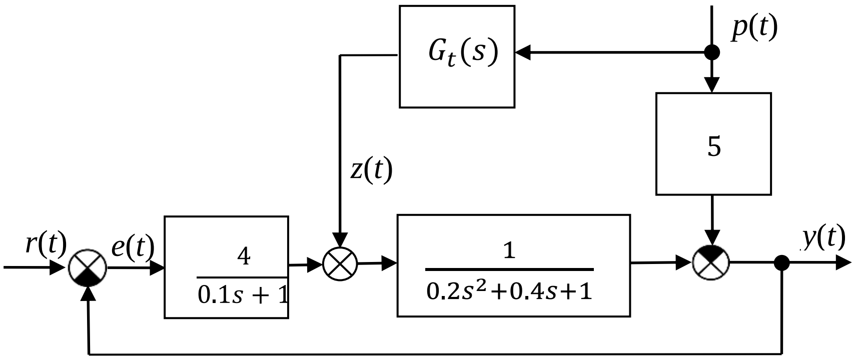


Fig. 4.4. Schema bloc structurală a SA cu compensarea perturbaţiei

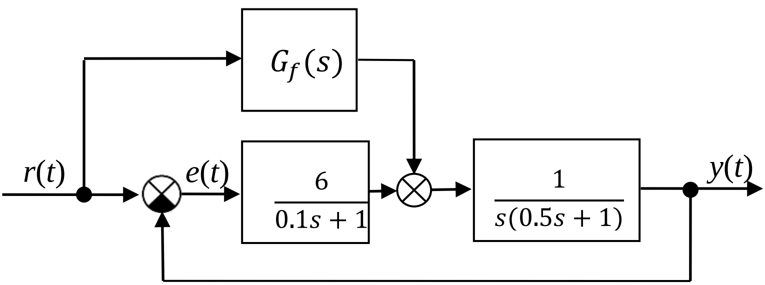


Fig. 4.5. Schema bloc structurală a SA de urmărire a semnalului de referinţă

3 *Conţinutul dării de seama*

1. Schemele structurale ale sistemelor automate studiate.
2. Graficele funcţiilor SA: $y = f(r)$, $e = f(p)$ şi $e = f(r)$.
3. Funcţiile de transfer ale circuitelor de compensaţie.
4. Performanţele proceselor tranzitorii ale SA.
5. Concluzii.

4 *Chestionar*

1. Determinaţi funcţia de transfer a erorii pentru un sistem automat cu conducere combinată.
2. Ce condiţii necesită a fi îndeplinite pentru ca sistemul automat cu conducere combinată să devină invariant?
3. Daţi un exemplu de sistem combinat de urmărire.
4. Ce numim invarianţă parţială?
5. Din ce cauză, practic, este imposibilă realizarea unui sistem invariant deplin?
6. Ce avantaje şi dezavantaje are sistemul automat cu conducere combinată în raport cu abaterea?

Bibliografie

1. IVASHCHENKO, N. N. *Avtomaticheskoe regulirovanie*. M.: Mashinostroenie, 1978. 736 s.

2. KIM, D. P. *Teoria avtomaticheskogo upravlenia*. T.1. Lineinâe sistemî. M.: FIZMATLIT, 2003. 288 s.

3. KIM, D. P.; DMITRIEVA, N. D. *Sbornik zadach po teorii avtomaticheskogo upravlenia*. *Lineinâe sistemî*. M.: FIZMATLIT, 2007. 168 s.

4. LUKAS, V. A. *Teoria avtomaticheskogo upravlenia*. M.: Nedra, 1990. 416 s.

5. PANTELEEV, A. V.; BORTAKOVSKII, A. S. *Teoria upravlenia v primerah i zadachah*. M.: Vâsshaia shkola, 2003. 583 s.

6. POZNA, C. *Teoria sistemelor automate*. Bucureşti: MATRIXROM, 2004. 329 p.

7. *Teoria avtomaticheskogo upravlenia*. Pod red. V. B. IAKOVLEVA. M.: Vâsshaia shkola, 2005. 567 s.

8. *Teoria avtomaticheskogo upravlenia*. Pod red. A. V. NETUSHILA. M.: Vâsshaia shkola, 1976. C.1. 400 s.

9. *Teoria avtomaticheskogo upravlenia*. Pod red. A.A.VORONOVA. M.: Vâsshaia shkola, 1986. C. 1. 368 s.

10.VOICU, M. *Introducere în automatică*. Iaşi: Editura Dosoftei, 1998. 237 p.

ANEXE

ANEXA A

Soluţionarea ecuaţiilor diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi (concentraţi)

Cazul 1. Ecuaţia diferenţială a elementului cu inerţie de ordinul doi este:

$$T^2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\xi T \frac{y(t)}{dt} + y(t) = kx(t), \qquad \text{(A1)}$$

iar în formă operaţională:

$$(T^2p^2 + 2\xi Tp + 1)y = kx. \qquad \text{(A2)}$$

Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale de ordinul doi este:

$$y(t) = y_l(t) + y_f(t), \qquad \text{(A3)}$$

unde $y_l(t)$ este componenta liberă a soluţiei ecuaţiei diferenţiale omogene şi caracterizează regimul dinamic, iar $y_f(t)$- componenta forţată a soluţiei ecuaţiei diferenţiale neomogene care reprezintă regimul staţionar.

Ecuaţia caracteristică pentru ecuaţia diferenţială omogenă:

$$T^2p^2 + 2\xi Tp + 1 = 0, \qquad \text{(A4)}$$

iar rădăcinile acesteia au forma:

$$p_{1,2} = \frac{-2\xi T \pm \sqrt{4\xi^2T^2 - 4T^2}}{2T^2} = -\frac{\xi}{T} \pm \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{T} = -\frac{\xi}{T} \pm j\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} =$$
$$= -\alpha \pm j\omega, \qquad \text{(A5)}$$

unde $\alpha = \xi / T$ şi $\omega = \sqrt{1 - \xi^2}/T$.

Caracterul procesului tranzitoriu al elementului depinde de tipul rădăcinilor, care pot fi reale sau complexe.

Elementul este oscilant amortizat dacă $0<\xi< 1$ şi deci obţinem $4\xi^2T^2 < 4T^2$ sau $\xi^2 < 1$, iar rădăcinile sunt complexe și au forma:

$$p_1 = -\alpha + j\omega, \qquad p_2 = -\alpha - j\omega,$$

iar procesul tranzitoriu este oscilant amortizat.

În cazul când $\xi = 0$, elementul este oscilant neamortizat şi rădăcinile sunt imaginare:

$$p_1 = j\frac{1}{T},\ p_2 = -j\frac{1}{T},$$

iar procesul tranzitoriu este oscilant neamortizat.

Când $\xi \geq 1$ $(4\xi^2 T^2 > 4T^2$ sau $\xi^2 > 1)$ este element cu inerţie (întârziere) de ordinul doi, care poate fi reprezentat de două elemente cu inerţie de ordinul unu înseriate şi rădăcinile sunt reale, având forma:

$$p_1 = -\frac{\xi}{T} + \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{T},\ p_2 = -\frac{\xi}{T} - \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{T},$$

iar procesul tranzitoriu este aperiodic.

Soluţia ecuaţiei diferenţiale omogene se prezintă în forma

$$y_l(t) = c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t}, \tag{A6}$$

unde c_1şi c_2 sunt constantele condiţiilor iniţiale, care se vor calcula mai jos.

Soluţia ecuaţiei diferenţiale neomogene este:

$$y_f(t) = k1(t). \tag{A7}$$

Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale de ordinul doi (A1) cu componentele calculate prin relaţiile (A6) şi (A7) este reprezentată ca proces indicial (semnalul de intrare este treaptă unitară) şi are forma:

$$h(t) = c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t} + k1(t). \tag{A8}$$

Pentru determinarea constantelor necunoscute c_1 şi c_2 vom considera două ecuaţii algebrice din care se vor calcula aceste constante.

Prima ecuaţie algebrică se obţine din (A8) la condiţiile iniţiale nule $h(0) = 0$:

$$c_1 + c_2 + k1(t) = 0. \tag{A9}$$

A doua ecuaţie algebrică se obţine prin derivarea expresiei (A8) în condiţiile iniţiale nule $\dot{h}(0) = 0$:

$$-c_1 p_1 - c_2 p_2 = 0. \tag{A10}$$

Determinând constantele necunoscute c_1 şi c_2 din sistemul de ecuaţii algebrice (A9) şi (A10), procesul indicial (A8) va avea forma:

$$h(t) = k(1 - \frac{p_2}{p_2 - p_1} e^{p_1 t} + \frac{p_1}{p_2 - p_1} e^{p_2 t}) 1(t). \qquad \text{(A11)}$$

Dacă admitem că rădăcinile ecuaţiei diferenţiale sunt complexe (A5), atunci procesul tranzitoriu este oscilant amortizat şi se descrie cu relaţia:

$$h(t) = c_1 e^{(-\alpha + j\omega)t} + c_2 e^{(-\alpha + j\omega)t} + k1(t) =$$
$$= Ce^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi) + k1(t) = k\left(1 - \frac{1}{\omega T} e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi)\right) 1(t), \qquad \text{(A12)}$$

unde $C = -\frac{k1(t)\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}{\omega} = -k1(t)/\sqrt{1 - \xi^2}),$
$\varphi = \mathrm{arctg}(^{\omega}/_{\alpha}) = \arcsin \omega T = \arccos\xi.$

În cazurile când ecuaţia diferenţială pentru elementul cu inerţie de ordinul doi are forma:

$$T_1 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_2 \frac{y(t)}{dt} + y(t) = kx(t), \qquad \text{(A13)}$$

atunci ecuaţia caracteristică pentru ecuaţia diferenţială omogenă este:

$$T_1 p^2 + T_2 p + 1 = (T_3 p + 1)(T_4 p + 1) = 0 \qquad \text{(A14)}$$

şi rădăcinile acesteia au forma $p_1 = -\frac{1}{T_3}$, $p_2 = -\frac{1}{T_4}$.

Procesul indicial pentru (A12) are forma:

$$h(t) = k(1 - \frac{T_3}{T_3 - T_4} e^{-t/T_3} + \frac{T_4}{T_3 - T_4} e^{-t/T_4}) 1(t). \qquad \text{(A15)}$$

Primul termen în (A15) reprezintă procesul permanent $y_p(t)$, iar termenii doi şi trei în (A15) reprezintă procesul tranzitoriu $y_t(t)$.

Caracterul procesului tranzitoriu depinde de tipul rădăcinilor, care pot fi reale sau complexe.

Elementul oscilant amortizat şi elementul cu inerţie de ordinul doi au proprietăţi comune ca statism şi inerţie, dar procesele tranzitorii ale acestora diferă esenţial unul de altul. Pentru elementul oscilant amortizat procesul tranzitoriu este oscilant (rădăcinile complexe), iar pentru elementul cu inerţie de ordinul doi este aperiodic (rădăcinile reale).

Metoda de soluţionare a ecuaţiei diferenţiale utilizând procedura menționată în cazul 1) este dificilă. Pentru simplificarea procedurilor de soluţionare a ecuaţiei diferenţiale se aplică procedurile de calcul al funcţiilor temporale prin aplicarea transformatei Laplace inversă expresiei funcţiei de transfer reprezentată prin fracţii elementare.

Cazul 2. Prezentăm în forma generalizată procedura de soluţionare a ecuaţiei diferenţiale care descrie dinamica sistemului automat în condiţii iniţiale nule.

Ecuaţia diferenţială în formă compactă, omiţând variabila timpului are forma:

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \cdots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m r^m + b_{m-1} r^{m-1} + \\ + \cdots + b_1 \dot{r} + b_0 r, \quad \text{(A16)}$$

unde $r(t)$ şi $y(t)$ sunt semnalul de intrare şi derivatele lui şi respectiv semnalul de ieşire şi derivatele lui sau răspunsul sistemului la semnalul de intrare, coeficienţii $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0$ semnifică proprietăţile interne şi se numesc constante de timp (cu dimensiunea secundă la puterea egală cu ordinul derivatei), iar coeficienţii $b_n, b_{n-1}, \cdots, b_0$ sunt proprietăţile semnalului de intrare şi de asemenea se numesc constante de timp (cu dimensiunea secundă la puterea egală cu ordinul derivatei).

Funcţia de transfer se dă ca raportul a două polinoame:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0}, \; m \leq n, \quad \text{(A17)}$$

unde coeficienţii din (A17) au acelaşi sens ca şi în expresia (A16), iar $m \leq n$ este condiţia de realizabilitate fizică sau efectul non-anticipaţie al sistemului.

Deoarece f.d.t. $G(s)$ este o funcţie raţională (raportul a două polinoame cu coeficienţii reali), aceasta poate fi dată şi în formă factorizată:

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m \prod_{j=1}^{m} (s - z_j)}{a_n \prod_{i=1}^{n} (s - p_i)}. \quad \text{(A18)}$$

Dacă (s)=0 are z_j $(j = \overline{1, m})$ rădăcini distincte, atunci acestea sunt zerourile lui $G(s)$ şi polinomul are formă factorizată

$B(s) = b_m \prod_{j=1}^{m}(s - z_j)$ şi modelează operaţii de amplificare şi derivare. În esenţă, acesta are un efect de amplificare-anticipare a mărimii de ieşire raportată la mărimea de intrare (exprimă proprietăţile de anticipaţie în sistem).

Polinomul $B(s)$ ($b_m = 1$) se numeşte monic şi are forma $z(s) = \prod_{j=1}^{m}\left(s - z_j\right)$.

Dacă ecuația $A(s)=0$ are p_i ($i=\overline{1,n}$) rădăcini distincte, atunci acestea sunt polii lui $G(s)$ şi polinomul ia forma factorizată $A(s) = a_n \prod_{i=1}^{n}(s - p_i)$, iar inversul acestui polinom modelează operaţii bazate pe integrare. În raportul transferului temporal intrare-ieşire operaţiile de integrare au un efect de întârziere a mărimii de ieşire faţă de mărimea de intrare (datorită proprietăţilor interne de inerţie).

Polinomul $A(s)$ ($a_n = 1$) se numeşte monic şi are forma $p(s) = \prod_{i=1}^{n}(s - p_i)$.

În sistemele reale principiul nonanticipării, conform căruia efectul nu anticipează cauza, în f.d.t. a sistemului $G(s)$ operatorul bazat pe integrare $A(s)$ trebuie să fie dominant faţă de operatorul de amplificare-derivare $B(s)$.

Dacă este cunoscută funcţia de transfer a sistemului automat la intrarea căruia acţionează semnalul treaptă unitară şi are forma:

$$G(s) = \frac{H(s)}{R(s)} = \frac{B(s)}{A(s)}, \tag{A19}$$

atunci răspunsul sistemului în forma operaţională din (A19) este:

$$H(s) = G(s)R(s) = \frac{B(s)}{sA(s)}. \tag{A20}$$

Răspunsul indicial $h(t)$ al sistemului (A20) la acţiunea semnalului de intrare treaptă unitară $1(t)$ (în transformata Laplace 1/s) se determină cu ajutorul transformatei Laplace inverse în forma:

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{B(s)}{sA(s)}\right\}. \tag{A21}$$

Dacă ecuaţia caracteristică a SA $A(s) = 0$ are n rădăcini distincte p_i, atunci răspunsul indicial $h(t)$ (A21) al sistemului în condiţii iniţiale nule se calculează cu relaţia:

$$h(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{B(p_i)}{p_i \dot{A}(p_i)} (e^{p_i t} - 1)1(t) = [\frac{B(0)}{A(0)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{B(p_i)}{p_i \dot{A}(p_i)} e^{p_i t}]1(t), \quad \text{(A22)}$$

unde prima componentă reprezintă regimul permanent $y_p(t)$, iar a doua componentă reprezintă regimul tranzitoriu $y_l(t)$.

Funcţia pondere a SA se calculează prin relaţia (A22) şi obţinem:

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{B(p_i)}{\dot{A}(p_i)} e^{p_i t} 1(t). \quad \text{(A23)}$$

Din cele expuse mai sus, în relaţia (A22), rezultă că polii f.d.t. $G(s)$ au un rol determinant în evoluţia răspunsului sistemului pe durata regimului tranzitoriu. La o mărime de intrare $R(s)$ oarecare, mărimea de ieşire $Y(s)$ depinde şi de polii finiţi ai lui $R(s)$.

Admitem că mărimea de intrare $r(t)$ este o combinaţie liniară de funcţii de forma mărimii de intrare $r(t) = t^k e^{\alpha t}$. Atunci se consideră:

$$r(t) = r_0 e^{\alpha t} 1(t). \quad \text{(A24)}$$

Expresia (A24) în transformata Laplace va fi:

$$R(s) = r_0/(s-\alpha), \quad \text{(A25)}$$

unde polul α şi amplitudinea r_0 sunt doi parametri, valorile cărora se aleg conform necesităţilor de funcţionare a sistemului automat.

Expresia răspunsului (A20) în domeniul timpului are forma:

$$y(t) = (\sum_{k=1}^{n} c_k e^{p_k t})1(t) + d e^{\alpha t} 1(t) = y_l(t) + y_p(t), \quad \text{(A26)}$$

unde $c_k = \lim_{s \to p_k} (s - p_k) G(s) r(s) = \frac{b_m \prod_{j=1}^{m} (p_k - z_j)}{a_n \prod_{i=1}^{n} (p_k - p_i)} \frac{r_0}{p_k - \alpha}, \; k = \overline{1, n},$

$$d = \lim_{s \to \alpha} (s - \alpha) G(s) r(s) = \frac{b_m \prod_{j=1}^{m} (\alpha - z_j)}{a_n \prod_{i=1}^{n} (\alpha - p_i)} r_0.$$

Componenta $y_l(t)$ reprezintă regimul tranzitoriu, evoluţia temporală a căreia se determină de exponentele $e^{p_k t}$ conform polilor finiţi ai lui $G(s)$ şi de coeficienţii c_k, care depind de zerourile şi de polii lui $G(s)$ şi de polul lui $R(s)$.

Componenta $y_f(t)$ reprezintă regimul permanent, evoluţia temporală a căreia se determină de exponenta $e^{\alpha t}$ (există şi în $R(s)$ şi de coeficientul d, care depinde de zerourile şi de polii lui $G(s)$.

Cazul 3. Dacă este cunoscută funcţia de transfer (A19) a sistemului automat cu condiţii iniţiale nenule

$$Y_0(s) = \frac{D(s)}{A(s)} \qquad \text{(A27)}$$

şi semnalul de intrare este prezentat de o funcţie raţională de forma:

$$R(s) = \frac{B_r(s)}{A_r(s)}, \qquad \text{(A28)}$$

atunci răspunsul sistemului cu condiţii iniţiale nenule din (A19) şi (A27)-(A28) în forma operaţională este:

$$Y(s) = G(s)R(s) + Y_0(s) = \frac{B(s)}{A(s)}\frac{B_r(s)}{A_r(s)} + \frac{D(s)}{A(s)} = \frac{B_y(s)}{A_y(s)} + \frac{D(s)}{A(s)}, \qquad \text{(A29)}$$

unde polinomul $D(s) = \sum_{i=0}^{n-1} d_i\, s^i$ reprezintă polinomul condiţiilor iniţiale.

Răspunsul $y(t)$ al sistemului liniar la acţiunea semnalului de intrare $r(t)$ se determină cu ajutorul transformatei Laplace inversă în forma:

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\}. \qquad \text{(A30)}$$

Pentru ecuaţiile diferenţiale liniare şi semnalele de intrare tipice mărimea de ieşire a sistemului $Y(s)$ este o funcţie raţională, care poate fi dezvoltată în fracţii şi la condiţii iniţiale nule are forma:

$$Y(s) = \frac{B_y(s)}{A_y(s)} = \sum_{i=1}^{n_y} \frac{B_y(s_i)}{\dot{A}_y(s_i)}\frac{1}{s-s_i} = \sum_{i=1}^{n_y} \frac{c_i}{s-s_i}, \qquad \text{(A31)}$$

unde $\dot{A}_y(s) = \frac{dA_y(s)}{ds}$ în condiţia $s = s_i$, s_i - polii distincţi, iar coeficienţii $c_i = \frac{B_y(s_i)}{\dot{A}_y(s_i)}$.

Originalul $y(t)$ conform relaţiei (A31) are forma:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n_y} c_i e^{s_i t}. \qquad \text{(A32)}$$

Răspunsul sistemului pentru (A30) se calculează prin expresia:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{B(s_i)B_r(s_i)}{\dot{A}(s_i)A_r(s_i)} e^{s_i t} + \sum_{k=1}^{n_r} \frac{B(s_k)B_r(s_k)}{A(s_k)\dot{A}_r(s_k)} e^{s_k t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{D(s_i)}{\dot{A}(s_i)} e^{s_i t}, \qquad \text{(A33)}$$

unde $s_i, i = \overline{1,n}$ sunt polii funcţiei de transfer $G(s)$, $s_k, k = \overline{1,n}$ sunt polii imaginii lui $R(s)$, dar se respectă condiţia $s_i \neq s_k$ (nu există rezonanţă).

În expresia (A33), prima sumă reprezintă componenta regimului tranzitoriu $y_l(t)$, evoluţia temporală a căreia se determină de exponentele $e^{s_i t}$ conform polilor finiţi ai lui $G(s)$ în condiţii iniţiale nule şi de coeficienţii c_i, care depind de polii lui $G(s)$ şi $R(s)$, suma a doua reprezintă componenta regimului permanent $y_f(t)$, evoluţia temporală a căreia se determină de exponentele $e^{s_k t}$ conform polilor finiţi ai lui $R(s)$ şi de coeficienţii c_k, care depind de polii lui $G(s)$ şi $R(s)$, a treia sumă reprezintă componenta regimului tranzitoriu $y_0(t)$ datorită condiţiilor iniţiale nenule, evoluţia temporală a căreia se determină de exponentele $e^{s_i t}$ conform polilor finiţi ai lui $G(s)$ şi de coeficienţii c_i, care depind de polii lui $G(s)$ şi de polinomul condiţiilor iniţiale $D(s)$. În acest caz răspunsul sistemului este:

$$y(t) = y_l(t) + y_f(t) + y_0(t). \qquad \text{(A34)}$$

Exemplu. Să se calculeze expresia procesului indicial al sistemului cu funcţia de transfer:

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{2}{s^2 + 3s + 2}.$$

Soluţionare. Calculăm rădăcinile ecuaţiei caracteristice a sistemului:

$$A(s) = s^2 + 3s + 2 = 0$$

şi obţinem $s_1 = -1, s_2 = -2$, care sunt şi polii lui $G(s)$.

Expresia operaţională a procesului indicial $H(s)$ al sistemului la intrarea căruia acţionează semnalul treaptă unitară se prezentă în fracţii elementare:

$$H(s)=\frac{B_H(s)}{A_H(s)}=\frac{2}{s(s^2+3s+2)}=\frac{c_1}{s}+\frac{c_2}{s+1}+\frac{c_3}{s+2}.$$

Calculăm coeficienţii:

$$c_1=\frac{B_H(0)}{\dot{A}_H(0)}=\frac{2}{3s^2+6s+2}|_{s=0}=1,$$

$$c_2=\frac{2}{3s^2+6s+2}|_{s=-1}=-2,$$

$$c_3=\frac{2}{3s^2+6s+2}|_{s=-2}=1.$$

Expresia operaţională a procesului indicial al sistemului cu coeficienţii calculaţi are forma:

$$H(s)=\frac{c_1}{s}+\frac{c_2}{s+1}+\frac{c_3}{s+2}.$$

Pentru fiecare componentă a expresiei operaţionale a lui $H(s)$ se determină transformata Laplace inversă şi obţinem procesul indicial în forma:

$$h(t)=1-2e^{-t}+e^{-2t}.$$

ANEXA B
Funcţii de timp continue şi imaginea Laplace

Nr. crt.	Denumirea funcţiei	Original $f(t)$	Imaginea $F(s)$
1	Delta impuls	$\delta(t)$	1
2	Treaptă unitară	$1(t)$	$\frac{1}{s}$
3	Funcţie rampă	t	$\frac{1}{s^2}$
4	Funcţie polinomială	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	Exponenţială	$e^{+\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$
6	Exponenţială	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s+\alpha}$
7	Sinusoidă	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
8	Cosinusoidă	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
9	Sinusoidă	$\sin(\omega t - \varphi)$	$\frac{\omega \cos \varphi - s \sin \varphi}{s^2+\omega^2}$
10	Produsul exponentei cusoidă	$e^{-\alpha t} \sin(\omega t - \varphi)$	$\frac{\omega \cos \varphi - (s-\alpha) \sin \varphi}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$

ANEXA C
Modele matematice ale elementelor tipice

Tip element	Ecuaţia diferenţială	Soluţia ecuaţiei diferenţiale	Funcţia pondere	Funcţia de transfer
Ideal	$y(t) = kx(t)$	$h(t) = k1(t)$	$w(t) = k\delta(t)$	$G(s) = k$
Inerţie ordin 1	$T\dfrac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t)$	$h(t) = k\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)1(t)$	$w(t) = \dfrac{k}{T}e^{-\frac{t}{T}}1(t)$	$G(s) = \dfrac{k}{Ts+1}$
Integrator	$y(t) = \dfrac{1}{T_i}\int_0^t x(t)$	$h(t) = \dfrac{1}{T_i}t = k_i t$	$w(t) = \dfrac{1}{T_i}1(t) = k_i 1(t)$	$G(s) = \dfrac{1}{T_i s} = \dfrac{k_i}{s}$
Derivativ ideal	$y(t) = T_d\dfrac{dx(t)}{dt}$	$h(t) = T_d\delta(t)$	$w(t) = T_d\dot{\delta}(t)$	$G(s) = T_d s = ks$
Derivativ real	$T\dfrac{dy(t)}{dt} + y(t) = k\dfrac{dx(t)}{dt}$	$h(t) = (k/T)e^{-\frac{t}{T}}1(t)$	$w(t) = \frac{k}{T}\delta(t) -$ $- \frac{k}{T^2}e^{-t/T}1(t)$	$G(s) = \dfrac{T_d s}{T_p s+1} = \dfrac{ks}{Ts+1}$
Oscilant amortizat	$T^2\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\xi T\dfrac{dy(t)}{dt} +$ $+y(t) = kx(t)$	$h(t) =$ $= k\left(1 - \dfrac{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}{\omega}e^{-\alpha t}\sin(\omega t\right.$ $\left.+\varphi\right)\times 1(t),\quad \alpha = \dfrac{\xi}{T},$ $\omega = \sqrt{1-\xi^2}/\mathrm{T},$ $\varphi = \mathrm{arctg}\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$	$w(t) =$ $= \dfrac{k}{\omega T^2}e^{-\alpha t}\sin\omega t 1(t)$	$G(s) = \dfrac{k}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1}$
Timp mort	$y(t) = kx(t-\tau)$	$h(t) = k1(t-\tau)$	$w(t) = k\delta(t-\tau)$	$G(s) = ke^{-\tau s}$

ANEXA D
Funcţii frecvenţiale ale elementelor tipice

Tip element	Locul de transfer	Amplitudine frecvenţă	Fază frecvenţă	Logaritmică
Ideal	$G(j\omega) = k$	$A(\omega) = k$	$\varphi(\omega) = 0$	$L(\omega) = 20\lg k$
Inerţie ordin unu	$G(j\omega) = \frac{k\omega}{Tj\omega + 1}$	$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(T\omega)^2 + 1}}$	$\varphi(\omega) = -\mathrm{arctg}T\omega$	$L(\omega) = 20\lg\frac{k}{\sqrt{(T\omega)^2 + 1}}$
Integrator	$G(j\omega) = kj\omega$	$A(\omega) = k/\omega$	$\varphi(\omega) = -\pi/2$	$L(\omega) = 20\lg(k/\omega)$
Derivativ ideal	$G(j\omega) = kj\omega$	$A(\omega) = k\omega$	$\varphi(\omega) = \pi/2$	$L(\omega) = 20\lg(k\omega)$
Derivativ real	$G(j\omega) = \frac{kj\omega}{Tj\omega + 1}$	$A(\omega) = k\omega/\sqrt{(T\omega)^2 + 1}$	$\varphi(\omega) = \pi/2 - \mathrm{arctg}T\omega$	$L(\omega) = 20\lg\frac{k\omega}{\sqrt{(T\omega)^2 + 1}}$
Oscilant amortizat	$G(j\omega) = $ $= \frac{k}{1 - T^2\omega^2 + j2\xi\mathrm{T}}$	$A(\omega) = $ $= \frac{k}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\xi T)^2}}$	$\varphi(\omega) = $ $= -\mathrm{arctg}\frac{2\xi T\omega}{1 - T^2\omega^2}$	$L(\omega)=20\lg k-20\lg k\times$ $\times\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\xi T)^2}$
Timp mort	$G(j\omega) = ke^{-j\tau\omega}$	$A(\omega) = k$	$\varphi(\omega) = -\omega\tau$	$L(\omega) = 20\lg k$