UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI

Bartolomeu IZVOREANU

INGINERIA SISTEMELOR AUTOMATE

SUPORT DE CURS

Chişinău 2024

UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI

FACULTATEA DE CALCULATOARE INFORMATICĂ ȘI MICROELECTRONICĂ

DEPARTAMENTUL DE INGINERIA SOFTWARE ȘI AUTOMATICĂ

Bartolomeu IZVOREANU

INGINERIA SISTEMELOR AUTOMATE

SUPORT DE CURS

Chișinău
Editura „Tehnica-UTM”
2024

CZU 681.5(075.8)

I-99

Suportul de curs a fost discutat și aprobat pentru editare la Consiliul Facultății Calculatoare, Microelectronică și Informatică a Universității Tehnice a Moldovei, proces-verbal nr. 2 din 1.11.2024.

Suportul de curs Ingineria sistemelor automate este destinat studenților care studiază la Programul de studii 0714.6 Automatică și Informatică, dar poate fi utilizat și de studenții altor specialități pentru aprofundarea cunoștințelor în domeniul ingineriei sistemelor automate.

În suportul de curs Ingineria sistemelor automate sunt expuse principiile și metode de proiectare a algoritmilor continui și numerici când asupra sistemului acționează semnale de intrare referință și perturbație în baza transferului intrare-ieșire și intrare-stare-ieșire.

Se prezintă modele de algoritmi în structuri convenționale de reglare, structuri de sisteme de reglare pentru procese lente, modelarea sistemelor numerice și algoritmi de reglare numerică în forma intrare-ieșire și intrare-stare-ieșire, proiectarea algoritmilor numerici în domeniului timpului, algoritmi de acordare a regulatoarelor în sisteme multivariabile și implementarea algoritmilor numerici. Sunt analizate exemple de proiectare a algoritmilor continui și numerici.

Suportul de curs include introducere, 10 capitole, bibliografie și 2 anexe.

Autor: conf. univ., dr. șt. tehn. Bartolomeu IZVOREANU
Recenzent: acad., conf. univ., dr. hab., Anatolii BALABANOV

DESCRIEREA CIP A CAMERENEI NAȚIONALE A CĂRȚII

Izvoreanu, B.

Ingineria sistemelor automate. Suport de curs.

Universitatea Tehnică a Moldovei, Facultatea de Calculatoare, Informatică și Microelectronică. Departamentul de Ingineria Software și Automatică.

- Chișinău: Tehnica-UTM, 2024, 341 p.: fig., tab.

Bibliogr. p. 335-336 (21 tit.) -50 ex.

ISBN 978-606-515-689-0

681.5(075.8)

I 99

ISBN 978-9975-45-331-8

© UTM, 2024

CUPRINS

INTRODUCERE

Problema de sinteză a sistemului de reglare automată este una din principalele probleme complexe ale teoriei sistemelor de conducere, care constă în determinarea modelului matematic al procesului condus la acțiunea semnalelor exogene, alegerea și dimensionarea elementelor componente, structurii și configurației sistemului, parametrilor elementelor și cerințele de funcționare care ar satisface performanțele impuse sistemului de reglare automată [1, 3-6, 13, 17-19].

Proiectarea și funcționarea proceselor industriale și tehnologice automatizate trebuie să satisfacă atât cerințele de performanță și robustețe impuse sistemului automat, cât și unor specificații dorite ca eficiența, calitatea, profitabilitatea, siguranța în funcționare, optimizarea consumurilor energetice, impactul asupra mediului etc.

Rezultatul realizării proiectului de automatizare a proceselor industriale și tehnologice depinde de doi factori [1, 4-5, 6, 17]:

1) gradul de înțelegere și de cunoaștere a regimurilor de funcționare ale procesului condus ca obiect de conducere;

2) capacitatea de înțelegere și utilizare a conceptelor teoriei sistemelor automate, a formalizmului de reprezentare a semnalelor și a principiilor de conducere.

Complexitatea proceselor industriale și tehnologice, care este corelată cu cerințele ridicate de performanță și robustețe, automatizarea devine o necesitate obiectivă în conjunctura globalizării economiei și a piețelor de procese și produse [4, 17].

Evoluția ingineriei sistemelor automate este strâns corelată cu cea a tehnologiei proceselor și a științei calculatorarelor ca urmare a dezvoltării avansate a microelectronicii, care a condus la realizarea interfețelor de proces, al traductoarelor cu ridicat nivel de intelegențâ, al elementelor de execuție performante, al procesoarelor de semnal și al microcontrolerelor. În baza acestor rezultate remarcabile, și având la bază modele matematice ale proceselor, este posibilitatea implementării celor mai avansate strategii de conducere cu instalațiile automatizate.

Dacă se consideră evoluția strategiilor de coducere a proceselor industriale și tehnologice, atunci se evidenţiază mai multe categorii cărora le corespunde generații de sisteme de conducere [4, 5, 17]:

1) sisteme convenționale de reglare care se bazează pe strategii convenționale de reglare (reglare PID, reglare directă și reglare cascadă);

2) sisteme avansate de conducere având la bază tehnici clasice de conducere (ajustarea amplificării, compensarea timpului mort, reglare prin decuplare, reglare selectivă etc.);

3) sisteme avansate de conducere având la bază tehnici noi (reglare predictivă, reglarea cu model intern, reglarea adaptivă, control statistic al calității etc.);

4) sisteme avansate de conducere având la bază modele matematice complexe (conducere neliniară, optimală și robustă);

5) sisteme avansate de conducere având la bază tehnici inteligente (sisteme bazate pe cunoştinţe, tehnici fuzzy, tehnici neurale);

6) sisteme inteligente hibride de conducere având la bază tehnici avansate de pocesare a informaţiilor și a cunoştinţelor, care integrează tehnicile neurale, tehnicile fuzzy, tehnicile inteligenței artificiale și programarea evoluționistă.

Dezvoltarea diferitelor etape în ingineria sistemelor auromate și a sistemelor cu conducere automată, care încorporează atât strategiile de conducere cât și suportul hardware și software pentru implementarea acestora, se evidențiază trecerea de la structuri simple de reglare, cu unul sau două grade de libertate cu reacția negativă și reglarea directă după mărimile exogene măsurabile, la structuri cu multiple interacțiuni și cu un nivel înalt de inteligență etc.

Sistemele de conducere automată sunt larg utilizate la funcționarea sistemelor biologice, a sistemelor chimice, a sistemelor de comunicație, a sistemelor economice și a interacţiunilor umane.

Ingineria conducerii automate este una dintre cele mai provocatoare și interesante domenii ale ingineriei moderne [1, 3, 5], care încorporează concepte, modele, metode, tehnici și tehnologii din divese discipline și ca un domeniu interdisciplinar are diverse aplicații.

În lucrare se expun strategii de conducere a proceselor industriale și tehnologice ca sisteme convenționale cu strategii convenționale de reglare (reglare PID, reglare în cascadă și reglare directă) ca sisteme liniare continue și sisteme numerice monovariabile și multivariabile.

1 NOȚIUNI DE BAZĂ ALE INGINERIEI SISTEMELOR AUTOMATE

1.1 Structuri de sisteme de reglare automată

Se consideră structura sistemului de reglare automată dată în fig. 1.1, alcătuită din elementele din canalul direct: amplificatorul (EA) cu f.d.t. $H_A(s)$, elementul de execuție (EE) cu f.d.t. $H_E(s)$, procesul (P) cu f.d.t. $H_P(s)$, iar în canalul de reacție traductorul (Tr) cu f.d.t. $H_{tr}(s)$. Asupra sistemului acționează semnalele de referință $r(t)$ și perturbația $p(t)$. Mărimea $u(t)$ este mărimea de conducere, $y(t)$ – mărimea de ieșire (condusă/reglată), $\varepsilon(t)$ – eroarea sistemului, $y_r(t)$ – semnalul reacției.

Structura sistemului este alcătuită din minimul de elemente funcționale necesare pentru funcționarea lui și este numită structură convențională a sistemului de reglare automată [1, 4, 8, 17].

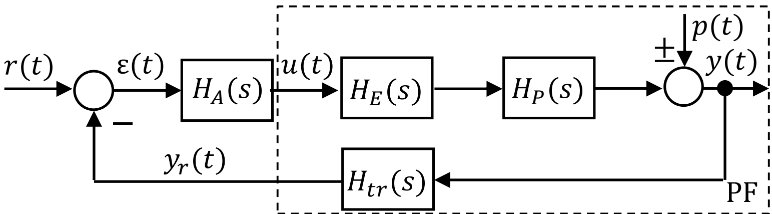

Fig. 1.1. Schema structurală a sistemului de reglare automată

Elementele funcționale din structura sistemului se aleg și se dimensionează după calculul energetic.

În procesul de funcționare al sistemului automat, ansamblul din elementul de execuție EE, procesul condus P și traductorul Tr nu își modifică parametrii și, atunci acest ansamblu este numit partea fixată (PF) (în fig. 1.1 PF este încadrată într-un dreptunghi cu linie întreruptă) a sistemului cu f.d.t. echivalentă a conexiunii în serie:

$$H_{PF}(s) = H_E(s)H_P(s)H_{tr}(s). \tag{1.1}$$

Se admite cazul când semnalul perturbației $p(t) = 0$ și sistemul este supus numai acțiunii semnalului de referință.

Conceptual structura sistemului automat din fig.1.1 poate să nu corespundă cerințelor de stabilitate și performanțelor impuse sistemului și atunci este strict necesar ca în structura sistemului de introdus elemente noi, elemente de corecție conectate în modul corespunzător pentru a realiza cerințele impuse sistemului.

Există două posibilități de proiectare a structurii sistemului de reglare automată.

1. În structura sistemului automat se introduc elemente de corecție conectate în modul corespunzător.

2. În structura sistemului automat cu partea fixată PF cu f.d.t. $H_{PF}(s)$ cunoscută, elementul de amplificare cu f.d.t. $H_A(s)$ se substituie cu elementul dinamic - regulatorul automat cu f.d.t. $H_R(s)$ și se obține structura sistemului dată în fig. 1.2.

Ambele structuri ale sistemului sunt echivalente și au acelaș scop de a realiza sistemul stabil și cu performanțele impuse.

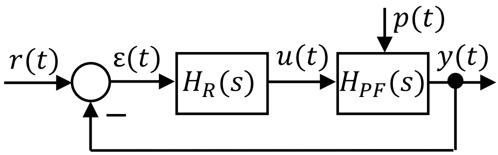

Fig. 1.2. Schema structurală a sistemului de reglare automată

În continuare se considera structura sistemului de reglare automată dată în fig. 1.2, care va fi utilizată la sinteza sistemului automat.

Structura sistemului (fig. 1.2) funcționează în baza reacției negative, care stabilizează regimul funcționării sistemului, ridică robustețea și rejectează acțiunea perturbațiilor măsurate.

În sistemul automat se determină eroarea (abaterea) între semnalul referinței $r(t)$ (ca semnal etalon) și semnalul mărimii măsurate a ieșirii $y(t)$ a sistemului:

$$\varepsilon(t) = r(t) - y(t), \tag{1.2}$$

care are rolul decizional la elaborarea mărimii de conducere.

Regulatorul este un element dinamic care în baza erorii $\varepsilon(t)$ elaborează mărimea de conducere (reglare):

$$u(t) = f(\varepsilon(t)). \tag{1.3}$$

Elaborarea conducerii (deciziei) presupune cunoașterea apriorică a mărimilor exogene (referința și perturbația), ceea ce conduce la prezența în structura sistemului a unei copii a acestui model, numit model intern.

Definiție. Conducerea (reglarea) automată este un proces sistemic decizional pe baza erorii, evoluând în mod automat, care duce la anularea erorii staționare $\varepsilon = 0$.

În sistemele de urmărire funcția de reglare – anularea erorii este urmărirea cât mai fidelă de către mărimea de ieșire $y(t)$ a sistemului a referinței $r(t)$.

În sistemele de rejecție a perturbațiilor se asigură menținerea constantă (la o valoare precisă), independent de perturbații, a mărimii de ieșire a sistemului. În cazul măsurării perturbațiilor, decizia în sistemul de rejecție a perturbațiilor măsurabile, se realizează pe baza măsurări acestora.

În cazul sistemului prezentat (fig. 1.2) eroarea $\varepsilon(t)$ sistemului se prelucrează cu cea mai elementară structură de regulator. Structuri flexibile de regulatoare se obțin atunci când se prelucrează decizional, diferențiat semnalele referinței $r(t)$, mărimii de ieșire $y(t)$, erorii $\varepsilon(t)$ și perturbației $p(t)$, obținând structuri de regulatoare cu multiple grade de libertate, care pot asigura o evoluție dorită a sistemului proiectat atât în raport cu referințele, cât și în raport cu perturbațiile.

În rezultatul proiectării sistemului automat la o referință constantă, acesta trebuie să fie fizic realizabil, stabil și robust la variația parametrilor obiectului condus și să asigure performanțele impuse în regimul tranzitoriu și staționar.

La etapa actuală sistemele moderne de conducere a diverselor procese larg utilizează și implementează algoritmii de conducere pe cale numerică. Ca rezultat, în structura sistemului automat se utilizează diverse echipamente numerice care prelucrează informația din canalele sistemului automat [2-5, 16, 17].

O structura generalizată a sistemului numeric de reglare automată se dă în fig. 1.3, în care sunt utilizate notațiile: PF este partea fixată (ansamblul alcătuit din elementul de execuție EE, procesul condus P și traductorul Tr în conexiune serie), care funcționează în domeniul timpului continuu, CAN – convertorul analog-numeric, care convertește semnalul continuu al erorii $\varepsilon(t)$ în semnal discret $\varepsilon^*(t)$, RN – regulatorul numeric, care în baza erorii $\varepsilon^*(t)$ elaborează algoritmul de conducere în formă discretă $u(k)$, unde $t = kT_{|T=1} = k$, k este timpul în momentul eșantionării (discretizării) și prezintă șirul numerelor reale $k = 0,1,2, \ldots$, T - perioada de eșantionare, CNA – convertorul numeric-analog, care convertește semnalul discret de conducere $u(k)$ în semnalul continuu de conducere $u(t)$ și, în continuare, transmis elementului de execuție. Astfel, se realizează conducerea numerică cu procesul condus.

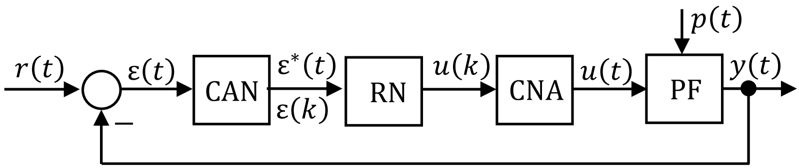

Fig. 1.3. Schema funcțională a sistemului numeric de reglare automată

Funcționarea elementelor CAN, RN și CNA se sincronizează cu ajutorul unui ceas.

Algoritmul de reglare $u(k)$ se sintetizează după diverse metode și poate fi realizat pe suport tehnic sau prin programare și implementat pe calculator.

1.2 Formularea problemei de proiectare a sistemului de reglare automată

Pentru sinteza unui sistem de reglare automată se impune definirea obiectivelor și cerințelor de performanță necesare în alegerea unei soluții optimale de automatizare a procesului condus.

În continuare, se presupune sinteza unui algoritm de conducere/reglare (numit și regulator).

Sinteza unui algoritm de conducere presupune parcurgerea a trei etape [1, 5, 6, 17]:

1. Sinteza modelului optimal al regulatorului.

2. Sinteza structurii optimale de realizare a modelului optimal al regulatorului.

3. Sinteza parametrilor optimali ai regulatorului, care mai este numită acordarea parametrilor de acord ai regulatorului.

Pornind de la structura sistemului din fig. 1.2, se formulează problema de proiectare a algoritmului de conducere/reglare (a regulatorului) ce reprezentă o procedură de parcurgere a următoarelor etape.

1. Se dă modelul matematic al procesului condus în forma funcției de transfer și semnalele care acționează asupra lui.

2. Se impun performanțele sistemului automat proiectat.

3. Pornind de la modelul obiectului și performanțele date, în baza unor proceduri, se construiește funcția de transfer a sistemului automat închis:

$$H_0(s) = \frac{H_R(s)H_{PF}(s)}{1+H_R(s)H_{PF}(s)} = \frac{B(s)}{A(s)}, m \leq n, \tag{1.4}$$

unde m este gradul polinomului $B(s)$, $n -$ gradul polinomului $A(s)$, iar relația $m \leq n$ este condiția de realizabilitate fizică a sistemului.

4. Din (1.4) se sintetizează algoritmul de conducere în forma funcției de transfer:

$$H_R(s) = \frac{H_0(s)}{1 - H_0(s)} \frac{1}{H_{PF}(s)} = \frac{Q(s)}{P(s)}, m_q \leq n_p, \tag{1.5}$$

unde m_q este gradul polinomului $Q(s)$, $n -$ gradul polinomului $P(s)$, iar relația $m_q \leq n_p$ este condiția de realizabilitate fizică a a algoritmului de conducere.

5. Verificarea realizabilității fizice a algoritmilor de conducere sintetizați și analiza condițiilor de implementare pe suport tehnic.

Algoritmul de conducere elaborat pentru un sistem automat este util și eficient, dacă este implementabil pe suport tehnic cu erori minime. Se alege și se dimensionează echipamentul tehnic care asigură implementarea cât mai precisă a algoritmului de conducere.

6. Validarea soluției obținute prin simulare a sistemului elaborat, care se reduce la analiza performanțelor sistemului de reglare automată

implementat pe procesul condus.

Dacă performanțele sistemului automat analizate corespund celor impuse, atunci procedura de proiectare s-a realizat. În caz contrar, se reia procedura de proiectare cu acordarea parametrilor regulatorului pe procesul în funcțiune.

1.3 Modelul matematic al procesului condus și proprietățile lui

În practică există diverse tipuri de procese tehnice (industriale), tehnologice, instalații tehnologice, mașini etc., care produc diferite bunuri materiale și diverse servicii în domeniul activității umane. Procesele pot fi clasificate după mai multe criterii: staționare, nestaționare, termice, electrice, chimice etc.

Din diversitatea proceselor tehnologice se pot evidenția un număr redus de procese simple tipice, care prin combinarea acestora se obțin procese complexe în industrie (nu se referă la procese chimice și biologice) [4-6, 13, 17, 21]:

1. Procese mecanice:
   1.1. Procese cu viteză liniară.
   1.2. Procese cu viteză unghiulară.
2. Procese termice și de difuzie:
   2.1. Procese de încălzire și răcire.
   2.2. Procese de uscare și umezire.
   2.3. Procese de evaporare.
   2.4. Procese de dizolvare.
   2.5. Procese de precipitare (depunere) din suspensii.
3. Procese pneumo-hidraulice:
   3.1. Procese de umplere/golire a rezervorului cu granule.
   3.2. Procese de umplere/golire a rezervorului cu gaze.
   3.3. Procese de umplere/golire a rezervorului cu lichid.

În calitate de parametri tehnologici care determină starea procesului se utilizează: temperatura, debit, presiune, nivel etc.

Se prezintă exemple de procese industriale și tehnologice.

Exemplul 1.1. Se consideră un recipient tehnologic de acumulare a lichidului (fig. 1.4) cu secțiunea transversală S, m^2, în care prin conducta C_1 curge fluxul Q_1,

m^3/s, iar prin conducta C_2 se extrage fluxul Q_2, m^3/s și, în rezultat, se acumulează o cantitate de lichid de volumul V, m^3, mărimea de ieșire.

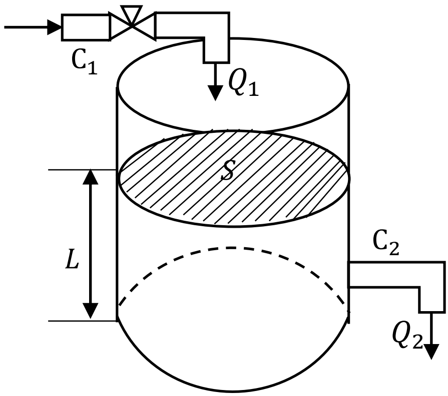

Fig. 1.4. Recipient tehnologic

Pentru descrierea dinamicii acestui proces de acumulare a lichidului în recipient se aplică legea bilanțului material care se exprimă în forma:

$$S\Delta L = (Q_1(t) - Q_2(t))\Delta t, \tag{1.6}$$

sau omițând Δ se obține:

$$S\frac{dL(t)}{dt} = Q_1(t) - Q_2(t) = \Delta Q(t) = Q(t), \tag{1.7}$$

unde S este secțiunea transversală, m^2, L – nivelul lichidului acumulat ca mărime de ieșire, m, $\Delta Q = Q$ - abaterea ca mărime de intrare, m^3/s.

Exemplul 1.2. Se consideră o masă m, kg, care este necesar de a fi pusă în mișcare. Asupra masei m acționează forța P_1, N, iar forța de rezistență este forța de frecare P_2, N și mărimea de ieșire va fi viteza de mișcare v, m/s.

Pentru descrierea dinamicii acestei mase se aplică legea lui Newton care are forma:

$$m\frac{dv(t)}{dt} = P_1(t) - P_2(t) = \Delta P(t) = P(t), \tag{1.8}$$

unde m este masa, v – viteza de mișcare, ΔP – este abaterea, N.

Exemplul 1.3. Se consideră un motor ideal simbolic prezentat în fig. 1.5 cu simbolizările: mărimea de intrare $r(t)$ în baza căreia se dezvoltă momentul dinamic M_d, mărimea de ieșire rotații $n(t)$ sau viteza unghiulară $\omega(t)$ a rotorului în jurul axei, mărimea M_s – cuplul de sarcină ca perturbație.

Pentru descrierea dinamicii motorului ideal (se neglijează momentul de frecare) se aplică legea arborelui (legea Newton, D'Alambert), care are forma:

$$J\frac{d\omega(t)}{dt} = M_d(\omega) - M_s(\omega) = \Delta M(\omega) = M(\omega), \qquad (1.9)$$

unde J este momentul de inerție al rotorului și sarcinii, Nm^2, ω – viteza unghiulară a rotorului, s^{-1}, M_d – momentul dinamic dezvoltat de motor, Nm, M_s – momentul de sarcină (de rezistență), Nm, ΔM – este abaterea.

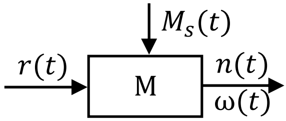

Fig. 1.5. Motor ideal

Pentru descrierea dinamicii motorului ideal (se neglijează momentul de frecare) se aplică legea arborelui (legea Newton, D'Alambert), care are forma:

$$J\frac{d\omega(t)}{dt} = M_d(\omega) - M_s(\omega) = \Delta M(\omega) = M(\omega), \qquad (1.9)$$

unde J este momentul de inerție al rotorului și sarcinii, Nm^2, ω – viteza unghiulară a rotorului, s^{-1}, M_d – momentul dinamic dezvoltat de motor, Nm, M_s – momentul de sarcină (de rezistență), Nm, ΔM – este abaterea.

În exemplele de mai sus mărimile S este secțiunea transfersală, J – momentul de inerție și m – masa și aceste mărimi exprimă proprietățile interne ale proceselor respective.■

Din exemplele analizate, se constata că ecuațiile diferențiale, care descriu dinamica proceselor sunt similare după formă și de același ordin.

În baza acestei constatări se prezintă forma generalizată a descrierii procesului simbolic dată în fig. 1.6 cu următoarele notații: semnalul mărimii de intrare $x(t)$ caracterizează valoarea instantanee a acțiunii energetice sau fluxul de substanță și la procese în mișcare este forța sau momentul, la procese hidraulice sau pneumatice este fluxul de intrare al lichidului sau gazului, la procese termice este cantitatea de căldură etc., $y(t)$ - semnalul mărimii de ieșire, care la mișcare este viteza, la încălzire - temperatura, la umplerea rezervorului cu gaz (lichid) – nivelul/presiunea etc., L - proprietatea internă ce determină intensitatea modificării în timp a mărimii de ieșire.

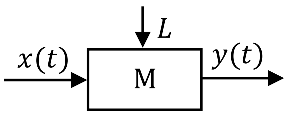

Fig. 1.6. Model de proces

Ecuația diferențială ce descrie dinamica unui proces generalizat (fig. 1.6) cu notațiile introduse se dă în forma:

$$L\frac{dy(t)}{dt} = x(t) \tag{1.10}$$

sau

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{1}{L}x(t). \tag{1.11}$$

După integrarea ecuației (1.11) se obține forma integrală:

$$y(t) = \frac{1}{L}\int_0^t x(t)dt. \tag{1.12}$$

Expresia (1.12) descrie dinamica procesului ca dinamica unui element integrator, unde constanta de timp de integrare se determină de valoarea numerică a parametrului L, care caracterizează proprietatea internă și exprimă inerția evoluției procesului condus.

Pentru conducerea eficientă a procesului industrial, indiferent de tipul procesului, este necesar să fie cunoscute proprietățile interne și, în baza acestora, se elaborează algoritmii de conducere.

În mediul real există procese industriale și tehnologice simple și procese complexe. Procesele simple reprezintă o capacitate (recipient) în care evoluează procesul, iar cele complexe sunt alcătuite din mai multe capacități (recipiente), conectate în modul respectiv, în care evoluează procesul condus.

Se consideră un proces condus cu o capacitate în regim de funcționare care are următoarele proprietăți:

1. Proprietatea de acumulare/disipă (exprimă inerția) a energiei, substanței etc.

2. Proprietatea de autoreglare sau autostabilizare a procesului.

3. Timpul mort.

Pentru un proces cu o capacitate cu cele trei proprietăți, dinamica lui se descrie de ecuația diferențială cu inerție de ordinul unu cu timp mort de forma:

$$T_0\frac{dy(t)}{dt} \pm \rho y(t) = x(t-\tau), \tag{1.13}$$

unde T_0 este constanta de timp a obiectului, unitatea de măsură s, care exprimă proprietatea de inerție (acumulare/extragere), ρ – coeficientul de autoreglare, adimensional, care exprimă proprietatea procesului de stabilizare după ce a fost excitat de un semnal (prin modificarea condițiilor inițiale sau aplicarea unui semnal la intrare), τ – timpul mort, unitatea de măsură s, pe durata acestuia la ieșirea obiectului semnalul este egal cu zero.

Mărimile T_0, ρ, τ se numesc parametrii obiectului condus și exprima proprietățile respective inerția, autoreglarea și timpul mort.

Ecuația (1.13) mai puțin este aplicată în practică și, din aceste considerente, se aduce la forma canonică, unde ultimul termen (cu derivata de ordin zero) va avea coeficientul egal cu unu, iar pentru aceasta toți termenii din partea stângă și dreaptă se împart la coeficietul ρ și, întroducând notațiile respective, va avea forma:

$$T\frac{dy(t)}{dt} \pm y(t) = kx(t-\tau), \qquad (1.14)$$

unde $T = T_0/\rho$ este constanta de timp a procesului condus, s, $k = 1/\rho$ – coeficientul de transfer al obiectului condus (unitatea de măsură este determinată de raportul mărimii de ieșire la mărimea de intrare), τ – timpul mort, s.

În acest caz parametrii obiectului condus (reglat) sunt T, k, τ, care exprimă proprietățile procesului real.

După proprietatea de autoreglare ρ rezultă o clasificare a modelelor de procese (fig. 1.7).

1. Dacă $\rho > 0$, atunci procesul are un regim stabil de funcționare și care are un regim *static*.

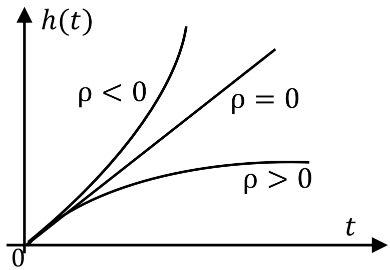

Fig. 1.7. Clasificarea modelelor de procese după parametrul ρ

2. Dacă $\rho < 0$, atunci procesul are un regim de funcționare *instabil* și procesul tinde spre destabilizare, nu are un regim stabil de funcționare.

3. Dacă $\rho = 0$, atunci procesul are un regim de integrare (o tendință de creștere, care nu se stabilizează) și se numește proces cu regim *astatic sau neutru*.

Pentru ecuația diferențială (1.13) funcția de transfer are forma:

$$H(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{ke^{-\tau s}}{Ts+1}. \tag{1.15}$$

Pentru a opține modelul matematic al procesului se utilizează metode de identificare:

1) metode analitice;

2) metode experimentale;

3) metode analitico-experimentale.

Metodele analitice constau în aplicarea legilor fundamentale care guvernează procesul pentru a obține modelul matematic al procesului condus. Prin aceste metode este dificil de obținut rezultatul scontat.

Metodele experimentale au o largă utilizare și se reduc la ridicarea caracteristicilor de timp (proces indicial, funcția pondere) și funcțiilor frecvențiale și prin proceduri de identificare se determină modelul matematic al obiectului de reglare în forma de bază prin funcții de transfer cu parametrii cunoscuți.

Metodele analitico-experimentale se aplică în mod combinat de determinare a modelului matematic al obiectul de reglare și parametrii acestuia.

La această etapă se analizează procesul pentru a cunoaște sursele de energie și modul de utilizare a acestora, a variabilelor măsurabile, a mărimilor de calitate specifice procesului, natura fizică și particularitățile perturbațiilor, care acționează asupra procesului, regimul staționar de funcționare și mediul în care evoluează pentru a adopta o soluție de automatizare.

Ansamblul, alcătuit din elementul de execuție, instalația tehnologică (procesul) și traductorul, în regimul de funcționare parametrii acestora nu se modifică și se numește *partea fixată* (PF).

Se consideră dinamica elementelor părții fixate descrisă de f.d.t.

cu inerție de ordinul unu a elementului de execuție $H_E(s)$, a procesului condus $H_P(s)$ și a traductorului $H_{tr}(s)$:

$$H_E(s) = \frac{k_E}{T_E s+1}, H_P(s) = \frac{k_P}{T_P s+1}, H_{tr}(s) = \frac{k_{tr}}{T_{tr} s+1} \qquad (1.16)$$

și se realizează condiția când constantele de timp a elementului de execuție T_E și a traductorului T_{tr} sunt cu mult mai mici decât constanta de timp a procesului T_P: $T_E \ll T_P$ și $T_{tr} \ll T_P$.

În acest caz f.d.t. echivalentă a conexiunii serie a părții fixate este:

$$H_{PF}(s) = H_E(s)H_P(s)H_{tr}(s) = \frac{k_E}{T_E s+1}\frac{k_P}{T_P s+1}\frac{k_{tr}}{T_{tr} s+1} \approx$$

$$\approx \frac{k_E k_P k_{tr}}{T_P s+1} = \frac{k}{T_P s+1}, \qquad (1.17)$$

unde $k = k_E k_P k_{tr}$ este coeficientul de transfer al părții fixate.

La proiectare se utilizează atât modele intrare-ieșire, cât și modele intrare-stare-ieșire ale obiectelor conduse. Cele mai larg utilizate modele pentru descrierea obiectelor conduse sunt modelele intrare-ieșire *parametrice* (ecuații diferențiale, funcții de transfer) și *neparametrice* (caracteristicile frecvențiale, răspunsul indicial, funcția pondere), care se obțin după prelucrarea datelor experimentale.

Pentru determinarea modelului matematic de aproximare al procesului se parcurg următoarele etape.

1. Se determină răspunsul procesului tehnologic și se analizează evoluția procesului.

2. Se determină parametrii procesului cu valoarea nominală și eroarea admisibilă.

3. Se alege și se dimensionează traductorul cu datele metrologice necesare pentru măsurarea parametrului tehnologic cu eroarea dată în proces. Se analizează caracteristica statică și dinamică a traductorului.

4. Se alege și se dimensionează elementul de execuție.

5. Se aplică semnalul de probă treaptă unitară, se ridică și se înregistrează răspunsul indicial $h(t)$ al procesului.

6. Prelucrarea datelor experimentale și determinarea modelului matematic de aproximare al procesului analizat.

Se prezintă un exemplu de determinare a modelului matematic al unui poces pe cale experimentală. La intrarea procesului s-a aplicat semnalul treaptă unitară $x(t) = 1(t)$ și s-a ridicat răspunsul indicial $h(t)$, care se dă în fig. 1.8.

Procedura de determinare a modelului obiectului după curbă experimentală se reduce la etapele:

1) pe curbă se alege punctul de inflexiune I, în care derivata (viteza) își schimbă semnul;

2) în punctul de inflexiune I la curbă se trasează tangenta AB până la intersecția cu axa absciselor și regimul staționr;

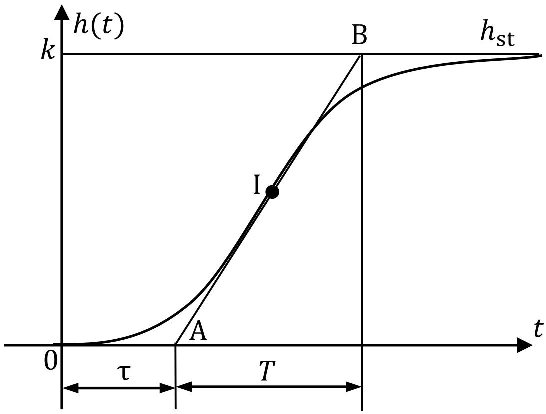

Fig. 1.8. Răspunsul indicial al unui proces industrial

3) se determină proiecția tangentei AB pe axa absciselor și acest segment de timp este constanta de timp T a procesului;

4) segmentul pe axa absciselor de la origine până la punctul A de intersecție a tangentei cu axa absciselor este timpul mort τ al procesului;

5) coeficientul de transfer este valoarea regimului indicial staționar $k = \frac{h_{\text{st}}}{x} = \frac{h_{\text{st}}}{1} = h_{\text{st}}$.

În rezultatul procedurilor efectuate s-au obținut parametrii unui model de obiect cu inerție de ordinul unu cu timp mort cu funcția de transfer (1.15).

Modelul obținut, prin procedura dată, este o aproximare a procesului de ordin redus, însă pot fi obținute și alte aproximări (modele) de ordin ridicat după această curbă, dar procedura este dificilă.

Din aceste considerente s-au elaborat mai multe pachete de programe, de exemplu MATLAB, care se aplică pentru identificarea modelului matematic în forma funcțiilor de transfer după curba răspunsului indicial ridicată experimental pentru procesul real.

Pentru clase largi de procese lente și foarte lente se utilizează modele parametrice în forma funcțiilor de transfer. Se prezintă exemple de modele de obiecte de reglare cu diferite proprietăți exprimate prin funcții de transfer:

$$H(s)=\frac{k}{Ts+1},\ H(s)=\frac{1}{Ts},\ H(s)=\frac{e^{-\tau s}}{Ts},\ H(s)=\frac{k}{(T_1s+1)(T_2s+1)},$$
$$H(s)=\frac{ke^{-\tau s}}{(T_1s+1)(T_2s+1)},\ H(s)=\frac{k}{(Ts+1)^n},\ H(s)=\frac{ke^{-\tau s}}{(Ts+1)^n},$$
$$H(s)=\frac{k}{(T_1s+1)(T_2s+1)^n},\ H(s)=\frac{ke^{-\tau s}}{(T_1s+1)(T_2s+1)^n}. \qquad (1.18)$$

În (1.18) se dau f.d.t. pentru modele de obiecte de reglare:

1) cu inerție de ordinul unu;
2) cu astatism (integrare);
3) cu astatism și timp mort;
4) cu inerție de ordinul doi;
5) cu inerție de ordinul doi și timp mort;
6) cu inerție cu elemente identice de ordinul n;
7) cu inerție cu elemente identice de ordinul n și timp mort;
8) cu inerție de ordinul $n+1$;
9) cu inerție de ordinul $n+1$ și timp mort,

unde k, T, T_1, T_2, τ sunt parametrii modelelor respective.

Se prezintă o formă generalizată a procesului caracterizat de funcția de transfer de frma:

$$H(s)=\frac{ke^{-\tau s}B(s)}{s^{\nu}A(s)}=\frac{ke^{-\tau s}}{s^{\nu}}\frac{b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\dots+b_0}{s^{n-\nu}+a_{n-1}s^{n-\nu-1}+\dots+a_1s+a_0},\ m\le n, \qquad (1.19)$$

unde k este coeficientul de transfer, τ – timpul mort, ν – gradul de astatism, $B(s)$ – polinomul numarătorului de gradul m, care prezintă zerourile modelului obiectului și accelerează procesul, $A(s)$ – polinomul numitorului de gradul n- ν, care descrie polii modelului obiectului și exprimă inerția obiectului condus, iar raportul $m \leq n$ reprezintă realizabilitatea fizică a proceselor.

Funcția de transfer $H(s)$ a procesului este proprie când $n \geq m$ și atunci $H(\infty)$ este finită, f.d.t. $H(s)$ este strict proprie când $n > m$ și $H(\infty) = 0$ și f.d.t. $H(s)$ este biproprie când $n = m$. Procesul descris de f.d.t. $H(s)$ cu $m > n$ este impropriu.

Primele 6 modelele din (1.18) au un grad redus de aproximare, care descrie comportarea reală a procesului condus în vecinătatea punctului static de funcționare pentru variații de amplitudine redusă ale variabilelor funcționale de intrare $x(t)$ și ieșire $y(t)$.

Pentru descrierea proceselor rapide pot fi aproximate cu modele de forma:

$$H_P(s) = \frac{k}{\prod_{k=1}^{n}(T_k s+1)(T_\Sigma s+1)}, \tag{1.20}$$

unde T_k sunt constante de timp dominante, care au valori mai mari de 10 s, iar T_Σ - constanta de timp parazită ca suma constantelor de timp mici, care este mai mică decât cea mai mică constantă de timp dominantă.

Modelele *neparametrice* se reprezintă prin caracteristicile frecvențiale ca modele simplificate, liniare și de dimensiune redusă, care descriu procesele reale cu un grad mai mare sau mai redus de incertitudine. Incertitudinile la construirea modelelor este rezultatul reducerii dimensiunii modelelor, de liniarizarea neliniarităților din proces etc.

Incertitudinile se clasifică în *parametrice* când sunt incorecți valorile parametrilor modelelor și *structurale* când structurile modelului sunt imperfecte.

Dacă este cunoscut răspunsul indicial, atunci prin metode de identificare se determină modelul parametric al procesului.

Un rol tot mai important se atribuie modelelor obiectelor liniare în forma intrare-stare-ieșire la proiectarea sistemelor cu conducere automată la acțiunea semnalelor mărimii de intrare $\boldsymbol{u}(t)$ și a perturbației $\boldsymbol{p}(t)$ pentru obiectul multivariabil descris în forma vector-matriceală:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{E}\boldsymbol{p}(t), \tag{1.21}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t),$$

unde se utilizează notațiile:

$\boldsymbol{A}$ este matricea coeficienţilor interni de dimensiunea $n \times n$,

$\boldsymbol{B}$ – matricea de comandă de dimensiunea $n \times m$,

$\boldsymbol{C}$ – matricea de ieşire de dimensiunea $l \times n$,

$\boldsymbol{D}$ – matricea de ieşire de dimensiunea $l \times m$,

$\boldsymbol{E}$ – matricea de perturbaţie de dimensiunea $l \times r$,

$\boldsymbol{u}(t)$ – vectorul intrării de dimensiunea m,

$\boldsymbol{x}(t)$ – vectorul de stare de dimensiunea n,

$\boldsymbol{y}(t)$ – vectorul ieșirii de dimensiunea l,

$\boldsymbol{p}(t)$ – vectorul perturbațiilor de dimensiunea r.

În cazul obiectului monovariabil modelul (1.21) are forma:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t) + \boldsymbol{e}p(t), \qquad (1.22)$$

$$y(t) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{d}u(t),$$

unde $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \cdots, \dot{x}_n(t))$ este derivata vectorului stării, $\boldsymbol{A}$ – matricea coeficienților interni de dimensiunea $n \times n$, $\boldsymbol{b}$ – vectorul coloană de comandă de dimensiunea $1 \times n$, $\boldsymbol{c}$ – vectorul de ieşire de tip coloană de dimensiunea $n \times 1$, iar $\boldsymbol{c}^T$ – vectorul $\boldsymbol{c}$ transpus de dimensiunea $1 \times n$ – rând, $\boldsymbol{d}$ – vectorul coloană de comandă de dimensiunea $1 \times n$, $\boldsymbol{e}$ – vectorul coloană a perturbației de dimensiunea $1 \times n$.

Dacă asupra procesului acționează referința $u(t)$ și perturbația $p(t)$ (fig. 1.9, *a*), atunci modelul matematic al obiectului de reglare se prezintă în forma (fig. 1.9, *b*).

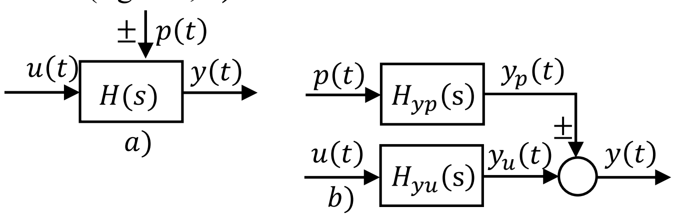

Fig. 1.9. Modelul matematic al obiectului de reglare

Mărimea de ieșire a obiectului de reglare (fig. 1.9, *b*) în formă operațională se prezintă cu relația din două componente:

$$y(s) = y_u(s) \pm y_p(s) = H_{yu}(\mathrm{s})u(s) \pm H_{yp}(\mathrm{s})p(s), \qquad (1.23)$$

unde $y_u(s)$ este componenta răspunsului la acțiunea referinței, $y_p(s)$ – componenta răspunsului la acțiunea perturbației, $H_{yu}(\mathrm{s})$, $H_{yp}(\mathrm{s})$ – funcțiile de transfer, care descriu transferurile intrare-ieșire respective.

1.4 Elemente tehnice ale automaticii

În structura convențională a sistemului de reglare automată se conțin elementele funcționale traductorul, amplificatorul și elementul de execuție [5, 7, 17].

În rezultatul analizei de proces se vor alege, dimensiona și poziționa *traductoarele și elementele de execuție* în funcție de regimul de funcționare selectat al procesului și a variabilelor măsurabile și controlabile.

1.4.1 *Traductoare*

Traductoarele (senzorii) au funcția de culegere a informației din proces prin măsurarea și conversia mărimilor fizice ce asigură informația necesară pentru deciziile de conducere a procesului. În cazurile când unele mărimi fizice nu pot fi măsurate, atunci pot fi generate informații despre proces după unele observații și măsurări indirecte, care conduc la ideea de senzor virtual.

Traductoarele se aleg din condiția de satisfacere a unor cerințe: natura fizică a mărimilor măsurate neelectrice și electrice (temperatură, presiune, debit, viteză liniară sau unghiulară, tensiune etc.), precizie ridicată de măsurare (rezoluția traductorului), liniaritatea caracteristicei statice, sensibilitatea și capacitatea de rejecție a zgomotelor, finețea și fidelitatea, viteza de răspuns (dinamica), robustețe (viguros, rezistent), preț de cost, compatibilitate cu mediul în care evoluează procesul.

Traductoarele, care măsoară mărimile neelectrice, conțin în structura lor elemente sensibile și adaptoare de semnal electric, care furnizează mărimea măsurată ca semnal unificat (cel mai utilizat de curent curent continuu $4 - 20$ mA).

1.4.2 *Elemente de execuție*

În structura sistemului de reglare automată există elementul de execuție prin intermediul căruia se controlează fluxul de energie spre sau dinspre instalația tehnologică unde evoluează procesul (obiectul de reglare). Elementul de execuție primește la intrare semnale sub formă de comenzi de la amplificator (regulator) și furnizează instalației tehnologice energie sub diferite forme prin intermediul organului (elementului) de reglare, care se deschide/închide și, astfel, reglând fluxul necesar de materie (substanță) în procesul tehnologic (industrial).

Elementul de execuție (EE) este constituit din două elemente conectate în serie (fig. 1.10): elementul de acționare (EA) și elementul (organul) de reglare (ER).

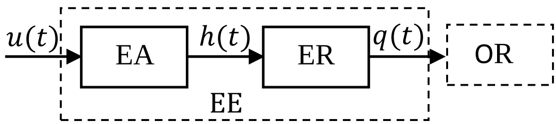

Fig. 1.10. Structura elementului de execuție

Mărimea de intrare în elementul de acționare EA este comanda $u(t)$ de la regulator, care se transformă la ieșirea lui în poziția arborelui $h(t)$, iar această mărime $h(t)$ în elementul de reglare ER se transformă în deplasarea organului de reglare prin care curge fluxul $q(t)$ în obiectul de reglare (OR).

Organele de reglare au anumite caracteristici specifice în dependență de natura instalației tehnologice și modul ei de funcționare. Elementele de reglare ca elemente funcționale ale sistemului prin caracteristicile statice și dinamice contribuie la asigurarea performanțelor impuse instalației tehnologice și evoluției procesului realizat.

După caracteristicile statice de funcționare organele de reglare se divizează în două clase:

1) proporționale;
2) poziționale.

Organele de reglare proporționale pot fi deschise/închise la orice valoare între 0-100 %, iar cele poziționale pot fi total deschise/închise sau deschise/închise prin câteva poziționări fixe. Organele de reglare după construcție și modul lor de funcționare se clasifică în două tipuri: mecanice și electrice. Organele de reglare mecanice la rândul lor se clasifică: ventile mecanice (normale, cu două căi, cu trei căi), clapete de reglare, benzi transportatoare, alimentatoare cu șurub (melc). Organele de reglare electrice se clasifică: reostate de comandă, amplificatoare magnetice, întreruptoare.

Principiul de funcționare al organelor de reglare de tip ventil se bazează pe modificarea secțiunii transversale de curgere a fluidelor prin anumite rezistențe hidraulice locale care se formează între un element fix numit *scaun* și altul mobil numit *obturator*. Debitul de fluid care curge prin ventilul deschis se determină cu relația [1, 5]:

$$Q = K\sqrt{\frac{\Delta P}{\rho}}, \tag{1.24}$$

unde Q este debitul prin ventil, S – aria secțiunii transversale de curgere, K – coeficientul specific de debit, ΔP – căderea de presiune pe ventil, ρ – densitatea fluidului. Aceste mărimi depind de construcția ventilului și de deplasarea h a obturatorului, care modifică secțiunea transversală S și, astfel, se modifică și debitul fluxului și atunci modul de funcționare se determină de o funcție a ventilului de forma:

$$K = S\sqrt{\frac{2}{\xi}}, \tag{1.25}$$

unde ξ prezintă coeficientul de pierderi hidraulice locale.

Caracteristica care descrie funcționarea ventilului este numită caracteristică intrinsecă ce reprezintă funcția coeficientului K specific de debit și deschiderea organului de reglare h dată de relația:

$$K = f(h), \tag{1.26}$$

unde K se determină experimental.

Caracteristicile statice intrinseci ale ventilelor utilizate în practică sunt liniare și logaritmice.

Pentru alegerea și exploatarea organelor de reglare se utilizează caracteristica statică care caracterizează debitul Q ca funcție de deplasarea obturatorului h dată de relația:

$$Q = f(h). \tag{1.27}$$

În fig. 1.11 sunt prezentate caracteristici statice liniare și neliniare ale organului de reglare: în fig. 1.11, a este dată caracteristica proporțională liniară 1 și logaritmică 2, iar în fig. 2, b – caracteristica pozițională.

Pentru organele de reglare cu caracteristica pozițională (fig.1.11, b) deschiderea/închiderea se efectuează în câteva poziționări (de exemplu închis/deschis, deschidere $1/4$, $2/4$, $3/4$, $4/4$).

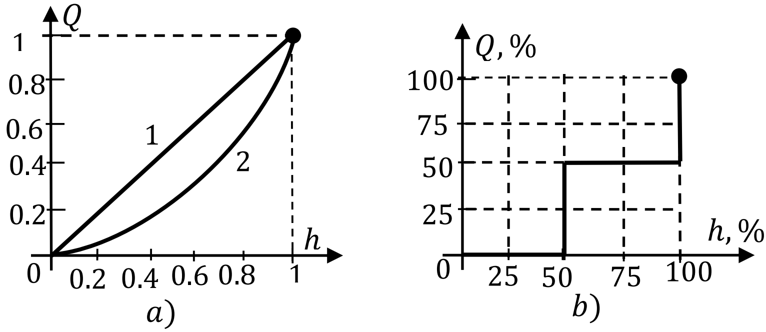

Fig. 1.11. Caracteristici statice ale organului de reglare

Elementele de reglare poziționale constructiv sunt alcătuite dintr-o armatură feromagnetică mobilă, care în poziția inițială este fixată de un resort și conjugată mecanic cu organul de reglare și o armatură fixă care conține bobina de excitație a electromagnetului, alimentată în curent continuu sau alternativ. La aplicarea tensiunii la bobină curentul formează fluxul magnetic și armatura feromagnetică mobilă este atrasă în interiorul bobinei până la o poziție determinată de echilibrul dintre forța de atracție proporțională cu pătratul curentului bobinei și forța de sens opus dezvoltată de resort. În poziția de repaus, când curentul în bobină este egal cu zero, armatura feromagnetică datorită greutății proprii și acțiunii presiunii exercitate de fluid, apasă obturatorul pe scaunul ventilului.

Elementele de reglare proporționale sunt acționate de elementul de acționare de tip motor (electrice, hidraulice, pneumatice), iar elementele de reglare poziționale sunt acționate de electromagneți [1, 5].

Elementele de acționare electrice sunt de curent continuu și de curent alternativ. Cele de curent continuu se clasifică cu mișcare de translație (electromagneți, servomotoare cu poziționer) și cu mișcare de rotație (servomotoare: cu rotor disc, cu rotor pahar, cu rotor lung, cu comutație electronică), iar cele de curent alternativ se clasifică cu mișcare de translație (electromagneți, servomotoare cu poziționer) și cu mișcare de rotație (servomotoare bifazate și trifazate).

Organele de reglare prezintă o caracteristică neliniară și pentru a adapta cursa elementului de acționare la cursa organului de reglare se utilizează un dispozitiv special numit poziționer, care realizează o funcție programată între semnalul de comandă de la regulator și deschiderea organului de reglare (fig. 1.12). În fig. 1.12 este reprezentată schema funcțională a elementului de execuție cu poziționer, în care sunt utilizate notațiile pentru blocurile funcționale și variabilele structurii: EAd este elementul de adaptare, EAm – elementul de amplificare, EA – elementul de acționare, OR – organul de reglare, Tr – traductorul de poziție a arborelui elementului de acționare, u este mărimea de comandă de la regulator, u_r – mărimea de referință adaptată la poziția organului de reglare, $\varepsilon_1 = u_r - u_h$ eroarea, u_r mărimea de ieșire a amplificatorului, u_h - mărimea de ieșire a traductorului de poziție, h_1 poziția arborelului elementului de acționare, h - poziția organului de reglare.

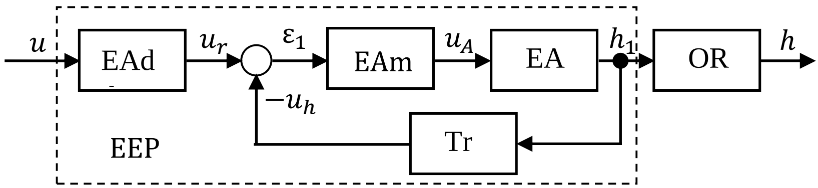

Fig. 1.12. Schema funcțională a elementului de execuție cu poziționer

Necesitatea obținerii unor performanțe mai ridicate în funcționarea instalațiilor tehnologice automatizate, în care evoluează procese complexe cu parametri variabili în timp au impus necesitatea construirii elementelor de execuție inteligente, care adaptează automat caracteristicile funcționale la modificările produse. Funcționarea inteligentă a elementelor de execuție este asigurată prin utilizarea poziționerelor realizate cu echipamente de calcul numeric și cu aplicarea algoritmilor de conducere implementați prin tehnici de inteligență artificială realizate cu rețele neuronale și logica fuzzy.

Criterii pentru alegerea și poziționarea elementelor de execuție.

În practica automatizărilor diverselor procese în calitate de elemente de execuție se utilizează electromecanice, pneumomecanice și hidromecanice. În baza caracteristicilor constructive și funcționale ale proceselor conduse, elementele de execuție se aleg și se dimensionează în dependență de particularitățile surselor de energie asociate proceselor și în funcție de obiectivele și cerințele de performanță impuse sistemelor de conducere automată.

Elementele de execuție se aleg și se dimensionează în baza următoarelor criterii [1, 4, 5].

1. Capacitatea de a dezvolta forțe și cupluri suficient de mari pentru acționarea organelor de reglare în raport cu nivelul fluxurilor de energie vehiculată.

2. Domeniul de liniaritate al caracteristicilor statice cât mai mare în corelație cu domeniul de lucru selectat.

3. Asigurarea unor constante de timp cât mai mici și o dinamică în concordanță cu dinamica instalației tehnologice.

4. Compatibilitatea cu mediul în care evoluează procesul tehnologic.

5. Volume cât mai reduse și flexibilitate tehnologică în poziționarea cât mai eficientă în instalația tehnologică.

6. Prețul de cost corelat cu performanță, siguranța în funcționare și mentenanța.

Criteriile care se utilizează la alegerea elementelor de execuție după tipul de energie sunt:

1. Elementele de acționare electrice să fie simplu cuplate la calculator, asigură performanțe ridicate și o gamă largă de puteri și aplicații unde semnalul de comandă trebuie de transmis la distanțe mari. Nu se recomandă în sistemele care funcționează în condiții cu pericol de explozii.

2. Elementele de acționare pneumatice sunt recomandate pentru acționări cu viteze mici a organelor de reglare de tip ventil și pe distanțe mici de poziționare cu un nivel redus de energie. Sunt utilizate în mediile

cu pericol de explozii. Din cauza căderilor de presiune pe conductele de alimentare, aceste echipamente nu pot fi utilizate pe distanțe mai mari de 300 m.

3. Elementele de acționare hidraulice sunt recomandate în aplicațiile unde este necesar de a dezvolta forțe și accelerații mari pentru acționarea organelor de reglare.

Elementele de execuție, datorită proprietățile lor, pot ridica sau reduce performanțele sistemului automat.

Alegerea, dimensionarea și poziționarea elementelor de execuție se efectuează în baza criteriilor: forța sau cuplul dezvoltat, domeniul de liniaritate al caracteristicii statice cât mai ridicat, dinamica (viteza de răspuns cât mai mare și precizie ridicată) elementului și compatibilitatea cu dinamica procesului, capacitatea organului de execuție pentru asigurarea fluxului de energie necesar compensării perturbațiilor, compatibilitatea elementului de execuție cu mediul industrial, robustețe și siguranță ridicată în funcționare în medii dificile, greutate specifică cât mai redusă și preț de cost cât mai redus.

Performanțele sistemului automat pot fi influențate de proprietățile neliniare esențiale ale elementelor de execuție.

Tendințele dezvoltării domeniului elementelor de execuție conduce la dezvoltarea unor elemente de execuție inteligente cu ridicată compatibilitate, atât cu instalația tehnologică (procesul), cât și cu sistemele numerice de conducere în timp real.

1.4.3 *Amplificatoare*

În sistemele de reglare automată, pentru amplificarea semnalelor de putere mica din structura sistemului, se utilizează elementele funcționale - amplificatoare. După natura fizică a surselor de alimentare și modul de funcționare, amplificatoarele se clasifică: amplificatoare electrice de curent continuu și alternativ, amplificatoare magnetice, amplificatoare pneumatice și amplificatoare hidraulice. În tabelul 1.1 sunt date tipurile de amplificatoare și parametrii acestora.

Ca model matematic amplificatoarele se descriu ca elemente tipice ideale și/sau cu inerţie.

Tabelul 1.1. Tipurile și parametrii amplificatoarelor

Nr. crt.	Clas de amplificator	Tip de amplificator	Factorul de amplificare în putere	Constanta de timp, s
1	Pe semiconductori	De curent continuu (operaționale) De curent alternativ De putere	$10^3 - 10^5$ $10^4 - 10^6$ $10^2 - 10^3$	$10^{-6} - 10^{-7}$ $10^{-3} - 10^{-6}$ $10^{-2} - 10^{-4}$
2	Magnetice	Cu ieșire în curent continuu Cu ieșire în curent alternativ Amplificatoare cu rapiditate	$10^3 - 10^4$ $10^4 - 10^5$ $10^3 - 10^4$	$10^{-1} - 10^{-2}$ $10^{-2} - 10^{-3}$ $10^{-3} - 10^{-4}$
3	Rotative	Generator Generator cu autoexcitație Rotativ	$10^2 - 10^3$ $10^2 - 10^4$ $10^4 - 5 \cdot 10^5$	$1.0 - 10^{-2}$ $0.5 - 10^{-2}$ $10^{-2} - 10^{-3}$
4	Hidraulice	Amplificator cu ajutaj-paletă Amplificator cu tub mobil	$10^4 - 10^6$ $10^3 - 10^4$	$10^{-1} - 10^{-2}$ $10^{-1} - 10^{-2}$
5	Pneumatice	Amplificator cu ajutaj-paletă Amplificator cu tub mobil	$10^5 - 10^7$ $10^3 - 10^5$	$10^{-2} - 10^{-3}$ $10^{-3} - 10^{-4}$

1.5 Performanțele sistemului de reglare automată

Pentru un sistem automat funcțiile principale calitative sunt rejecția perturbațiilor și urmărirea referinței. Urmărirea referinței $r = \text{const}$ cu eroarea staționară minimă $\varepsilon_{st} = 0$ este *problema stabilizării* și urmărirea referinței $r(t)$ cu eroarea minimă este *problema conducerii cu program*.

La automatizarea unui proces, la obiectivele calitative, se vor impune și cerințe specifice ca siguranța în funcționare, calitatea producției, conformitatea cu cerințele de mediu etc.

Cerințele de stabilitate asimptotică și de performanță ale unui sistem automat pot fi determinate în raport cu tipurile de semnale ca referința, perturbația etc. care acționează asupra sistemului.

Proprietatea de stabilitate este necesară oricărui sistem de reglare automată, fiindcă procesele tranzitorii care vor apărea, ca rezultat al acțiunii unor semnale, se vor stinge.

Calitatea regimului de funcționare al unui sistem automat se apreciază după răspunsul indicial al componentei libere $h_l(t)$ şi regimul staționar $h_f(t)$ (fig. 1.13) (răspuns la semnal de intrare treaptă unitară).

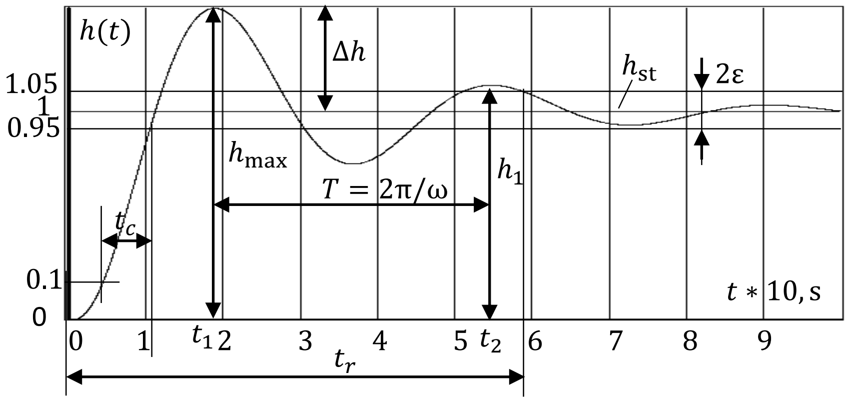

Fig. 1.13. Răspunsul indicial al sistemului de reglare automată

La proiectarea sistemelor automate se utilizează două categorii de performanțe:

1. Criteriile locale (ε, t_c, σ, t_r etc.).
2. Criteriile globale (integrale).

Se prezintă aprecierea calității sistemului după răspunsul indicial cu indici de calitate pentru regimul sțaționar și tranzitoriu.

1. *Indicii de calitate apreciați după regimul staţionar* h_{st}.

Eroarea staţionară sau *precizia sistemului* ε_{st}, care se alege convențional o mărime finită în raport cu regimul staționr h_{st} (de exemplu $\varepsilon_{\mathrm{st}} = 0.05$ sau 5 % din valoarea lui h_{st}):

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_{\mathrm{st}} = r(t) - h(t), \tag{1.28}$$

unde $r(t)$ este referinţa ca semnal etalon al mărimii de ieşire a sistemului, iar $h(t)$ - mărimea curentă a răspunsului indicial al sistemului.

2. *Indicii de calitate apreciați după răspunsul indicial* $h(t)$.

Indicii de calitate se apreciază după răspunsul indicial $h(t)$ al sistemului la semnalul treaptă unitară aplicată la intrarea lui (fig. 1.13).

1. *Timpul de reglare* t_r, care caracterizează timpul de trecere al sistemului din starea iniţială dată (nulă sau nenulă) în banda regimului staţionar cu satisfacerea inegalității:

$$|h(t) - h_{\mathrm{st}}| \leq \varepsilon, t \geq t_r > 0. \tag{1.29}$$

Se constată că regimul tranzitoriu are o durată finită, care are o deosebită importanță practică, deoarece teoretic durata regimului tranzitoriu tinde la infinit.

2. *Timpul de creştere* t_c, care caracterizează timpul de trecere al sistemului din starea iniţială dată 5-10 % până la 95 % din regimul staţionar şi $1/t_c$ este indicator al rapidității răspunsului sistemului.

3. *Suprareglarea* σ sau *eroarea dinamică* Δh, care determină cea mai mare abatere $h_{\max}$ de la regimul staţionar h_{st}, care este mărime absolută sau relativă:

$$\sigma = \frac{h_{\max} - h_{\mathrm{st}}}{h_{\mathrm{st}}} = \frac{\Delta h}{h_{\mathrm{st}}} 100\ \%. \tag{1.30}$$

Un sistem automat se consideră calitativ pentru suprareglarea $\sigma \leq$ $\leq 20\ \%$.

4. *Numărul de abateri sau oscilaţii* λ de la regimul staţionar pe durata timpului de reglare t_r. Pentru un sistem calitativ se recomandă valori pentru $\lambda \leq 3$.

5. *Perioada oscilațiilor* $T_p = 2\pi/\omega$ sau *pulsația oscilațiilor* $\omega =$ $= 2\pi/T_p$.

Având în vedere că asupra sistemului acționează semnalul de referință și semnalul perturbației, atunci rezultă că performanțele sistemului automat trebuie să satisfacă două cerințe de bază.

1. Este necesar ca sistemul automat să urmărească cât mai precis semnalul de referință și să fie cât mai controlabil, ceea ce impune cerința ca derivata $dy(t)/dr(t)$ să fie mai mare în toată gama de variație a referinței $r(t)$.

2. Sistemul automat să fie cât mai slab influențat de acțiunea perturbației și eroarea sistemului $\varepsilon(t)$, rezultatul acțiunii perturbației, să fie cât mai mică și să fie compensată cât mai rapid. Se cere ca sistemul automat cât mai slab să reacționeze la acțiunea perturbației, deci derivata $dy(t)/dp(t)$ să fie cât mai mică.

Din condițiile formulate mai sus rezultă că indicii principali pentru aprecierea performanțelor dinamice ale sistemului automat sunt timpul de reglare t_r și suprareglajul σ [1, 4, 5, 17].

1.6 Eroarea staţionară a sistemului automat

În sistemul automat există regimul staţionar, care are o importanţă deosebită pentru caracterizarea calităților sistemului automat. Eroarea staţionară se determină în raport cu fiecare tip de semnal care acţionează asupra sistemului și eroarea sistemului este suma erorilor pentru fiecare semnal, care acţionează asupra sistemului [4, 8, 13].

Dacă asupra sistemului acţionează semnalele de referinţă şi perturbaţie (fig. 1.14), atunci eroarea sistemului se prezintă ca suma a două componente ale erorilor raportate la semnalele de intrare:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_r(t) + \varepsilon_p(t), \tag{1.31}$$

unde $\varepsilon_r(t)$ este eroarea transferului referinţă $r(t)$– ieşirea $y_r(t)$, $\varepsilon_p(t)$ – eroarea transferului perturbaţie $p(t)$– ieşirea sistemului $y_p(t)$.

Pornind de la schema structurală a sistemului automat (fig. 1.14), se determină eroarea staţionară a sistemului în raport cu semnalele referinţei $r(t)$ şi perturbaţiei $p(t)$:

$$\varepsilon(s) = \frac{1}{1+H_d(s)} r(\mathrm{s}) - \frac{H_p(s)}{1+H_d(s)} p(\mathrm{s}) =$$

$$= H_{\varepsilon r}(s) r(\mathrm{s}) - H_{\varepsilon p}(s) p(\mathrm{s}) = \varepsilon_r(\mathrm{s}) - \varepsilon_p(\mathrm{s}), \tag{1.32}$$

unde $H_d(s) = H_R(s) H_{PF}(s)$ este f.d.t. a canalului direct sau sistemul în circuit deschis, $H_{\varepsilon r}(s) = 1/(1+H_d(s))$ - f.d.t. a erorii transferului referinţă-ieşire, $H_{\varepsilon p}(s)$ - $H_p(s)/(1+H_d(s))$ - f.d.t. a erorii transferului perturbaţie-ieşire, $H_p(s)$ – f.d.t. în canalul perturbaţiei.

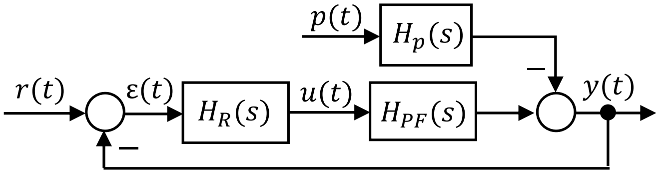

Fig. 1.14. Structura sistemului de reglare automată

Se analizează performanţele ce caracterizează eroarea staţionară în raport cu semnalul de referinţă *numită şi eroare forţată* $\varepsilon_r(\mathrm{s})$ dată de relaţia:

$$\varepsilon_r(\mathrm{s}) = r(\mathrm{s}) - y(\mathrm{s}) = r(\mathrm{s}) - H_d(s)\varepsilon_r(\mathrm{s}) =$$

$$= r(s) - H_0(s)r(s) = r(s)\big(1 - H_0(s)\big) = H_{\varepsilon r}(s)r(s). \quad (1.33)$$

unde $H_0(s) = \frac{H_d(s)}{1+H_d(s)}$ este funcția de transfer a sistemului în buclă închisă.

Pentru a caracteriza proprietăţile sistemului automat în regim staţionar se evidenţiază următoarele tipuri de erori staţionare.

1. *Eroarea staţionară de poziţionare* (*regim pozițional*) la semnal de referinţă de tip treaptă unitară pentru care se defineşte expresia analitică, derivata şi imaginea în s în forma:

$$r(t) = 1(t) = \text{const}, \dot{r}(t) = 0, r(s) = 1(s) = \frac{1}{s}, \quad (1.34)$$

$$\varepsilon_r(s) = r(s) - y(s) = r(s) - H_0(s)r(s) =$$

$$= \big(1 - H_0(s)\big)r(s) = H_{\varepsilon r}(s)r(s). \quad (1.35)$$

Pentru a calcula eroarea în regim staţionar de la expresia (1.35) se aplică teorema valorii finale şi se obţine:

$$\varepsilon_r(s) = \lim_{t\to\infty} \varepsilon_r(t) = \lim_{s\to 0} s\varepsilon_r(s) = \lim_{s\to 0} sH_{\varepsilon r}(s)\frac{1}{s} = H_{\varepsilon r}(0) \neq 0. \; (1.36)$$

2. *Eroarea staţionară de viteză* (*regim cu viteză constantă*) la

semnal de referinţă de tip rampă unitară (cu viteză unitară) pentru care se defineşte expresia analitică, derivatele şi imaginea în s şi se obţine:

$$r(t) = t1(t), \dot{r}(t) = 1, \ddot{r}(t) = 0, r(s) = \frac{1}{s^2}. \qquad (1.37)$$

Pentru a calcula eroarea în regim staţionar de la expresia (1.35) se aplică teorema valorii finale şi se obţine:

$$\varepsilon_r(s) = \lim_{t\to\infty} \varepsilon_r(t) = \lim_{s\to 0} s\varepsilon_r(s) = \lim_{s\to 0} sH_{\varepsilon r}(s)\frac{1}{s^2} = \lim_{s\to 0} H_{\varepsilon r}(s)\frac{1}{s}. \; 1.38)$$

3. *Eroarea staţionară de acceleraţie* (*regim cu acceleraţie constantă*) la semnal de referinţă de tip funcţie parabolă unitară (cu acceleraţie unitară) pentru care se defineşte expresia analitică, derivatele şi imaginea în s şi se obţine:

$$r(t) = t^2\frac{1(t)}{2}, \dot{r}(t) = 2t, \ddot{r}(t) = 2, \dddot{r}(t) = 0, r(s) = \frac{1}{s^3}. \quad (1.39)$$

Pentru a calcula eroarea în regim staţionar de la expresia (1.36) se aplică teorema valorii finale şi se obţine:

$$\varepsilon_r(s) = \lim_{t\to\infty} \varepsilon_r(t) = \lim_{s\to 0} s\varepsilon_r(s) = \lim_{s\to 0} sH_{\varepsilon r}(s)\frac{1}{s^3} = \lim_{s\to 0} H_{\varepsilon r}(s)\frac{1}{s^2}. \qquad (1.40)$$

Din analiza expresiilor (1.36), (1.38), (1.40) se constată că precizia este definită de comportarea f.d.t. $H_{\varepsilon r}(s)$ în vecinătatea originii la valori mici ale lui s.

Pentru calculul erorii staţionare (1.40) a sistemului f.d.t. a erorii $H_{\varepsilon r}(s)$ se dezvoltă în serie Taylor şi se obţine:

$$H_{\varepsilon r}(s) = c_0 + c_1 s + \frac{1}{2!}c_2 s^2 + \cdots + \frac{1}{k!}c_k s^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k, \; (1.41)$$

unde coeficienţii erorii se calculează conform relaţiei:

$$c_k = \frac{1}{k!}\frac{d^k H_{\varepsilon r}(s)}{ds^k}\Big|_{s=0} = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{ds^k}\left(\frac{1}{1+H_d(s)}\right). \qquad (1.42)$$

Pentru o formă generică a semnalului de referinţă dat de expresia:

$$r(t) = t^k\frac{1}{k!}, r(s) = \frac{1}{s^{k+1}}, \qquad (1.43)$$

eroarea sistemului în formă operaţională se descrie de relaţia:

$$\varepsilon_r(s) = c_0 r(s) + c_1 s r(s) + \frac{1}{2!} c_2 s^2 r(s) + \cdots + \frac{1}{k!} c_k s^k r(s), \quad (1.44)$$

iar în domeniul timpului eroarea (1.40) se descrie în forma:

$$\varepsilon_r(t) = c_0 r(t) + c_1 \dot{r}(t) + \frac{1}{2!} c_2 \ddot{r}(t) + \cdots + \frac{1}{k!} c_k r^{(k)}(t). \quad (1.45)$$

Coeficienţii c_0, c_1, c_2 ,…, c_k,… din (1.41) și (1.45) se numesc *coeficienţii erorii staţionare* în raport cu mărimea de referință.

Un sistem automat se numeşte de tipul k în raport cu mărimea de referinţă dacă primul coeficient al erorii staţionare este nenul în ordinea lor naturală este c_k.

Similar se calculează și coeficienții erorii sistemului în raport cu semnalul perturbației.

1.7 Criteriile integrale pentru aprecierea performanţelor sistemului automat

Este stabilit că fiecare performanţă separată caracterizează proprietăţile concrete ale sistemului de reglare automată. Alegerea unor performanţe locale pentru ca sistemul să posede o calitate mai bună devine o problemă de contradicții, deoarece alte performanţe locale vor fi mai nefavorabile.

În comparaţie cu performanţele dinamice definite prin criterii locale ε, σ, t_r, ..., care se referă la valori ale erorii în anumite momente ale timpului, criteriile integrale reprezintă indici sintetici de calitate ai sistemului, care caracterizează în ansamblu regimul tranzitoriu şi oferă o informaţie globală complexă despre dinamica sistemului studiat [3, 4, 5, 8, 16, 19].

Această contradicție a condus la ideea definirii unor *indicatori sintetici de calitate* care să înglobeze toate aspectele pentru determinarea calităţii după răspunsul indicial al sistemului.

Un indicator sintetic de calitate asigură o apreciere globală a performanţelor regimului dinamic şi staţionar al unui sistem automat, care se exprimă printr-un număr real pozitiv şi poate fi calculat şi măsurat experimental. Acest indicator poate fi supus minimizării valorii lui, ceea ce implicit conduce la realizarea unei *optimizări* a sistemului automat, care influenţează asupra structurii şi valorilor parametrilor sistemului automat (ai regulatorului).

Pentru aprecierea *vitezei de răspuns* şi a abaterilor mărimii de reglare:

$$\Delta y(t) = \varepsilon(t) = r(t) - y(t) = 1(t) - y(t), t \geq 0 \qquad (1.46)$$

de la regimul staţionar se utilizează criterii *integrale* (*globale*), numite şi criterii *sintetice*, care se formează în funcţie de tipul semnalelor externe care acţionează asupra sistemului automat.

Dacă se admite că eroarea $\varepsilon(t)$ este abaterea sistemului stabil în raport cu comportarea ideală, atunci criteriul integral de performanţă care poare fi utilizat, se defineşte de funcţionala în forma:

$$J = \int_0^\infty L(\varepsilon(t), t)dt = \min, \qquad (1.47)$$

unde operatorul $L(\varepsilon(t),\ t)$ este o funcţie liniară sau neliniară de argumentele eroarea $\varepsilon(t)$ sistemului şi timpul t.

O formă generală a operatorului este $L(\varepsilon(t), u(t), t)$, unde $u(t)$ poate fi după caz comanda aplicată procesului condus sau una din intrările sistemului referința sau perturbația.

Utilizarea expresiei (1.47) pentru determinarea performanţelor impune minimizarea erorii şi această funcţie poate avea diverse forme în dependenţă de particularităţile procesului de reglare, de forma răspunsului sistemului pentru semnale exogene standard.

Ca indice de calitate pentru procese aperiodice se calculează numărul exprimat prin integrala de forma:

$$J_1 = \int_0^\infty \varepsilon(t)dt \rightarrow \min. \qquad (1.48)$$

Pentru procese oscilante se utilizează criteriul numărul exprimat prin integrala pătratică de forma:

$$J_2 = \int_0^\infty \varepsilon^2(t)dt \rightarrow \min \qquad (1.49)$$

sau integrale de alte forme mai complexe.

Integrala (1.49) se calculează exprimând eroarea prin parametrii sistemului automat închis.

1.8 Metode de proiectare a sistemelor de reglare automată

Pe parcursul dezvoltării teoriei sistemelor automate au fost elaborate mai multe metode de sinteză a sistemelor de conducere automată. Aceste metode utilizează atât modele matematice bazate pe transferul intrare-ieșire (perturbație-ieșire) - metode clasice, cât și modele intrare-stare-ieșire (modele moderne).

Din categoria metodelor practicate în procedurile de sinteză a structurilor de sisteme de reglare automată sunt larg utilizate următoarele metode în forma modelelor intrare-ieșire.

1. Metode de sinteză a sistemului automat pe baza funcțiilor de transfer: metoda repartizării poli-zerouri, metoda locului rădăcinilor.

2. Metode de sinteză a sistemului de reglare automată pe baza caracteristicilor de frecvență: metoda caracteristicilor logaritmice, metoda caracteristicilor amplitudine-fază (locul de transfer).

3. Metode de sinteză a sistemului de reglare automată pe baza criteriilor experimentale: metode empirice, metoda Ziegler-Nichols etc.

4. Metode de sinteză a sistemului de reglare automată în baza criteriilor integrale de performanță (criteriile pătratice).

5. Metoda polinomială.

6. Metoda gradului maximal de stabilitate etc.

Se menționează că procedura de proiectare a sistemului de reglare automată (proiectarea regulatorului) este un proces cu reacție, în care obiectul de reglare și specificațiile (performanțele) sunt iterativ ajustate într-un ciclu cu reacție. În procesul de interacțiune om-mașină în procedurile de proiectare, proiectantul se confruntă cu incertitudinile modelului matematic al obiectului de reglare și complexitatea calculelor.

Pentru a depăși dificultățile calculelor la proiectarea sistemului de reglare automată și a realiza toate acestea într-un mod corespunzător s-au elaborat pachete de progame pentru proiectarea asistată de calculator (PAC). În literatura de specialitate sunt indicate diferite pachete de programe MATLAB, KOPRAS etc. utilizate la proiectarea sistemelor de conducere automată.

În continuare se vor expune utilizarea metodelor de sinteză a algoritmului de regalare (conducere).

Chestionar și probleme

1. Explicați noţiunea ingineria sistemelor automate.

2. Definiți schema structurală a sistemului automat și numiți elementele funcționale și explicați funcțiile acestora în sistem.

3. Numiți tipurile de semnale care acționează în structura sistemului automat.

4. Explicați noţiunea de process industrial și tehnologic ca obiect de conducere. Numiți exemple de procese tehnologice.

5. Cum se determină starea procesului tehnologic? Numiți mărimile fizice care exprimă starea procesului.

6. Cum se măsoară mărimile fizice care determină starea procesului? Explicați modul de funcţionare a acestor elemente funcţionale.

7. Ce este modelul matematic al obiectului de conducere?

8. Cum poate fi determinat modelul obiectului de reglare?

9. Numiți tipurile de modele matematice ale obiectelor de reglare în domeniul timpului și domeniul frecvență.

10. Explicați noțiunea timpului mort în modelul obiectului de reglare.

11. Definiți și explicați noțiunea de identificare.

12. Ce funcții îndeplinesc elementele de execuție în structura sistemului?

13. Cum explicați noțiunea algoritmul de conducere și reglare?

14. Dați clasificarea algoritmilor de conducere și explicați esența lor.

15. Cum se realizează în practică algoritmul de conducere?

16. Scrieți funcția de transfer a obiectului de reglare cu inerţie de ordinul doi și explicați sensul fizic al coeficienților din componența acesteia.

17. Cum se determină calitatea regimului de funcționare al sistemului de reglare automată?

18. Numiți indicii de calitate ai sistemului de reglare automată și explicați cum se calculează?

19. Explicați noțiunea eroarea sistemului și cum se calculează aceasta.

20. Clasificați tipurile de erori funcție de tipurile de semnale de intrare în sistemul automat.

21. Se consideră funcția de transfer a sistemului automat deschis:

$$H_d(s) = \frac{k}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}.$$

Calculați eroarea staționară a sistemului închis când asupra sistemului se aplică semnalul de intrare treaptă unitară.

22. Explicați cum se apreciază calitatea sistemului de reglare automată prin utilizarea criteriilor integrale.

23. Explicați de ce în operatorul $L(\varepsilon(t), u(t),\ t)$ se utilizează aceste trei argumente?

24. Care este avantajul utilizării criteriilor integrale la analiza dinamicii sistemului de reglare automată?

2 ALGORITMI ȘI STRUCTURI CONVENȚIONALE DE REGLARE AUTOMATĂ

2.1 Principii de sinteză a structurii sistemului automat

Sinteza sistemului automat este numită proceduira de derminare a structurii și parametrilor sistemului după performanțele lui și este etapa de bază de proiectare și construire a sistemului automat.

Structura algoritmică a sistemului automat se determină prin modele matematice, care este o procedură analitică de construire a sistemului de conducere automată.

Sinteza structurii ideale a sistemului. Pentru soluționarea problemei de sinteza a structurii algoritmice a sistemului este necesar să fie cunoscute funcția de transfer $H_{PF}(s)$ a părții fixate (a obiectului de reglare), perturbațiile $p_1(t)$, $p_2(t)$, care acționează la intrarea și ieșitrea obiectului de reglare și semnalul zgomot $n(t)$, care apare în canalul referinței și măsurării (fig. 2.1, a).

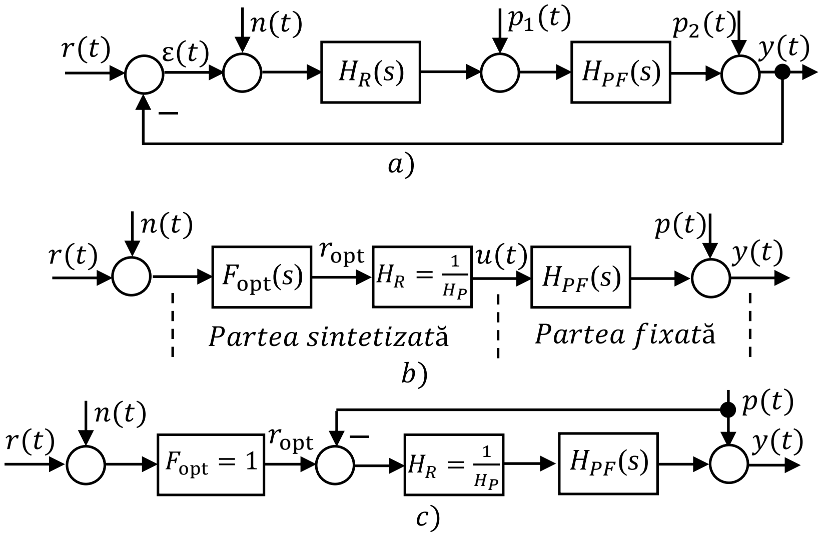

Fig. 2.1. Structura ideală a sistemului automat deschis

În cazul când perturbațiile nu acționează asupra obiectului $p_1(t) = 0$, $p_2(t) = 0$, mărimea de conducere $u(t)$ poate fi realizată în sistemul deschis (fig. 2.1, b). Dacă se consideră f.d.t. a regulatorului este egală cu f.d.t. inversă a obiectului de reglare:

$$H_R(s) = \frac{1}{H_{PF}(s)}, \tag{2.1}$$

atunci se produce compensarea totală a inerției obiectului de reglare și sistemul reproduce la ieșirea obiectului mărimea de referință r_{opt}. Mărimea de referință r_{opt} se elaborează de un filtru special cu f.d.t. $H_{\text{opt}}(s)$, care se sintetizeză astfel, ca filtrul să filtreze cât mai complet toate componentele semnalului de referință $r(t)$ și să compenseze semnalul zgomot $n(t)$.

Când asupra obiectului acționează perturbația $p(t)$ (semnalul zgomot $n(t) = 0$), care poate fi măsurată, atunci se sintetizează structura sistemului deschis cu compensarea totală a perturbației măsurate (fig. 2.1, c). Din relația (2.1) rezultă că $H_R(s)H_{PF}(s) = 1$ și la iețirea sistemului se reproduce semnalul de referință $r(t)$.

Deoarece perturbația nu poate fi măsurată și atunci sinteza sistemului se efectuează pentru structura sistemul închis sau după principiul cu reacție inversă. Pentru a obține structura ideală a sistemului închis, se consideră că se va măsura indirect perturbația $p(t)$ utilizând modelul obiectului de reglare cu f.d.t. $H_M(s)$ (fig. 2.2, a).

Dacă funcția de transfer a modelului obiectului este egală cu funcția de transfer a obiectului:

$$H_M(s) = H_{PF}(s), \tag{2.2}$$

atunci semnalul calculat la ieșirea modelului (săgețile cu linii întrerupte):

$$p_m(t) = y(t) - y_{um}(t) = (y_u(t) + p(t)) - y_{um}(t) = p(t) \tag{2.3}$$

este semnalul perturbaţiei $p(t)$ măsurate indirect și multiplicat cu funcția de transfer $1/H_{PF}(s)$ și astfel se obține structura ideală a sistemului deschis (fig. 2.1, b).

În structura sistemului (fig. 2.2, a) semnalul y_{um} se transmite la intrarea regulatorului R prin sumatorul 2 și regulatorul cu funcția de transfer $1/H_{PF}(s)$ se transformă în buclă închisă cu reacție inversă pozitivă și semnalul după sumatorul 1 este semnalul erorii $\varepsilon = r - y$.

Rezultă că sistemul automat este în buclă închisă cu reacţie invesă negativă cu regulatorul ideal R (fig. 2.2, a, dreptunghiul cu linie întreruptă) descris cu f.d.t.:

$$H_{RI}(s) = \frac{u(s)}{\varepsilon(s)} = \frac{1/H_{PF}(s)}{1-H_M(s)/H_{PF}(s)} = k_p = \infty. \quad (2.4)$$

Dacă modelele obiectului și regulatorului sunt precise, atunci regulatorul ideal (2.4) este un regulator proporțional cu coeficientul de transfer $k_p = \infty$ și eroarea sistemului este egală cu zero pe canalele referinţei și perturbaţiei.

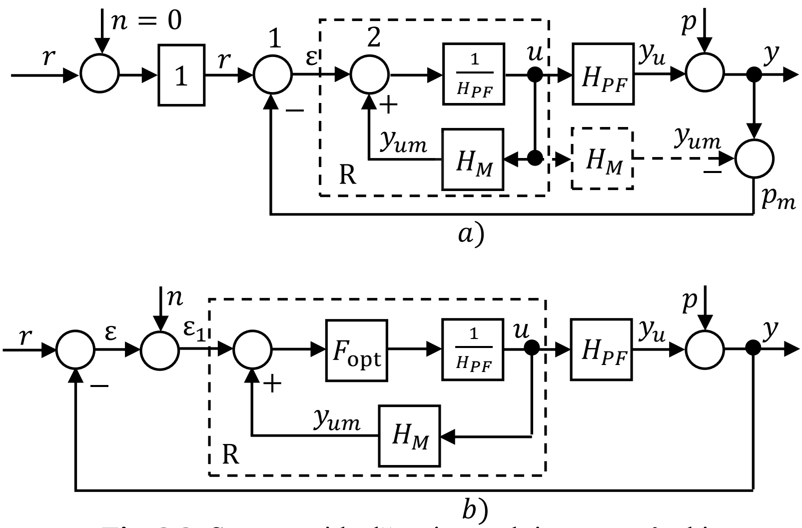

Fig. 2.2. Structura ideală a sistemului automat închis

În cazurile când perturbația $p(t) \neq 0$ și zgomotul $n(t) \neq 0$ structura ideală a sistemului închis (fig. 2.2, b) după proprietăți satisface ambele structuri (fig. 2.2, a, b). Structura ideală a sistemului (fig. 2.2, b) este alcătuită din regulatorul R cu bucla de reacție pozitivă, funcţiile de transfer $1/H_{PF}(s)$, $H_M(s)$ și filtrul optimal cu f.d.t. $F_{\text{opt}}(s)$ este echivalentă sistemului automat ideal deschis pe canalul perturbației $p(t)$ (fig. 2.1, b), care practic reproduce semnalul referinței $r(t)$ și compensează total perturbația $p(t)$.

Regulatorul din structura ideală a sistemului automat (fig. 2.2, b, dreptunghiul cu linie întreruptă) se descrie cu f.d.t.:

$$H_{RI}(s) = \frac{u(s)}{\varepsilon_1(s)} = \frac{F_{\text{opt}}(s)}{1-F_{\text{opt}}(s)}\frac{1}{H_{PF}(s)}. \tag{2.5}$$

Filtrul optimal $F_{\text{opt}}(s)$ filtrează semnalele perturbației $p(t)$ și zgomotului $n(t)$ și elaborează semnalul optimal al referinței $r_{\text{opt}}(t)$. Modelul invers al obiectului $1/H_{PF}(s)$ compensează inerția obiectului, iar f.d.t. $H_M(s)$ prognozează influența mărimii de comducere $u(t)$ asupra mărimii de ieșire $y(t)$ – calculează componenta $y_u(t)$ la iețirea obiectului. Deoarece semnalul $y_{um}(t)$ de la ieșirea elementului de prognoză se transmite la intrarea regulatorului cu semnul plus, atunci sistemul automat închis, la modificarea mărimii $u(t)$ de conducere, va avea evoluția sistemului deschis pe canalul perturbației $p(t)$.

Utilizarea în structura ideală a sistemului a conexiunii în serie a obiectului $H_{PF}(s)$ cu modelul invers $1/H_{PF}(s)$ al obiectului, este ideea de bază a sintezei structurii sistemului de conducere automată și este numită *metoda compensării* inerției obiectului de reglare [1, 3, 4].

În practică problema sintezei sistemului se soluționează parțial cu compensarea parametrică a influenței a unei-două cele mai mari constante de timp ale obiectului de reglare.

Realizarea practică a structurii ideale a sistemului (fig. 2.1, b) cu utilizarea metodei dinamice de compensare a inerției obietului de reglare este însoţită de mai multe probleme tehnice care nu pot fi rezolvate complet: imposibilitatea realizării modelului invers al obiectului, datorită existenței operațiilor de derivare ideală; modelul invers posedă inerție; regulatorul cu reacție inversă pozitivă structural este instabil sau are un coeficient de transfer $k_p = \infty$, care conduce la irealizarea regulatorului.

Se formulează principiul fundamental structural-parametric de optimizare a sistemelor de conducere automată cu reacţie negativă:

Algoritmul de conducere (regulatorul) trebuie să fie un element dinamic cu funcția de transfer, egală sau aproximată cu inversa funcției de transfer a obiectului de reglare.

Pentru sinteza algoritmului de conducere este necesar de a cunoaște cum fiecare componentă din structura algoritmului influențează asupra stabilității și performanțelor sistemului de reglare automată.

2.2 Legile de reglare tipice

În practica automatizărilor industriale în structurile sistemului automat cu unul sau mai multe grade de libertate, sunt largă utilizare legile de reglare convenționale și neconvenționale. Legile de reglare (regulatoarele) tipice, care se construiesc pe baza elementelor dinamice tipice: elementul ideal sau proporțional (P) – algoritmul P, elementul integrator (I) – algoritmul I, elementul ideal derivativ (D) – algoritmul D și combinația acestora: algoritmul PD, algoritmul PI, algoritmul ID, algoritmul PID și algoritmi mai complexi PIDD etc. Cei mai larg utilizați în industrie sunt algoritmii de reglare de tipul P, PI, PD, PID [1, 4, 15,20].

Structura clasică a sistemului de reglare automată cu reacție negativă unitară cu un grad de libertate se dă în fig. 2.3, alcătuită din regulator (R) conectat pe canalul direct și înseriat cu partea fixată (PF) ce este conexiunea serie a ansamblului din elementul de execuție-instalația tehnologică (procesul industrial)-traductorul. Semnificațiile din structura sistemului sunt: $r(t)$ este semnalul de referință, $\varepsilon(t) = r(t) - y(t)$ – eroarea sistemului, $u(t)$ – mărimea de reglare (conducere), $y(t)$ – mărimea de ieșire a sistemului, $p(t)$ – perturbația [4, 17].

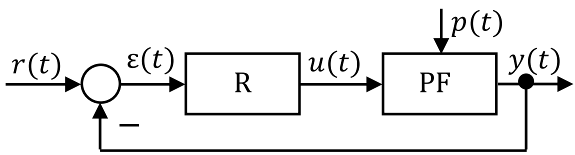

Fig. 2.3. Schema funcțională a sistemului de regare automată

Structura standard a algoritmului PID în conexiune paralelă se prezintă în fig. 2.4. În continuare se descriu legile de reglare tipice.

Modelele matematice ale algoritmilor (legilor) de reglare se dau în forma ecuațiilor diferențiale și funcțiilor de transfer.

Algoritmul de reglare cu acțiune *proporțională-regulatorul* P:

$$u_p(t) = k_p \varepsilon(t), \tag{2.6}$$

$$H_P(s) = k_p. \tag{2.7}$$

Pentru intrare treaptă unitară $\varepsilon(t) = 1(t)$ răspunsul regulatorului este o treaptă cu amplitudinea egală cu coeficientul k_p (fig. 2.5, a).

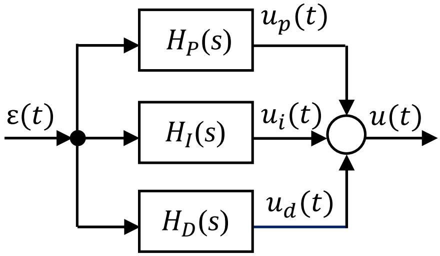

Fig. 2.4. Structura regulatorului PID

Avantajul acestui regulator este rapiditatea ideală, iar *dezavantajul* are eroarea în regim staţionar diferită de zero și este numit regulator static. Se foloseşte banda proporțională (BP) pentru a descrie acțiunea proporțională:

$$BP(\%) = \frac{100\%}{k_p}.$$

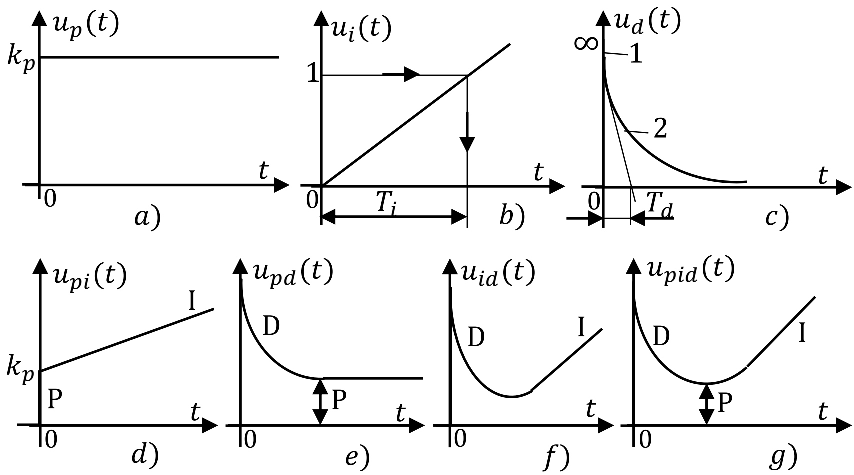

Fig. 2.5. Răspunsurile indiciale ale algoritmilor de reglare tipice

Algoritmul de reglare cu acțiune *integrativă-regulatorul* I:

$$u_i(t) = \frac{1}{T_i}\int_0^{\infty} \varepsilon(t)dt, \tag{2.8}$$

$$H_I(s) = \frac{1}{T_i s} = \frac{k_i}{s}, k_i = \frac{1}{T_i}. \quad (2.9)$$

Avantajul algoritmului de reglare are eroarea egală cu zero și este un regulator astatic, iar *dezavantajul* – nu are rapiditate. Răspunsul indicial se dă în fig. 2.5, b și este o dreaptă trasată din origine cu unghiul α în raport cu axa absciselor. Unghiul poate varia $\alpha = 0 \cdots 90°$, iar constanta de timp de intgegrare se modifică $T_i = 0 \cdots \infty$ și $k_i = \infty \cdots 0$.

Algoritmul de reglare cu acțiune *derivativă-regulatorul* D:

$$u_d(t) = T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt}, \quad (2.10)$$

$$H_D(s) = T_d s = k_d s. \quad (2.11)$$

Acest algoritm de reglare nu se realizează, dar este un model ideal. Răspunsul indicial se dă în fig. 2.5, c, curba 1.

În practică se realizează algoritmul *real derivativ* (*cu filtrare*) DF:

$$T_p \frac{du(t)}{dt} + u_d(t) = T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt}, \quad (2.12)$$

$$H_D(s) = \frac{T_d s}{T_f s+1} = T_d s \frac{1}{T_f s+1}, \quad (2.13)$$

care este o conexiune serie a elementului ideal derivativ cu un element de filtrare de ordinul unu, iar T_f este constanta de timp de filtrare care se calculează după relația: $T_f \approx \alpha T_d = (0.1 \cdots 0.125)T_d$.

Elementul de filtrare asigură realizabilitatea fizică a algoritmului derivativ şi atenuează efectul acesteia asupra semnalelor de tip zgomot.

Răspunsul indicial se dă în fig. 2.5, c, alura 2.

Algoritmul de reglare cu acțiune *proporțională–integrativă* PI:

$$u_{pi}(t) = k_p \varepsilon(t) + \frac{1}{T_i}\int_0^\infty \varepsilon(t)dt, \quad (2.14)$$

$$H_{PI}(s) = k_p + \frac{1}{T_i s} = \frac{k_p T_i s+1}{T_i s} = k_p + \frac{k_i}{s} = \frac{k_p s+k_i}{s}, \quad (2.15)$$

unde $k_i = 1/T_i$, s^{-1}.

Răspunsul indicial se dă în fig. 2.5, d. Pentru determinarea lui T_i se dublează valoarea copmonentei proporționale $u_{pi}(t) = 2k_p$.

Algoritmul de reglare cu acțiune *proporțională–derivativă* PD:

$$u_{pd}(t) = k_p\varepsilon(t) + T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt}, \quad (2.16)$$

$$H_{PD}(s) = k_p + T_d s. \quad (2.17)$$

Răspunsul indicial se dă în fig. 2.3, e.

Algoritmul de reglare cu acțiune *integrală–derivativă* ID:

$$u_{id}(t) = \frac{1}{T_i}\int_0^{\infty} \varepsilon(t)dt + T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt}, \quad (2.18)$$

$$H_{ID}(s) = \frac{1}{T_i s} + T_d s_i = \frac{k_i}{s} + k_d s. \quad (2.19)$$

Răspunsul indicial se dă în fig. 2.5, f.

Algoritmul de reglare cu acțiune *proporțională–integrativă–derivativă* PID:

$$u_{pid}(t) = k_p\varepsilon(t) + \frac{1}{T_i}\int_0^{\infty} \varepsilon(t)dt + T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt}, \quad (2.20)$$

$$H_{PID}(s) = k_p + \frac{1}{T_i s} + T_d s = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s = \frac{k_d s^2 + k_p s + k_i}{s}. \quad (2.21)$$

Răspunsul indicial se dă în fig. 2.3, g.

În relațiile de mai sus coeficienții k_p, T_i, k_i, T_d, k_d - sunt parametrii de acord ai regulatorului de tipul PID cu componenta proporționala P, integrativă I și derivativă D.

În algoritmii descriși, în care este inclusă componenta ideală derivativă D, aceasta se realizează ca componentă reală derivativă.

Algoritmul PID (2.21) poate fi descris și în forma cu f.d.t.:

$$H_{PID}(s) = k_p(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s) = k_p(1 + \frac{k_i}{s} + k_d s), \quad (2.22)$$

unde k_p este coeficientul de proporţionalitate sau parametrul de acord al regulatorului, $k_i = 1/k_p T_i$ – coeficientul de integrare cu dimensiunea s^{-1}, $k_d = T_d/k_p$ – coeficientul de derivare cu dimensiunea s.

Se utilizează și algoritmul PID ca conexiune serie din componenta P, algoritmul PI și componenta derivativă cu filtrare.

$$H_{PID}(s) = k_p(1 + \frac{1}{T_i s})\frac{T_d s + 1}{T_f s + 1}. \quad (2.23)$$

2.3 Algoritmul de reglare proporțional-derivativ cu temporizare de ordinul unu

Evoluția algoritmului de reglare proporțional-derivativ cu temporizare (PDT1) se descrie cu elementul avans-întârziere de ordinul unu modelat cu f.d.t. [4, 16, 20]:

$$H_R(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{k_r(T_d s+1)}{T_f s+1}. \quad (2.24)$$

În funcţie de valoarea raportului constantelor de timp T_d/T_f se disting trei situații:

1. Dacă $T_d > T_f$, atunci efectul de anticipare (derivare) este mai puternic și regulatorul este predominant derivativ.

2. Dacă $T_d > T_f$, atunci efectul de întârziere este mai puternic și regulatorul este predominant cu întârziere-derivativ.

3. Dacă $T_d = T_f$, atunci efectul de anticipare (derivare) compensează efectul întârzierii și regulatorul este cu acţiune proporțională.

Algoritmul PDT1 are un pol $p_1 = -1/T_f$ și un zerou $p_1 =$ $= -1/T_d$, ceea ce va conduce în răspunsul indicial la saltul de la momentul inițial $u_{0+} = k_r T_d/T_f$.

Lipsa componentei integratoare conduce ca cerinţele de eroarea de reglare nulă și de rejecție a efectelor unor perturbații constante să nu mai fie asigurate. Acest efect poate fi un avantaj care face ca aceste regulatoare să fie utilizate frecvent, de exemplu, în cazul sistemelor cuplate prin ieșire, câ nd prezența componentei integratoare este deranjantă (grupuri electroenergetice cuplate la sistemul energetic, sisteme de acționare cu mai multe motoare electrice etc.).

Din alte considerente, există situații în care componenta integratoare este în elementul de execuție (EE-I) și ansamblul regulatorul PDT1+EE-I are o comportare echivalentă cu cea a unui regulator PI-T1.

Recomandările privind utilizarea regulatorului PDT1 cu $T_d > T_f$:

1. Se impune eroarea staționară $\varepsilon \neq 0$ când sistemul se cuplează prin ieșire sau sisteme cu ieșire comună.

2. Când regulatorul PDT1 cu f.d.t. $H_R(s)$ este înseriat de un EE cu f.d.t. $H_E(s)$ cu evoluție integratoare și descris de funcția de transfer:

$$H_{RE}(s) = H_R(s)H_E(s) = \frac{k_r(T_d s+1)}{T_f s+1}\frac{k_E}{s} = \frac{k(T_d s+1)}{s(T_f s+1)},$$

unde $k = k_r k_E$ este coeficientul echivalent al regulatorului.

3. Procesul conţine o componentă integratoare și eroarea staționară în sistem este funcţie de locul de acţiune al perturbaţiei constante.

4. În sistemul cu procesul cu o constantă mare de timp T_1 se solicită compensarea acesteia prin alegerea $T_d = T_1$.

Observație. O restricţie de utilizare a regulatorului PDT1 se poate referi la procesele conduse cu variații pronunțate ale intrării, când componenta derivativă amplifică efectele acetor variații.

Recomandările privind utilizarea regulatorului PDT1 cu $T_d < T_f$:

1. Se utilizează în cazurile când procesul este greu stabilizabil datoriă unui zerou pozitiv (fază neminimă) (regulatoarelor de turație-putere destinate hidrogeneratoarelor, care pot fi modelate printr-o comportare a regulatorului PDT1.

2. Dacă $T_f \gg T_d$, atunci regulatorul PDT1 este denumit regulatorul PI real.

2.4 Analiza influenței componentelor PID asupra stabilităţii și calităţii sistemului automat

Se consideră funcția de transfer $H_{PF}(s)$ a părții fixate (fig. 2.3):

$$H_{PF}(s) = \frac{1}{T^2s^2+2\xi Ts+1}, \tag{2.25}$$

unde coeficientul de transfer este unitar, T – constanta de timp, ξ – gradul de amortizare.

Pentru sistemul cu obiectul (2.25) și legile de reglare tipice P, PI, PD și PID se analizează cum se modifică stabilitatea și calitatea sistemului când la intrare acționează semnalul treaptă unitară.

Algoritmul P. Pentru sistemul cu modelul obiectului (2.25) și cu regulatorul P cu f.d.t. (2.7) se determină f.d.t. a sistemului închis:

$$H_0(s) = \frac{H_P(s)H_{PF}(s)}{1+H_P(s)H_{PF}(s)} = \frac{k_p}{T^2s^2+2\xi Ts+1+k_p}.$$

Ecuația caracteristică a sistemului:

$$T^2s^2 + 2\xi Ts + 1 + k_p = 0$$

are rădăcinile:

$$p_{1,2} = \frac{-2\xi T \pm \sqrt{(2\xi T)^2 - 4T^2(1+k_p)}}{2T^2} = \frac{-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - (1+k_p)}}{T} = -\alpha \pm j\omega,$$

unde $\alpha = \xi/T$, $\omega = \sqrt{\left(1 + k_p\right) - \xi^2}\,/T$.

Dacă obiectul este oscilant amortizat ($0 < \xi < 1$), atunci sistemul închis pentru $k_p > 0$ tot este oscilant amortizat cu gradul de oscilanță:

$$\mu = \frac{\sqrt{\left(1+k_p\right) - \xi^2}}{\xi}$$

și cu creșterea lui k_p oscilamța crește.

Dacă obiectul este de ordinul doi ($\xi \geq 1$) și sistemul închis va fi cu inerție de ordinul doi pentru $k_p \leq \xi^2 - 1$, iar pentru $k_p \geq \xi^2 - 1$ – oscilant amortizat.

Sistemul închis este static (regulatorul este static) și eroarea staționară se determină:

$$\varepsilon = \frac{1}{1+k_p},$$

care se reduce cu creşterea lui k_p.

Când $k_p = \xi^2 - 1$ cu creşterea lui k_p crește oscilanța μ.

Concluzii: cu creșterea lui k_p regimul staționar este mai calitativ ($\varepsilon \to 0$), dar calitatea regimului tranzitoriu se reduce fiindcă crește μ.

Algoritmul PI. Pentru sistemul cu modelul obiectului (2.25) și cu regulatorul PI cu f.d.t. (2.15) se determină f.d.t. a sistemului închis:

$$H_0(s) = \frac{H_{PI}(s)H_{PF}(s)}{1+H_{PI}(s)H_{PF}(s)} = \frac{k_p s + k_i}{T^2 s^3 + 2\xi T s^2 + s + k_p s + k_i}.$$

Ecuația caracteristică a sistemului este cu coeficienţii pozitivi:

$$T^2 s^3 + 2\xi T s^2 + s\left(1 + k_p\right) + k_i = 0.$$

Determinantul Hurwitz de ordinul doi este:

$$\Delta_2 = 2\xi T\left(1 + k_p\right) - T^2 k_i$$

și când $k_i < \frac{2\xi}{T}\left(1 + k_p\right)$ determinantul $\Delta_2 > 0$ sistemul este astati stabil și eroarea $\varepsilon \to 0$, iar când $k_i \geq \frac{2\xi}{T}\left(1 + k_p\right)$ determinantul $\Delta_2 \leq 0$ sistemul este instabil.

Cu creșterea lui k_i sistemul tinde către instabilitate și se reduce marginea de stabilitate și crește oscilanța sistemului.

Concluzii: includerea componentei integrale în legea de conducere sistemul devine astatic și eroarea $\varepsilon \to 0$ în regim staționar și cu creșterea lui k_i se reduce eroarea de viteză $\varepsilon_v = \frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} s\, H_d(s)} = \frac{1}{k_v}$, unde $k_v = \lim\limits_{s\to 0} s\, H_d(s)$ este coeficientul erorii de viteză, iar $H_d(s)$ este funcția de transfer a sistemului deschis.

Astfel, se constată că se reduc performanțele sistemului în regimul tranzitoriu și de la o valoare a lui k_i sistemul devine instabil.

Algoritmul PD. Pentru sistemul cu modelul obiectului (2.25) și cu regulatorul PD cu f.d.t. (2.17) se determină f.d.t. a sistemului închis:

$$H_0(s) = \frac{H_{PD}(s)H_{PF}(s)}{1+H_{PD}(s)H_{PF}(s)} = \frac{k_p+k_d s}{T^2 s^2+(2\xi T+k_d)s+1+k_p}.$$

Ecuația caracteristică a sistemului este:

$$T^2 s^2 + (2\xi T + k_d)s + 1 + k_p = 0,$$

care are rădăcinile:

$$p_{1,2} = \frac{-(2\xi T+k_d) \pm \sqrt{(2\xi T+k_d)^2 - 4T^2(1+k_p)}}{2T^2}.$$

Când expresia de sub radical este nenegativă:

$$(2\xi T + k_d)^2 - 4T^2(1 + k_p) \geq 0$$

sau

$$k_d \geq 2T(\sqrt{1 + k_p} - \xi), \qquad (*)$$

atunci sistemul automat este cu inerție de ordinul doi, iar când

$$k_d < 2T(\sqrt{1 + k_p} - \xi) \qquad (**)$$

sistemul este oscilant amortizat și gradul de stabilitate și oscilanța se exprimă cu relațiile:

$$\eta = \frac{2\xi T + k_d}{2T^2},\ \mu = \sqrt{\frac{4T^2(1+k_p)}{(2\xi T + k_d)^2} - 1}.$$

La condiția (∗∗) cu cteșterea lui k_d gradul de stabilitate η crește, și oscilanța μ se reduce, iar la condiția (∗) cu cteșterea lui k_d gradul de stabilitate η se reduce și oscilanța μ crește.

Sistemul este static (regulatorul static) și în regimul staționar funcţionează cu eroarea determinată de relaţia:

$$\varepsilon = \frac{1}{1+k_p}.$$

Concluzii: includerea componentei derivative în legea de conducere crește calitatea sistemului în regim tranzitoriu, iar în regim staționar funcționează cu eroare $\varepsilon \neq 0$. Creșterea lui $k_d \to \infty$ nu deteorează regimul sistemului.

Algoritmul PID. Pentru sistemul cu modelul obiectului (2.25) și cu regulatorul PID cu f.d.t. (2.21) se determină f.d.t. a sistemului închis:

$$H_0(s) = \frac{H_{PID}(s)H_{PF}(s)}{1+H_{PID}(s)H_{PF}(s)} = \frac{k_d s^2 + k_p s + k_i}{T^2 s^3 + s^2(2\xi T s^2 + k_d) + s(1+k_p) + k_i}.$$

Ecuația caracteristică a sistemului este cu coeficienţii pozitivi:

$$T^2 s^3 + s^2(2\xi T s^2 + k_d) + s(1 + k_p) + k_i = 0.$$

Determinantul Hurwitz de ordinul doi este:

$$\Delta_2 = (2\xi T s^2 + k_d)\big(1 + k_p\big) - T^2 k_i,$$

care va fi pozitiv, dacă se alege corect parametrul k_d.

Astfel, introducând în algoritmul de conducere componenta integrală, sistemul stabil devine instabil și, selectând parametrul copmonentei derivative k_d, sistemul instabil se stabilizează.

Concluziile expuse despre influența componentelor derivative și integrale asupra stabilității și calității sistemului cu regulatoarele PI și PD sunt valabile și pentru algoritmul PID.

Concluzii: 1. La introducerea componentei integrale în legea de reglare, sistemul devine astatic și sistemul are calitate, dar are o influență destabilizatoare și se reduce regimul tranzitoriu al sistemului.

2. Introducerea componentei derivative în algoritmul de reglare stabilizează sistemul și în regim staționar sistemul automat funcţionează cu eroare, dar ridică performanțele sistemului în regim tranzitoriu.

Aceste concluzii pot fi generalizate și pentru modele de obiecte de reglare de ordin mai mare ca doi.

2.5 Algoritmi PID modificați cu două grade de libertate

Se utilizează și algoritmi PID cu filtrare, care prelucrează diferit eroarea, ieșirea măsurată și referința - numiți algoritmi PID modificați [1- - 4, 5].

În figura 2.6 se dă structura sistemului automat cu regulatorul PI-D în raport cu referința $r(s)$ și reacția $y_n(s)$, care se descrie de relația:

$$u(s) = k_p\left(1+\frac{1}{T_i s}\right)r(s) - k_p\left(1+\frac{1}{T_i s}+T_d s\right)y_n(s). \qquad (2.26)$$

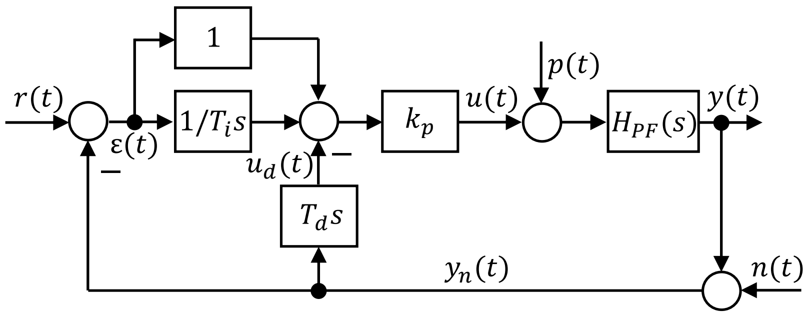

Fig. 2.6. Structura sistemului cu regulatorul PI-D

Structura regulatorului (2.21) nu conține componenta derivativă D pe calea directă și, la modificarea bruscă a semnalelor de referință, permite evitarea apariției unor șocuri în instalația tehnologică.

În acest caz componenta derivativă cu filtrare este plasată pe calea de reacție și se descrie cu relația:

$$u_d(s) = \frac{T_d s}{T_f s+1} y_n(s). \qquad (2.27)$$

În cazul când se evidențiază eroarea sistemului algoritmul PI-DF este de forma:

$$u(s) = k_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)\varepsilon(s) - k_p\frac{T_d s}{T_f s+1}y_n(s) =$$

$$= k_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)\left(r(s) - y_n(s)\right) - k_p\frac{T_d s}{T_f s+1}y_n(s) =$$

$$= k_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)r(s) - k_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{T_f s+1}s\right)y_n(s), \quad (2.28)$$

în care prima componentă prelucrează semnalul referinţei $r(s)$, iar a două componentă prelucrează semnalul reacţiei $y_n(s)$.

Funcția de transfer a sistemului automat în raport cu perturbația $p(t)$ (când $r(t) = 0, n(t) = 0$), în care se asigură rejecția perturbațiilor în regim staționar este:

$$H_{0p}(s) = \frac{H_{PF}(s)}{1+k_p H_{PF}(s)\left(1+\frac{1}{T_i s}+T_d s\right)}. \quad (2.29)$$

Pentru evitarea apariției unor salturi ale mărimii de reglare $u(t)$ la modificarea semnalului treaptă a referinței, care conduce în regim de saturație elementul de execuție, se utilizează o altă structură de algoritm de tipul I-PD (fig. 2.7).

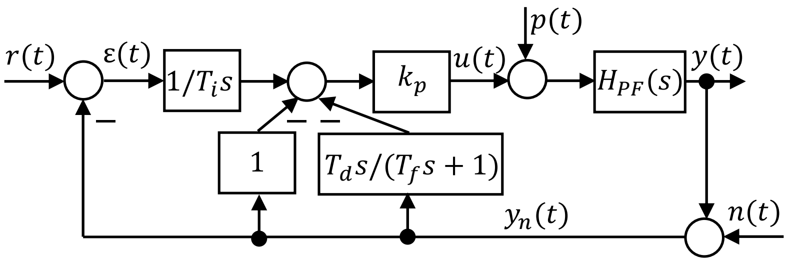

Fig. 2.7. Structura sistemului cu regulatorul I-PD

În cazul când pe calea directă se menține componenta integrală I, care asigură comportarea dorită a sistemului în regim staționar, mărimea de reglare $u(s)$ se descrie cu relaţia:

$$u(s) = k_p\frac{1}{T_i s}r(s) - k_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{T_f s+1}\right)y_n(s). \quad (2.32)$$

Funcția de transfer a sistemului închis în raport cu referința $r(t)$

când $p(t) = 0$ și $n(t) = 0$ este:

$$H_0(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{1}{T_i s} \frac{k_p H_{PF}(s)}{1+k_p H_{PF}(s)(1+\frac{1}{T_i s}+T_d s)}. \tag{2.33}$$

Funcția de transfer a sistemului automat în raport cu perturbația $p(t)$ (când $r(t) = 0, n(t) = 0$) este:

$$H_{0p}(s) = \frac{y(s)}{p(s)} = \frac{H_{PF}(s)}{1+k_p H_{PF}(s)(1+\frac{1}{T_i s}+T_d s)}, \tag{2.34}$$

care este aceiași ca și pentru regulatoarele PI-D și I-PD.

Se constată că structurile de reglare cu regulatoare PI-D și I-PD sunt structuri de sisteme automate cu două grade de libertate, în care referința și perturbaţia sunt prelucrate după legi diferite.

Pentru structurile de reglare cu două grade de libertate, performanțele sistemului se obțin la valori dorite prin acordarea parametrilor de acord pentru fiecare algoritm de reglare din structura sistemului automat.

2.6 Structura regulatorului real

Structura regulatorului real se dă în fig. 2.8, în care $H_A(s)$ este f.d.t. a elementului de amplificare, $H_E(s)$ – f.d.t. a elementului de execuţie, $H_r(s)$ – f.d.t. a elementului de corecţie în reacție inversă negativă.

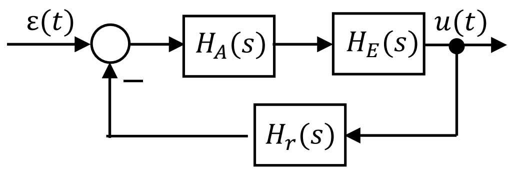

Fig. 2.8. Schema structurală a regulatorului real

Pentru realizarea algoritmului ideal de reglare se alege structura respectivă de realizare și, în baza proprietăților elementelor componente ale structurii, se calculează proprietățile structurii reale a regulatorului.

Funcția de transfer a elementului de corecție se alege astfel ca să se realizeze algoritmul de reglare respectiv, iar ordinul modelului elementului de corecție nu va fi mai mare de ordinul doi. Elementul de corecție se conectează în reacție în diverse variante: la amplificator, la elementul de execuție sau la amplificator și elementul de execuție.

Structura unui regulator real se descrie de funcția de transfer:

$$H_{RR}(s) = H_{RI}(s)H_b(s), \tag{2.35}$$

unde $H_{RR}(s)$ este f.d.t. a regulatorului real, $H_{RI}(s)$ – f.d.t. a algoritmului de reglare ideal (regulatorul ideal) şi $H_b(s)$ – f.d.t. a balastului (eroarea la realizarea algoritmului de reglare ideal).

Pentru structura regulatorului real din fig. 2.8 cu f.d.t. ale elementelor: amplificatorul cu $H_A(s)$, elementul de execuție cu $H_E(s)$, canalul de reacţie cu $H_r(s)$, f.d.t. echivalentă a structurii închise $H_e(s)$ la condiția când $H_A(s)H_E(s) \gg 1$ se descrie în forma:

$$H_e(s) = \frac{u(s)}{\varepsilon(s)} = \frac{H_A(s)H_E(s)}{1 \mp H_A(s)H_E(s)H_r(s)} = \frac{1}{\frac{1}{H_A(s)H_E(s)} \mp H_r(s)} \approx \mp \frac{1}{H_r(s)}. \tag{2.36}$$

Rezultă f.d.t. echivalentă a acestei conexiuni care nu depinde de proprietățile dinamice ale canalului direct, dar depinde numai de proprietățile dinamice ale canalului de reacție. Această idee se utilizează în practica construirii structurilor de realizare a legilor de reglare tipice și, în general, pentru stabilizarea și ridicarea performanțelor sistemului.

Exemplul 2.1. Se dau funcțiile de transfer ale elementelor idealizate ale amplificatorului cu factorul de amplificare k_A și elementului de execuție cu constanta de timp T_E:

$$H_A(s) = k_A,\ H_E(s) = \frac{1}{T_E s}.$$

Se cere să se realizeze algotirmul proporțional cu parametrul de acord k_p.

*Soluționar*e. Se alege reacția rigidă realizată de elementul ideal cu f.d.t. cu coeficientul de transfer k_r:

$$H_r(s) = k_r.$$

Pentru structura regulatorului real din fig. 2.8 cu funcțiile de transfer ale elementelor determinate, se calculează funcția de transfer $H_{RR}(s)$ a regulatorului real:

$$H_{RR}(s) = H_{RI}(s)H_b(s) = \frac{H_A(s)H_E(s)}{1 + H_A(s)H_E(s)H_r(s)} = \frac{k_A/k_A k_r}{\frac{T_E}{k_A k_r}s + \frac{k_A k_r}{k_A k_r}} = k_p \frac{1}{T_b s + 1},$$

care este o conexiune serie a regulatorului P ideal cu f.d.t. $H_{RI}(s) = k_p = 1/k_r$ cu parametrul de acord realizat prin inversarea f.d.t. a reacției și $H_b(s) = 1/(T_b s + 1)$ - f.d.t. a balastului (a erorii de realizare), care este un element cu inerție de ordinul unu cu coeficientul de transfer unitar $k_b = 1$ și constanta de timp $T_b = T_E/k_A k_r$.■

Exemplul 2.2. Se dau funcțiile de transfer ale elementelor idealizate ale regulatorului PI cu parametrii de acord k_p și k_i, amplificatorului cu factorul de amplificare k_A și elementul de execuție cu constanta de timp T_E:

$$H_{PI}(s) = k_p + \frac{1}{T_i s} = k_p + \frac{k_i}{s},\ H_A(s) = k_A, H_E(s) = \frac{1}{T_E s}.$$

Se cere să se realizeze algotirmul PI cu parametrii de acord k_p și k_i.

*Soluționar*e. În funcţie de modul de conectare a elementului din reacţie (cu proprietăţile acestuia alese respectiv) la elementele amplificatorului sau elementului de execuţie, se obţin patru structuri de realizare a algoritmului PI. Se analizează strutura regulatorului real (fig. 2.8).

Funcția de transfer $H_{RR}(s)$ a regulatorului real se descrie de relația:

$$H_{PI}(s) = \frac{1}{H_r(s)},$$

din care se determină f.d.t. a elementului din reacţie:

$$H_r(s) = \frac{1}{H_{PI}(s)} = \frac{1}{k_p + \frac{1}{T_i s}} = \frac{T_i s}{k_p T_i s + 1} = \frac{k T_d s}{T_f s + 1},$$

unde $k = 1, T_d = T_i, T_f = k_p T_i$ și elemental din reacție este un element real derivator.

Funcția de transfer a regulatorului real se descrie de relația:

$$H_{RR}(s) = \frac{H_A(s) H_A(s)}{1 + H_A(s) H_A(s) H_r(s)} = \frac{k_A \frac{1}{T_E s}}{1 + k_A \frac{1}{T_E s} \frac{T_i s}{k_p T_i s + 1}} = \frac{k}{s} \frac{T_d s + 1}{T_f s + 1},$$

care este o conexiune serie a elementului integrator cu un element real derivator cu forțare cu parametrii: $k = k_A/(k_A T_i + T_E)$ – coeficient de transfer, $T_d = k_p T_i$ - constanta de timp derivativă, $T_f = k_p T_i T_E/(k_A T_i + T_E)$ - constanta de timp de filtrare.■

Exemplul 2.3. Se dau funcțiile de transfer ale elementelor idealizate ale regulatorului PID cu parametrii de acord k_p, k_i, k_d, amplificatorul cu factorul de amplificare k_A și elementul de execuție cu constanta de timp T_E:

$$H_{PID}(s) = k_p + \frac{1}{T_i s} + T_d s = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s,$$

$$H_A(s) = k_A, H_E(s) = \frac{1}{T_E s}.$$

Se cere să se realizeze algotirmul PID cu parametrii de acord k_p, k_i și k_d.

*Soluționar*e. În funcţie de modul de conectare a elementului din reacţie (cu proprietăţile acestuia alese respectiv) la elementele amplificatorului sau elementului de execuţie, se obţin trei structuri de realizare a algoritmului PID. Se analizează strutura regulatorului real (fig. 2.8).

Funcția de transfer $H_{PID}(s)$ a regulatorului real se descrie de relația:

$$H_{PID}(s) = \frac{1}{H_r(s)},$$

din care se determină f.d.t. a elementului din reacţie este un element real derivator:

$$H_r(s) = \frac{1}{H_{PID}(s)} = \frac{1}{k_p+\frac{1}{T_i s}+T_d s} = \frac{T_i s}{T_d T_i s^2+k_p T_i s+1} = \frac{Q(s)}{P(s)}.$$

Fiindcă răspunsul indicial al algoritmului ideal PID nu este oscilant, atunci numitorul f.d.t. $P(s)$ se prezintă ca un element cu inerţie de ordinul doi de forma:

$$P(s) = T_d T_i s^2 + k_p T_i s + 1 = (T_1 s + 1)(T_2 s + 1),$$

unde constantele de timp T_1 şi T_2 se determină din relaţiile:

$$T_d T_i = T_1 T_2,\ k_p T_i = T_1 + T_2,\ T_1 = \frac{T_D T_I}{T_2},\ T_2 = k_p T_i - T_1 = k_p T_i - \frac{T_d T_i}{T_2}.$$

Din ultima expresie, după unele transformări, se obține o ecuație algebrică de gradul doi pe necunoscuta T_2:

$$T_2^2 - k_p T_i T_2 + T_d T_i = 0,\ \ T_{21,22} = \frac{k_p T_i \pm \sqrt{(k_p T_i)^2 - 4T_d T_i}}{2},$$

care se soluționează și se obțin valorle lui T_2 și se calculează valoarea lui T_1 din relația:

$$T_1 = \frac{T_D T_I}{T_2}.$$

Funcția de transfer a regulatorului real se descrie de relația:

$$H_{RR}(s) = \frac{H_A(s)H_E(s)}{1+H_A(s)H_E(s)H_r(s)} = \frac{k_A\frac{1}{T_E s}}{1+k_A\frac{1}{T_E s}\frac{T_i s}{T_d T_i s^2+k_p T_i s+1}} = \frac{k}{s}\frac{T_d T_i s^2+k_p T_i s+1}{T_3 s^2+T_4 s+1},$$

care este o conexiune serie a elementului integrator cu un element real derivator de ordinul doi cu forțare, unde $k = k_A/(k_A T_i + T_E)$ este coeficientul de transfer, $T_3 = T_d T_i/(k_A T_i + T_E)$ - constanta de timp derivativă, $T_4 = k_p T_i/(k_A T_i + T_E)$ - constanta de timp de filtrare.■

2.7 Relațiile modelului matematic al sistemului automat de ordinul doi și performanțele lui

Pornind de la modelul matematic al procesului condus și performanțele impuse sistemului proiectat, suprareglarea σ_i sau gradul de amortizare și timpul de reglare t_{ri}, se construiește funcţia de transfer $H_0(s)$ a sistemului automat închis, care prezintă un element dinamic oscilant amortizat cu coeficientul de transfer unitar dată de relația [1, 4]:

$$H_0(s) = \frac{1}{T^2s^2+2\xi Ts+1} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} = \frac{p_1p_2}{(s+p_1)(s+p_2)}, \tag{2.37}$$

unde $\omega_n = 1/T$ este pulsaţia naturală a sistemului, ξ - gradul de amortizare, care se modifică în limitele $0 < \xi < 1$. Soluţionând ecuaţia caracteristică, se obțin rădăcinile p_1, p_2 care sunt polii f.d.t. $H_0(s)$:

$$p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -\xi/T \pm j\sqrt{1-\xi^2}/T,$$

$$|p_{1,2}| = \sqrt{\xi^2\omega_n^2 + \omega_n^2(1-\xi^2)} = \omega_n, \; p_1p_2 = \omega_n^2. \tag{2.38}$$

Polii p_1, p_2 se numesc polii dominanţi deoarece s-au alocat astfel ca să satisfacă performanţele (σ_i, t_{ri}) sistemului automat închis.

Răspunsul indicial al sistemului se descrie cu relația:

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\, t + \varphi\right), \; t \geq 0, \tag{2.39}$$

unde $\varphi = \arccos\xi$.

Valoarea maximă a răspunsului indicial și a suprareglării se descriu de relațiile:

$$y_{\max}(t) = 1 + e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}, \; \sigma = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}. \tag{2.40}$$

Satisfacerea performanțelor impuse de suprareglare sunt:

$$\xi \leq \xi_i, \; \sigma_i \leq e^{-\pi\xi_i/\sqrt{1-\xi_i^2}}, \; \varphi \leq \varphi_i, \; \varphi_i = \arccos\xi_i.$$

La valoarea suprareglării $\sigma \leq 20\ \%$ a sistemului, gradul de amortizare corespunde $\xi = 0.5 \cdots 0.9$. La valoarea gradului de amortizare $\xi = 0.707$ sistemul închis are cea mai bună dinamică.

Durata regimului tranzitoriu la eroarea $\varepsilon = 0.05y_{st}$ se determină:

$$|\varepsilon(t)| = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\, t + \varphi\right) \leq \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} = 0.05. \tag{2.41}$$

Soluționând (2.41) se obține valoarea timpului de reglare:

$$t_r = \frac{\ln 0.05\sqrt{1-\xi^2}}{-\xi\omega_n} \approx \frac{4}{\xi\omega_n},\ \xi\omega_n \ge \frac{4}{t_{rimp}},\ \omega_n \ge \frac{4}{\xi t_{rimp}}. \qquad (2.42)$$

Dacă $\omega_n \ge \omega_{n\mathrm{i}} \approx \frac{4}{\xi t_{r\mathrm{i}}}$, atunci $t_r = t_{r\mathrm{i}} = ct.$

Dacă se impune ca eroarea staționară $\varepsilon(t) = 0$ când la intrare este aplicat semnalul treaptă unitară, atunci f.d.t. $H_0(0) = 1$ a sistemului închis, ceea ce conduce la condiţia $p_1 p_2 = \omega_n^2$ și sistemul deschis este o conexiune serie a elementului integrator cu elementul cu inerție de ordinul unu, deci va avea un pol în origine:

$$H_d(0) = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)} = \frac{1}{s}\frac{k}{Ts+1},$$

unde $k = \omega_n/2\xi$ este coeficientul de transfer și $T = 1/2\xi\omega_n$ – constanta de timp ale sistemului deschis.

Exemplul 2.4. Se impun performanţele sistemului: suprareglarea $\sigma_i = 10$ %, timpul de reglare $t_{ri} = 10$ s, eroarea staţionară $\varepsilon = 0$.

Se cere să se determine funcția de transfer $H_0(s)$ a sistemului închis.

Soluționare. 1. Se calculează gradul de amortizare impus ξ_i din relația:

$$\sigma_i = e^{-\pi\xi_i/\sqrt{1-\xi_i^2}},\ 10 = e^{-\pi\xi_i/\sqrt{1-\xi_i^2}}.$$

Ultima expresie se logaritmează și după unele transformări se obține:

$$\ln 10 = -\frac{3.14\xi_i}{\sqrt{1-\xi_i^2}},\ 2.3026\sqrt{1-\xi_i^2} = -3.14\xi_i,$$

$$5.302(1-\xi_i^2) = (-3.14\xi_i)^2,\ \xi_i^2 = \frac{5.302}{15.1616} = 0.3497 \text{ sau } \xi_i = 0.5914.$$

2. Se calculează pulsația nominală din relația (2.42):

$$\omega_n = \frac{4}{\xi_i t_{ri}} = \frac{4}{0.5914 \cdot 10} = 0.6764\ \mathrm{s}^{-1}$$

și se calculează constanta de timp a sistemului:

$$T = \frac{1}{\omega_n} = \frac{1}{0.6764} = 1.4784 \text{ s.}$$

3. Se determină polii f.d.t. ai sistemului după relația (2.38):

$$p_{1,2} = -\xi_i\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi_i^2} =$$

$$= -0.5914 \cdot 0.6764 \pm j0.6764\sqrt{1-0.3497} = -0.4 \pm j0.5455.$$

4. Se calculează funcția de transfer a sistemului închis:

$$H_0(s) = \frac{1}{T^2s^2+2\xi_i Ts+1} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi_i\omega_{ni}s+\omega_{ni}^2} = \frac{\omega_n^2}{(s-p_1)(s-p_2)} =$$

$$= \frac{\omega_n^2}{(s-(-0.4+j0.5455))(s-(-0.4-j0.5455))} = \frac{0.6764^2}{s^2+2\cdot 0.5914\cdot 0.6764s+0.6764^2} =$$

$$= \frac{1}{1.4784\ {}^2s^2+2\cdot 0.5914\cdot 1.4784s+1} = \frac{1}{2.1857s^2+1.7486s+1} = \frac{1}{T^2s^2+2\xi Ts+1},$$

unde $T^2 = 2.1857$, $2\xi T = 1.7486$.■

Exemplul 2.5. Se impun performanțele sistemului automat: gradul de amortizare $\xi_i = 0.707$, timpul de reglare $t_{ri} = 1$ s și eroarea staţionară $\varepsilon = 0$.

Se cere să se determine polii dominanți și funcția de transfer $H_0(s)$ ai sistemului automat închis.

Soluționare. 1. Se calculează pulsația naturală a sistemului cu relația (2.42):

$$\omega_n = \frac{4}{\xi_i t_{ri}} = \frac{4}{0.707\cdot 1.0} = 5.6577\ \text{s}^{-1}.$$

2. Se determină polii dominanți ai f.d.t. ai sistemului după relația (2.38):

$$p_{1,2} = -\,\xi_i\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi_i^2} =$$

$$= -0.707\cdot 5.6577 \pm j5.6577\sqrt{1-0.4998} = -4 \pm j4.$$

3. Se calculează funcția de transfer a sistemului închis cu polii dominați:

$$H_0(s) = \frac{\omega_n^2}{(s-p_1)(s-p_2)} = \frac{5.6577^2}{(s+4+j4)(s+4-j4)} = \frac{32}{s^2+8s+32}.$$■

2.8 Repartizarea poli-zerouri ai funcției de transfer $H_0(s)$ și a imaginii semnalului $r(s)$

Sistemul automat trebuie să reproducă semnalul de referință cu erori minimale. Pentru a atinge acest scop este necesar ca $p - z$ să fie repartizați în modul următor.

1. Polii f.d.t. $H_0(s)$ să fie alocaţi mai departe de polii imaginii $r(s)$ și valorile lor să nu se suprapună, fiindcă apare rezonanță în sistem.

2. Zerourile f.d.t. $H_0(s)$ să fie repartizate cât mai aproape de polii $r(s)$ – se formează dipolul $p - z$ cu z mai aproape de origine și se reduce componenta y_{st} de la acțiunea semnalului de intrare $r(t)$.

3. Polii-zerourile f.d.t. $H_0(s)$ în raport cu perturbaţia $p(s)$ se

repartizează în aşa mod ca pentru toți polii lui $r(s)$, f.d.t. $H_0(s)$ să aibă aceiaşi valoare: $H(p_1) \approx H(p_2) \approx \cdots \approx \text{const}$ și eroarea $\varepsilon \to \min$.

4. Zerourile lui $H_0(s)$ se repartizează în vecinătatea polilor care sunt mai aproape de axa imaginară și formează dipolul $p - z$, care reduce eroarea staționară $\varepsilon \to \min$.

5. Pentru polii lui $H_0(s)$ alocați cât mai departe de axa imaginară, cu atât mai rapid se stinge componenta liberă $y_l(t)$.

2.9 Problemele proiectării sistemelor automate liniare monovariabile

Se consideră structura convențională a sistemului automat (fig. 2.9) alcătuită din partea fixată cu f.d.t. $H_{PF}(s) = H_P(s)$ şi regulatorul cu f.d.t. $H_R(s)$, iar $r(t)$ este referinţa, $u(t)$ – mărimea de reglare, $y(t)$ – ieşirea sistemului, $n(t)$ – zgomotul de măsură, care infuențează mărimea măsurată $y_n(t) = y(t) + n(t)$, $p(s)$ – perturbaţia, $\varepsilon(t) = r(t) - y_n(t)$ este eroarea sistemului automat [1, 4].

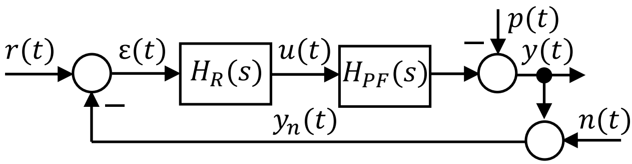

Fig. 2.9. Structura sistemului de reglare automată cu semnal zgomot

Sistemul automat proiectat trebuie să satisfacă cerințele.

1. Sistemul automat să reproducă cât mai precis semnalul de referință și să fie cât mai controlabil, ceea ce impune cerința ca derivata $dy(t)/dr(t)$ să fie mai mare în toată gama de variație a referinței $r(t)$.

2. Sistemul automat să fie cât mai slab influențat de acțiunea perturbației și eroarea sistemului $\varepsilon(t)$, rezultatul acțiunii perturbației, să fie cât mai mică și să fie compensată cât mai rapid. Se cere ca sistemul automat cât mai slab să reacționeze la acțiunea perturbației, deci derivata $dy(t)/dp(t)$ să fie cât mai mică.

Din condițiile formulate rezultă că indicii principali pentru aprecierea performanțelor răspunsului indicial al sistemului automat sunt suprareglajul σ și timpul de reglare t_r.

Proiectarea sistemului se reduce la determinarea f.d.t. $H_R(s)$ a regulatorului (proiectarea regulatorului), astfel ca să aibă comportarea dorită în regim tranzitoriu și staționar în raport cu semnalele exogene referința $r(t)$ și perturbația $p(t)$ precizate respectiv: *stabilitate, reglare asimptotică, precizie, performanțe (cerințe dinamice) și robustețe.*

Cerințele de proiectare formulate în domeniul timpului sau domeniul frecvență este necesar să fie corelate cu incertitudinile cunoașterii modelului obiectului și al perturbațiilor pentru a obține o soluție adecvată problemei de proiectare.

Principalele probleme care trebuie rezolvate sunt următoarele.

1. Determinarea configurației structurii sistemului automat: care semnale sunt măsurate, care elemente de execuție sunt excitate în cazul proceselor cu mai multe intrări și mai multe ieșiri.

2. Determinarea structurii regulatorului: care proprietăți dinamice trebuie incluse în structura regulatorului.

3. Determinarea parametrilor regulatorului.

Mărimea de intrare în regulator (fig. 2.9) este eroarea alterată de zgomot $\varepsilon = r - y - n$.

Transferurile intrare-ieșire de la mărimile externe ale sistemului (fig. 2.9) la mărimea reglată $y(t)$ și, respectiv la mărimea de reglare $u(t)$, se descriu în formă operațională cu relațiile:

$$y(s) = \frac{H_d(s)}{1+H_d(s)}\big(r(s) - n(s)\big) + \frac{1}{1+H_d(s)}p(s), \tag{2.43}$$

$$u(s) = \frac{H_R(s)}{1+H_d(s)}(r(s) - p(s)) - \frac{H_R(s)}{1+H_d(s)}n(s), \tag{2.44}$$

$$\varepsilon(s) = \frac{1}{1+H_d(s)}\big(r(s) - p(s)\big) + \frac{H_d(s)}{1+H_d(s)}n(s), \tag{2.45}$$

unde $H_d(s) = H_R(s)H_{PF}(s)$ este f.d.t. a sistemului deschis, $H_0(s) = = \frac{H_d(s)}{1+H_d(s)}$ – f.d.t. a sistemului închis, $H_\varepsilon(s) = \frac{1}{1+H_d(s)}$ – f.d.t. a erorii sistemului.

F.d.t. ale sistemului închis și a erorii sunt legate prin relația:

$$H_0(s) + H_\varepsilon(s) = 1. \tag{2.46}$$

În structura sistemului analizată mărimea reglată $y(t)$ trebuie să urmărească cât mai fidel mărimea de referință $r(t)$ când asupra sistemului acţionează semnalele perturbante $p(t)$ şi $n(t)$.

Obiectivele de bază ale sistemului *urmărirea referinței* și *rejecția perturbațiilor* pot fi realizate impunând condiții asupra f.d.t. $H_0(s)$ a sistemului și $H_\varepsilon(s)$ a erorii sistemului.

Se menționează că f.d.t. $H_\varepsilon(s)$ reprezintă funcţia de sensibilitate în raport cu variaţia parametrilor modelului obiectului de reglare. Dacă există o variație a parametrilor f.d.t. $\Delta H_P(s)$ a procesului, atunci rezultă și o variație a f.d.t. $\Delta H_d(s)$ a sistemului deschis, şi o variaţie a f.d.t. $\Delta H_0(s)$ a sistemului închis.

Funcția de sensibilitate a sistemului se descrie cu relația:

$$S(s) = \frac{\Delta H_0(s)/H_0(s)}{\Delta H_P(s)/H_P(s)} = \frac{1}{1+H_d(s)} = H_\varepsilon(s), \tag{2.47}$$

iar funcția complementară a sensibilității este:

$$T(s) = \frac{H_d(s)}{1+H_d(s)} = H_0(s). \tag{2.48}$$

Pentru expresiile (2.47)-(2.48) este valabilă relația:

$$S(s) + T(s) = 1. \tag{2.49}$$

Pentru procese de conducere caracterizate de modele cu f.d.t.:

$$H_P(s) = \frac{B_P(s)}{A_P(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}, m \le n \tag{2.50}$$

cu exces de poli-zerouri $e_p = n - m$, se cere un algoritm de reglare de forma:

$$H_R(s) = \frac{Q_R(s)}{P_R(s)} = \frac{q_{n_q} s^{n_q} + q_{n_q-1} s^{n_q-1} + \cdots + q_1 s + q_0}{s^{n_p} + p_{n_p-1} s^{n_p-1} + \cdots + p_1 s + p_0}, n_q < n_p, \tag{2.51}$$

în care parametrii regulatorului q_j, p_i sunt necunoscuţi, iar dimensiunea polinoamelor $Q_R(s), P_R(s)$ și parametrilor q_j, p_i se determină cu condiția de realizare fizică a algoritmului de reglare $n_q < n_p$.

Pe baza relațiilor (2.50) și (2.51) se determină f.d.t. a sistemului deschis și închis:

$$H_d(s) = H_R(s)H_P(s) = \frac{Q_R(s)}{P_R(s)}\frac{B_P(s)}{A_P(s)}, \tag{2.52}$$

$$H_0(s) = \frac{H_d(s)}{1+H_d(s)} = \frac{Q_R(s)B_P(s)}{P_R(s)A_P(s)+Q_R(s)B_P(s)}. \tag{2.53}$$

Cerințele de performanță impuse sistemului pot fi obținute dacă acestea se transpun într-o formă a f.d.t. $H_0(s)$ şi respectiv $H_d(s)$ a sisitemului închis și deschis. Cerințele funcționale *stabilitatea* și *precizia* pot fi realizate asigurând celor două funcții de transfer $H_0(s)$ şi $H_d(s)$ o anumită formă.

Polinomul caracteristic al sistemului din (2.53) este:

$$P_c(s) = P_R(s)A_P(s) + Q_R(s)B_P(s) =$$
$$= \alpha_l s^l + \alpha_{l-1}s^{l-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0, \tag{2.54}$$

unde $\overline{\alpha_0, \alpha_l}$ sunt coeficienţii necunoscuţi.

Pentru realizarea polinomului (2.54) este necesar de analizat cerinţele de stabilitate, precizie și realizabilitatea algoritmului proiectat.

1. *Se analizează cerința de stabilitate a sistemului proiectat*. Compensarea unor poli sau zerouri ale procesului descris prin f.d.t. $H_P(s)$ datorită incertitudinilor de modelare, cu valabilitate limitată în vecinătatea punctului de funcționare, este inadmisibilă în raport cu cerința de stabilitate a sistemului.

În aceste condiții, se recomandă construcția unei f.d.t. $H_d(s)$, pornind de la performanțele impuse, astfel încât să nu se compenseze posibilele singularități instabile ale procesului $H_P(s)$. Pot fi compensaţi cu precauţie anumiţi ploi stabili ai procesului, cu condiția ca aceștia să nu se încadreze printre incertitudinile parametrice ale modelului atașat procesului condus.

2. *Se analizează cerința de precizie a sistemului în regim staționar* (*permanent*). Sistemul de reglare automată trebuie să asigure urmărirea referinței și rejecția perturbațiilor. Realizarea acestor cerințe presupune o anumită formă a funcțiilor de transfer $H_d(s)$ și $H_0(s)$.

Semnalele exogene generalizate se descriu de f.d.t. $R(s)$ de forma:

$$R(s) = \frac{M(s)}{L(s)}, \tag{2.55}$$

unde prin $M(s)$ se alege un element din clasa mărimilor exogene, iar $L(s)$ este polinomul care determină clasa mărimilor exogene. Pentru mărimile exogene persistente se admite implicit că polinomul $L(s)$ este instabil sau la limită de stabilitate.

Pentru structura sistemului dată eroarea lui în raport cu f.d.t. $H_d(s)$, referința $r(s)$ și perturbația $p(s)$ se calculează cu relaţiile:

$$\varepsilon(s) = \frac{1}{1+H_d(s)} r(s) \text{ sau } \varepsilon(s) = -\frac{1}{1+H_d(s)} p(s) \tag{2.56}$$

sau în forma:

$$\varepsilon(s) = \frac{1}{1+H_d(s)} r(s) = S(s)\frac{M(s)}{L(s)}. \tag{2.57}$$

Din (2.56)-(2.57) rezultă condiția pentru a obține precizia dorită $\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = 0$, prezența în funcția de sensibilitate a unui număr de zerouri în origine mai mare decât dimensiunea polinomului $L(s)$.

3. Primele două condiții de proiectare a sistemului stabilitatea și precizia sistemului se completează cu condiția de realizabilitate fizică a algoritmului de reglare. Cerința de precizie a sistemului impune condiția ca în modelul algoritmului de reglare să se regăsească modelul semnalelor exogene. Deci, pentru semnale de tip treaptă, rampă și parabolă, f.d.t. $H_R(s)$ a regulatorului va conţine un număr de poli p în origine, unde pentru treaptă $p = 1$, pentru rampă $p = 2$ şi pentru parabolă de gradul unu $p = 3$.

Pentru aceste trei condiții se obține o structură a algoritmului de reglare implementabilă dacă excesul de poli ai sistemului este egal sau mai mare ca excesul de poli ai procesului $e_0 \geq e_P$, iar excesul de poli ai regulatorului este egal sau mai mare ca zero $e_R \geq 0$.

Configurația generală a regulatorului cu cele trei componente incluse (fig. 2.10) evidențiază un sistem cu două grade de libertate deoarece compensatorul cu f.d.t. $H_R(s)$ este inclus atât în produsul

$H_R(s)H_y(s)$, cât și în produsul $H_R(s)H_r(s)$.

Din (2.43) rezultă că stabilitatea, rejecția perturbației și atenuarea incertitudinii modelului sunt proprietăți ale reacției negative, pe când urmărirea referinței $r(t)$ poate fi realizată pe calea directă. Aceasta este evident când se consideră în (2.43) f.d.t. $H_y(s) = 0$ și reacția este nulă.

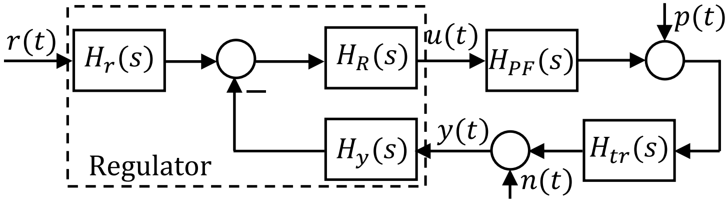

Fig. 2.10. Structura modificată a sistemului de reglare automată

În aceste condiții stabilitatea sistemului necesită stabilizarea procesului condus, perturbația se însumează la ieșire procesului. Urmărirea referinței $r(t)$ se asigură prin proiectarea compensatorului $H_R(s)$ din structura regulatorului.

Din (2.43) rezultă că atenuarea perturbației $p(t)$ și atenuarea zgomotului $n(t)$ sunt obiective contradictorii. Produsul f.d.t. $H_R(s)H_y(s)$ se alege astfel de realizat, încât să se asigure compromisul între aceste obiective.

Urmărirea referinței și rejecția perturbației pot fi realizate independent. Dacă f.d.t. $H_y(s)$ a fost proiectată, atunci f.d.t $H_r(s)$ a prefiltrului se va alege în concordanță cu cerințele intrare-ieșire impuse sistemului.

Structura sistemului din fig. 2.11 are de asemenea două grade de libertate. Dacă se aleg f.d.t. $H_R(s) = 1$ și $H_y(s) = 1$, atunci rezultă un regulator cu un singur grad de libertate și atenuarea perturbației $p(t)$ și urmărirea referinței $r(t)$ nu pot fi influențate independent. Structură de sistem (fig. 2.11) simplă nu permite realizarea tuturor cerințelor de performanță simultan în raport atât cu referința, cât și cu perturbația.

În structura sistemului (fig. 2.11) se consideră f.d.t. $H_{PF}(s)$ și $H_p(s)$ cunoscute, raționale strict proprii. Problema proiectării se reduce la determinarea f.d.t. $H_R(s)$ a regulatorului, astfel să fie satisfăcute cerințele de performanță ale sistemului atât în raport cu referința $r(t)$, cât și în raport cu perturbația $p(t)$.

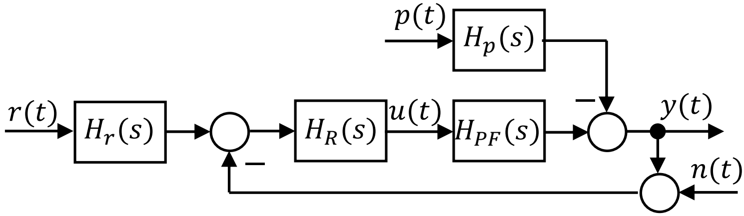

Fig. 2.11. Structura sistemului de reglare automată cu prefiltru

Ieșirea sistemului în raport cu referința $r(t)$ se descrie cu relația:

$$y_r(s) = H_0(s)r(s) = \frac{H_R(s)H_{PF}(s)}{1+H_R(s)H_{PF}(s)}r(s) =$$

$$= \frac{H_d(s)}{1+H_d(s)}r(s) = \frac{B(s)}{A(s)}r(s), \tag{2.58}$$

iar ieșirea în raport cu perturbația $p(t)$ este:

$$y_p(s) = H_{0p}(s)p(s) = \frac{H_p(s)}{1+H_R(s)H_{PF}(s)}p(s) = \frac{H_p(s)}{1+H_d(s)}p(s) = \frac{B_1(s)}{A(s)}p(s), \tag{2.59}$$

unde $H_0(s)$ este f.d.t. a sistemului închis a transferului referință-ieșire, $H_d(s) = H_R(s)H_{PF}(s)$ – f.d.t. a sistemului deschis, $H_{0p}(s)$ - f.d.t. a sistemului închis a transferului perturbație-ieșire.

Pentru asigurarea comportării dorite a sistemului în raport cu semnalele exogene $r(t)$ și $p(t)$ se impune ca f.d.t. $H_0(s)$ și $H_{0p}(s)$ ale sistemului să aibă forme dorite, care să asigure satisfacerea tuturor performanțelor în regim tranzitoriu și staționar ale sistemului.

Performanțele impuse sistemului automat în raport cu referința și perturbația conduc la rezultate contradictorii la proiectare și atunci se adoptă variante de proiectare de compromis.

1. O variantă de proiectare a transferului referință-ieșire a sistemului este aceea când dintre toate soluțiile care satisfac performanțele impuse răspunsului $y_r(t)$, să fie adoptată acea soluție care asigură cele mai bune performanțe pentru răspunsul $y_p(s)$.

2. O altă variantă de proiectare prevede asigurarea performanțelor impuse răspunsului $y_p(t)$ și selectarea acelei soluții, care asigură cea mai bună comportare a răspunsului în raport cu referința $y_r(t)$.

În aplicații practice se impun anumite performanțe răspunsului $y_r(t)$ la variația semnalelor treaptă ale referinței $r(t)$, care sunt semnale dure pentru sistem. O comportare bună a sistemului la aceste semnale asigură o comportare satisfăcătoare și în raport cu alte tipuri de semnale de referință și perturbații.

Dacă sunt cunoscute f.d.t. $H_{PF}(s)$ a obiectului și f.d.t. $H_0(s)$ și $H_{0p}(s)$ ale sistemului închis la acțiunea referinței și a perturbației respectiv, atunci se determină f.d.t. $H_R(s)$ a regulatorului după relațiile:

$$H_R(s) = \frac{H_0(s)}{1-H_0(s)} \frac{1}{H_{PF}(s)} = \frac{Q(s)}{P(s)}, \qquad (2.60)$$

$$H_R^p(s) = \frac{H_{0p}(s)}{1-H_0(s)} \frac{1}{H_{PF}(s)} = \frac{Q_p(s)}{P_p(s)}. \qquad (2.61)$$

Se consideră structura convențională a sistemului de reglare automată dată în fig. 2.12, unde $H_{PF}(s)$ este f.d.t. a părții fixate, $H_R(s)$ – regulatorul, $r(t)$ - semnalul de referință, $p(t)$ – perturbația, care acționează la ieșirea obiectului prin elementul prefiltru cu f.d.t. $H_p(s)$.

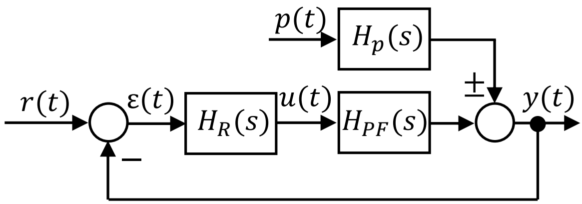

Fig. 2.12. Structura sistemului de reglare automată

Funcția de transfer $H_0(s)$ a sistemului închis se construiește pornind de la performanțele impuse sistemului, care în domeniul timpului presupun o anumită alocare a polilor și zerourilor f.d.t. $H_0(s)$.

Pentru sinteza f.d.t. $H_R(s)$ a regulatorului se impun condițiile:

1. *Satisfacerea cerințelor funcționale* presupun transpunerea cerințelor de performanță într-o formă dorită a f.d.t. $H_0(s)$ a sistemului

închis ceea ce conduce la poziționarea corespunzătoare a polilor și zerourilor în semiplanul stâng al planului complex (sistemul stabil).

2. *Satisfacerea cerințelor structurale* - f.d.t. $H_R(s)$ a algoritmului să fie fizic realizabilă și să fie o rațională proprie sau strict proprie.

Funcția de transfer $H_d(s)$ a sistemului deschis se determină prin f.d.t. a sistemului închis după relația:

$$H_d(s) = H_R(s)H_{PF}(s) = \frac{H_0(s)}{1-H_0(s)} = \frac{B_d(s)}{A_d(s)}, \tag{2.62}$$

din care se calculează f.d.t. a regulatorului:

$$H_R(s) = \frac{H_d(s)}{H_{PF}(s)} = \frac{Q(s)}{P(s)}, m_Q \leq n_P. \tag{2.63}$$

Dacă se notează e_0 excesul de poli-zerouri ai f.d.t. $H_0(s)$:

$$e_0 = p_0 - z_0 \tag{2.64}$$

și excesul e_F de poli-zerouri al f.d.t. $H_{PF}(s)$:

$$e_F = p_F - z_F, \tag{2.65}$$

atunci condiția necesară și suficientă ca f.d.t. $H_R(s)$ a regulatorului să fie fizic realizabilă este:

$$e_R = e_0 - e_F \geq 0. \tag{2.66}$$

Dacă excesul de poli-zerouri al regulatorului este egal cu zero, atunci regulatorul este static, iar când excesul poli-zerouri al regulatorului este mai mare ca zero, atunci regulatorul este astatic.

Dacă funcția de transfer $H_0(s)$ a sistemului închis se descrie cu funcția pondere $w(t)$, atunci condiţia de realizabilitate fizică a sistemului este: $w(t) \equiv 0$, când $t < 0$ sau $w(t - \tau) < 0$, $t < \tau$.

Din această condiţie rezultă că răspunsul sistemului de reglare automată anticipează acțiunea semnalului asupra sistemului.

2.10 Proiectarea sistemului automat monovariabil pe baza funcțiilor de transfer $H_0(s)$ şi $H_d(s)$

Pentru structura convențională a sistemului (fig. 2.12) cu modelul procesului cunoscut $H_P(s)$ şi performanţele impuse sistemului proiectat timpul de reglare t_{ri}, suprareglajul σ_i și precizia sau eroarea staționară $\varepsilon_i = 0$, transpunerea performanțelor tranzitorii și staționare în structura modelului sistemului închis $H_0(s)$ este etapa principală și dificilă a proiectării [1, 4, 5].

Pornind de la relațiile cunoscute dintre performanțele unui sistem de reglare de ordinul doi și polii f.d.t. $H_0(s)$ pentru un semnal de intrare treaptă unitară, se prezintă procedura iterativă și interactivă de proiectare în baza funcțiilor de transfer.

Funcția de transfer a unui sistem automat de ordinul doi cu coeficientul de transfer unitar se descrie în forma:

$$H_0(s) = \frac{1}{T^2s^2+2\xi Ts+1} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}, \tag{2.67}$$

unde T este constanta de timp, ξ – gradul de amortizare, care se modifică în limitele $0 < \xi < 1$, $\omega_n = 1/T$ este pulsația naturală a sistemului, care se calculează după performanțele impuse sistemului.

Se determină funcția de transfer a sistemul deschis și după unele transformări se obține:

$$H_d(s) = \frac{H_0(s)}{1-H_0(s)} = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)} = \frac{1}{s}\frac{k_d}{T_0 s+1}, \tag{2.68}$$

unde parametrii sistemului deschis sunt: $k_d = \omega_n/2\xi$ este coeficientul de transfer al sistemului deschis, $T_0 = 1/2\xi\omega_n$ – constanta de timp, care sunt determinați după performanțele impuse sistemului.

Sistemul deschis este o conexiune serie a elementului de integrare cu constnta de integrare unitară cu elementul cu inerție de ordinul unu cu parametrii coeficientul de transfer k_d şi constanta de timp T_0.

Dacă procesul este descris de f.d.t. $H_P(s) = B_P(s)/A_P(s)$ rațională, strict proprie, stabilă și de fază minimă, atunci f.d.t. (2.61) a regulatorului se descrie în forma:

$$H_R(s) = H_d(s)H_P^{-1}(s) = \frac{1}{s}\frac{\omega_n^2}{(s+2\xi\omega_n)}\frac{A_P(s)}{B_P(s)}. \tag{2.69}$$

În structura regulatorului este inclus modelul semnalului de intrare de tip treaptă unitară – descris de modelul elementului de integrare cu f.d.t. $H(s) = 1/s$.

Algoritmul de reglare $H_R(s)$ obţinut (2.69) este realizabil fizic pentru un proces cu excesul de poli-zerouri $e_P \leq 2$.

Pentru procese descrise cu f.d.t. $H_P(s)$ raţională, strict proprie, stabilă şi de fază minimă cu excesul $e_P > 2$, atunci în f.d.t. (2.67) se introduc poli reali suplimentari p_i pe axa reală negativă cât mai departe de origine $|p_i| \gg (5 \cdots 6)\xi\omega_n$, astfel încât efectul lor asupra performanţelor se fie cât mai redus și eroarea staţionară $\varepsilon = 0$, iar f.d.t. se descrie în forma:

$$H_0(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \frac{\prod_{i=1}^{n} p_i}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)}. \tag{2.70}$$

Dacă se dorește ridicarea vitezei de răspuns a sistemului și menținerea celorlalte performanțe în regim tranzitoriu, atunci în (2.67) se introduc zerouri z_j plasate pe axa reală negativă suficient de departe de origine, formând dipolul $p - z$ cu zeroul mai aproape de origine, astfel ca să asigure efectul anticipativ și să asigure condiția de realizabilitate fizică a algoritmului, menținând în domeniul admisibil performanțele tranzitorii ale sistemului cu f.d.t. (2.67) de forma:

$$H_0(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \frac{\prod_{i=1}^{n} p_i \prod_{j=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{m} z_j \prod_{i=1}^{n}(s+p_i)}. \tag{2.71}$$

Pentru obținerea modelelor f.d.t. de forma (2.70), (2.71) la modelul (2.67) se adaugă elemente de corecție cu efecte de anticipație-întârziere astfel ca să fie asigurate condițiile de funcționalitate și structură (performanțe și realizabilitate fizică a algoritmului proiectat) cu f.d.t.:

$$H_{C1}(s) = \frac{p}{s+p}, H_{C2}(s) = \frac{p}{z}\frac{s+z}{s+p}, \ldots, H_{Ci}(s) = \frac{p_i}{z_j}\frac{s+z_j}{s+p_i}. \tag{2.72}$$

Compensatoarele cu f.d.t. $H_C(s) = \frac{p}{z}\frac{s+z}{s+p}$, în funcție de valoarea raportului $|p|/|z|$, pot fi de tipul *anticipație-întârziere* când acest raport este supraunitar sau *întârziere-anticipație* pentru raportul subunitar.

Introducerea elementelor de corecție (compensatoarelor) cu f.d.t. $H_C(s)$ se realizează în două variante: pe calea directă (fig. 2.13) și în bucla de copmensare (fig. 2.14).

În primul caz sistemul din fig. 2.13 în canalul direct are f.d.t. dorită $H_{dd}(s)$ de forma (2.67):

$$H_{dd}(s) = H_{R1}(s)H_P(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}. \quad (2.73)$$

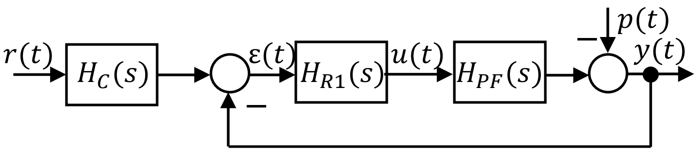

Fig. 2.13. Structura convențională a sistemului cu compensator în afara buclei de reglare

Sistemul (fig. 2.13) este o structură cu două regulatoare cu f.d.t. $H_{R1}(s)$ în bucla de reglare şi $H_C(s)$ a compensatorului în canalul referinței şi este un sistem cu două grade de libertate.

Se consideră regulatorul cu f.d.t. $H_{R1}(s)$ din (2.73) din bucla închisă este fizic realizabil, dacă excesul $p - z$ a procesului $e_P \leq 2$, care se descrie cu f.d.t. de forma:

$$H_{R1}(s) = H_P^{-1}(s)\frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}, \quad (2.74)$$

unde parametrii gradul de amortizare ξ și pulsaţia naturală ω_n se determină din cerințele de performanță.

Dacă nu sunt satisfăcute performanțele sistemului automat și realizabilitatea fizică a regulatorului, atunci în structura sistemului se introduc elemente de corecție și f.d.t. a sistemului este:

$$H_{dd}^c(s) = H_C(s)H_{dd}(s). \quad (2.75)$$

Compensatorul cu f.d.t. $H_C(s)$ cu un zero și un pol se introduce pentru a obține f.d.t. a sistemului închis de forma:

$$H_{0C}(s) = H_0(s)H_C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}\frac{p}{z}\frac{s+z}{s+p}. \quad (2.76)$$

Algoritmul de reglare se determină după relația (2.60) cu f.d.t. $H_{0C}(s)$ (2.76) și se obține:

$$H_R(s) = \frac{H_{0C}(s)}{1-H_{0C}(s)} H_P^{-1}(s) =$$

$$= \frac{\omega_{n0}^2 p(s+z)}{z(s+p)\left(s^2+2\xi\omega_{n0}s+\omega_{n0}^2\right)-\omega_{n0}^2 p(s+z)} \frac{A_P(s)}{B_P(s)}. \tag{2.77}$$

Incertitudinile în modelul matematic al părţii fixate $H_P(s)$ sunt preluate de regulator care conține modelul invers al procesului $H_P^{-1}(s)$. Astfel, se pot alege singularități $p-z$ ale f.d.t. $H_{0C}(s)$ care să asigure o formă minimală a f.d.t. $H_R(s)$ pentru a se reduce efortul de implementare.

În cazul sistemului din fig. 2.14 compensatorul cu f.d.t. $H_C(s)$ este introdus pe cale directă și asigură obținerea f.d.t. deschise dorite $H_{dd}(s)$ și se obţine o structură de sistem cu un grad de libertate.

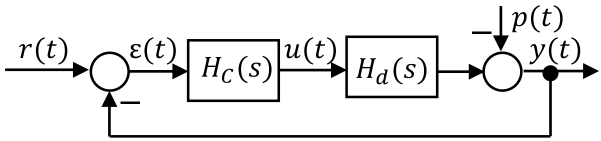

Fig. 2.14. Structura sistemului cu compensator în canalul direct

Dacă se alege un compensator cu f.d.t.:

$$H_c(s) = \frac{s+z}{s+p} = \frac{1}{\alpha}\frac{1+\alpha Ts}{1+Ts}, \tag{2.78}$$

în care $\alpha > 1$, $z = -\frac{1}{\alpha T}$, $p = -\frac{1}{T}$, atunci f.d.t. a căii directe corectate este:

$$H_{dd}^c(s) = H_{dd}(s)H_c(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}\frac{1}{\alpha}\frac{1+\alpha Ts}{1+Ts}. \tag{2.79}$$

Funcția de transfer a sistemului închis corectat se calculează după relația (2.79) și se obține:

$$H_{0C}(s) = \frac{H_{dc}(s)}{1+H_{dc}(s)} = \frac{\omega_n^2(1+\alpha Ts)}{\omega_n^2(1+\alpha Ts)+\alpha s(1+Ts)(s+2\xi\omega_n)} =$$

$$= \frac{\omega_n^2(1+\alpha Ts)}{\alpha Ts^3+\alpha(1+2\xi\omega_n T)s^2+(2\alpha\xi\omega_n+\alpha T\omega_n^2)s+\omega_n^2}, \tag{2.80}$$

care este o funcție de transfer cu trei poli și un zero.

Dacă în (2.78) $\alpha \gg 1$, atunci f.d.t. a compensatorului se aproximează cu expresia:

$$H_C(s) \approx 1 + \alpha Ts, \tag{2.81}$$

iar f.d.t. (2.79) se aproximează cu expresia:

$$H_{0C}(s) = \frac{\omega_n^2(1+\alpha Ts)}{s^2+(2\xi\omega_n+\alpha T\omega_n^2)s+\omega_n^2}, \tag{2.82}$$

obținând un model de ordinul doi cu doi poli și un zero determinat de valorile parametrilor α şi T ai elementului de corecţie. Coeficientul relativ de amortizare corectat se determină din (2.82) și se descrie:

$$\xi_c = \xi + \alpha\frac{T\omega_n}{2}, \tag{2.83}$$

Creșterea factorului de amortizare conduce la modificarea erorii în raport cu semnale de tip rampă la care eroarea de viteză se dă de relația:

$$\varepsilon_v = \frac{2\xi_c}{\omega_n} = \frac{2}{\omega_n}\left(\xi + \alpha\frac{T\omega_n}{2}\right) = \frac{2\xi}{\omega_n} + \alpha T. \tag{2.84}$$

Un rezultat similar se obține și în cazul când se utilizează un compensator de tip derivativ ideal în bucla locală a sistemului cu structura din fig. 2.15 [4].

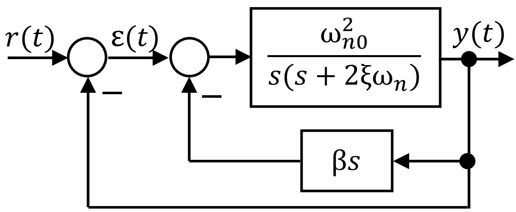

Fig. 2.15. Structura sistemului cu compensator în bucla de reacție

Funcția de transfer a căii directe:

$$H_{dC}(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n+\beta\omega_n^2)}, \tag{2.85}$$

iar f.d.t. a sistemului închis are forma:

$$H_{0C}(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+(2\xi\omega_n+\beta\omega_n^2)s+\omega_n^2}. \tag{2.86}$$

Din (2.86) rezultă că factorul de amortizare al sistemului corectat este mai mare și se calculează cu relaţia:

$$\xi_c = \xi + \frac{\beta\omega_n}{2}. \tag{2.87}$$

Eroarea de viteză în raport cu referința de tip rampă se descrie:

$$\varepsilon_v = \frac{2\xi}{\omega_n} + \beta, \tag{2.88}$$

care a crescut și conduce la o înrăutățire a evoluției sistemului în regim staționar.

În rezultatul analizei celor două variante de compensare se constată că efectul de amortizare produs de termenii αT şi β este acelaşi.

Exemplul 2.6. Se dă structura sistemului cu f.d.t. a căii directe de forma [4]:

$$H_d(s) = \frac{144}{s(0.1s+1)}$$

cu parametrii inițiali $\omega_n^2 = 144$, $\omega_n = 12\ s^{-1}$, $\xi = 0.417$.

Se cere să se corecteze f.d.t. $H_d(s)$, astfel încât răspunsul indicial al sistemului să fie amortizat critic $\xi = 1$.

Soluționare. Se determină performanțele sistemului după pulsația naturală ω_n și coeficientul de amortizare ξ:

$$\sigma = 23.68\ \%,\ t_r = \frac{4}{\xi\omega_n} = \frac{4}{0.417 \cdot 12} = 0.78\ \text{s},$$

$$\varepsilon_{\text{st}} = 0,\ \varepsilon_v = \frac{2\xi}{\omega_n} = \frac{2 \cdot 0.417}{12} \approx 0.0695\ \text{s}^{-1}.$$

În sistem se utilizează un compensator cu f.d.t.:

$$H_c(s) \approx 1 + \alpha T s$$

și se obține un sistem de ordinul doi cu aceeași pulsație și cu factorul de amortizare critic $\xi_c = 1$:

$$\xi_c = \xi + \alpha\frac{T\omega_n}{2};\ 1 - \xi = \alpha\frac{T\omega_n}{2};\ 1 - 0.417 = \alpha\frac{12T}{2};\ 0.583 = 6\alpha T,$$

$$\alpha T = \frac{0.583}{6} = 0.0972.$$

Dacă se utilizează compensatorul derivativ în reacția locală a sistemului, atunci factorul $\xi_c = 1$ are valoarea:

$$\xi_c = \xi + \frac{\beta\omega_n}{2};\ 1 - \xi = \frac{\beta\omega_n}{2};\ 1 - 0.417 = \frac{12\beta}{2};\ 0.583 = 6\beta,\ \beta = 0.0972.$$

Se constată că parametrii αT şi β ai compensatoarelor au aceeaşi valoare.

Eroarea de viteza pentru ambele structuri de sisteme este aceeași:

$$\varepsilon_v = \frac{2\xi}{\omega_n} + \beta = \frac{2\cdot 0.417}{12} + 0.0972 = 0.0695 + 0.0972 = 0.1667\ s^{-1}.\blacksquare$$

2.11 Proiectarea sistemului automat prin metoda alocării poli-zerouri

Se consideră modelul matematic de ordinul doi al sistemului proiectat cu performanțele impuse. Forma generală a f.d.t. $H_0(s)$ cu doi poli dominanți și mai mulți poli și zerouri suplimentari introduși pentru satisfacerea cerințelor funcționale și cerințelor structurale ale sistemului se reprezintă în forma [1, 4, 5]:

$$H_0(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}\frac{\prod_{i=1}^{n} p_i \prod_{j=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{m} z_j \prod_{i=1}^{n}(s+p_i)}. \quad (2.89)$$

Polii dominanți sunt alocați în planul rădăcinilor în așa mod ca să satisfacă performanțele impuse sistemului. Dacă performanțele impuse sistemului nu sunt satisfăcute, atunci în f.d.t. $H_0(s)$ se introduc poli-zerouri suplimentari pentru a satisface toate performanțele sistemului. Introducerea polilor suplimentari cât mai departe pe axa reală negativă asigură satisfacerea cerințelor de realizabilitate fizică a algoritmului fără a influența sensibil performanțele tranzitorii și staționare ale sistemului.

Dacă polii $p_1,\ p_2$ dominanţi ai sistemului determinaţi de valorile specifice ale parametrilor sistemului gradul de amortizare ξ şi pulsația naturală ω_n și poli-zerouri suplimentari, atunci răspunsul indicial al sistemului la intrare treaptă unitară are forma:

$$h(t) = 1 + c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t} + \sum_{i=1}^{n} c_i e^{p_i t}. \quad (2.90)$$

Primii trei termeni reprezintă dinamica sistemului de ordinul doi, iar restul termenilor prezintă contribuția $p-z$ suplimentari introduşi în sistem. Când polii $|p_i| \to \infty$ atunci aportul acestor poli este neglijabil. Poziţia zerourilor z_j în semiplanul stâng C^- influențează răspunsul sistemului atât prin modificarea valorilor coeficienilor c_1, c_2, cât şi ai coeficienţilor c_i.

În literatura de specialitate sunt analizate efectele introducerii unor singularități $p-z$ în structura f.d.t. $H_0(s)$ a sistemului închis. Introducerea unui zero suplimentar într-un sistem de ordinul doi cu polii dominanți asigură *creșterea vitezei de răspuns, creșterea suprareglării, reducerea erorii în regim permanent în raport cu semnalele de tip rampă*.

Polii suplimentari se introduc în structura sistemului pentru a asigura *cerințele de structură* ale sistemului. Pentru asigurarea performanțelor se introduce un zerou suplimentar, iar asigurarea cerințelor de structură implică adăugarea unui pol și această configurație formează dipolul $p - z$ cu condiţia $|p| > |z|$, care se alocă fie cât mai aproape de origine sau cât mai departe de origine pe axa reală negativă.

Se constată că efectul acestor singularități asupra performanțelor sistemului de ordinul doi este redus dacă valoarea $|p| \gg (5 \dots 7)\omega_n$.

Pentru procese cu două constante de timp cu excesul poli-zerouri $p - z$ $e_P \leq 2$ se recomandă utilizarea unui model cu f.d.t. $H_0(s)$:

$$H_0(s) = \frac{\omega_n^2 \frac{p}{z}(s+z)}{(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)(s+p)}, \tag{2.91}$$

unde se includ pe lângă cei doi poli dominanți p_1, p_2 un dipol $p - z$. Alocarea corespunzătoare a dipolului permite asigurarea tuturor performanțelor sistemului și îndeplinirea condiției de realizabilitate fizică a algoritmului de reglare proiectat.

Pentru realizarea unui dipol $p - z$ se utilizează un element de corecție de anticipație-întârziere cu f.d.t. cu un pol și un zerou de forma:

$$H_c(s) = k_c \frac{s+z}{s+p}, \tag{2.92}$$

unde k_c este coeficientul de transfer.

Funcția de transfer dorită $H_0(s)$ (2.89) se va realiza pornind de la necesitatea asigurării tuturor performanțelor sistemului în forma:

$$H_0(s) = k_c \frac{s+z}{s+p} \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} = k_c \frac{p_1 p_2}{(s+p_1)(s+p_2)} \frac{s+z}{s+p}, \tag{2.93}$$

care presupune selectarea coeficientului $k_c = p/z$ pentru a asigura condiţia $H_0(0) = 1$ asigurând eroarea staționară $\varepsilon_{st} = 0$ la semnal treaptă unitară. Dipolul $p - z$ se alocă în raport cu cei doi poli dominanți fie foarte aproape sau foarte departe de origine, astfel în cât $\frac{\omega_n}{z} \leq 0.2$ şi $\frac{\omega_n}{p} \leq 0.2$ cu respectarea condiţiei $|p| > |z|$.

Astfel se urmărește efectul de anticipație să fie predominant pentru asigurarea performanțelor sistemului.

Pentru a demonstra modul de alocare a dipolului $p - z$ mai aproape de origine, se calculează răspunsul sistemului la intrare treaptă unitară și se compară cu răspunsul sistemului de ordinul doi, care se reprezintă în forma operațională:

$$y(s) = \frac{1}{s} + \frac{c_1}{s+p_1} + \frac{c_2}{s+p_2} + \frac{c_3}{s+p}, \tag{2.94}$$

unde coeficienții c_1, c_2, c_3 se detremină din relațiile:

$$c_1 = -\frac{pp_2}{z}\frac{z-p_1}{p-p_1}\frac{1}{p_2-p_1},\ c_2 = -\frac{pp_1}{z}\frac{z-p_2}{p-p_2}\frac{1}{p_1-p_2},$$

$$c_3 = -\frac{p_1p_2}{z}\frac{z-p}{(p_1-p)((p_2-p)}. \tag{2.95}$$

În mod similar, răspunsul sistemului cu cei doi poli dominanți p_1, p_2 se dă în forma:

$$y_2(s) = \frac{1}{s} + \frac{c_1'}{s+p_1} + \frac{c_2'}{s+p_2}, \tag{2.96}$$

unde coeficienții au valorile:

$$c_1' = -\frac{p_2}{p_2-p_1},\ c_2' = -\frac{p_1}{p_1-p_2}. \tag{2.97}$$

Dacă $|p| \ll \omega_n$, $|z| \ll \omega_n$ şi $p/z \approx 1$, atunci se pot aproxima rapoartele $\frac{z-p_1}{p-p_1} \approx 1$ şi $\frac{z-p_2}{p-p_2} \approx 1$, iar coeficienţii c_1, c_2 satisfac egalităţile $c_1 \approx c_1'$, $c_2 \approx c_2'$.

Răspunsul asociat sistemului cu trei poli și un zero este influențat de ponderea termenului c_3e^{pt} care se suprapune peste răspunsul determinat de cei doi poli dominanţi. Dacă se realizează condiţia $|p| \ll$ $\ll \omega_n$, atunci coeficientul c_3 din (2.95) se poate aproxima cu relația:

$$c_3 \approx -\frac{1}{z}(z-p) \approx -1 + \frac{p}{z}, \tag{2.98}$$

iar componenta răspunsului determinată de acest pol se descrie de relația:

$$y_p(t) = \left(-1 + \frac{p}{z}\right)e^{pt}. \tag{2.99}$$

Valoarea maximă a lui $y_p(t)$ se obţine când $t = 0$ şi ca efectul acestei componente să fie cât mai redus la o creştere a suprareglării σ cu 5 %, rezultă condiţia pentru acest coeficient:

$$c_3 = -1 + \frac{p}{z} \leq 0.05 \text{ sau } \frac{p}{z} \leq 1.05. \quad (2.100)$$

Limita inferioară a raportului p/z se alege din condiţia ca eroarea ε să fie redusă prin utilizarea acestui element de corecţie.

Astfel, dacă se utilizează relația erorii de viteză:

$$\varepsilon_v = \frac{2\xi}{\omega_n} + \frac{1}{p} - \frac{1}{z}, \quad (2.101)$$

atunci se utilizează pentru limita inferioară a raportului p/z o valoare $p/z \geq 1.01$. Pentru a obţine performanţele dorite pentru sistem elementul de corecție se alege sub forma:

$$H_c(s) = \frac{p}{z}\frac{s+z}{s+p}. \quad (2.102)$$

Poziționând dipolul $p - z$ astfel încât să fie satisfăcute condiţiile:

$$1.01 \leq \frac{p}{z} \leq 1.05, \text{ cu } |p| \ll \omega_n, |z| \ll \omega_n. \quad (2.103)$$

Cu cât dipolul $p - z$ este alocat mai departe de polii dominanţi, cu atât efectul lui asupra performanțelor este mai redus.

Astfel, analiza modului de construcție a f.d.t. dorită $H_0(s)$ a sistemului proiectat se reduce la un procedeu *iterativ* şi *interactiv*.

Pornind de la performanțele impuse sistemului proiectat și alocând corespunzător polii și zerourile astfel, încât să fie asigurate toate cerințele funcționale (performanțele), cât și cerințele de structură (realizabilitatea fizică a algoritmului de reglare).

Pornind de la modelul matematic al procesului cu f.d.t. $H_{PF}(s)$ şi cerinţele de performanţă în forma unor criterii locale ε, t_r, σ etc., procedura de proiectare a sistemului prin metoda alocării poli-zerouri se reduce la următoarele etape [1, 4, 5]:

1. Se determină polii și zerourile f.d.t. $H_{PF}(s)$ şi se calculează excesul de poli-zerouri $e_p = p_p - z_p$.

2. Se determină parametrii dinamici ai sistemului gradul de

amortizare ξ şi pulsaţia naturală ω_n pentru a aloca polii dominanți reieșind din cerințele de performanță.

3. Se verifică asigurarea tuturor performanțelor sistemului pentru f.d.t. dorită $H_0(s)$ construită numai după parametrii sistemului gradul de amortizare ξ şi pulsaţia naturală ω_n.

4. În caz afirmativ, se testează condiția de structură a sistemului cu excesul de poli $e_0 \geq e_p$ şi se determină algoritmul de reglare $H_R(s)$, care să satisfacă excesul de poli $e_0 \geq e_p$. În caz contrar, se alocă poli suplimentari cât mai departe de origine, până se asigură condiția de realizabilitate fizică a algoritmului de reglare.

5. În cazul, dacă nu sunt satisfăcute cerințele de performanță, se alocă poli-zerouri suplimentari până se asigură toate performanțele impuse sistemului.

6. Se verifică condiția de structură a sistemului pentru ambele situații posibile $p - z$ suplimentari apropiați și îndepărtați de origine care satisfac toate performanțele sistemului.

7. Se introduc poli suplimentari depărtați de origine pentru asigurarea condiției de structură a sistemului.

8. Procesul de alocare poli-zerouri $p - z$ se finisează atunci când sunt satisfăcute toate performanțele, iar algoritmul de reglare obținut este fizic realizabil.

Se prezintă în formă generalizată procedura de sinteză a algoritmului de conducere prin metoda alocării poli-zerouri.

Se consideră procesul caracterizat prin f.d.t.

$$H_P(s) = \frac{B_P(s)}{A_P(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1}+b_{n-2}s^{n-2}+\cdots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0} \tag{2.104}$$

cu exces de poli-zerouri $e_p = n - m = n - (n-1) = 1, m = n - 1$, se cere proiectat un algoritm de reglare de forma:

$$H_R(s) = \frac{Q_R(s)}{P_R(s)} = \frac{q_{n_q}s^{n_q}+q_{n_q-1}s^{n_q-1}+\cdots+q_1s+q_0}{s^{n_p}+p_{n_p-1}s^{n_p-1}+\cdots+p_1s+p_0}, \tag{2.105}$$

în care coeficienții q_j, p_i sunt necunoscuţi, iar dimensiunea polinoamelor $Q_R(s), P_R(s)$, q_j, p_i este necesar de determinat cu condiţia de realizare fizică a algoritmului de reglare ca $n_q < n_p$.

În (2.104) și (2.105) funcţiile de transfer sunt în formă ireductibilă și strict proprii, cu rapoartele $m \leq n$ şi $n_q \leq n_p$.

Pentru sistemul închis cu modelul obiectului cu f.d.t. (2.104) și regulatorul cu f.d.t (2.105), polinomul caracteristic dorit $P_c(s)$ al sistemului se descrie [1, 4, 5]:

$$P_c(s) = P_R(s)A_P(s) + Q_R(s)B_P(s) =$$
$$= \alpha_l s^l + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0 = \prod_1^l (s - p_i), \qquad (2.106)$$

unde coeficienții $\alpha_i, \overline{1, l}$ se obţin printr-o procedură de alocare corespunzătoare a polilor p_i sistemului. Dacă polinomul $P_c(s)$ este arbitrar specificat, atunci se cere ca algoritmul de reglare sintetizat pentru f.d.t. $H_P(s)$ dată să asigure existenţa polinomului caracteristic (2.106).

Ecuația polinomială (2.106) se numește *ecuație diofantică* deoarece pentru polinoame se aplică operațiile de adunare, scădere și înmulțire (fără împărțire).

Definiție. Dacă se consideră un sistem cu un singur grad de libertate cu procesul (2.104) cu polinoamele $B_P(s)$, $A_P(s)$ coprime şi regulatorul (2.105), atunci polinomul caracteristic (2.106) este un polinom arbitrar cu gradul $l = 2n - 1$ cu existenţa polinoamelor $Q_R(s)$, $P_R(s)$ cu gradele $n_q = n_p = n - 1$ [4].

Polinoamele $B_P(s)$, $A_P(s)$, $Q_R(s)$ și $P_R(s)$ pot fi monice.

Dacă se proiectează un regulator strict propriu, gradul minim al polinoamelor $Q_R(s)$ și $P_R(s)$ este $n_q = n$, $n_p = n$ și pentru o alegere arbitrară a polinomului caracteristic $P_c(s)$, atunci gradul său va fi $l = 2n$.

Pentru a se garanta stabilitatea internă a sistemului nu se admite compensarea poli-zerouri instabili între regulator și modelul procesului.

Dacă se dorește compensarea poli-zerouri stabili ai regulatorului și ai procesului, atunci se impune ca factorii care se compensează să se includă în polinomul caracteristic.

Când se compensează un pol $s = -p$ al procesului de un zerou al regulatorului, polinomul caracteristic $P_c(s)$ conţine factorul $(s + p)$, iar ecuația (2.106) are soluție și factorul $(s + p)$ este comun ambelor părţi ale ecuaţiei.

Rezolvarea problemei de proiectare prin metoda alocării poli-zerouri presupune validarea condiției ca polinoamele $B_P(s)$ şi $A_P(s)$ să fie coprime, iar dimensionarea polinoamelor $Q_R(s)$ şi $P_R(s)$ să fie aleasă în corelaţie cu dimensiunea polinoamelor $B_P(s)$ şi $A_P(s)$ şi cea a polinomului caracteristic dorit $P_c(s)$.

Din egalitatea (2.106), prin egalarea coeficienților din partea stângă și dreaptă de pe lângă aceleași puteri ale lui s, se obține ecuația:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_n & 0 & \cdots & 0 & b_n & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 & b_{n-1} & b_n & \cdots & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & \cdots & 0 & b_{n-2} & b_{n-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_n & b_0 & b_1 & \cdots & b_n \\ 0 & a_0 & \cdots & a_{n-1} & 0 & b_0 & \cdots & b_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_0 & 0 & 0 & \cdots & b_0 \end{bmatrix}}_{R} \underbrace{\begin{bmatrix} p_{n-1} \\ p_{n-2} \\ \vdots \\ p_0 \\ q_{n-1} \\ q_{n-2} \\ \vdots \\ q_0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{q}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_l \\ \alpha_{l-1} \\ \alpha_{l-2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\alpha}} \qquad (2.107)$$

sau

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{\alpha}, \qquad (2.108)$$

unde $\boldsymbol{R}$ este matricea procesului, $\boldsymbol{q}$ - vectorul parametrilor regulatorului, $\boldsymbol{\alpha}$ – vectorul polilor.

Sistemul de ecuații (2.107) se soluționează și se determină parametrii algoritmului de reglare.

Exemplul 2.7. Se consideră modelul procesului de ordinul $n = 2$ cu f.d.t.:

$$H_P(s) = \frac{B_P(s)}{A_P(s)} = \frac{1}{s^2+3s+2},$$

unde $B_P(s) = 1$, $A_P(s) = s^2 + 3s + 2$, cu gradul $n = 2$, polii $p_1 = -1, p_2 = -2$.

Se cere să se sintetizeze algoritmul de reglare.

Soluționare. Pentru f.d.t. a regulatorului se determină gradele polinoamelor $n_q = n - 1 = 2 - 1 = 1$ şi $n_p = n - 1 = 2 - 1 = 1$ şi f.d.t. ia forma:

$$H_R(s) = \frac{Q_R(s)}{P_R(s)} = \frac{q_1 s + q_0}{p_1 s + p_0}$$

cu parametrii de acord q_1, q_0, p_1, p_0 necunoscuţi.

Se construiește polinomul caracteristic și după unele transformări se obține:

$$P_c(s) = P_R(s)A_P(s) + Q_R(s)B_P(s) = (s^2 + 3s + 2)(p_1 s + p_0) + q_1 s + q_0 =$$

$= \alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0,$

unde $\alpha_3 = p_1$, $\alpha_2 = 3p_1 + p_0$, $\alpha_1 = 2p_1 + 3p_0 + q_1$, $\alpha_0 = 2p_0 + q_0$.

Se consideră polinomul caracteristic dorit al sistemului automat care va avea trei poli multipli $n = 3$ în forma:

$$P_c^d(s) = (s + 1)^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1.$$

Se alcătuiește ecuația polinomială de forma:

$$P_c(s) = P_c^d(s),\ \alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1,$$

din care rezultă sistemul de ecuații algebrice prin operația de egalare a coeficienților din partea stângă și partea dreaptă de pe lângă aceleași puteri ale lui s:

$$s^3: p_1 = 1,$$

$$s^2: 3p_1 + p_0 = 3,$$

$$s: 2p_1 + 3p_0 + q_1 = 3,$$

$$s^0: 2p_0 + q_0 = 1$$

sau în forma maticeală:

$$\boldsymbol{Aq} = \boldsymbol{N},\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_0 \\ q_1 \\ q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_0 \\ q_1 \\ q_0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Matricea coeficienților este nesingulară și se soluționează pentru valorile p_1, p_0, q_1, q_0 care au valorile: $p_1 = 1$, $p_0 = 0$, $q_1 = 1$, $q_0 = 1$.

Astfel, s-a obținut un regulator cu f.d.t. de forma:

$$H_R(s) = \frac{q_1 s + q_0}{p_1 s + p_0} = \frac{s+1}{s} = 1 + \frac{1}{s},$$

care este un regulator PI cu parametrii de acord: $k_p = 1$, $T_i = 1$, $k_i = 1/T_i = 1$.

Răspunsul indicial al sistemului la semnal treaptă unitară este aperiodic și la eroarea $\varepsilon = 5$ % are timpul de creștere și reglare $t_c = t_r = 4.68$ s.

Alocarea polilor polinomului caracteristic al sistemului depinde de nesingularitatea unei matrice particulare [4, 5].■

Exemplul 2.8. Se consideră modelul procesului cu inerție de ordinul $n = 2$ descris de f.d.t de forma:

$$H_P(s) = \frac{B_P(s)}{A_P(s)} = \frac{5}{(s+1)(s+5)} = \frac{5}{s^2+6s+5}$$

cu polii $p_1 = -1$, $p_2 = -5$.

Se cere să se sintetizeze algoritmul de reglare.

Soluționare. Se construiște polinomul caracteristic pe baza excesului de poli-zerouri ai f.d.t a sistemului închis și a f.d.t a procesului $e_0 > e_p$ şi gradul polinomului este $n_0 = n_p + 1 = 2 + 1 = 3$. Pentru satisfacerea cerințelor de performanță impunem polii dominați ai polinomului caracteristic $p_{1,2} = -3 \pm j3$ și polul suplimentar $p_1 = -30$ alocat mai departe de polii dominanţi ca să nu influențeze performanțele sistemului și se obține polinomul caracteristic de forma:

$$P_c(s) = (s + 3 + j3)(s + 3 - j3)(s + 30) =$$
$$= (s^2 + 6s + 18)(s + 30) = s^3 + 36s^2 + 198s + 540.$$

Se determină gradele polinoamelor regulatorului $n_q = n - 1 = 2 - 1 = 1$ şi $n_p = n - 1 = 2 - 1 = 1$ şi se constuiește f.d.t. a regulatorului static de forma:

$$H_R(s) = \frac{q_1 s + q_0}{p_1 s + p_0} = \frac{q_1 s + q_0}{s + p_0}\Big|_{p_1=1}.$$

Se alcătuiește ecuația polinomială de forma:

$$A_P(s)P_P(s) + B_P(s)Q_P(s) = P_c^d(s),$$

$$(s^2 + 6s + 5)(s + p_0) + 5(q_1 s + q_0) = s^3 + 36s^2 + 198s + 540,$$

$$s^3 + (p_0 + 6)s^2 + (6p_0 + 5 + 5q_1)s + 5(p_0 + q_1) = s^3 + 36s^2 + 198s + 540,$$

unde parametrii necunoscuți ai regulatorului sunt q_1, q_0, p_1, p_0.

Efectuând calculele necesare se obțin valorile parametrilor de acord ai regulatorului: $q_1 = 2.6$, $q_0 = 78$, $p_1 = 1$, $p_0 = 30$ și f.d.t. a regulatorului are forma:

$$H_R(s) = \frac{q_1 s + q_0}{s + p_0} = \frac{2.6s + 78}{s + 30}.$$

S-a sintetizat sistem static cu eroarea staţionară $\varepsilon = 27.84$ %.■

Exemplul 2.9. Se consideră modelul procesului cu inerție de ordinul $n = 2$ cu f.d.t. cu polii $p_1 = -2$, $p_2 = -5$ de forma:

$$H_P(s) = \frac{B_P(s)}{A_P(s)} = \frac{2}{(s+2)(s+5)} = \frac{2}{s^2 + 7s + 10}.$$

Se cere să se sintetizeze algoritmul de tipul PID astfel ca polii dominanți ai sistemului să fie $p_{1,2} = -2 \pm j\sqrt{5} = -2 \pm j2.236$ pentru asigurarea eroarei staţionare $\varepsilon = 0$ la semnale de referinţă şi perturbaţie de tip treaptă unitară.

Soluționare. Se alege algoritmul de tip PID cu componenta derivativă reală cu parametrii de acord q_2, q_1, q_0, q_1, p_0:

$$H_R(s) = \frac{q_2 s^2 + q_1 s + q_0}{s(s + p_0)_{p_1=1}}.$$

Se construiește polinomul caracteristic dorit de ordinul $s = 2n = 2 \cdot 2 = 4$ cu polii dominanți $p_{1,2} = -2 \pm j\sqrt{5}$ și doi poli suplimentari $p_3 = p_4 = -30$:

$$P_d(s) = (s + 2 + j\sqrt{5})(s + 2 - j\sqrt{5})(s + 30)^2 =$$
$$= (s^2 + 4s + 9)(s + 30)^2 = s^4 + 64s^3 + 1149s^2 + 4140s + 8100.$$

Se alcătuiește ecuația polinomială de forma:

$$A_P(s)P_P(s) + B_P(s)Q_P(s) = P_c^d(s),$$
$$s(s^2 + 7s + 10)(s + p_0) + 2(q_2s^2 + q_1s + q_0) =$$
$$= s^4 + 64s^3 + 1149s^2 + 4140s + 8100;$$
$$s^4 + s^3(p_0 + 7) + s^2(7p_0 + 2q_2 + 10) + s(10p_0 + 2q_1) + 2q_0 =$$
$$= s^4 + 64s^3 + 1149s^2 + 4140s + 8100,$$

din care se alcătuiește sistemul de ecuații algebrice cu parametrii necunoscuți ai regulatorului și soluţionând-o se obţin valorile parametrilor regulatorului PID cu f.d.t.:

$$H_R(s) = \frac{q_2s^2+q_1s+q_0}{s(s+p_0)} = \frac{370s^2+1785s+4050}{s(s+57)}.$$

S-a simulat sistemul cu regulatorul astatic sintetizat și s-au obţinut performanțele la eroarea ε = 5 %: timpul de creştere și de reglare $t_c = t_r = 0.28$ s și suprareglarea σ = 3.53 %.■

2.12 Proiectarea sistemului automat după metoda polinomială

La sinteza sistemului după funcția de transfer a sistemului, care se construiește în baza modelului părții fixate și a performanțelor impuse sistemului, se impun condițiile de realizabilitate fizică și robustețea sistemului.

Sistemul automat este robust (grosier) dacă la mici variații ai parametrilor sistemului performanțele sistemului calitativ nu se modifică.

La realizarea procedurilor de sinteză a algoritmului după f.d.t. $H_0(s)$ a sistemului închis, condițiile de robustețe pot să nu fie realizate, când polul drept al funcției de transfer al părții fixate se compensează cu zeroul drept al funcției de transfer a regulatorului și zeroul drept al părții fixate se compensează cu polul drept al regulatorului.

Se prezintă metoda se sinteză a algoritmului după ecuația polinomială cu impunerea condițiilor de realizabilitate fizică a algoritmului și condițiilor de robustețe ale sistemului [13, 14].

Procedura de sinteză se reduce la realizarea următoarelor etape.

Funcția de transfer $H_{PF}(s)$ a părții fixate se factorizează în forma:

$$H_{PF}(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B^-(s)B^+(s)}{A^-(s)A^+(s)}, \qquad (2.109)$$

unde $B(s)$, $A(s)$ sunt polinoamele părții fixate, $B^-(s)$, $A^-(s)$ – polinoame cu zerourile alocate în semiplanul stâng al planului complex, iar $B^+(s)$, $A^+(s)$ - polinoame cu zerourile alocate în semiplanul drept al planului complex și zerourile neutre alocate în originea planului. Dacă polinoamele $B(s)$ și $A(s)$ nu conțin zerouri de stânga, atunci polinoamele $B^-(s)$, $A^-(s)$ sunt egale cu constante, iar dacă polinoamele $B(s)$ și $A(s)$ nu conțin zerouri de dreapta, atunci polinoamele $B^+(s)$, $A^+(s)$ se egalează cu unitate. Se notează gradele polinoamelor respective: n_{B^-}, n_{B^+}, n_{A^-}, n_{A^+}, $n_A = n$.

Funcțua de transfer a algoritmului de conducere se reprezintă:

$$H_R(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{H_0(s)}{1-H_0(s)}\frac{1}{H_{PF}(s)} = \frac{A^-(s)A^+(s)}{B^-(s)B^+(s)}\frac{H_0(s)}{1-H_0(s)} = \frac{A^-(s)M(s)}{B^-(s)N(s)s^r}, \qquad (2.110)$$

unde $Q(s)$, $P(s)$ sunt polinoamele regulatorului, $H_0(s)$ – funcția de transfer a sistemului închis, $M(s)$, $N(s)$ – polinoame cu coeficienții necunoscuți care se vor calcula, s^r- componenta care introduce astatism de gradul r pentru a asigura eroarea staționară $\varepsilon = 0$.

În cazul când structura modelului obiectului conține astatism, atunci în structura regulatorului nu se include astatism.

Se construieşte ecuaţia polinomială dorită (ecuația caracteristică) a sistemului prfoiectat de forma:

$$B^+(s)M(s) + A^+(s)N(s)s^r = G(s). \qquad (2.111)$$

Se notează gradele polinoamelor $G(s)$, $M(s)$ și $N(s)$ n_G, n_M, n_N.

Se analizează condiţiile necesare pentru determinarea gradelor n_M, n_N polinoamelor necunoscute $M(s)$ și $N(s)$ pentru ca regulatorul să fie fizic realizabil și ecuaţia polinomială să aibă soluţie.

Se stabilesc condițiile de soluționare a ecuației polinomiale și condițiile de realizabilitate fizică a regulatorului.

Condițiile de soluționare. Din sistemul (2.111), egalând coeficienții din partea dreaptă și partea stângă de pe lângă aseleași puteri ale lui s se obține un sistem din $n_G + 1$ ecuații algebrice cu $n_M + n_N + 2$ necunoscute. Sistemul de ecuații algebrice se soluționează când numărul sistemului de inegalități este:

$$n_G + 1 \leq n_M + n_N + 2 \text{ sau } n_G \leq n_M + n_N + 1. \quad (2.112)$$

Condițiile de realizabilitate fizică a regulatorului. Gradul relativ al funcției de transfer (2.110) a regulatorului va fi nenegativ dacă se realizează inegalitatea:

$$n_{A^-} + n_M \leq n_{B^-} + n_N + r. \quad (2.113)$$

Condiția de robustețe a sistemului sintetizat se descrie de relația:

$$n_G = n_M + n_N + r, \quad (2.114)$$

care se utilizează la determinarea gradelor n_G, n_M, n_N polonoamelor $G(s)$, $M(s)$ și $N(s)$.

Din expresiile (2.112)-(2.114) se determină gradele n_M și n_N polinoamelor $M(s)$, $N(s)$. Pentru ca structura regulatorului să fie de un ordin cât mai redus, se aleg cele mai mici posibile grade n_M și n_N și se construiesc polinoamele $M(s)$ și $N(s)$ cu coeficienții necunoscuți.

Cunoscând gradele n_M și n_N și gradul de astatism din (2.114) se calculează gradul n_G (2.112) polinomului dorit $G(s)$.

Construirea polinomului dorit $G(s)$ poate fi realizată prin mai multe metode [13, 14]:

1) polinomul caracteristic are rădăcinile multiple și răspunsul sistemului este aperiodic monoton optimal după rapiditate, iar eroarea staționară a sistemului $\varepsilon = 0$:

$$G(s) = (s + 1)^n, \quad (2.115)$$

unde n este numărul rădăcinilor polinomului caracteristic;

2) polinomul caracteristic se construieşte în baza funcţiilor de transfer normate;

3) polinomul caracteristic are rădăcinile complexe și reale, care se construieşte în baza performanţelor impuse sistemului proiectat.

În continuare se descrie procedura de construire a polinomului caracteristic dorit $G(s)$ pentru cazul trei [4, 13].

Pentru construirea polinomului caracteristic dorit $G(s)$ al sistemului sintetizat se impun sistemului proiectat gradul de amortizare ξ și timpul de reglare t_r. Sistemul automat cu gradul cu amortizare $\xi = = \sqrt{2}/2 = 0.707$ are cele mai ridicate performanțe [1, 4, 5].

După mărimile cunoscute gradul de amortizare ξ și timpul de reglare t_r se determină pulsația naturală și polii dominanți ai sistemului sintetizat [1, 4, 5]:

$$\omega_n = \frac{4}{\xi t_r} = \frac{4}{0.707 t_r}, \tag{2.116}$$

$$p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -\alpha \pm j\omega \tag{2.117}$$

cu $\alpha = \xi\omega_n$ este partea reală și $\omega = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ - partea imaginară a rădăcinii, care este pulsația de amortizare a sistemului.

Se construiește polinomul caracteristic $G(s)$ al sistemului închis cu gradul $n_G = 2 + k$ cu doi poli dominanți și k poli suplimentari alocați pe semiaxa reală negativă cât mai departe de polii dominanți pentru satisfacerea performanțelor impuse sistemului:

$$G(s) = (s + \alpha + j\omega)(s + \alpha - j\omega)(s + 30)^k =$$
$$= (s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 + \omega^2)(s + 30)^k, \tag{2.118}$$

unde k se alege din condiția de realizabilitate a regulatorului.

Polinoamele $M(s)$ și $N(s)$ cu coeficienții necunoscuți și polinomul $G(s)$ din (2.118) se substituie în ecuația polinomială (2.111) și, egalând coeficienții de pe lângă aceleași puteri ale lui s din partea stângă și partea dreaptă a egalității (2.111), se alcătuiește sistemul de ecuații algebrice și se determină coeficienții polinoamelor $M(s)$ și $N(s)$.

În f.d.t. $H_R(s)$ a regulatorului (2.110) se substituie polinoamele $M(s)$ și $N(s)$ și se obține funcția de transfer finală a algoritmului.

$$H_R(s) = \frac{A^-(s)M(s)}{B^-(s)N(s)s^r} = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{q_0 s^m + q_1 s^{m-1} + \cdots + q_{m-1}s + q_m}{(p_0 s^n + p_1 s^{n-1} + \cdots p_{n-1}s + p_n)s^r} \tag{2.119}$$

cu $m_Q \leq n_P$ care este condiţia de realizabilitate fizică a regulatorului.

Funcția de transfer a sistemului deschis este:

$$H_d(s) = H_R(s)H_P(s) = \frac{A^-(s)M(s)}{B^-(s)N(s)s^r}\frac{B^-(s)B^+(s)}{A^-(s)A^+(s)} = \frac{M(s)}{N(s)s^r}\frac{B^+(s)}{A^+(s)}$$

și se determină funcția de transfer a sistemului închis:

$$H_0(s) = \frac{H_d(s)}{1+H_d(s)} = \frac{M(s)B^+(s)}{A^+(s)N(s)s^r+M(s)B^+(s)} = \frac{1}{A^+(s)N(s)s^r/M(s)B^+(s)+1}.$$

Avantajul metodei polinomiale de sinteză a algoritmului de conducere este aplicabilitatea pentru modele ale proceselor cu diverse proprietăți și de ordin ridicat: modele de obiecte cu inerție, modele de obiecte cu inerție și astatism, modele de obiecte cu anticipație și inerție, modele de obiecte cu anticipație, inerție și astatism, modele de obiecte cu inerție, modele de obiecte instabile etc.

În continuare, se analizează exemple de sinteză a algoritmului după metoda polinomială pentru modele de obiecte cu diverse proprietăți.

Exemplul 2.10. Se consideră modelul obiectului cu inerție de ordinul $n = 1$ cu parametrii cunoscuți descris cu funcția de transfer factorizată:

$$H_1(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0}{a_0s+a_1} = \frac{2}{10s+1} = \frac{B^-(s)B^+(s)}{A^-(s)A^+(s)},$$

cu $B^-(s) = b_0 = 2$, $B^+(s) = 1$, $A^-(s) = a_0s + a_1 = 10s + 1, A^+(s) = 1$ și cu gradele $n_{B^-} = n_{B^+} = 0, n_{A^-} = 1, n_{A^+} = 0,\ n_A = n = 1$.

Se cere pentru gradul de amortizare $\xi = 0.707$ și 0.8, timpul de reglare $t_r =$ $= 1$ s și gradul de astatism $r = 1$ să se acordeze regulatorul după metoda polinomială.

Soluționare. Se determină pulsația naturală din (2.116), polii dominanți după (2.117) și se construiește polinomul $G(s)$ al sistemului închis cu doi poli dominanți cu gradul $n = 2$:

$$\omega_n = \frac{4}{\xi t_r} = \frac{4}{0.707\cdot 1} = 5.6577,$$

$$p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -0.707 \cdot 5.6577 \pm j\, 5.6577 \cdot 0.707 = -4 \pm j4,$$

$$G(s) = (s + 4 + j4)(s + 4 - j4) = s^2 + 8s + 32.$$

Din a treia condiție din (2.114) la gradele lui $n_M = 0, n_N = 1$ și $r = 1$ se determină gradul polinomului dorit: $n_G = n_{A^+} + n_N + r = 0 + 1 + 1 = 2$, iar polinoamele necunoscute se descriu $M(s) = m_0$, $N(s) = n_0s + n_1$ și se construiește polinomul caracteristic dorit:

$$B^+(s)M(s) + A^+(s)N(s) = 1 \cdot m_0 + s(n_0s + n_1) = n_0s^2 + n_1s + m_0 = G(s). \ (*)$$

În expresia $(*)$ se substituie $G(s)$ și se obține egalitatea:

$$n_0s^2 + n_1s + m_0 = s^2 + 8s + 32,$$

din care prin egalarea coeficienților de pe lângă aceleași puteri ale lui s din partea stângă și partea dreaptă se obțin valorile coeficienților $n_0 = 1$, $n_1 = 8$, $m_0 = 32$.

Algoritmul de conducere se calculează cu relația (2.119) pentru gradul de amortizare $\xi = 0.707$ ($H_{R1}(s)$) și $\xi = 0.8$ ($H_{R2}(s)$):

$$H_{R1}(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{A^{-}(s)M(s)}{B^{-}(s)N(s)s^{r}} = \frac{m_0(a_0 s + a_1)}{b_0(n_0 s^2 + n_1 s)} = \frac{32(10s+1)}{2(s^2+8s)} = \frac{320s+32}{2s^2+16s};$$

$$H_{R2}(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{A^{-}(s)M(s)}{B^{-}(s)N(s)s^{r}} = \frac{m_0(a_0 s + a_1)}{b_0(n_0 s^2 + n_1 s)} = \frac{25(10s+1)}{2(s^2+8s)} = \frac{250s+25}{2s^2+16s}.$$

S-a simulat sistemul cu regulatorul sintetizat și la $\varepsilon = 5$ % s-au obținut performanțele:

1) pentru (0.707, 1 s): $t_c = 0.5$, $t_\sigma = 0.76$ s, $\sigma = 6.09$ %, $t_r = 0.9$ s, λ=1;

2) pentru (0.8, 1 s): $t_c = 0.65$, $t_\sigma = 0.99$ s, $\sigma = 2.55$ %, $t_r = 0.65$ s.■

Exemplul 2.11. Se consideră modelul obiectului de reglare cu inerție de ordinul doi descris de funcția de transfer cu parametrii cunoscuți în formă factorizată:

$$H_P(s) = \frac{B_P(s)}{A_P(s)} = \frac{2}{(s+2)(s+5)} = \frac{2}{s^2+7s+10} = \frac{b_0}{a_0 s^2 + a_1 s + a_2} = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B^{-}(s)B^{+}(s)}{A^{-}(s)A^{+}(s)},$$

unde $B^{-}(s) = b_0 = 2$, $B^{+}(s) = 1$, $A^{-}(s) = a_0 s^2 + a_1 s + a_2 = s^2 + 7s + 10$, $A^{+}(s) = 1$ și cu gradele $n_{B^-} = n_{B^+} = 0$, $n_{A^-} = 2$, $n_{A^+} = 0$, $n_A = n = 2$.

Se cere pentru gradul de amortizare $\xi = 0.707$ și $\xi = 0.8$, timpul de reglare $t_r = 1$ s și gradul de astatism $r = 1$ să se sintetizeze algoritmul de regalre la modelul obiectului după metoda polinomială.

Soluționare. Calculul este similar celui din ex. 2.10 și se obțin pulsația, polii dominanți și polinomul caracteristic dorit de gradul $n = 2$ cu polii dominanți:

$$\omega_n = \frac{4}{\xi t_r} = \frac{4}{0.707\cdot 1} = 5.6577,\ G(s) = (s + 4 + j4)(s + 4 - j4) = s^2 + 8s + 32.$$

Se construiește ecuația polinomială cu gradele lui $n_M = 0$, $n_N = 1$, $r = 1$ și se determină gradul polinomului dorit: $n_G = n_{A^+} + n_N + r = 0 + 1 + 1 = 2$, iar polinoamele necunoscute se descriu $M(s) = m_0$, $N(s) = n_0 s + n_1$ și se obține ecuația polinomială:

$$G(s) = B^{+}(s)M(s) + A^{+}(s)N(s)s = 1\cdot m_0 + 1\cdot(n_0 s + n_1)s =$$
$$= n_0 s^2 + n_1 s + m_0 = s^2 + 8s + 32,$$

din care și se determină valorile coeficienților $n_0 = 1$, $n_1 = 8$, $m_0 = 32$.

Algoritmul de conducere se calculează cu relația (2.119) pentru gradul de amortizare $\xi = 0.707$ și $\xi = 0.8$ respectiv:

$$H_{R1}(s) = \frac{A^{-}(s)M(s)}{B^{-}(s)N(s)s} = \frac{m_0(a_0 s^2 + a_1 s + a_2)}{b_0(n_0 s + n_1)s} = \frac{32(s^2+7s+10)}{2(s^2+8s)} = \frac{32s^2+224s+320}{2s^2+16s};$$

$$H_{R2}(s) = \frac{A^{-}(s)M(s)}{B^{-}(s)N(s)s} = \frac{m_0(a_0s^2+a_1s+a_2)}{b_0(n_0s+n_1)s} = \frac{25(s^2+7s+10)}{2(s^2+8s)} = \frac{25s^2+175s+250}{2s^2+16s}.$$

S-a simulat sistemul cu regulatorul sintetizat cu gradul de amortizare $\xi = 0.707$ și $\xi = 0.8$, timpul de reglare $t_r = 1$ și la $\varepsilon = 5$ % s-au obținut performanțele:

1) $t_c = 0.5$, $t_\sigma = 0.76$ s, $\sigma = 6.09$ %, $t_r = 0.9$ s, $\lambda = 1$;

2) $t_c = 0.65$, $t_\sigma = 0.99$ s, $\sigma = 2.55$ %, $t_r = 0.65$ s.

S-a sintetizat regulatorul după metoda polinomială cu ecuaţia polinomială cu cei doi poli dominanți $G(s) = s^2 + 4s + 9$ de la metoda poli-zerouri și s-a determinat f.d.t. a regulatorului:

$$H_R^*(s) = \frac{9s^2+63s+90}{2s^2+8s}. \qquad (*)$$

În figura 2.16 se dau răspunsurile indiciale ale sistemului sintetizat: alura 1 - sistemul cu modelul obiectului din ex. 2.9 cu regulatorul sintetizat $H_R(s)$ după metoda poli-zerouri, alura 2 - sistemul cu modelul obiectului din ex. 2.11 cu regulatorul sintetizat $H_{R1}(s)$ după metoda polinomială (cu $\xi = 0.707$ și $t_r = 1$ s), alura 3 - sistemul cu modelul obiectului din ex. 2.11 cu regulatorul sintetizat $H_{R2}(s)$ după metoda polinomială (cu $\xi = 0.8$ și $t_r = 1$ s), alura 4 - sistemul cu modelul obiectului din ex. 2.9 cu regulatorul $H_R^*(s)$ din $(*)$ sintetizat după metoda polinomială cu ecuaţia polinomială de la metoda poli-zerouri cu cei doi poli dominanți $G(s) = s^2 + 4s + 9$.

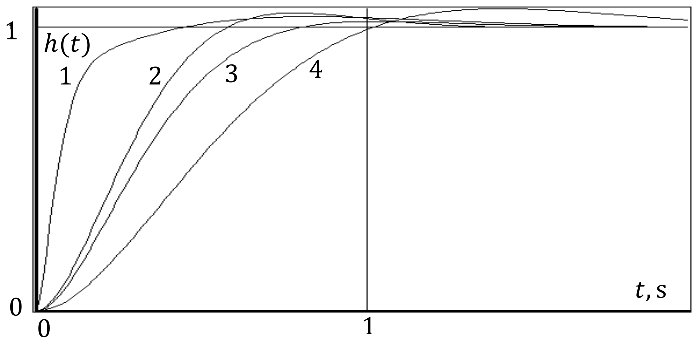

Fig. 2.16. Răspunsurile indiciale ale sistemului automat

Pentru răspunsurile indiciale ale sistemului din fig. 2.16 la eroarea $\varepsilon = 5$ % s-au obținut performanțele:

1) alura 1: timpul de creştere și de reglare $t_c = t_r = 0.28$ s, suprareglarea $\sigma = 3.53$ %;

2) alura 2: $t_c = t_r = 0.51$ s, $t_\sigma = 0.78$ s, $\sigma = 4.86$ %, $\lambda = 1$;

3) alura 3: $t_c = t_r = 0.66$ s, $t_\sigma = 1.03$, $\sigma = 1.88$ %;

4) alura 4: $t_c = 0.91$ s, $t_\sigma = 1.41$, $\sigma = 6.32\%$, $t_r = 1.67$ s, $\lambda = 1$.■

Exemplul 2.12. Se consideră modelul obiectului cu inerție de ordinul unu și astatism descris de funcția de transfer cu parametrii cunoscuți în formă factorizată:

$$H_P(s) = \frac{b_0}{s(a_0 s + a_1)} = \frac{4}{s(15s+1)} = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B^-(s)B^+(s)}{A^-(s)A^+(s)}$$

cu $B^-(s) = b_0 = 4$, $B^+(s) = 1$, $A^-(s) = a_0 s + a_1 = 15s + 1$, $A^+(s) = s$ și cu gradele $n_{B^-} = n_{B^+} = 0$, $n_{A^-} = n_{A^+} = 1$, $n_A = n = 2$.

Se cere pentru gradul de amortizare $\xi = 0.707$ și $\xi = 0.8$, timpul de reglare $t_r = 1$ s să se sintetizeze regulatorul la modelul obiectului după metoda polinomială.

Soluționare. Calculul este similar din ex. 2.10 și se obțin pulsația, polii dominanți și polinomul caracteristic de gradul $n = 2$ cu polii dominanți:

$$\omega_n = \frac{4}{\xi t_r} = \frac{4}{0.707 \cdot 1} = 5.6577,\ G(s) = (s + 4 + j4)(s + 4 - j4) = s^2 + 8s + 32.$$

Se construiește ecuația polinomială cu gradele lui $n_M = 0$, $n_N = 1$ și $r = 0$ și se determină gradul polinomului dorit: $n_G = n_{A^+} + n_N + r = 1 + 1 + 0 = 2$, iar polinoamele necunoscute se descriu $M(s) = m_0$, $N(s) = n_0 s + n_1$ și se obține ecuația polinomială:

$$B^+(s)M(s) + A^+(s)N(s) = G(s),$$

$$1 \cdot m_0 + s(n_0 s + n_1) = n_0 s^2 + n_1 s + m_0 = s^2 + 8s + 32,$$

din care și se deterină valorile coeficienților $n_0 = 1$, $n_1 = 8$, $m_0 = 32$.

Algoritmul de conducere se calculează cu relația (2.119) pentru gradul de amortizare $\xi = 0.707$ și $\xi = 0.8$ respectiv:

$$H_{R1}(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{A^-(s)M(s)}{B^-(s)N(s)} = \frac{m_0(a_0 s + a_1)}{b_0(n_0 s + n_1)} = \frac{32(15s+1)}{4(s+8)} = \frac{480s+32}{4s+32};$$

$$H_{R2}(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{A^-(s)M(s)}{B^-(s)N(s)} = \frac{m_0(a_0 s + a_1)}{b_0(n_0 s + n_1)} = \frac{25(15s+1)}{4(s+8)} = \frac{375s+25}{4s+32}.$$

S-a simulat sistemul cu regulatorul sintetizat $H_{R1}(s)$ și $H_{R2}(s)$ și cu eroarea $\varepsilon = 5$ % s-au obținut performanțele:

1) $t_c = 0.5$, $t_\sigma = 0.76$ s, $\sigma = 6.09$ %, $t_r = 0.9$ s, $\lambda = 1$;

2) $t_c = 0.65$, $t_\sigma = 0.99$ s, $\sigma = 2.55$ %, $t_r = 0.65$ s.■

Exemplul 2.13. Se consideră modelul obiectului cu anticipație și inerție de gradul trei descris de funcția de transfer cu parametrii cunoscuți în formă factorizată:

$$H_P(s) = \frac{b_0 s + b_1}{a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} = \frac{5s+6}{30s^3+20s^2+25s+8} = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B^-(s)B^+(s)}{A^-(s)A^+(s)}$$

cu $B^-(s) = b_0 s + b_1 = 5s + 6$, $B^+(s) = 1$, $A^-(s) = a_0 s^3 + a_1 s^2 a_2 s + a_3 =$
$= 30s^3 + 20s^2 + 25s + 8$, $A^+(s) = 1$ și cu gradele $n_{B^-} = 1$, $n_{B^+} = 0$, $n_{A^-} = 3$, $n_{A^+} = 0$, $n_A = n = 3$.

Se cere pentru gradul de amortizare $\xi = 0.707$ și $\xi = 0.8$, timpul de reglare $t_r = 1$ s și gradul de astatism $r = 1$ să se sintetizeze regulatorul la modelul obiectului după metoda polinomială.

Soluționare. Calculul este similar din ex. 2.10 și se obțin pulsația, polii dominanți și polinomul caracteristic de gradul $n = 2$ cu cei doi poli dominanți:

$$\omega_n = \frac{4}{\xi t_r} = \frac{4}{0.707 \cdot 1} = 5.6577,\ G(s) = (s + 4 + j4)(s + 4 - j4) = s^2 + 8s + 32.$$

Se construiește ecuația polinomială cu gradele lui $n_M = 0$, $n_N = 1$ și $r = 1$ și se determină gradul polinomului dorit: $n_G = n_{A^+} + n_N + r = 0 + 1 + 1 = 2$, iar polinoamele necunoscute se descriu $M(s) = m_0$, $N(s) = n_0 s + n_1$ și se obține ecuația polinomială:

$$B^+(s)M(s) + A^+(s)N(s) = G(s),$$

$$1 \cdot m_0 + s(n_0 s + n_1) = n_0 s^2 + n_1 s + m_0 = s^2 + 8s + 32,$$

din care și se determină valorile coeficienților $n_0 = 1$, $n_1 = 8$, $m_0 = 32$.

Regulatorul se determină cu relația (2.119) pentru gradul de amortizare $\xi =$ $= 0.707$ și $\xi = 0.8$ respectiv:

$$H_{R1}(s) = \frac{A^-(s)M(s)}{B^-(s)N(s)s} = \frac{m_0(a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3)}{(b_0 s + b_1)(n_0 s + n_1)s} = \frac{32(30s^3 + 20s^2 + 25s + 8)}{(5s + 6)(s^2 + 8s)} = \frac{960s^3 + 640s^2 + 800s + 256}{5s^3 + 46s^2 + 48s};$$

$$H_{R2}(s) = \frac{A^-(s)M(s)}{B^-(s)N(s)s} = \frac{m_0(a_0 s^3 + a_1 s^2 a_2 s + a_3)}{(b_0 s + b_1)(n_0 s + n_1)s} = \frac{25(30s^3 + 20s^2 + 25s + 8)}{(5s + 6)(s^2 + 8s)} = \frac{750s^3 + 500s^2 + 625s + 200}{5s^3 + 46s^2 + 48s}.$$

S-a simulat sistemul cu regulatorul sintetizat și la eroarea $\varepsilon = 5$ % s-au obținut performanțele:

1) $t_c = 0.5$, $t_\sigma = 0.76$ s, $\sigma = 6.09$ %, $t_r = 0.9$ s, $\lambda = 1$;

2) $t_c = 0.65$, $t_\sigma = 0.99$ s, $\sigma = 2.55$ %, $t_r = 0.65$ s.■

Exemplul 2.14. Se consideră obiectul de reglare cu anticipație și inerție de gradul patru și astatism descris de f.d.t. cu parametrii cunoscuți în formă factorizată:

$$H_P(s) = \frac{b_0 s + b_1}{s(a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4)} = \frac{3s + 4}{s(29s^4 + 35s^3 + 31s^2 + 23s + 3)} =$$

$$= \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B^-(s)B^+(s)}{A^-(s)A^+(s)},$$

cu $B^-(s) = b_0 s + b_1 = 3s + 4$, $B^+(s) = 1$, $A^-(s) = a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s +$ $+ a_4 = 29s^4 + 35s^3 + 31s^2 + 23s + 3$, $A^+(s) = s$ și cu gradele $n_{B^-} = 1$, $n_{B^+} = 0$, $n_{A^-} = 4$, $n_{A^+} = 1$, $n_A = n = 5$.

Se cere pentru gradul de amortizare $\xi = 0.707$ și $\xi = 0.8$, timpul de reglare $t_r = 1$ s să se sintetizeze regulatorul la modelul obiectului după metoda polinomială.

Soluționare. Calculul este similar din ex. 2.10 și se obțin pulsația, polii dominanți și polinomul caracteristic de gradul $n = 4$ cu doi poli dominanți și doi poli suplimentari:

$\omega_n = \frac{4}{\xi t_r} = \frac{4}{0.707\cdot 1} = 5.6577$, $G(s) = (s^2 + 8s + 32)(s + 30)^2 =$

$= s^4 + 68s^3 + 1412s^2 + 9120s + 28800.$

Se construiește ecuația polinomială cu gradele lui $n_M = 0$, $n_N = 3$ și se determină gradul polinomului dorit: $n_G = n_{A^+} + n_N + r = 1 + 3 + 0 = 4$, iar polinoamele necunoscute se descriu $M(s) = m_0$, $N(s) = n_0 s^3 + n_1 s^2 + n_2 s + n_3$ și se obține ecuația polinomială:

$$G(s) = B^+(s)M(s) + A^+(s)N(s) = 1 \cdot m_0 + s(n_0 s^3 + n_1 s^2 + n_2 s + n_3) =$$

$$= n_0 s^4 + n_1 s^3 + n_2 s^2 + n_3 s + m_0 = s^4 + 68s^3 + 1412s^2 + 9120s + 28800$$

și se determină coeficienții $n_0 = 1$, $n_1 = 68$, $n_2 = 1412$, $n_3 = 9120$, $m_0 = 28800$.

Algoritmul de conducere se calculează cu relația (2.119) pentru gradul de amortizare $\xi = 0.707$ și $\xi = 0.8$ respectiv:

$$H_{R1}(s) = \frac{A^-(s)M(s)}{B^-(s)N(s)} = \frac{m_0(a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4)}{(b_0 s + b_1)(n_0 s^3 + n_1 s^2 + n_2 s + n_3)} = \frac{28800(29s^4 + 35s^3 + 31s^2 + 23s + 3)}{(3s + 4)(s^3 + 68s^2 + 1412s + 9120)} =$$

$$= \frac{835200s^4 + 1008000s^3 + 892800s^2 + 662400s + 86400}{3s^4 + 208s^3 + 4508s^2 + 33008s + 36480};$$

$$H_{R2}(s) = \frac{A^-(s)M(s)}{B^-(s)N(s)} = \frac{m_0(a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4)}{(b_0 s + b_1)(n_0 s^3 + n_1 s^2 + n_2 s + n_3)} = \frac{22500(29s^4 + 35s^3 + 31s^2 + 23s + 3)}{(3s + 4)(s^3 + 68s^2 + 1405s + 8700)} =$$

$$= \frac{652500s^4 + 787500s^3 + 697500s^2 + 517500s + 67500}{3s^4 + 208s^3 + 4487s^2 + 31720s + 34800}.$$

S-a simulat sistemul cu regulatorul sintetizat și răspunsurile sunt prezentate în fig. 2.17 (alura 1 cu $\xi = 0.707$, alura 2 cu $\xi = 0.8$) și la eroarea $\varepsilon = 5$ % s-au obținut performanțele:

1) curba 1: $t_c = 0.58$, $t_\sigma = 0.85$ s, $\sigma = 6.30$ %, $t_r = 1$ s, $\lambda = 1$;
2) curba 2: $t_c = 0.72$, $t_\sigma = 1.07$ s, $\sigma = 2.79$ %, $t_r = 0.72$ s.■

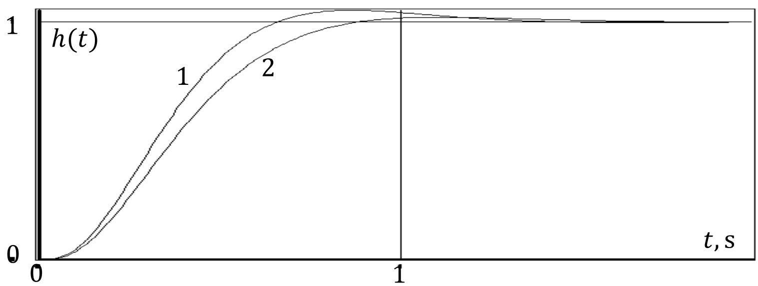

Fig. 2.17. Răspunsurile indiciale ale sistemului automat la ex. 2.14

Exemplul 2.15. Se consideră modelul obiectului de reglare cu fază neminimă, inerție de ordinul unu și astatism descris cu funcția de transfer cu parametrii cunoscuți:

$$H(s) = \frac{-b_0 s + b_1}{s(a_0 s + a_1)} = \frac{-3s+5}{s(10s+2)} = \frac{B^-(s)B^+(s)}{A^-(s)A^+(s)},$$

unde $B^-(s) = 1$, $B^+(s) = -b_0 s + b_1 = -3s + 5$, $A^-(s) = 10s + 2$, $A^+(s) = s$ și gradele polinoamelor $n_{B^-} = 0$, $n_{B^+} = 1$, $n_{A^-} = 1$, $n_{A^+} = 1$, $n_A = n = 2$.

Se cere pentru gradul de amortizare ξ = 0.707, timpul de reglare $t_r = 1$ s, gradul de astatism $r = 0$ și eroarea staționară $\varepsilon = 0$ să se sintetizeze algoritmul de reglare pentru modelul dat prin metoda polinomială.

Soluționare. Se prezintă două proceduri de sinteză a algoritmului de reglare.

1. Polinomul caracterisric dorit se construiește pentru cazul când rădăcinele sunt multiple cu gradele lui $n_M = 0$, $n_N = 1$ și se determină gradul polinomului dorit: $n_G = n_{A^+} + n_N + r = 1 + 1 + 0 = 2$, iar polinoamele necunoscute se descriu $M(s) = m_0$, $N(s) = n_0 s + n_1$ și se obține ecuația polinomială:

$$B^+(s)M(s) + A^+(s)N(s) = G(s),$$

$$(-3s + 5)m_0 + s(n_0 s + n_1) = n_0 s^2 + s(n_1 - 3m_0) + 5m_0 = s^2 + 2s + 1,$$

din care se determină valorile coeficienților $n_0 = 1$, $n_1 = 2.6$, $m_0 = 0.2$.

Algoritmul de conducere se calculează cu relația (2.119):

$$H_{R1}(s) = \frac{A^-(s)M(s)}{B^-(s)N(s)} = \frac{m_0(a_0 s + a_1)}{1\cdot(n_0 s + n_1)} = \frac{0.2(10s+2)}{s+2.6} = \frac{2s+0.4}{s+2.6}.$$

2. Procedura de sinteză este similară din ex. 2.10-2.11. Algoritmul de conducere se construiește cu gradele $n_M = 0$, $n_N = 1$ și se determină gradul polinomului dorit:$n_G = n_{A^+} + n_N + r = 1 + 1 + 0 = 2$, iar polinoamele necunoscute se descriu $M(s) = m_0$, $N(s) = n_0 s + n_1$ și se obține ecuația polinomială:

$$B^+(s)M(s) + A^+(s)N(s) = G(s),$$

$$(-3s + 5)m_0 + s(n_0 s + n_1) = n_0 s^2 + s(n_1 - 3m_0) + 5m_0 = s^2 + 8s + 32,$$

din care se determină valorile coeficienților $n_0 = 1$, $n_1 = 27.2$, $m_0 = 6.4$.

Algoritmul de conducere se calculează cu relația (2.119):

$$H_{R1}(s) = \frac{A^-(s)M(s)}{B^-(s)N(s)} = \frac{m_0(a_0 s + a_1)}{1\cdot(n_0 s + n_1)} = \frac{6.4(10s+2)}{s+19.2} = \frac{64s+12.8}{s+27.2}.$$

S-a simulat sistemul cu regulatorul sintetizat după prima și a doua procedură a metodei polinomiale și răspunsurile indiciale sunt prezentate în fig. 2.18.

În fig. 2.18 alura 1 este pentru rădăcini multiple, alura 2 - cu doi poli dominanți.

La la eroarea $\varepsilon = 5$ % s-au obținut performanțele sistemului:

1) alura 1: la $t = 0.37$ s, $h(t)$ =-0.0975, $t_c = t_r = 5.2$ s;

2) alura 2: la $t = 0.17$ s, $h(t) = -0.0975$, $t_c = 0.72$ s, σ = 16.02 %, $t_r =$

$= 1.33$ s, $\lambda = 1$.

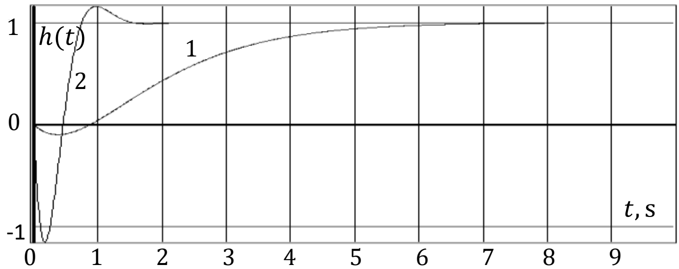

Fig. 2.18. Răspunsurile indiciale ale sistemului automat la ex. 2.15

Concluzii. Răspunsurile indiciale ale sistemului cu regulatorul sintetizat după cele două tipuri de ecuații polinomiale au o valoare negativă, care depinde de varianta ecuației polinomiale.

2.13 Proiectarea sistemului automat în raport cu perturbația

În practică sunt situații în care proiectarea sistemului automat se impune a fi efectuată în raport cu perturbația. Se consideră o structură convențională a sistemului de reglare automată dată în fig. 2.19.

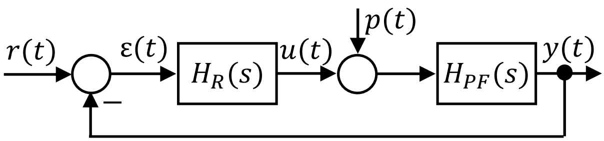

Fig. 2.19. Structura sistemului de reglare automată cu acțiunea perturbației

Funcția de transfer a sistemului închis a transferului perturbație-ieșire și algoritmul de reglare se determină după relațiile [4, 5]:

$$H_{0p}(s) = \frac{H_{PF}(s)}{1+H_R(s)H_{PF}(s)},$$

$$H_R(s) = H_{0p}^{-1}(s) - H_P^{-1}(s), \tag{2.120}$$

Construcția f.d.t. $H_{0p}(s)$ a sistemului închis perturbație–ieșire se proiectează, pornind de la performanţele impuse sistemului. Se descrie procedura de construcție a f.d.t. $H_{0p}(s)$ când procesul se descrie de f.d.t.:

$$H_{PF}(s) = \frac{k}{s(T_p s+1)} \tag{2.121}$$

și un algoritm de reglare de tip proporțional:

$$H_R(s) = k_p. \tag{2.122}$$

Se determină f.d.t. a transferului perturbație-ieșire:

$$H_{0p}(s) = \frac{H_{PF}(s)}{1+H_R(s)H_{PF}(s)} = \frac{\frac{k}{s(T_p s+1)}}{1+\frac{k}{s(T_p s+1)}k_p} = \frac{k}{s(T_p s+1)+kk_p} =$$

$$= \frac{k/T_p}{s^2+\frac{1}{T_p}s+\frac{kk_p}{T_p}} = \frac{\omega_n^2/k_p}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} = \frac{1}{k_p}\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}, \tag{2.123}$$

unde $\omega_n^2 = \frac{kk_p}{T_p}$, $2\xi\omega_n = \frac{1}{T_p}$.

Se prezintă ieșirea sistemului din (2.123) pentru perturbație de tip treaptă unitară în formă operațională:

$$y_p(s) = H_{0p}(s)p(s) = \frac{1}{k_p}\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}\frac{1}{s}. \tag{2.124}$$

În regim staționar din (2.124) se obține:

$$y_{pst} = \lim_{s\to 0} s y_v(s) = \frac{1}{k_p}, \tag{2.125}$$

de unde rezultă că eroarea este diferită de zero și se reduce când $k_p \to \infty$.

Astfel, sistemul în aceste condiții nu rejectează exact acțiunea perturbației de tip treaptă și funcționează cu eroare în regim staționar.

Se consideră un proces de ordinul unu cu f.d.t. de forma:

$$H_{PF}(s) = \frac{k}{T_p s+1} \tag{2.126}$$

şi un algoritm de reglare de tip PI:

$$H_{PI}(s) = k_p + \frac{1}{T_i s} = k_p(1+\frac{1}{T_i s}). \tag{2.127}$$

Se calculează f.d.t. a sistemului închis în forma:

$$H_{0p}(s) = \frac{H_P(s)}{1+H_R(s)H_P(s)} = \frac{kT_i s}{T_iT_p s^2+T_i s(1+kk_p)+kk_p} =$$

$$= \frac{\omega_n^2 \frac{T_i}{k_p} s}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} = \frac{T_i}{k_p}\frac{\omega_n^2 s}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}, \quad (2.128)$$

unde parametrii sistemului ξ şi ω_n se determină de relaţiile:

$$\xi = \frac{1+kk_p}{2T_p}\sqrt{\frac{T_iT_p}{kk_p}},\ \omega_n^2 = \frac{kk_p}{T_iT_p},\ \ \omega_n = \sqrt{\frac{kk_p}{T_iT_p}}. \quad (2.129)$$

În cazul dat regimul staționar al sistemului $y_{pst} = 0$:

$$y_{p\mathrm{st}} = \lim_{s\to 0} s\, y_v(s) = \lim_{s\to 0} s\, y_v(s)\frac{T_i}{k_p}\frac{\omega_n^2 s}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} = 0. \quad (2.130)$$

Relația (2.130) se realizează atunci când în structura sistemului integratorul este plasat înaintea punctului de aplicație al perturbației.

Se determină răspunsul indicial al sistemului la semnalul de perturbație de tip treaptă unitară:

$$y_p(s) = H_{0p}(s)p(s) = \frac{T_i}{k_p}\frac{\omega_n^2 s}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}\frac{1}{s} = \frac{T_i}{k_p}\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}. \quad (2.131)$$

În domeniul timpului ieșirea sistemului este:

$$y_p(t) = \frac{T_i}{k_p}\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\sin\omega_n t\sqrt{1-\xi^2}. \quad (2.132)$$

Pentru aceeași structură de sistem se determină f.d.t. a sistemului închis a transferului referință – ieșire:

$$H_0(s) = \frac{H_R(s)H_P(s)}{1+H_R(s)H_P(s)} = \frac{kk_p(1+T_i s)}{T_iT_p s^2+T_i s(1+kk_p)+kk_p} = \frac{\omega_n^2(1+T_i s)}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}, \quad (2.133)$$

unde parametrii sistemului ξ şi ω_n se descriu cu expresiile (2.129).

Pentru un răspuns dorit al sistemului cu ξ, ω_n, k_p, T_i date în raport cu referința și care satisface unele performanțe în regim tranzitoriu și staționar, răspunsul la perturbație este puternic influențat de raportul T_i/k_p, care la valori mari determină valori mari ale răspunsului $y_p(t)$ şi o creştere a suprareglajului σ. În raport cu referința, valori mari ale raportului T_i/k_p conduc la o creştere a suprareglajului σ şi a vitezei de răspuns, dar și o reducere a gradului de stabilitate.

Pentru proiectarea unui sistem optimal se cere alegerea valorilor lui ξ, care să asigure şi gradul de amortizare dorit în raport cu perturbația.

Pentru un raport T_i/k_p impus amplitudinea $y_p(t)$ să fie limitată, se determină valorile lui T_i, k_p care asigură gradul de amortizare dorit.

Procedura de proiectare urmează etapele:

1. Se determină polii și zerourile f.d.t. $H_P(s)$ a procesului.

2. Se construiește f.d.t. $H_{0p}(s)$ a sistemului închis care satisface performanţele în raport cu perturbaţia selectată.

3. Se calculează f.d.t. $H_R(s)$ a regulatorului după relaţia (2.120) astfel ca să fie fizic realizabil.

4. Se introduc elemente de corecție în structura regulatorului și se verifică asigurarea performanţelor.

5. Se analizează comportarea sistemului în raport cu referința și se ajustează parametrii algoritmului astfel ca performanțele sistemului să fie asigurate.

6. Procedura se încheie când sunt satisfăcute toate performanțele în raport cu perturbația și performanțele admisibile în raport cu referința.

2.14 Alegerea și acordarea regulatoarelor pentru procese rapide

2.14.1 *Introducere*

Acordarea regulatoarelor convenționale de tip PID presupune determinarea valorilor optimale ale parametrilor k_p, T_i, T_d care asigură pentru un proces dat performanţele impuse sistemului în raport cu semnalele de referință și perturbație ce acționează asupra lui.

Din punctul de vedere al conducerii automate obiectele de conducere în funcție de valorile constantelor de timp și a timpului mort se separă în două categorii [4, 5]:

1) *procese rapide* cu constantele de timp dominante mai mici de 10 s și constante de timp parazite cu mult mai mici, care sunt caracteristice pentru procese energetice;

2) *procese lente* cu evidențierea a constantelor de timp dominante.

Astfel, este posibilă utilizarea unor metode analitice pentru acordarea optimală a algoritmului de tip PID pentru procese rapide [4, 5].

Se prezintă *metoda* (*criteriul*) *modulului Kessler și metoda* (*criteriul*) *simetriei.*

2.14.2 *Criteriul modulului*

Pornind de la condiția timpului de reglare să fie minimal (banda de frecvență cât mai mare), există metode de determinare a valorilor optimale ale parametrilor de acord ai algoritmului de tip PID în funcție de valorile date ale parametrilor obiectului de reglare.

Se consideră un model al obiectului de reglare descris de f.d.t.:

$$H_P(s) = \frac{k}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)(T_3 s+1)\ldots(T_n s+1)} \approx \frac{k}{\prod_{i=1}^{m}(T_i s+1)(T_\Sigma s+1)}, \quad (2.134)$$

unde s-au separat constantele de timp dominante m şi prezentate ca produsul acestora, iar constantele de timp mici se însumează şi se exprimă prin constanta de timp T_Σ.

Satisfacerea condițiilor menționate presupune proiectarea unui regulator descris de f.d.t. de forma:

$$H_R(s) = \frac{\prod_{r=1}^{m}(\theta_r s+1)}{\theta s} = \frac{k_p \prod_{r=1}^{m}(\theta_r s+1)}{s}, \quad (2.135)$$

iar parametrii de acord ai regulatorului se calculează cu relațiile:

$$\theta_r = T_r,\ \theta = 2kT_\Sigma,\ k_p = \frac{1}{\theta} = \frac{1}{2kT_\Sigma}, \quad (2.136)$$

care să compenseze cele mai mari constante de timp ale obiectului.

Se determină f.d.t. ale sistemului deschis $H_d(s)$ şi închis $H_0(s)$ şi după transformările respective se obțin relațiile:

$$H_d(s) = H_R(s)H_P(s) = \frac{k_p \prod_{r=1}^{m}(\theta_r s+1)}{s} \frac{k}{\prod_{i=1}^{m}(T_i s+1)(T_\Sigma s+1)} =$$

$$= \frac{1}{2T_\Sigma s(T_\Sigma s+1)} = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}, \quad (2.137)$$

$$H_0(s) = \frac{H_d(s)}{1+H_d(s)} = \frac{1}{2T_\Sigma^2 s^2 + 2T_\Sigma s + 1}. \qquad (2.138)$$

Din relația (2.138) rezultă că performanțele sistemului sunt determinate de constanta de timp parazită T_Σ. Funcţia de transfer (2.138) este un model echivalent al sistemului de ordinul doi cu parametrii: coeficientul de amortizare $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$ şi pulsaţia $\omega_n = \frac{\sqrt{2}}{2T_\Sigma}$.

Performanţele sistemului în regim tranzitoriu și staționar cu eroarea staționară $\varepsilon = 0$ în raport cu semnalele de referinţă şi perturbaţie se determină cu relațiile:

$$\sigma = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} = 4.44\ \%,\ t_r \approx \frac{4}{\xi\omega_n} = 8T_\Sigma. \qquad (2.139)$$

În regim staționar eroarea staționară $\varepsilon = 0$ în raport cu semnalele de referință și perturbație, deoarece regulatorul conține modelul intern al semnalelor exogene de tip treaptă unitară (prezența integratorului în structura regulatorului).

Pentru semnale de tip rampă eroarea în regim staționar este diferită de zero și se dă de relația:

$$\varepsilon_v = \frac{1}{k_v} = 2T_\Sigma. \qquad (2.140)$$

Alegerea și acordarea regulatorului și obținerea f.d.t. $H_0(s)$ (2.138) a sistemului închis asigură coeficientul de amortizare $\xi = 0.707$, iar banda de frecvenţă este egală cu pulsaţia nominală $\omega_B = \omega_n = \sqrt{2}/2T_\Sigma = 0.707/T_\Sigma$. Deci cu cât componenta T_Σ are o valoare mai redusă, cu atât lărgimea de bandă ω_B este mai mare.

Se proiectează un regulator de tip PID cu f.d.t. de forma:

$$H_R(s) = \frac{k_p(\theta_1 s+1)(\theta_2 s+1)}{s(\theta_3 s+1)}, \qquad (2.141)$$

pentru un model al obiectului cu f.d.t.:

$$H_P(s) = \frac{k}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)(T_\Sigma s+1)}, \qquad (2.142)$$

și parametrii regulatorului se calculează cu relațiile:

$$\theta_1 = T_1,\ \theta_2 = T_2,\ k_p = \frac{1}{2kT_\Sigma'}, \qquad (2.143)$$

unde $T'_\Sigma = T_\Sigma + \theta_3 = T_\Sigma + 0.1\min(T_1, T_2)$.

Exemplul 2.16. Se consideră modelul obiectului de reglare cu f.d.t. de forma:

$$H_P(s) = \frac{4}{(25s+1)(31s+1)(9s+1)(5s+1)}.$$

Se cere să se proiecteze un regulator PID cu f.d.t. de forma:

$$H_R(s) = \frac{k_p(\theta_1 s+1)(\theta_2 s+1)}{s(\theta_3 s+1)}.$$

Soluționare. În modelul procesului sunt constantele de timp dominante $T_1 = 25$ s, $T_2 = 31$ s, iar constantele de timp mici sunt $T_3 = 9$ s, $T_4 = 5$ s şi se aproximează cu constanta sumară $T_\Sigma = T_3 + T_4 = 9 + 5 = 14$ s și f.d.t. aproximată a modelului:

$$H_P(s) \approx \frac{4}{(25s+1)(31s+1)(14s+1)}.$$

Se calculează parametrii de acord ai regulatorului din condițiile de compensare a constantelor mari de timp din modelul procesului:

$$\theta_1 = T_1 = 25 \text{ s}, \theta_2 = T_2 = 31 \text{ s}, \theta_3 \approx 0.1 \cdot 25 = 2.5 \text{ s},$$

$$T'_\Sigma = T_\Sigma + \theta_3 = 14 + 2.5 = 16.5 \text{ s},$$

$$k_p = 1/(2kT'_\Sigma) = 1/(2 \cdot 4 \cdot 16.5) = \frac{1}{132} = 0.0076.$$

Funcția de transfer a regulatorului PID sintetizat este:

$$H_R(s) = \frac{k_p(\theta_1 s+1)(\theta_2 s+1)}{s(\theta_3 s+1)} = \frac{0.0076(25s+1)(31s+1)}{s(2.5s+1)}.$$

S-a simulat sistemul cu regulatorul PID acordat cu metoda modelului și răspunsul indicial se dă în fig. 2.20 cu performanțele: timpul de creştere $t_r = 61.79$ s, suprareglarea $\sigma = 4.66$ % și timpul de reglare $t_r = 120.38$ s la valoarea $\sigma = 2.0$ %.

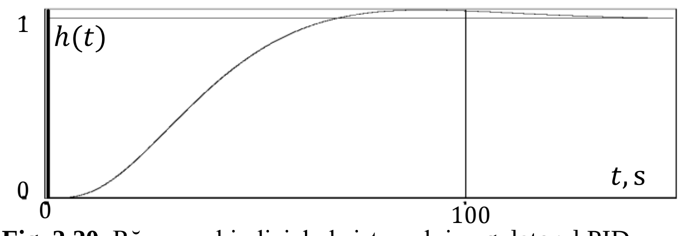

Fig. 2.20. Răspunsul indicial al sistemului cugulatorul PID

Se calculează banda de frecvență, performanțele sistemului cu gradul de amortizare $\xi = 0.707$ după relațiile (2.139):

$$\omega_B = \omega_n = \frac{\sqrt{2}}{2T'_\Sigma} = \frac{0.707}{T'_\Sigma} = \frac{0.707}{16.5} = 0.0428 \text{ s}^{-1}, f = \frac{\omega_B}{2\pi} = \frac{0.04284}{2 \cdot 3.14} = 0.0068 \text{ Hz},$$

$\sigma = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} = e^{-3.14\cdot0.707/\sqrt{1-0.707^2}} = 4.44\ \%.$

$t_r \approx \frac{4}{\xi\omega_n} = \frac{4}{0.707\cdot0.0428} = 132.1894$ s pentru $\sigma = 1.96\ \%$.■

2.14.3 *Criteriul simetriei*

Criteriul simetriei se utilizează pentru alegerea și acordarea regulatoarelor pentru procese rapide la acțiunea semnalelor externe de tip rampă și se impune ca urmărirea referinței să se realizeze fără eroare.

Se consideră procesul descris de funcția de transfer:

$$H_P(s) = \frac{k}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)\dots(T_ns+1)} \approx \frac{k}{\prod_{i=1}^{m}(T_is+1)(T_\Sigma s+1)} \approx$$

$$\approx \frac{k}{\prod_{i=1}^{m}(T_is)(T_\Sigma s+1)}, \tag{2.144}$$

unde în produsul termenilor cu constante de timp mari s-a neglijat unitatea care este mult mai mică decât constantele de timp mari și constantele de timp mici s-au prezentat prin constanta sumară T_Σ.

Acest criteriu recomandă de utilizat un regulator cu f.d.t. alcătuită din produsul a m binoame de ordinul unu de forma:

$$H_R(s) = \frac{(\theta_c s+1)^m}{\theta s}. \tag{2.145}$$

Parametrii regulatorului pentru o evoluție optimă a sistemului în raport cu semnale rampă se recomandă de calculat cu relațiile [1, 2]:

$$\theta_c = 4mT_\Sigma,\ \theta = 2kT_\Sigma \frac{\theta_c^m}{\prod_{i=1}^{m} T_i}. \tag{2.146}$$

Se determină f.d.t. a sistemului deschis și închis și, după unele transformări, se obțin expresiile de forma:

$$H_d(s) = H_R(s)H_P(s) = \frac{(\theta_c s+1)^m}{\theta s}\frac{k}{\prod_{i=1}^{m}(T_is)(T_\Sigma s+1)} = \frac{4T_\Sigma s+1}{8T_\Sigma^2 s^2(T_\Sigma s+1)}, \tag{2.147}$$

$$H_0(s) = \frac{H_d(s)}{1+H_d(s)} = \frac{4T_\Sigma s+1}{8T_\Sigma^3 s^3+8T_\Sigma^2 s^2+4T_\Sigma s+1}. \tag{2.148}$$

Din analiza relației (2.148) rezultă că performanțele sistemului sunt influențate numai de constanta de timp parazită T_Σ şi eroarea în regim staționar este nulă la semnal de referință rampă și o comportare nesatisfăcătoare a sistemului în raport cu semnalul treaptă unitară.

F.d.t. (2.148) are o configurație din trei poli și un zerou:

$$H_0(s) = \frac{4T_{\Sigma}s+1}{8T_{\Sigma}^3 s^3+8T_{\Sigma}^2 s^2+4T_{\Sigma}s+1} = \frac{\frac{\omega_n p}{z}(s+z)}{(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)(s+p)}, \qquad (2.149)$$

unde coeficientul de amortizare ξ, pulsația nominală ω_n, zeroul și cei doi poli multipli se exprimă prin constanta de timp parazită:

$$z = -\frac{1}{4T_{\Sigma}},\ \xi = 0.5,\ \omega_n = \frac{1}{2T_{\Sigma}},\ p_{1,2} = -\frac{1}{2T_{\Sigma}}.$$

2.15 Alegerea și acordarea regulatoarelor pentru procese lente

Se consideră procese lente care se caracterizează prin modele aproximate cu constante de timp mai mari de 10 s și care conțin și componenta cu timp mort. Pornind de la modelul procesului și performanțele impuse sistemului, pentru proiectarea algoritmului de reglare există mai multe criterii.

Dacă în funcționarea unui proces există componenta timpului mort, atunci se recomandă atât alegerea algoritmilor de reglare liniari de tipul PI, PID, cât și algoritmi neliniari bipoziționali sau tripoziționali.

Componenta derivativă D se include în structura algoritmului pentru un proces cu timp mort numai dacă se obține o îmbunătățire a performanțelor sistemului. Pentru valori ale raportului $\tau/T < 0.2$ la cerinţe de performanţă nu ridicare se recomandă algoritmi neliniari (bipoziționali), iar pentru raportul $\tau/T < 1$ se recomandă regulator cu acțiune continuă cu componente P, I, D și pentru raportul $\tau/T > 1$ se recomandă regulator numeric.

Pentru procese conduce cu constanta de timp medie și timp mort redus cu acțiunea perturbației cu amplitudine medie și frecvență joasă, se recomandă alegerea unui regulator bipozițional sau un regulator de tip P.

Pentru perturbații cu frecvență mai mare și cu diverse amplitudini se recomandă regulator PI, iar pentru procese cu mai multe constante de timp și timp mort redus cu acțiunea perturbaților se recomandă un algoritm PID.

Pentru procese cu două și mai multe constante de timp dominante se recomandă algoritm PI sau PID, care asigură eroarea staționară $\varepsilon = 0$ şi o viteză de răspuns mai ridicată. Pentru reglări de nivel se recomandă utilizarea algoritmului de tip PI. Pentru reglări de presiune se recomandă algoritmi PI, parametrii cărora sunt diferiți pentru gaze și lichide, deoarece constanta de timp la lichide este mai redusă decât la gaze. La reglări de debite și amestecuri de fluid, care au constante de timp mici și o amplificare mare se recomandă algoritmi PI. La reglări de temperatură cu raportul τ/T mare se recomandă algoritmi PID.

În tabelele 2.2 și 2.3 se prezintă recomandări la alegerea tipului de algoritm de reglare pentru diverse modele de funcții de transfer ale procesului cu parametrul tehnologic reglat [1, 4, 5].

Tabelul 2.2. Alegerea algoritmului după modelul procesului

Nr. crt..	**Funcția de tran. a procesului**	**Tip algoritm de reglare**			
		P	**PI**	**PD**	**PID**
1	$\frac{k}{Ts+1}$	Da	Da, dacă se limit. ε_{st}	Da, dacă T este precis determinată	Nu
2	$\frac{k}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$	Da, cu perform. reduse	Da, cu restricții amplific.	Se utilize. rar	Da, cu restricții la amplificări
3	$\frac{k}{\prod_{i=1}^{m}(T_is+1)}$	Rar util., perform. scăzute	Da	Se util. rar	Da
4	$\frac{ke^{-\tau s}}{Ts+1}$	Da, $\frac{\tau}{T}<$ 0.1, limit. ε_{st}	Da	Foarte rar	Neconvenabil, când τ se produce de timpul de transport şi există zgomot
5	$ke^{-\tau s}$	Nu	Nu	Nu	Nu
6	$\frac{ke^{-\tau s}}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$	Nu	Da	Nu	Rar, în funcție de tipul τ şi de efectul comp. D

Alegerea și acordarea regulatoarelor pentru procese cu timp mort este o problemă dificilă la determinarea cu precizie a timpului mort, cât și a influenței nefavorabile a timpului mort asupra stabilității și regimului tranzitoriu a sistemului automat. Se utilizează diverse metode de calcul al algoritmului de reglare pentru procese cu timp mort [1, 4, 5].

Tabelul 2.3. Alegerea algoritmului de reglare după parametrul reglat

Nr. crt.	Parametrul reglat	Tipul algoritmului de reglare			
		P	PI	PD	PID
1	Temperatura	Da, dacă raportul $\frac{\tau}{T} < 0.1$	Da	Da	Da, în funcție de raportul $\frac{\tau}{T}$
2	Presiune	Da, dacă nu există timpi morți prea mari	Da	În cazuri speciale	-
3	Debit	Nu	Da	Nu	-
4	Nivel	Da, dacă nu există timpi morți prea mari	Da	-	Da

2.16 Alegerea și acordarea regulatoarelor prin metode experimentale

2.16.1 *Metode empirice*

Metodele empirice reprezintă relații stabilite experimental pentru structura sistemului între parametrii de acord ai algoritmului de reglare I, P, PI, PID și parametrii modelului obiectului de reglare cu inerție de ordinul unu și timp mort și modelul obiectului de reglare cu astatism și timp mort pentru răspunsuri indiciale ale sistemului automat supus acţiunii semnalelor de intrare de tip treaptă: aperiodice (1), oscilante amortizate cu suprareglare $\sigma \leq 20$ % (2) și procese optimale (3) [1, 4, 5].

În tabelul 2.4 se dau relații empirice de acordare a parametrilor regulatoarelor I, P, PI și PID pentru obiectul de reglare cu inerție de ordinul unu și timp mort cu f.d.t:

$$H(s) = \frac{ke^{-\tau s}}{Ts+1}, \tag{2.150}$$

unde k este coeficientul de transfer, T – constanta de timp, τ – timpul mort.

Aeste relații sunt date pentru răspunsuri indiciale ale sistemului de tipul: aperiodice (1), oscilante amortizate cu suprareglare $\sigma \leq 20~\%$ (2) și procese optimale (3).

Tabelul 2.4. Relaţii empirice de acordare a regulatoarelor tipice

Tip regulator	**Tip de proces tranzitoriu al sistemului automat**		
	Răspuns aperiodic cu durată minimă (1)	**Răspuns oscilant cu σ ≤ 20 % (2)**	**Răspuns cu criteriul integral minim (3)**
I	$T_{i\text{opt}} = 4.5kT$	$T_{i\text{opt}} = 1.7kT$	$T_{i\text{opt}} = 1.7kT$
P	$k_{p\text{opt}} = \frac{0.3T}{k\tau}$	$k_{p\text{opt}} = \frac{0.7T}{k\tau}$	$k_{p\text{opt}} = \frac{0.9T}{k\tau}$
PI	$k_{p\text{opt}} = \frac{0.6T}{k\tau}$, $T_{i\text{opt}} =$ $= 0.8\tau + 0.5T$	$k_{p\text{opt}} = \frac{0.7T}{k\tau}$, $T_{i\text{opt}} =$ $= \tau + 0.3T$	$k_{p\text{opt}} = \frac{T}{k\tau}$, $T_{i\text{opt}} =$ $= \tau + 0.35T$
PID	$k_{p\text{opt}} = \frac{0.95T}{k\tau}$, $T_{i\text{opt}} = 2.4\tau$, $T_{d\text{opt}} = 0.4\tau$	$k_{p\text{opt}} = \frac{1.2T}{k\tau}$, $T_{i\text{opt}} = 2\tau$, $T_{d\text{opt}} = 0.4\tau$	$k_{p\text{opt}} = \frac{1.4T}{k\tau}$, $T_{i\text{opt}} = 1.3\tau$, $T_{d\text{opt}} = 0.5\tau$

Exemplul 2.17. Se dă modelul obiectului de reglare cu funcția de transfer cu parametrii:

$$H(s) = \frac{ke^{-\tau s}}{Ts+1} = \frac{0.3e^{-2s}}{7s+1}.$$

Se cere să se acordeze parametrii regulatorului I, P, PI și PID după metodele empirice pentru răspunsul optimal (3) din tabelul 2.4.

Funcțiile de transfer ale regulatorului I, P, PI și PID se descriu în forma:

$$H_I(s) = \frac{1}{T_i s}, H_P(s) = k_p, H_{PI}(s) = k_p + \frac{1}{T_i s}, H_{PID}(s) = k_p + \frac{1}{T_i s} + T_d s,$$

unde k_p, T_i, T_d sunt parametrii de acord ai regulatoarelor.

Soluționare. Se determină parametrii optimali k_p, T_i, T_d ai regulatoarelor I, P, PI, PID pentru răspunsul indicial optimal după relațiile din tabelul 2.4, coloana (3).

1. Pentru regulatorul I constanta de timp de integrare se calculează cu relația:

$$T_{i\text{opt}} = 1.7kT = 1.7 \cdot 0.3 \cdot 7 = 3.57 \text{ s}, k_{i\text{opt}} = \frac{1}{T_{i\text{opt}}} = \frac{1}{3.57} = 0.2801.$$

2. Pentru regulatorul P coeficientul de transfer se calculează cu relația:

$k_{p\mathrm{opt}} = \frac{0.9T}{k\tau} = \frac{0.9\cdot 7}{0.3\cdot 2} = 10.5.$

3. Pentru regulatorul PI parametrii se calculează cu relațiile:

$k_{p\mathrm{opt}} = \frac{T}{k\tau} = \frac{7}{0.3\cdot 2} = 11.6667,$

$T_{i\mathrm{opt}} = \tau + 0.35T = 2 + 0.35 \cdot 7 = 4.45$ s,

$k_{i\mathrm{opt}} = \frac{1}{T_{i\mathrm{opt}}} = \frac{1}{4.45} = 0.2247\ \mathrm{s}^{-1}.$

4. Pentru regulatorul PID coeficientul de transfer, constanta de timp de integrare și constanta de timp de derivare se calculează cu relațiile:

$k_{p\mathrm{opt}} = \frac{1.4T}{k\tau} = \frac{1.4\cdot 7}{0.3\cdot 2} = 16.3333,$

$T_{i\mathrm{opt}} = 1.3\tau = 1.3 \cdot 2 = 2.6$ s, $k_{i\mathrm{opt}} = \frac{1}{T_{i\mathrm{opt}}} = \frac{1}{2.6} = 0.3846\ \mathrm{s}^{-1},$

$T_{d\mathrm{opt}} = 0.5\tau = 0.5 \cdot 2 = 1.0$ s.

S-a simulat sistemul cu modelul obiectului și cu regulatoarul I, P ,PI, PID respectiv cu parametrii optimali calculați și răspunsurile sunt date în fig. 2.21 (regulatorul: I- alura 1, P - alura 2, PI - alura 3, PID - alura 4).■

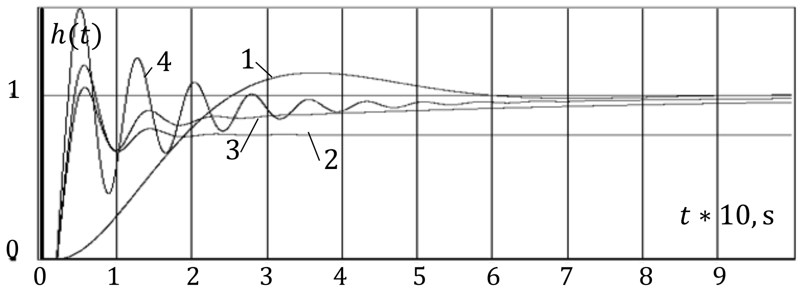

Fig. 2.21. Răspunsurile indiciale ale sistemului cu regulatoare acordate după metode empirice

2.16.2 *Criteriile experimentale de acordare a regulatoarelor*

Dificultățile care intervin în procedura de identificare cu precizie a proceselor lente, comportarea neliniară în procese și caracterul aleatoriu al unor perturbații care acționează asupra proceselor limitează utilizarea metodelor analitice de acordare a regulatoarelor. Metodele practice de acordare se bazează pe experiența acumulată în alegerea și acordarea regulatoarelor de tipul PID. Pentru un sistem dat în regim de funcționare cu mărimea de referință și cu mărimile perturbatoare menținute constante, prin modificarea parametrilor de acord până se atinge limita de stabilitate și se determină parametrii oscilațiilor întreținute amplitudinea și frecvența. Pe baza acestor parametri se determină valorile optimale ale parametrilor de acord ai regulatorului. Se utilizează criteriile experimentale metoda *Ziegler-Nichols* şi metoda *Offereins* [1, 4, 5, 16].

2.16.3 *Metoda Ziegler–Nichols*

În multe cazuri procesele industriale există sau sunt cunoscute modelele matematice ale părții fixate și, deci, acordarea se efectuează în baza criteriilor experimentale. Una din cele mai larg utilizată metodă de acest tip este metoda Ziegler – Nichols [1, 4, 5, 16].

Metoda Ziegler-Nichols se aplică la acordarea regulatoarelor de tip PID pentru procese lente la care perturbațiile sunt determinate de sarcină și au o durată mare. Pentru structura sistemului cu un regulator PID se fixează la valoarea maximă parametrul componentei integratoare $T_i \to \infty$ şi la valoarea minimă parametrul componentei derivative $T_d = 0$ şi se modifică valoarea parametrului componentei proporționale k_p până ce la ieşirea sistemului se instalează oscilaţii întreţinute, care este regimul critic al sistemului, deci sistemul este la limită de stabilitate (fig. 2.22).

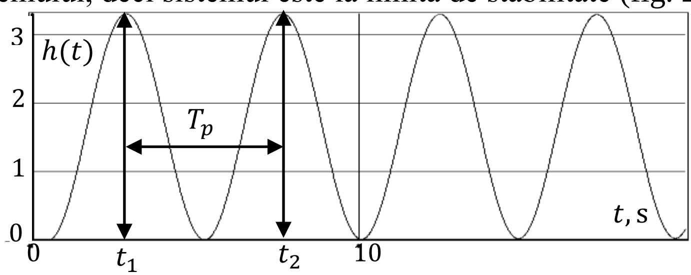

Fig. 2.22. Procesul indicial oscilant neamortizat al sistemului

Pentru acest regim critic al sistemului se stabilesc parametrii critici ai oscilaţiilor: coeficientul critic k_{cr} şi perioada oscilaţiilor T_p.

În baza parametrilor critici k_{cr}, T_p se calculează valorile optimale ale parametrilor de acord ai regulatoarelor P, PI, PID după relațiile [4]:

Pentru regulatorul P:

$$k_{p\text{opt}} = 0.5k_{\text{cr}}. \tag{2.151}$$

Pentru regulatorul PI:

$$k_{p\text{opt}} = 0.45k_{\text{cr}}, T_{i\text{opt}} = 0.8T_p \text{ sau } k_{i\text{opt}} = \frac{1}{T_{i\text{opt}}} = \frac{1.25}{T_p}. \tag{2.152}$$

Pentru regulatorul PID:

$$k_{p\text{opt}} = 0.75k_{\text{cr}}, T_{i\text{opt}} = 0.6T_p \text{ sau } k_{i\text{opt}} = 1.667/T_p,$$

$$T_d = k_d = 0.1 \cdots 0.125T_p. \tag{2.153}$$

Aceste relații s-au obținut din condiția ca la ieșirea sistemului să se stabilească raportul $1/4$ dintre amplitudinea celei de-a doua oscilații pozitive și amplitudinea primei oscilații pozitive, ceea ce formează amortizarea într-un sfert de amplitudine.

Dezavantajele metodei Ziegler-Nichols:

1. Metoda nu se aplică pentru modele de procese cu inerție de ordinul unu și doi.

2. Metoda nu se aplică pentru procese, care nu admit regimul critic.

2. Metoda nu se aplică pentru procese care nu au regim staționar.

3. Relațiile de calcul ai parametrilor regulatorului nu se pot optimiza.

Metoda Offereins permite determinarea valorilor optime ale parametrilor de acord utilizând valorile critice ale sistemului coeficientul critic k_{cr} şi perioada T_{p}. Pentru un răspuns optim al sistemului parametrii regulatorului PI se calculează cu relaţiile: $k_p = 0.5k_{\text{cr}}$, $T_i = 3T_{i0}$, unde T_{i0} este valoarea limitată a lui T_i pentru care se depăşeşte limita de stabilitate menţinând valoarea lui k_p, ceea ce măreşte raportul k_p/T_i până la depăşirea limitei de stabilitate şi se reţine valoarea lui T_{i0}.

În cazul utilizării regulatorului PID, acordarea se pornește de la regulatorul PI și prin încercări se utilizează componenta derivativă D care ar ridica performanțele sistemului.

Efectuarea experimentelor presupune însă atingerea limitei de stabilitate, proces care poate dura uneori nepermis de mult sau poate impune funcționarea sistemului într-un regim nefavorabil.

2.17 Acordarea regulatoarelor prin metoda criteriilor integrale

Procedura de sinteză a algoritmilor de reglare utilizează criteriile integrale prin minimizarea unui indice integral de performanță, construit cu ajutorul unei funcționale care depinde de eroarea dinamică a sistemului închis. Un indice integral asociază sistemului automat un număr pozitiv, care apreciază evoluția globală și caracterizează implicit performanțele dinamice și staționare ale sistemului automat studiat [4,5].

Se consideră un sistem stabil cu un răspuns indicial aperiodic $h(t)$ la semnal treaptă unitară $r(t) = 1(t)$ şi eroare staţionară nulă (fig. 2.23).

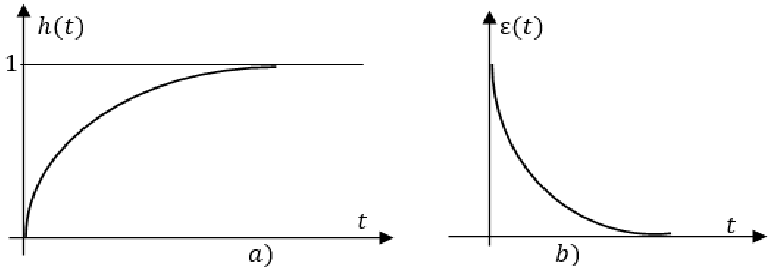

Fig. 2.23. Răspunsul indicial aperiodic *a*) și eroarea sistemului *b*)

Evoluţia în timp a erorii se obţine prin relaţia:

$$\varepsilon(t) = 1(t) - h(t),\ t \geq 0. \qquad (2.154)$$

Indicele de calitate se formează în baza operatorului $L(\varepsilon(t), t)$ care este funcție de două argumente eroarea $\varepsilon(t)$ și timpul t:

$$J = \int_0^T L(\varepsilon(t), t)\, dt, \qquad (2.155)$$

unde se variază aceste argumente astfel pentru a construi sisteme automate cu performanțe ridicate.

Ca indice de calitate pentru procese aperiodice se calculează numărul exprimat prin integrala de forma:

$$J_0 = \int_0^{\infty} \varepsilon(t)dt \to \min. \qquad (2.156)$$

Pentru procese oscilante se utilizează criteriul numărul exprimat prin integrala de forma:

$$J_1 = \int_0^{\infty} |\varepsilon(t)|dt \to \min \qquad (2.157)$$

sau integrala pătratică de forma:

$$J_2 = \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t)dt \to \min, \qquad (2.158)$$

care se aplică pentru procese oscilante și aperiodice.

Se utilizează și criterii complexe - convergente pe orizont infinit.

Astfel, criteriul integral de forma:

$$J_3 = \int_0^{\infty} t|\varepsilon(t)|dt \to \min \qquad (2.159)$$

realizează o pondere a modulului erorii cu factorul de timp t care are o influenţă mai mare asupra erorii cu cât valorile timpului sunt mai mari.

Pentru a folosi și o limitare a vitezei de variație a erorii în expresia integrandului se introduce un termen care conține și derivata erorii şi atunci criteriul are forma:

$$J_4 = \int_0^{\infty} [\varepsilon^2(t) + \alpha\dot{\varepsilon}^2(t)]dt \to \min, \qquad (2.160)$$

unde coeficientul α este o constantă de ponderare, care se măsoară în condiţii de omogeneitate dimensională în unităţi de timp.

O formă generalizată a criteriului integral va fi:

$$J_5 = \int_0^{\infty} L(\varepsilon(t), t)dt = \int_0^{\infty} f\left(\varepsilon(t), \dot{\varepsilon}(t), \dots, \varepsilon^{(n)}(t)\right) dt \to \min, \qquad (2.161)$$

unde $f\left(\varepsilon(t), \dot{\varepsilon}(t), \ddot{\varepsilon}(t), \dots, \varepsilon^n(t)\right)$ este o funcțională pozitiv definită, deoarece pentru argumente care nu sunt simultan nule la valori pozitive și este convergentă la condiția că eroarea staționară $\varepsilon(t) = 0$.

În comparație cu performanțele dinamice definite prin criterii locale ε, σ, t_r, ..., care se referă la valori ale erorii în anumite momente ale timpului, criteriile integrale reprezintă indici sintetici de calitate ale sistemului, care caracterizează în ansamblu regimul tranzitoriu și oferă o informație globală complexă despre sistemul studiat.

Astfel, procedura de sinteză constă în determinarea algoritmului de reglare, care satisface o expresie de forma (2.161).

Criteriile integrale asigură optimizarea regimurilor dinamice în raport ce semnalele de referință $r(t)$ şi perturbaţie $p(t)$ de tip treaptă.

Dacă sistemul are o evoluție bună în raport cu semnalele $r(t)$ şi $p(t)$, atunci sistemul va avea şi o comportare satisfăcătoare în raport cu alte tipuri de variații ale semnalelor $r(t)$ şi $p(t)$.

În practica proiectării sistemului automat prin utilizarea criteriilor integrale, calculul conduce la exprimarea directă a indicelui de calitate, care substituie operația de integrare în domeniului timpului.

Avantajul esențial al acestei proceduri apare în faza finală de minimizare a indicelui integral, care se tratează ca problemă de optimizare parametrică și are o rezolvare numerică soluționată ca proiectare asistată de calculator.

Exprimarea directă a criteriilor integrale este obținerea indicelui de performanță care depinde direct de parametrii algoritmului de reglare.

Explicitatea indicelui de performanță integral în raport cu parametrii regulatorului se reduce la transformări integrale echivalente din domeniul timpului în domeniul frecvențelor în baza teoremei de trecere Parceval [1, 6, 13, 19].

Se descrie cel mai utilizat criteriu integral de formă pătratică (2.158) [1, 6, 13, 19]:

$$J_2 = \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t)dt = \int_0^{\infty} \varepsilon(t)\varepsilon(t)dt = \int_0^{\infty} \varepsilon(t)\{\mathrm{L}^{-1}[\varepsilon(s)]\}dt =$$

$$= \int_0^{\infty} \varepsilon(t)\left\{\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \varepsilon(s)e^{st}ds\right\}dt = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \varepsilon(s)[\varepsilon(t)e^{st}dt]ds =$$

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \varepsilon(s)\varepsilon(-s)ds. \qquad (2.162)$$

Dacă semnalul de referință este treaptă unitară $r(t) = 1(t)$, atunci f.d.t. a erorii în transformata Laplace este:

$$\varepsilon(s) = \frac{1}{1+H_d(s)}\frac{1}{s} = 1(s) - y(s) = \frac{1}{s} - H_0(s)\frac{1}{s} = \frac{1}{s}[1 - H_0(s)], \tag{2.163}$$

unde $H_d(s)$ este f.d.t. a sistemului deschis, $H_0(s)$ – f.d.t. a sistemului închis.

Algoritmul de reglare este precizat și intervine în exprimările f.d.t. $H_d(s)$ şi $H_0(s)$ prin parametrii regulatorului ca variabile independente.

Se calculează expresia (2.162) cu (2.163) și se obține relația:

$$J_2 = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}[1 - H_0(s)][1 - H_0(-s)]r(s)r(-s)ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}[1 - H_0(s)][1 - H_0(-s)]\frac{1}{s}(-\frac{1}{s})ds. \tag{2.164}$$

Se consideră f.d.t. $H_d(s)$ a sistemului deschis este raportul polinoamelor:

$$H_d(s) = \frac{M(s)}{sN(s)} \tag{2.165}$$

cu un pol în origine pentru ca eroarea staționară $\varepsilon(t) = 0$ şi gradul lui $M(s)$ este m, iar a lui $sN(s)$ – n şi se impune condiţia de $m < n$.

Funcția de transfer a sistemului închis este:

$$H_0 = \frac{H_d(s)}{1+H_d(s)} = \frac{M(s)}{sN(s)+M(s)}. \tag{2.166}$$

Se calculează eroarea sistemului (2.163) cu f.d.t. (2.166):

$$\varepsilon(s) = \frac{1}{s}[1 - H_0(s)] = \left[1 - \frac{M(s)}{sN(s)+M(s)}\right]\frac{1}{s} = \frac{N(s)}{sN(s)+M(s)} =$$

$$= \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + b_{m-2}s^{m-2} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{B(s)}{A(s)} \tag{2.167}$$

cu condiția $m = n - 1$.

Integrala J_2 din (2.164) se calculează prin integrarea a unor fracții raționale în s şi $-s$ sub forma:

$$J_2 = \int_{-j\infty}^{j\infty}\frac{B(s)}{A(s)}\frac{B(-s)}{A(-s)}ds. \tag{2.168}$$

Valoarea integralei J_2 din (2.168) se calculează sub formă directă după algoritmul următor.

1. Se calculează cu ajutorul coeficienților a_i din relaţia (2.167) determinantul de forma:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_0 & -a_2 & a_4 & -a_6 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & -a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ 0 & -a_0 & a_2 & -a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & a_{n-1} \end{vmatrix}. \quad (2.169)$$

2. Se calculează determinanții particulari $\Delta_k, k = 0, 1, 2, \dots, n - -1 = m$ prin înlocuirea în Δ a coloanei $k + 1$ cu coloana:

$$\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix}. \quad (2.170)$$

3. Se calculează mărimile $B_0, B_1, \dots, B_m$ după relaţiile:

$$B_0 = b_0^2,$$

$$B_1 = b_1^2 - 2b_0b_2,$$

$$B_2 = b_2^2 - 2b_1b_3 + 2b_0b_4,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (2.171)$$

$$B_k = b_k^2 - 2b_{k-1}b_{k+1} + 2b_{k-2}b_{k+2} + \cdots + 2(-1)^k b_0b_{2k},$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$B_m = b_m^2.$$

4. Se calculează în formă directă indicele J_2 cu relația:

$$J_2 = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} B_k\Delta_k - 2b_0b_1}{2a_0^2\Delta} = f(q_1, q_2, \dots, q_r), \quad (2.172)$$

unde q_1, q_2,…, q_r sunt parametrii algoritmului de reglare, care sunt funcții de parametrii obiectului de reglare:

$$q_1 = f_1(b_i, a_j),$$

$$q_2 = f_2(b_i, a_j),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2.173)$$
$$q_r = f_r(b_i, a_j).$$

Pentru soluționarea problemei de optimizare parametrică din expresia (2.172)-(2.173) se obține un sistem de ecuații algebrice cu parametrii regulatorului necunoscuți $q_1, q_2, \ldots, q_r$:

$$\frac{\partial J}{\partial q_1} = 0,$$
$$\frac{\partial J}{\partial q_2} = 0, \qquad (2.174)$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{\partial J}{\partial q_r} = 0$$

și aplicând metode de minimizare se determină parametrii regulatorului.

Dacă se consideră acordarea regulatorul de tipul PID, atunci expresia indicelui J_2 din (2.172) este o expresie neliniară în funcție de parametrii regulatorului:

$$J_2 = f(k_p, T_i, T_d). \qquad (2.175)$$

La ultima etapa de proiectare se minimizează relația (2.175) în spațiul parametrilor regulatorului k_p, T_i, T_d și se rezolvă problema:

$$J_2 = f(k_p, T_i, T_d) \rightarrow \min \qquad (2.176)$$

cu eventuale restricții impuse de realizabilitatea fizică a regulatorului sau de condiții suplimentare de funcționare a sistemului automat închis, stabilitate etc. și se obține sistemul:

$$k_{p\min} \leq k_p \leq k_{p\max},$$
$$T_{i\min} \leq T_i \leq T_{i\max}, \qquad (2.177)$$
$$T_{d\min} \leq T_d \leq T_{d\max}.$$

Prin metode numerice cunoscute de optimizare parametrică se obține soluția optimă a tripletului (k_p^*, T_i^*, T_d^*) care asigură optimizarea regimului dinamic al sistemului automat în circuit închis:

$$\frac{\partial J}{\partial k_p} = 0, \frac{\partial J}{\partial T_i} = 0, \frac{\partial J}{\partial T_d} = 0. \tag{2.178}$$

În același mod se rezolvă și problema de optimizare pentru un criteriu de tipul (2.162) dat în forma:

$$J_4 = \int_0^{\infty}[\varepsilon^2(t) + \alpha\dot{\varepsilon}^2(t)]dt = J_2 + J_2', \tag{2.179}$$

unde pentru al doilea termen J_2' din (2.179) prin aplicarea transformatei Laplace la expresia derivatei erorii se obține:

$$L[\dot{\varepsilon}^2(t)] = s\varepsilon(\mathrm{s}) = \frac{c_r s^r + c_{r-1}s^{r-1} + c_{r-2}s^{r-2} + \cdots + c_1 s + c_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0} \tag{2.180}$$

cu raportul gradelor $n - r \geq 2$.

Se calculează integrala prin suma:

$$J_2' = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} B_k \Delta_k}{2a_0^2\Delta}, \tag{2.181}$$

unde mărimile B_k se determină cu relaţiile:

$$B_1 = c_0^2, B_2 = c_1^2, \ldots, B_{k+1} = c_k^2 - 2c_{k-1}c_{k+1} + \cdots +$$
$$+2(-1)^k c_0 c_{2k}, \ldots, B_{n+1} = c_1^2, \tag{2.182}$$

iar determinanții Δ şi Δ_k se obţin ca în procedura de mai sus.

Prin înlocuirea în (2.179) a lui J_2 din (2.172) și J_2' din (2.181) se obține forma directă de exprimare a criteriului J_4.

Dacă se proiectează regulatorul în raport cu semnalul perturbației de tip treaptă, atunci expresia (2.164) este similară, dar cu condiția că f.d.t. $H_{0p}(s)$ a sistemului se determină în raport cu perturbaţia, semnalul referinţei $r(t) = 0$.

Astfel, se obține:

$$y(s) = H_{0p}(s)p(s) \tag{2.183}$$

şi eroarea sistemului în raport cu perturbație este:

$$\varepsilon(s) = r(s) - y(s)|_{r=0} = -y(s) = -H_{0p}(s)p(s). \tag{2.184}$$

Dacă se va calcula integrala J_2 din (2.164) prin (2.184) și integrandul va conține parametrii regulatorului cu f.d.t. $H_{Rp}(s)$.

La alegerea parametrilor sistemului automat după criteriul J_2 adesea se obţine un proces oscilant nedorit, fiindcă apropierea răspunsului $y(t)$ de procesul ideal treaptă $r(t)$ rezultă o mărire a vitezei iniţiale de răspuns, care poate conduce la un suprareglaj şi o reducere a rezervei de stabilitate.

În unele cazuri funcția $f(q_1, q_2, \dots, q_r)$ din (2.172) poate să nu aibă minim și atunci parametrii regulatorului se aleg după valoarea lui J_2 minimală în interiorul său la frontieră care este determinată conform altor condiții ca rezervă de stabilitate, precizie staționară etc.

În tabelul 2.5 sunt date relații de calcul al integralei J_2 pentru sisteme automate de ordinul 1, 2, 3, 4 [13, 19].

Tabelul 2.5. Expresii de calcul a integralei J_2

Model de ordinul $\mathbf{1, 2, 3, 4}$ a erorii	**Expresii de calcul a integralei J_2**
$\varepsilon(s) = \frac{b_0}{a_1 s + a_0}$	$\frac{b_0^2}{2a_0 a_1}$
$\varepsilon(s) = \frac{b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$	$\frac{a_0 b_1^2 + a_2 b_0^2}{2a_0 a_1 a_2}$
$\varepsilon(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$	$\frac{a_0 a_1 b_2^2 + (b_1^2 - 2b_0 b_2) a_0 a_3 + a_2 a_3 b_0^2}{2a_0 a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3)}$
$\varepsilon(s) =$ $= \frac{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$	$\frac{b_3^2(-a_0^2 a_3 + a_0 a_1 a_2) + (b_2^2 - 2b_1 b_3) a_0 a_1 a_4}{2a_0 a_4(-a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 + a_1 a_2 a_3)} \rightarrow$ $\rightarrow \frac{+(b_1^2 - 2b_0 b_2) a_0 a_3 a_4 + b_0^2 (a_2 a_3 a_4 - a_1 a_4^2)}{2a_0 a_4(-a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 + a_1 a_2 a_3)}$

Exemplul 2.18. Se consideră sistemul automat deschis descris de f.d.t. cu datele numerice, asupra căruia acționează semnal treaptă unitară $r(s) = 1(s) = 1/s$:

$$H_d(s) = \frac{k}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} = \frac{2}{s(0.2s + 1)(5s + 1)},$$

unde k este coeficientul de transfer, T_1, T_2 - constante de timp.

Se cere: 1) să se determine valoarea criteriului J_2 pentru valorile parametrilor inițiali ai sistemului;

2) să se calculeze valoarea optimală a coeficientului de transfer k_{opt}, care minimizează criteriul pătratic și să se calculeze valoarea optimală a criteriului J_2 pentru valoarea optimală a lui k_{opt}.

Soluționare. 1.1. Se determină expresia semnalului erorii sistemului automat la comdiția $m = 2, n = 3$:

$$\varepsilon(s) = H_\varepsilon(s)1(s) = \frac{1}{1+\frac{k}{s(0.2s+1)(5s+1)}}\frac{1}{s} = \frac{s(T_1s+1)(T_2s+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1)+k}\frac{1}{s} =$$

$$= \frac{T_1T_2s^2+(T_1+T_2)s+1}{T_1T_2s^3+(T_1+T_2)s^2+s+k} = \frac{b_2s^2+b_1s+b_0}{a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0},$$

unde $b_2 = T_1T_2 = 0.2 \cdot 5 = 1$ s^2, $b_1 = T_1 + T_2 = 0.2 + 5 = 5.2$ s, $b_0 = 1$, $a_3 = = T_1T_2 = 0.2 \cdot 5 = 1$ s^2, $a_2 = 5.2$ s, $a_1 = 1$, $a_0 = k = 2$.

1.2. Se calculează determinantul conform relaţiei (2.169):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & -a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & -a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_0a_1a_2 = 5.2k = 5.2 \cdot 2 = 10.4.$$

1.3. Se calculează determinanții particulari $\Delta_k, k = m = 0,1,2$ prin înlocuirea în Δ a coloanei $k + 1$ cu coloana a_1, a_2, 0:

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} a_1 & -a_2 & 0 \\ a_0 & a_1 & 0 \\ 0 & -a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1^2a_2 + a_0a_2^2 = 1 \cdot 5.2 + 2 \cdot 5.2^2 = 59.28$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & 0 \\ 0 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 \end{vmatrix} = a_0^2a_2 = 2^2 \cdot 5.2 = 20.8,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_0 & -a_2 & a_1 \\ 0 & a_1 & a_0 \\ 0 & -a_0 & 0 \end{vmatrix} = a_0^3 = 2^3 = 8.$$

1.4. Se calculează mărimile $B_0, B_1, \dots, B_m$ după relaţiile:

$$B_0 = b_0^2 = 1, B_1 = b_1^2 - 2b_0b_2 = 5.2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 0 = 25.04, B_2 = b_2^2 = 1.$$

1.5. Se calculează valoarea integralei (2.172) cu coeficienţii $\overline{b_0, b_2}$, $\overline{B_0, B_2}$ la valoarea lui $k = 2$:

$$J_2 = \frac{B_0\Delta_0+B_1\Delta_1+B_2\Delta_2-2b_0b_1\Delta}{2a_0^2\Delta} = \frac{1 \cdot 59.28+25.04 \cdot 20.08+1 \cdot 8-2 \cdot 1 \cdot 5.2 \cdot 10.4}{2 \cdot 2^2 \cdot 10.4} = 5.552.$$

1.6. Se determină valoarea integralei J_2 după formula din tabelul 2.5, rândul trei pentru cu $n = 3$ la valoarea lui $k = 2$:

$$J_2 = \frac{a_0a_1b_2^2+(b_1^2-2b_0b_2)a_0a_3+a_2a_3b_0^2}{2a_0a_3(a_1a_2-a_0a_3)} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 1+(5.2^2-2 \cdot 1 \cdot 1)2 \cdot 1+5.2 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 1(1 \cdot 5.2-2 \cdot 1)} = 4.475.$$

2.1. Calculul integralei J_2 se obține mult mai simplu dacă se utilizează forma tabelară. Pentru sistemul de ordinul $n = 3$ cu din tabelului 2.5, rândul trei se prezintă expresia integralei cu datele numerice:

$$J_2 = \frac{a_0 a_1 b_2^2 + (b_1^2 - 2b_0 b_2) a_0 a_3 + a_2 a_3 b_0^2}{2a_0 a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3)} = \frac{k + (5.2^2 - 2)k + 5.2}{2k(5.2 - k)} = \frac{26.04k + 5.2}{10.4k - 2k^2}.$$

2.2. Se determină derivata parțială a integralei în raport cu coeficientul k și se egalează cu zero:

$$\frac{\partial J_2}{\partial k} = \frac{\partial J_2}{\partial k}\left(\frac{26.04k + 5.2}{10.4k - 2k^2}\right) = \frac{26.04(10.4k - 2k^2) - (26.04k + 5.2)(10.4 - 4k)}{(10.4k - 2k^2)^2} =$$

$$= \frac{52.08k^2 + 20.8k - 54.08}{(10.4k - 2k^2)^2} = 0.$$

Din ultima expresie se calculează valoarea optimală a lui k:

$$k^2 + 0.3994k - 1.0384 = 0,$$

$$k_{1,2} = \frac{-0.3994 \pm \sqrt{0.3994^2 + 4 \cdot 1.0384}}{2} = \frac{-0.3994 \pm 2.0768}{2}.$$

Pentru valoarea lui $k > 0$ se obține:

$$k_{\text{opt}} = \frac{-0.3994 + 2.0768}{2} = 0.8387.$$

2.3. Se calculează valoarea optimală a integralei de la p. 2.1 la valoarea lui k_{opt}:

$$J_{2\text{opt}} = \frac{26.04k_{\text{opt}} + 5.2}{10.4k_{\text{opt}} - 2k_{\text{opt}}^2} = \frac{26.04 \cdot 0.8387 + 5.2}{10.4 \cdot 0.8387 - 2 \cdot 0.8387^2} = 3.6961.$$

În fig. 2.24 se dau răspunsurile indiciale ale sistemului cu datele inițiale ale parametrilor (fig. 2.24, alura 1) și cu valoarea optimală a coeficientului de transfer k_{opt} al sistemului închis (fig. 2.24, alura 2).

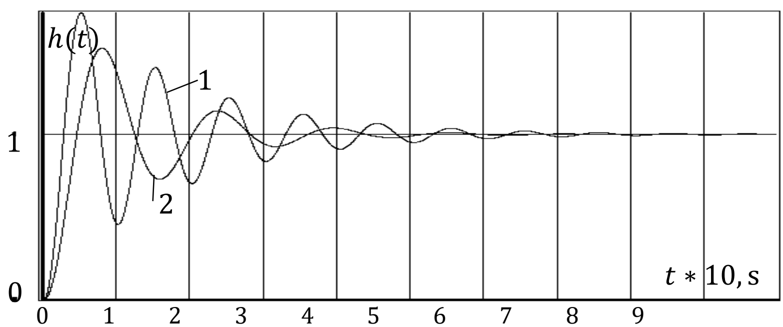

Fig. 2.24. Răspunsurile indiciale ale sistemului automat la ex. 2.18

Exemplul 2.19. Se consideră f.d.t. a sistemului deschis alcătuit din regulator cu acţiune proporțională-derivativă cu f.d.t. $H_{PD}(s)$ și partea fixată cu f.d.t. $H_{PF}(s)$:

$$H_{PD}(s) = k_d s + k_p,\ H_{PF}(s) = \frac{1}{s(Ts+1)},$$

unde k_p, k_d sunt parametrii de acord ai regulatorului PD, $k_p = 20\ s^{-1}$, $T = 0.1$ s.

Se cere să se calculeze valoarea coeficientului k_d, care determină nivelul semnalului primei derivate şi corespunde criteriului pătratic când la intrare se aplică semnalul impuls unitar $\delta(t) = 1$.

Soluționare. 1. Se determină f.d.t. a sistemului deschis:

$$H_d(s) = H_{PD}(s)H_{PF}(s) = (k_d s + k_p)\ \frac{1}{s(Ts+1)} = \frac{k_d s + k_p}{s(Ts+1)}.$$

2. Se determină f.d.t. a sistemului închis:

$$H_0(s) = \frac{H_d(s)}{1+H_d(s)} = \frac{k_d s + k_p}{Ts^2+(1+k_d)s+k_p}.$$

3. Mărimea de ieșire a sistemului ca răspuns la semnal impuls unitar este:

$$y(s) = H_0(s)\delta(s) = \frac{k_d s + k_p}{Ts^2+s(1+k_d)+k_p}\cdot 1 = \frac{k_d s + k_p}{Ts^2+(1+k_d)s+k_p} = \frac{b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0},$$

unde $b_1 = k_d$, $b_0 = k_p$, $a_2 = T$, $a_1 = 1 + k_d$, $a_0 = k_p$.

4. Pentru sistemul de ordinul doi din tabelul 2.5 se aplică expresia de calcul a integralei:

$$J_2 = \frac{a_0 b_1^2 + a_2 b_0^2}{2a_0 a_1 a_2} = \frac{k_p k_d^2 + T k_p^2}{2k_p(1+k_d)T} = \frac{k_d^2 + T k_p}{2T(1+k_d)}.$$

5. Se calculează derivata lui J_2 pe variabila k_d:

$$\frac{dJ_2}{dk_d} = k_d^2 + 2k_d - k_p T = 0.$$

6. Se rezolvă ecuația pătratică pe variabila k_d de la p. 5 şi la valorile date ale parametrilor sistemului se obține valoarea optimală pentru rădăcina pozitivă:

$$k_d = -1 + \sqrt{1 + k_p T} = -1 + \sqrt{1 + 20 * 0.1} = 0.73,$$

unde parametrul k_d este funcție neliniară de produsul mărimilor $k_p T$ și nu depinde de coeficientul de transfer al părții fixate. ■

2.18 Proiectarea sistemului după metoda gradului maximal de stabilitate

Metoda gradului de stabilitate al sistemului automat proiectat de acordare a regulatoarelor tipizate PID la modele de obiecte descrise cu funcții de transfer se reduce la următoarea procedură [10-14, 21].

Se descrie metoda gradului maximal de stabilitate analitică (GMSA) și metoda gradului maximal de stabilitate cu iterații (GMSI).

Metoda gradului maximal de stabilitate analitică. Se consideră modelul matematic al obiectului de reglare descris prin funcția de transfer de forma:

$$H_P(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{B(s)e^{-\tau s}}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} \ldots + a_1 s + a_0} e^{-\tau s} =$$

$$= e^{-\tau s} \frac{\sum_{j=0}^{m} b_j (p)^j}{\sum_{i=0}^{n} a_i (p)^i}, m \le n, \quad (2.185)$$

unde $y(s)$ este ieșirea obiectului, $u(s)$ – mărimea de conducere, coeficienții b_j, $j = \overline{0,m}$, a_i, $j = \overline{0,n}$, τ - timpul mort al procesului.

Se cere să se sintetizeze algoritmul de conducere de tipul PID cu obiectul (2.185) care se descrie cu funcția de transfer în forma:

$$H_R(s) = \frac{u(s)}{\varepsilon(s)} = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{\sum_{l=0}^{r} q_l s^{(l-1)}}{s}, r \le n-1, \quad (2.186)$$

unde coeficienții $q = (q_0, q_1, \cdots, q_r)$ sunt parametrii de acord necunoscuți ai algoritmului de reglare de tipul PID.

Problema constă în a garanta pentru legea de reglare respectivă gradul maximal de stabilitate al sistemului automat proiectat.

Utilizând expresiile (2.185) și (2.186), se obține ecuația caracteristică a sistemului în circuit închis în forma operațională ($s = p$):

$$A(p,q) = 1 + H_R(p)H_P(p) = 1 + \frac{Q(p)}{P(p)}\frac{B(p)e^{-\tau p}}{A(p)} =$$

$$= 1 + \frac{\sum_{l=0}^{r} q_l p^{(l-1)}}{p} \frac{\sum_{j=0}^{m} b_j (p)^j}{\sum_{i=0}^{n} a_i (p)^i} e^{-\tau s} = e^{\tau p}\frac{P(p)A(p)}{B(p)} + Q(p) =$$

$$= e^{\tau p}\frac{\sum_{i=0}^{n} a_i (p)^{i+1}}{\sum_{j=0}^{m} b_j (p)^j} + \sum_{l=0}^{r} q_l (p)^{(l-1)} = 0. \quad (2.187)$$

Se introduce noțiunea de grad de stabilitate J al sistemului automat proiectat şi în ecuaţia caracteristică (2.187) se substituie $p = -J$ și se obține ecuația caracteristică în forma:

$$A(-J,q) = e^{-\tau J}\frac{\sum_{i=0}^{n} a_i (-J)^{i+1} +}{\sum_{j=0}^{m} b_j (-J)^j} + \sum_{l=0}^{r} q_l (-J)^{(l-1)} = 0, \quad (2.188)$$

unde J este gradul de stabilitate ca variabilă necunoscută.

Ecuația (2.188) conține $r+1$ necunoscute (r parametri de acord ai regulatorului și variabila gradului de stabilitate J necunoscută).

Pentru determinarea valorilor lui J și a parametrilor q_l ecuația caracteristică (2.188) se derivează de r ori pe variabila J conform numărului r parametrilor de acord prezenți în legea de reglare respectivă și, în rezultat, se obține un sistem de ecuații algebrice:

$$\begin{aligned}
&\frac{dA(J,q)}{dJ} = A^{(1)}(J,q) = A_1(J,q) = 0,\\
&\frac{d^2A(-J,q)}{dJ^2} = A^{(2)}(J,q) = A_2(J,q) = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{d^{r-1}A(-J,q)}{dJ^{r-1}} = A^{(r-1)}(J,q) = A_{r-1}(J,q) = 0,\\
&\frac{d^{r}A(-J,q)}{dJ^{r}} = A^{(r)}(J) = A_r(J) = 0.
\end{aligned} \tag{2.189}$$

Ultima ecuație $A_r(J)$ din sistemul (2.189) este o ecuație algebrică de gradul respectiv pe necunoscuta J și rădăcinile acesteia sunt gradele de stabilitate ale sistemului proiectat [13, 21]. Dintre rădăcinile acestei ecuații se determină gradul maximal de stabilitate conform relației:

$$J = J_{\text{opt}} = -\text{minmax}Rep_i(q), \tag{2.190}$$

unde Rep_i sunt rădăcinile reale sau părţile reale ale rădăcinilor complexe ale ecuaţiei caracteristice $A_r(J)$, alocate în semiplanul stâng al planului complex al rădăcinilor (fig. 2.25).

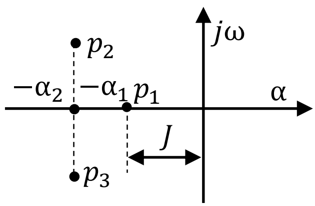

Fig. 2.25. Planul rădăcinilor și gradul de stabilitate

În sens geometric gradul optimal de stabilitate J_{opt} este distanța dintre rădăcina reală negativă $p_1 = -\alpha_1$ respectivă sau partea reală a rădăcinii complexe cea mai apropiată de axa imaginară și axa imaginară $J = |\alpha_1|$. În planul rădăciniloer din fig. 2.25 sunt alocate o rădăcină reală $p_1 = -\alpha_1$ și două rădăcini complexe $p_{2,3} = -\alpha_2 \pm j\omega$.

Utilizând gradul optimal de stabilitate $J_{\text{opt}} = -\alpha_1$ al sistemului automat, din ecuația caracteristică (2.188) și $r - 1$ ecuații din sistemul (2.189) se determină valorile optimale ale parametrilor de acord ai legii de reglare respective după relațiile:

$$q_l = f_l(\overline{a_0, a_n}, \overline{b_0, b_m}, \tau, J_{\text{opt}}),\ l = 0, 1, \cdots, r. \qquad (2.191)$$

Pentru sinteza algoritmilor de acordare tipice PID la modelul obiectului dat cu parametrii cunoscuți după *metoda gradului maximal de stabilitate al sistemului în formă analitică* se reduce la parcurgerea următoarelor etape.

1. Se determină funcția de transfer a sistemului automat în închis cu regulatorul tipizat selectat.

2. Se obține ecuația caracteristică a sistemului închis.

3. Ecuația caracteristică se transcrie prin gradul de stabilitate J utilizând substituirea $s = -J$.

4. Din ecuația caracteristică, obținută la pasul trei, prin operații de derivare pe variabila J de un număr de ori egal cu numărul de parametri de acord ai legii de reglare aleasă, se obţine ecuaţia algebrică de gradul respectiv pe necunoscuta J.

5. Se soluționează ecuația algebrică de la pasul 4 și se obțin rădăcinile, care sunt gradele de stabilitate ale sistemului proiectat.

6. Se determină valoarea optimală J_{opt} a gradului de stabilitate al sistemului proiectat care este cea mai mică rădăcină reală pozitivă sau cea mai mică parte reală pozitivă a rădăcinii complexe a ecuației algebrice obținută la pasul patru.

7. Din ecuația caracteristică de la pasul trei și derivatele ei de la pasul 4, se obțin expresiile algebrice pentru determinarea valorilor optimale ale parametrilor de acord ai legii de reglare aleasă la valoarea gradului optimal J_{opt}.

7. Se calculează valorile optimale ale parametrilor de acord ai legii de reglare din expresiile algebrice obținute la pasul 6 cu valoarea gradului optimal J_{opt}.

8. Se verifică performanțele sistemului proiectat prin simulare pe calculator.

Dacă performanțele impuse sistemului sunt satisfăcute, atunci procedura de acordare s-a încheiat, iar dacă performanțele impuse sistemului nu sunt satisfăcute, atunci procedura se reia de la început cu alt tip de lege de reglare sau prin utilizarea altei metode de sinteză.

Metoda gradului maximal de stabilitate cu iterații. Din aplicațiile practice a metodei în forma analitică, la acordarea regulatoarelor la modele de obiecte de reglare cu diverse proprietăți, s-a constatat că la valorile obținute ale parametrilor de acord ai regulatorului nu se garantează stabilitatea și performanțele sistemului proiectat [10-12].

În aceste cazuri, expresiile pentru determinarea valorilor parametrilor se reprezentă ca funcții $k_p = f(J)$, $k_i = f(J)$, $k_d = f(J)$ de parametrii cunoscuți ai modelului obiectului de reglare și de variabila necunoscută J. Se variază $J \geq 0$ și se calculează și se construiesc aceste funcții $k_p = f(J)$, $k_i = f(J)$, $k_d = f(J)$ pentru algoritmii PI și PID.

Pe aceste curbe se aleg seturi de valori suboptimale ale gradului de stabilitate J_i pe panta respectivă a curbelor construite, se determină valorile suboptimale ale parametrilor de acord $k_{pi} = f(J_i)$, $k_{ii} = f(J_i)$, $k_{di} = f(J_i)$ ai regulatorului PI și PID, admițând că valoarea lui J_i este mai mică sau mai mare ca cea optimală J_{opt}.

Pentru seturile de valori alese ai parametrilor regulatorului PI și PID se simulează pe calculator sistemul cu regulatorul respectiv și se determină cele mai ridicate performanțe posibile ale sistemului proiectat.

Pentru acordarea parametrilor algoritmului modificat PIDD^2 după metoda GMSA și GMSI la modelul (2.185) se utilizează sistemul din patru funcții $k_p = f_p(J)$, $k_i = f_i(J)$, $k_{d1} = f_{d1}(J)$, $k_{d2} = f_{d2}(J)$ pe necunoscuta J [10-12].

Exemplul 2.20. Se consideră modelul matematic al obiectului de reglare cu inerție de ordinul doi cu funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{k}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)} = \frac{k}{a_0 s^2 + a_1 s + a_2} = \frac{2}{(s+2)(s+5)} = \frac{2}{s^2+7s+10} = \frac{B(s)}{A(s)},$$

unde coeficientul de transfer $k = 2$, constantele de timp $T_1 = 0.5$ s, $T_2 = 0.2$ s, $a_0 = 1$, $a_1 = 7$ s, $a_2 = 10$.

Se cere pentru modelul obiectului de reglare și performanțele impuse gradul de amortizare $\xi = 0.707$, timpul de reglare $t_r = 1$ s și eroarea staționară $\varepsilon = 0$ să se acordeze parametrii regulatorului PI și PID prin metoda gradului maximal de stabilitate.

Soluționare. 1. Se determină expresiile analitice și se calculează parametrii optimali nde acord ai regulatorului PI:

$$k_p = \frac{1}{k}(-3a_0J^2 + 2a_1J - a_2) = \frac{1}{k}\left(\frac{a_1^2}{3a_0} - a_2\right) = f_p(J, k, a_0, a_1, a_2) = f_p(J),$$

$$k_i = \frac{1}{k}(-2a_0J^3 + a_1J^2) = \frac{1}{k}(a_0J^3 - a_1J^2 + a_2J) + k_pJ = \frac{1}{k}\frac{a_1^3}{27a_0^2} =$$

$$= f_i(J, k, a_0, a_1, a_2) = f_i(J);$$

$$k_{p\text{opt}} = \frac{1}{k}\left(\frac{a_1^2}{3a_0} - a_2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{7^2}{3\cdot1} - 10\right) = 3.1667,$$

$$k_{i\text{opt}} = \frac{1}{k}\frac{a_1^3}{27a_0^2} = \frac{1}{2}\frac{7^3}{27\cdot1} = 6.3518\ \text{s}^{-1}.$$

2. Pentru experesiile $k_p = f_p(J)$ și $k_i = f_i(J)$ ale regulatorului PI se variază J și se calculează și construiec curbele $k_p = f_p(J)$, $k_i = f_p(J)$ (fig. 2.26, a) prin metoda GMS cu iterații. Prin iterații $J_i - k_{pi}, k_{ii}$ se obține gradul optimal de stabilitate $J_{opt} = 2.3$ și valorile optimale ale parametrilor $k_{popt} = 3.1667$, $k_{iopt} = 6.3518\ \text{s}^{-1}$, $T_{iopt} = 0.157$ s, care coincid cu parametrii calculați în forma analitică.

Sistemul cu regulatorul PI sintetizat s-a simulat și răspunsul indicial este dat în fig. 2.26, a, curba 2. La eroarea de 5 % performanțele sunt: timpul de creștere și de reglare $t_c = t_r = 1.81$ s.

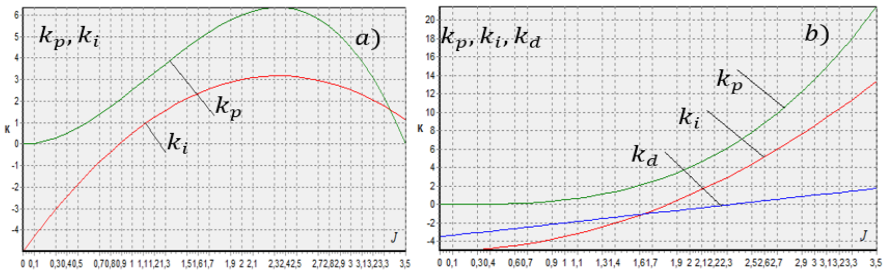

Fig. 2.26. Dependențele $k_p = f(J)$, $k_i = f(J)$, $k_d = f(J)$

3. Se determină expresiile de calcul ale parametrilor regulatorului PID:

$$k_p = \frac{1}{k}(-3a_0J^2 + 2a_1J - a_2) + 2k_dJ = \frac{1}{k}(3a_0J^2 - a_2) = f_p(J, k, a_0, a_1, a_2) = f_p(J),$$

$$k_i = \frac{1}{k}(a_0J^3 - a_1J^2 + a_2J) - k_dJ^2 + k_pJ = \frac{a_0}{k}J^3 = f_p(J, k, a_0, a_1, a_2) = f_i(J),$$

$$k_d = \frac{1}{k}(3a_0J - a_1) = f_d(J, k, a_0, a_1, a_2) = f_d(J).$$

Din expresiile obținute în formă analitică nu se pot calcula parametrii algoritmului PID. Se utilizează metoda gradului maximal de stabilitate cu iterații. S-a variat $J = 2.4 \cdots 3.6$ și s-au calculat și construit curbele $k_p = f_p(J)$, $k_i = f_i(J)$, $k_d = f_d(J)$ (fig. 2.26, b). Prin proceduri de iterații ale lui J_i și seturi de valori ale parametrilor de acord k_{pi}, k_{ii}, k_{di} s-a simulat pe calculator sistemul și s-au analizat performanțele sistemului. S-a determinat gradul optimal de stabilitate $J_{\text{opt}} = 3.6$ și s-au calculat parametrii optimali ai regulatorului $k_{p\text{opt}} = 14.44$, $k_{i\text{opt}} = 23.28$, $T_{i\text{opt}} = 0.043$ s, $k_{d\text{opt}} = 1.9$ s. S-a simulat sistemul cu parametrii calculați ai regulatorul PID și răspunsul indicial este dat în fig. 2.27, alura 1, iar performanțele optimale ale sistemului la eroarea de 5 % sunt: timpul de creștere și de reglare $t_c = t_r = 0.58$ s.

În fig. 2.27 sunt prezentate răspunsurile indiciale ale sistemului automat cu același model de obiect din ex. 2.9 și 2.11 cu algoritmul de reglare sintetizat după metoda poli-zerouri, alura 2 cu performanțele timpul de creştere și de reglare $t_c = t_r = 0.21$ s, suprareglarea $\sigma = 4.88$ %) și după metoda polinomială - alura 3 cu timpul de creştere $t_c = 0.5$, suprareglarea $\sigma = 5.30$ %, timpul de reglare $t_r = 0.83$ s.

Performanțele sistemului cu regulatorul acordat după metoda GMSI, după metoda poli-zerouri și polinomială satisfac performanțele impuse sistemului.■

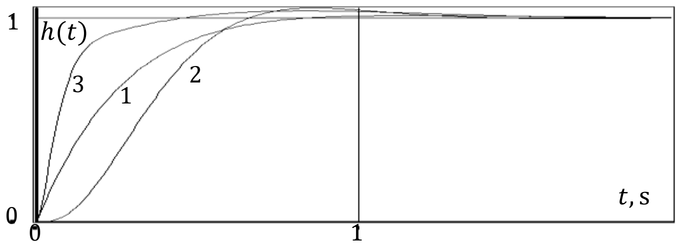

Fig. 2.27. Răspunsurile indiciale ale sistemului automat

Exemplul 2.21. Se consideră modelul obiectului de reglare cu inerție de ordinul doi și timp mort cu f.d.t. de forma:

$$H(s) = \frac{ke^{-\tau s}}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)} = \frac{ke^{-\tau s}}{a_0 s^2 + a_1 s + a_2} = \frac{0.5e^{-s}}{10s^2+7s+1},$$

unde $k = 0.5$ este coeficientul de transfer, $T_1 = 2$ s, $T_2 = 5$ s – constante de timp, $\tau = 1$ s – timpul mort, coeficienții generici $a_0 = T_1 T_2 = 2 \cdot 5 = 10$ s^2, $a_1 = T_1 + T_2 = 2 + 5 = 7$ s, $a_2 = 1$.

Legile de reglare PI și PID se descriu cu funcțiile de transfer:

$$H_{\text{PI}}(s) = k_p + \frac{k_i}{s},\ H_{\text{PID}}(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_i s,$$

unde k_p, k_i, k_d sunt parametrii de acord ai algoritmului de reglare.

Se cere să se acordeze parametrii regulatorului PI și PID la modelul obiectului de reglare prin metoda gradului maximal de stabilitate analitică și cu iterații.

Soluționare prin metoda gradului maximal de stabilitate în formă analitică.

1. Se alcătuiește ecuația caracteristică a sistemului închis cu regulatorul PI și PID respectiv:

$$A_{\mathrm{PI}}(s) = 1 + H_{\mathrm{PI}}(s)H(s) = 1 + \left(k_p + \frac{k_i}{s}\right)\frac{ke^{-\tau s}}{a_0s^2+a_1s+a_2} =$$

$$= e^{\tau s}(a_0s^3 + a_1s^2 + a_2s) + kk_ps + kk_i = 0,$$

$$A_{\mathrm{PID}}(s) = 1 + H_{\mathrm{PID}}(s)H(s) = 1 + \left(k_p + \frac{k_i}{s} + k_ds\right)\frac{ke^{-\tau s}}{a_0s^2+a_1s+a_2} =$$

$$= e^{\tau s}(a_0s^3 + a_1s^2 + a_2s) + kk_ds^2 + kk_ps + kk_i = 0.$$

2. Se substituie variabila complexă s prin gradul de stabilitate $s = -J$ și se transcriu ecuațiile caracteristice ale sistemului în forma:

$$A_{\mathrm{PI}}(-J) = e^{-\tau J}(-a_0J^3 + a_1J^2 - a_2J) - kk_pJ + kk_i = 0,$$

$$A_{\mathrm{PID}}(-J) = e^{-\tau J}(-a_0J^3 + a_1J^2 - a_2J) + kk_dJ^2 - kk_pJ + kk_i = 0.$$

3. Prin operații de derivare a expresiilor de la p. 2 se determină expresiile pentru determinarea gradului de stabilitate al sistemului cu regulatorul PI și PID.

4. Pentru regulatorul PI ecuația algebrică este:

$$-c_0J^3 + c_1J^2 - c_2J + c_3 = -10J^3 + 67J^2 - 89J + 16 = 0,$$

unde $c_0 = a_0\tau^2$, $c_1 = a_1\tau^2 + 6a_0\tau$, $c_2 = a_2\tau^2 + 4a_1\tau + 6a_0, c_3 = 2a_2\tau + 2a_1$. Această ecuație se soluționează și se obţin rădăcinile: $p_1 = 1.5112$, $p_2 = 0.2127$, $p_3 = 4.9764$.

Gradul optimal de stabilitate este $J_{\mathrm{opt}} = 0.2127$.

5. Se calculează parametrii optimali ai regulatorului PI după relațiile:

$$k_p = \frac{e^{-\tau J}}{k}(a_0\tau J^3 - (a_1\tau + 3a_0)J^2 + (a_2\tau + 2a_1)J - a_2) = f_p(J),$$

$$k_i = \frac{e^{-\tau J}}{k}J^2(a_0\tau J^2 - (a_1\tau + 2a_0)J + a_2\tau + a_1) =$$

$$= \frac{e^{-\tau J}}{k}J(a_0J^2 - a_1J + a_2) + k_pJ = f_i(J).$$

Funcția de transfer a algoritmului de reglare PI are forma:

$$H_{PI}(s) = k_{p\mathrm{opt}} + \frac{k_{i\mathrm{opt}}}{s} = 0.9738 + \frac{0.1982}{s}.$$

6. Pentru regulatorul PID s-a obţinut ecuaţia algebrică:

$$c_0J^3 - c_1J^2 + c_2J - c_3 = 10J^3 - 97J^2 + 223J - 105 = 0,$$

unde $c_0 = \tau^3 a_0$, $c_1 = \tau^3 a_1 + 9\tau^2 a_0$, $c_2 = \tau^3 a_2 + 6\tau^2 a_1 + 18\tau a_0$, $c_3 = 3\tau^2 a_2 + $ $+6\tau a_1 + 6a_0$, care se soluționează și se obțin rădăcinile: $p_1 = 2.5332$, $p_2 = 0.6345$, $p_3 = 6.5363$.

Gradul optimal de stabilitate este $J_{\text{opt}} = 0.6345$.

7. La valoarea $J_{\text{opt}} = 0.6345$ se calculează parametrii optimali ai regulatorului PID după relațiile:

$$k_p = \frac{e^{-\tau J}}{k}(a_0\tau^2 J^4 - (a_1\tau^2 + 5a_0\tau)J^3 + (a_2\tau^2 + 3\tau a_1 + 3a_0)J^2 - a_2\tau J - a_2) =$$

$$= \frac{e^{-\tau J}}{k}(a_0\tau J^3 - (a_1\tau + 3a_0)J^2 + (a_2\tau + 2a_1)J - a_2) + 2k_d J = f_p(J),$$

$$k_i = \frac{e^{-\tau J}}{2k}J^3(a_0\tau^2 J^2 - (a_1\tau^2 + 4a_0\tau)J + a_2\tau^2 + 2a_1\tau + 2a_0) =$$

$$= \frac{e^{-\tau J}}{k}(a_0 J^3 - a_1 J^2 + a_2 J) - k_d J^2 + k_p J = f_i(J),$$

$$k_d = \frac{e^{-\tau J}}{2k}(a_0\tau^2 J^3 - (a_1\tau^2 + 6a_0\tau)J^2 + (a_2\tau^2 + 4a_1\tau + 6a_0)J - 2a_2\tau -$$

$$-2a_1) = f_d(J).$$

Funcția de transfer a algoritmului de reglare PID are forma:

$$H_{PID}(s) = k_{popt} + \frac{k_{iopt}}{s} + k_{dopt}s = 6.7449 + \frac{1.2464}{s} + 8.510s.$$

Soluționare prin metoda gradului maximal de stabilitate cu iterații.

1. Pentru regulatorul PI și PID s-au calculat și construit funcțiile $k_p = f_p(J)$ și $k_i = f_i(J)$ pentru PI (fig. 2.28, a) și pentru regulatorul PID - dependențele $k_p = f_p(J)$, $k_i = f_i(J)$, $k_d = f_d(J)$ (fig. 2.28, b).

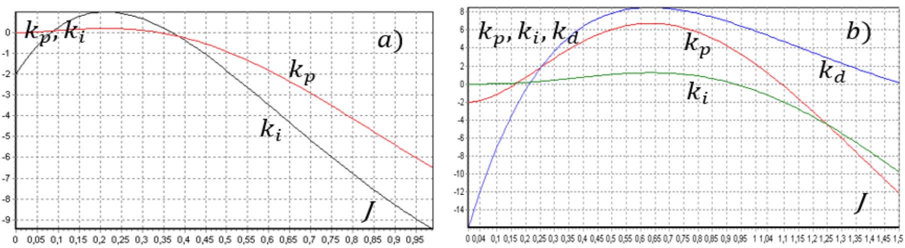

Fig. 2.28. Dependențele parametrilor regulatorului PI a) și PID b).

Pentru acordarea regulatoarelor PI și PID prin metoda GMS cu iterații s-au analizat câte 4 iterații $J_i - k_{pi}, k_{ii}, k_{di}$ pe curbele din fig. 2.28, a)- b) și parametrii regulatoarelor sunt prezentați în tabelul 2.6: pentru regulatorul PI rândurile 2-5 și pentru regulatorul PID rândurile 8-11. S-a simulat sistemul cu regulatorul PI și PID în MATLAB (fig. 2.29) și răspunsurile indiciale optimale sunt date în fig. 2.30: alura 1 − sistemul cu regulatorul PI acordat după metoda GMS analitică cu parametrii din rândul 1, tabelul 2.6; alura 2 - sistemul cu regulatorul PID acordat cu metoda GMS analitică cu parametrii din rândul 7, tabelul 2.6; alura 3 – sistemul cu regulatorul PID acordat cu metoda GMS cu iterații - rândul 8, tabelul 2.6.

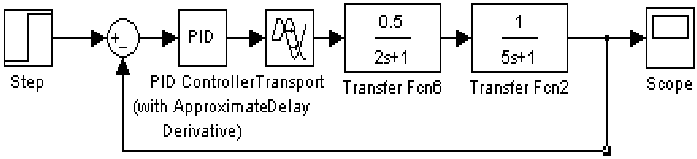

Fig. 2.29. Schema de simulare pe calculator a sistemului automat

Tabelul 2.6. Performanțele sistemului cu regulatorul PI și PID

Nr. crt.	Tip reg.	Grad J	Parametrii regulatorului și performanțele sistemului							
			k_p	k_i	T_i	k_d	t_c, s	σ, %	t_r, s	λ
1	PI	**0.213**	**0.974**	**0.195**	**5.05**	-	**23.0**	-	**23.0**	-
2		0.1	0.253	0.097	10.3	-	57.0	-	57.0	-
3		0.15	0.776	0.161	6.21	-	31.0	-	31.0	-
4		0.25	0.924	0.182	5.49	-	28.0	-	28.0	-
5		0.3	0.651	0.106	9.43	-	61.0	-	61.0	-
6	ZN	ZN	6.975	0.053	18.9	-	4.65	13.89	100	1
7	PID	0.635	6.745	1.246	0.95	8.51	3.49	12.82	9.14	1
8		**0.35**	**3.650**	**0.564**	**1.77**	**4.91**	**7.88**	-	**7.88**	-
9		0.5	5.261	1.035	0.97	7.78	4.9	8.0	12.2	1
10		0.75	6.332	1.101	0.91	8.22	3.74	9.10	8.85	1
11		0.9	4.427	0.315	3.17	7.07	28.5	-	28.5	-
12	ZN	ZN	9.300	0.070	14.2	2.96	3.61	22.44	100	1

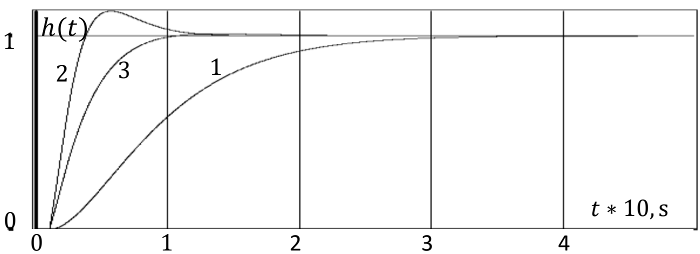

Fig. 2.30. Răspunsurile indiciale ale sistemului cu regulatorul PI și PID

Pentru sistemul cu regulatorul PI performanțele optimale se obțin prin metoda GMS analitică - rândul 1, tabelul 2.6. Pentru sistemul cu regulatorul PID acordat după metoda GMS analitică, performanțele sunt date în tabelul 2.6, rândul 7.

Pentru compararea performanțelor sistemului cu regulatorul PI și PID cu parametrii acordați după metodele GMSA și GMSI, s-au acordat regulatoarele PI și PID după metoda Ziegler-Nichols (regimul critic cu parametrii $k_{\mathrm{cr}} = 15.5$, $T_{\mathrm{p}} = 23.66$ s) și parametrii regulatoarelor PI, PID și performanțele sistemului sunt date în tabelul 2.6 (rândul 6 – sistemul cu regulatorul PI, rândul 12 – sistemul cu regulatorul PID).

Cele mai ridicate performanțe s-au obținut pentru sistemul automat cu regulatorul PID acordat după metoda GMS cu iterații (rândul 8 din tabelul 2.6).■

În Anexa 5 din [9] se dau algoritmi PI și PID în formă analitică calculați conform procedurii metodei gradului maximal de stabilitate pentru diferite tipuri de modele de obiecte de reglare, care se utilizează la aproximarea proceselor cu diverse proprietăți.

Chestionar și probleme

1. Pentru legile de reglare tipice P, I, D, PD, PI, PID numiți și explicați sensul fizic al parametrilor algoritmilor respectivi.

2. Pentru legile de reglare tipice P, I, D, PD, PI, PID schțați răspunsul indicial și explicați cum se determină parametrii algoritmilor respectivi.

3. Explicați noţiunea de algoritmi tipici modificați.

4. Prezentați schema funcțională și structurală de realizare a legillor de reglare P, PI, PID și explicați rolul elementelor componente ale structurii.

5. Care din performanțe dinamice sunt determinate de proprietățile dinamice ale sistemului automat închis?

6. Explicați procedura de sinteză a algoritmului de conducere.

7. Cum se determină polii dominanți la procedura de sinteză a algoritmului?

8. Explicați procedura de proiectare a regulatorului prin metoda poli-zerouri.

9. Se consideră modelul procesului descris de funcția de transfer:

$$H_P(s) = \frac{k}{a_0 s^2 + a_1 s + a_2} = \frac{3}{16s^2 + 23s + 10}.$$

Proiectați regulatorul prin metoda poli-zerouri.

10. Pentru modelul procesului de la p. 9 sintetizați regulatorul după metoda polinomială.

11. Explicați cum se acordează regulatorul după metoda modulului.

12. Se consideră modelul procesului descris de funcția de transfer:

$$H_P(s) = \frac{5}{s(35s+1)(17s+1)(6s+1)(3s+1)}.$$

Acordați regulatorul PI după metoda modelului.

13. Se consideră modelul procesului descris de funcția de transfer:

$$H_P(s) = \frac{5}{s(35s+1)(17s+1)(6s+1)(3s+1)}.$$

Acordați regulatorul PID după metoda modelului.

14. Se consideră modelul procesului descris de funcția de transfer cu parametrii cunoscuți:

$$H_P(s) = \frac{k}{s(a_0s^2+a_1s+a_2)} = \frac{2}{s(21s^2+35s+8)}.$$

Acordați regulatorul P, PI, PID cu metoda Ziegler-Nichols.

15. Se consideră modelul procesului descris de funcția de transfer:

$$H_P(s) = \frac{ke^{-\tau s}}{a_0s^2+a_1s+a_2} = \frac{6e^{-4s}}{12s^2+8s+4}.$$

Acordați regulatorul P, PI, PID cu metoda Ziegler-Nichols.

16. Se consideră modelul procesului descris de funcția de transfer:

$$H_P(s) = \frac{ke^{-\tau s_*}}{s(a_0s^2+a_1s+a_2)} = \frac{2e^{-3s}}{s(21s^2+35s+8)}.$$

Acordați regulatorul P, PI, PID cu metoda Ziegler-Nichols.

17. Pentru modelul procesului de la p. 9 acordați regulatorul PI și PID cu metoda gradului maximal de stabilitate.

18. Se consideră modelul procesului descris de funcția de transfer:

$$H_P(s) = \frac{k}{s(Ts+1)} = \frac{3}{s(10s+1)}.$$

Calculați parametrii algoritmului de reglare PI și PID aplicând metoda GMS.

19. Se consideră modelul procesului descris de funcția de transfer:

$$H_P(s) = \frac{k}{s(T_1s+1)(T_2s+1)} = \frac{5}{s(10s+1)(7s+1)}.$$

Calculați parametrii algoritmului PI și PID aplicând metoda GMS

20. Pentru modelul procesului de la p. 13 acordați regulatorul PI și PID după metoda gradului maximal de stabilitate.

21. Pentru modelul procesului de la p. 14 acordați regulatorul PI și PID după metoda gradului maximal de stabilitate.

3 STRUCTURI DE SISTEME AUTOMATE PENTRU PROCESE LENTE

3.1 Introducere

Particularitățile proceselor lente și cu componenta timpului mort, care evidențiază o comportare cu fază neminimă, conduc la dificultăți in procedurile de proiectare ale regulatoarelor de tip PID pentru structurile convenționale ale sistemelor automate cu un grad de libertate.

Pentru depășirea acestor dificultăți la proiectarea algoritmilor de reglare se utilizează structuri de reglare cu două grade de libertate cu regulatoare ce conțin modelul intern al semnalului exogen: structuri de reglare cu compensarea directă a perturbațiilor (reglare combinată), structuri de reglare în cascadă și structurile de reglare cu predictor Smith.

3.2 Structura sistemului automat cu două grade de libertate

Utilizarea modelului mărimilor exogene în structura regulatorului asigură rejecția perturbațiilor și urmărirea referinței în regim staționar, dar performanțele în regim tranzitoriu nu pot fi realizate integral în raport cu referința și perturbația.

Răspunsul tranzitoriu al sistemului este influențat de zerourile f.d.t. între punctul de aplicare al referinței sau perturbației și ieșire, de polii f.d.t. între ieșire și punctul de aplicație al referinței și perturbației și ieșire și poziția polilor în buclă închisă. Performanțele sistemului pot fi influențate pe mai multe căi, însă calea cea mai directă rezultă prin modificarea poziției polilor sistemului închis prin schimbarea structurii regulatorului. În cazurile, când referința sau/și perturbația pot fi măsurate, atunci se poate adopta soluția de reglare cu două grade de libertate sau soluția de reglare combinată.

Pentru urmărirea directă a referinței se adoptă structura sistemului cu două grade de libertate din fig. 3.1, în care se folosește prefiltrul (regulatorul) cu f.d.t. $H_r(s)$ pentru a inversa f.d.t. complementară a sensibilităţii sistemului $T(s)$ la anumite frecvenţe, astfel că produsul acestora să fie $H_r(s)T(s) = 1$, care poate exclude folosirea unei amplificări mari în bucla de reacție pentru a aduce $T(a_i)$, unde a_i, $i =$

$= \overline{1,n}$ sunt polii sistemului, la valoarea egală cu unitatea ceea ce ar avea efecte benefice asupra robusteţii stabilităţii sistemului.

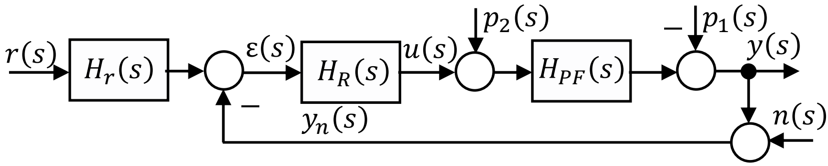

Fig. 3.1. Structura sistemului cu două grade de libertate

În cazul, când se folosește f.d.t. $H_r(s)$ pentru a realiza egalitatea $H_r(s)T(s) = 1$, atunci performanţele pentru procesul real vor fi sensibile la erorile de modelare şi a_i, $i = \overline{1,n_r}$ sunt polii modelului de referinţă.

Performanțele sistemului în raport cu referință se calculează pornind de la relațiile [1, 4, 5]:

$$y(s) = H_r(s)T(s)r(s), \tag{3.1}$$

$$u(s) = H_r(s)\frac{H_R(s)}{1+H_R(s)H_{PF}(s)}r(s),$$

$$\varepsilon(s) = [1 - H_r(s)T(s)]r(s). \tag{3.3}$$

Din relația (3.3) pentru urmărirea referinței cu eroare staționară $\varepsilon(s) = 0$ f.d.t. a regulatorului–compensator se determină din paranteza pătrată egalând-o cu zero și se obține:

$$1 - H_r(s)T(s) = 0,\ H_r(s) = \frac{1}{T(s)} = \frac{1+H_R(s)H_{PF}(s)}{H_R(s)H_{PF}(s)} = \frac{Q_r(s)}{P_r(s)}. \tag{3.4}$$

Pentru o referință dată se deduc cerințele pentru regulatoarele $H_r(s)$ şi $H_R(s)$ astfel să fie satisfăcute cerinţele impuse pentru urmărirea referinței și rejecția perturbației în regim staționar și tranzitoriu al sistemului.

3.3 Structura sistemului automat de reglare combinată

Se consideră structura sistemului automat, asupra căriua acționează perturbația $p(t)$ care se măsoară, și atunci se poate adopta o soluţie de reglare directă cu compensarea acţiunii perturbaţiei (fig. 3.2).

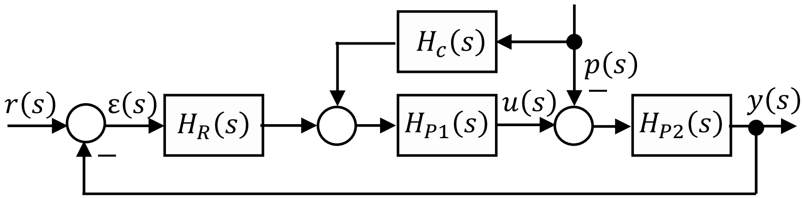

Fig. 3.2. Structura sistemului cu compensare directă a perturbației

Din structura sistemului pentru referința $r(t) = 0$ se obține condiția de invarianță pentru mărimea de ieșire $y_p(s) = 0$ şi eroarea staţionară $\varepsilon(t) = 0$ a sistemului în formă operațională [1, 4, 5]:

$$y_p(s) = S(s)H_{P2}(s)[1 - H_{P1}(s)H_c(s)]p(s) =$$

$$= \frac{1}{1+H_{P1}(s)H_{P2}(s)H_R(s)} H_{P2}(s)[1 - H_{P1}(s)H_c(s)]p(s) \qquad (3.5)$$

şi mărimea de reglare se prezintă în formă operațională:

$$u_p(s) = S(s)H_R(s)H_{P2}(s)[1 - H_{P1}(s)H_c(s)]p(s) =$$

$$= \frac{1}{1+H_{P1}(s)H_{P2}(s)H_R(s)} H_R(s)H_{P2}(s)[1 - H_{P1}(s)H_c(s)]p(s), \qquad (3.6)$$

unde $S(s)$ este funcţia de sensibilitatea sistemului.

Din relația (3.5) se determină f.d.t. a regulatorului-compensator egalând cu zero expresia din paranteza pătrată:

$$1 - H_{P1}(s)H_c(s) = 0,\ H_c(s) = \frac{1}{H_{P1}(s)} = \frac{Q_c(s)}{P_c(s)}. \qquad (3.7)$$

În expresiile (3.4) și (3.7) f.d.t. a regulatorului sunt elemente derivative ideale deoarece regulatorul $H_c(s)$ și modelul procesului au proprietăți de inerție și integrare. În aceste cazuri f.d.t. a regulatorului-compensator are forma:

$$H_c(s) = q_0 + q_1 s + q_2 s^2 + q_3 s^3 + \cdots. \qquad (3.8)$$

Pentru realizarea relațiilor de forma (3.4) și (3.7) se obțin aproximații care realizează invarianța parțială a regulatorului.

Pentru arhitectura sistemului se cere să posede următoarele proprietăți:

1. Funcția de transfer a regulatorului-compensator $H_c(s)$ trebuie să fie stabilă şi proprie, deoarece acționează în buclă deschisă.

2. Pentru compensarea perturbației se cere ca expresia parantezei pătrate din (3.3) să fie egală cu zero și se calculează funcția de transfer a regulatorului–compensator cu relația:

$$1 - H_{P1}(s)H_c(s) = 0, H_c(s) = \frac{1}{H_{P1}(s)} = [H_{P1}(s)]^{-1}. \qquad (3.9)$$

3. Din (3.9) pentru f.d.t. $H_{P1}(s)$ cu o caracteristică de frecvență trece-jos se obține f.d.t. a regulatorului-compensator cu o caracteristică de frecvență trece-sus.

Utilizarea acestei structuri de sistem asigură rejecția directă a perturbației măsurabile, ceea ce asigură o îmbunătățire a performanțelor sistemului pentru procese lente și foarte lente.

Regulatoarele – compensatoare nu se realizează în două cazuri:

1. Dacă în proces există timp mort pe canalul perturbației τ_0 şi în proces τ_p și acestea se raportează $\tau_p > \tau_0$.

Se consideră f.d.t. a procesului și f.d.t. pe canalul perturbației:

$$H_P(s) = \frac{B_P(s)}{A_P(s)} e^{-\tau_p s} \text{ şi } H_p(s) = \frac{B_p(s)}{A_p(s)} e^{-\tau_0 s}, \qquad (3.10)$$

unde polinoamele procesului au gradele: m_P pentru $B_P(s)$, n_P pentru $A_P(s)$ şi m_p pentru $B_p(s)$, n_p pentru $A_p(s)$.

Se calculează f.d.t. a compensatorului și se obține

$$H_c(s) = \frac{H_c(s)}{H_P(s)} = \frac{A_P(s)B_p(s)e^{-\tau_0 s}}{B_P(s)A_p(s)e^{-\tau_p s}} = \frac{A_P(s)B_p(s)e^{-\tau_0 s}}{B_P(s)A_p(s)e^{-\tau_p s}} e^{s(\tau_p - \tau_0)} = \frac{Q_c(s)}{P_c(s)} e^{s\tau_c}, \qquad (3.11)$$

unde timpul mort al compensatorului este cu avans $\tau_c = \tau_p - \tau_0 > 0$ şi deci nu poate fi realizat.

2. Dacă numărătorul f.d.t. $H_c(s)$ a compensatorului are gradul mai mare ca al numitorului $(m_c + n_P) > (n_c + m_P)$, atunci acest regulator nu poate fi realizat.

Astfel, condițiile de realizabilitate fizică a regulatorului-compensator $H_c(s)$ se reduc la impunerea ca timpul mort al procesului să fie egal sau mai mare decât timpul mort pe canalul perturbației şi gradul polinomului de la numărător să fie egal sau mai mic ca gradul numitorului regulatorului $H_c(s)$:

$$\tau_0 \geq \tau_p, \quad (3.12)$$

$$(n_c + m_P) \leq (m_c + n_P). \quad (3.13)$$

Exemplul 3.1. Se consideră modelul procesului descris cu f.d.t. de forma:

$$H_P(s) = \frac{e^{-2s}}{2s^2+3s+1},$$

care se prezintă prin două subprocese cu f.d.t.:

$$H_{P1}(s) = \frac{1}{s+1} \text{ şi } H_{P2}(s) = \frac{e^{-2s}}{2s+1}.$$

Perturbația este în formă de treaptă unitară.

Se cere să se proiecteze regulatorul-compensator pentru perturbația dată.

Soluționare: Se alege structura regulatorului-compensator cu f.d.t. de forma:

$$H_c(s) = k\frac{s+1}{\alpha s+1},$$

unde α este un parametru care permite realizarea compromisului între eficienţia rejecţiei şi efortul de comandă în bucla de compensare.

Regulatorul $H_R(s)$ pe canalul direct al sistemului este PID și se acordează astfel în raport cu semnalul referinței treaptă unitară, ca suprareglarea $\sigma \leq 5$ %.

Structura sistemului calculată cu semnalele de referință și perturbație de tip treaptă unitară se simulează și variind parametrul $\alpha = 0.1; 0.5; 1; 2$ la valoarea lui $k =$ $= 1$ se constată îmbunătățirea performanțelor sistemului. ■

Dacă în structura sistemului cu compensara perturbației din fig. 3.2 se introduce și prefiltrul cu f.d.t. $H_r(s)$ pentru referință, atunci sistemul prezintă o structură cu trei grade de libertate (fig. 3.3) [4, 5].

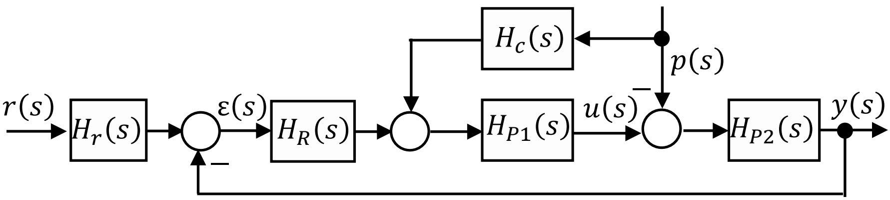

Fig. 3.3. Structura sistemului cu trei grade de libertate

În structura sistemului blocurile de reglare $H_r(s)$, $H_R(s)$ și $H_c(s)$ pot fi acordate independent pentru obținerea performanțelor dorite în raport cu semnalele exogene referința $r(s)$ și perturbația $p(s)$.

3.4 Structura sistemului automat de reglare în cascadă

Reglarea în cascadă este utilizată atât în cazul proceselor rapide, cât şi pentru procese lente cu componenta cu timp mort. Pentru procese cu un anumit grad de complexitate, f.d.t. $H_P(s)$ a procesului poate conţine un număr mare de constante de timp, ceea ce impune pentru compensarea lor utilizarea unor algoritmi de reglare care să conţină mai multe binoame de gradul unu [4, 5].

Din considerente dificile la realizarea acestor regulatoare și având în vedere efectul negativ pe care-l au componentele derivative asupra răspunsului sistemului (amplificarea zgomotului, creșterea suprareglării) se recomandă utilizarea reglării în cascadă.
Pentru a obține structuri și construcții simple a regulatoarelor pentru conducerea proceselor ce conțin mai mult de două constante de timp dominante, se adoptă o structură de reglare în cascadă în cadrul căreia se utilizează mai multe blocuri de reglare tipizate.

Principiul reglării în cascadă se bazează pe împărțirea procesului în subprocese prin alegerea unor mărimi intermediare măsurabile care se transmit cauzal de la intrare la ieșire.

În fig. 3.4 se prezintă schema structurală a unui sistem de reglare în cascadă, unde obiectul de reglare OR (dreptunghiul cu linie întreruptă) este descompus în trei subprocese cu f.d.t. $H_{p1}(s) = H_1(s) = H_1$, $H_{p2}(s) = H_2(s) = H_2$, $H_3(s) = H_3(s) = H_3$.

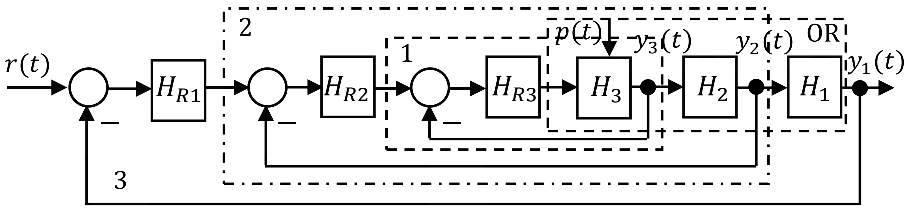

Fig. 3.4. Structura sistemului de reglare în cascadă

În această structură se utilizează trei regulatoare cu f.d.t.
$H_{R1}(s) = H_{R1}$, $H_{R2}(s) = H_{R2}$, $H_{R3}(s) = H_{R3}$, care sunt conectate pe canalul direct. Regulatorul $H_{R1}(s)$ este regulatorul principal şi reglează

mărimea de ieşire $y(t) = y_1(t)$, iar regulatoarele $H_{R3}(s)$ și $H_{R2}(s)$ sunt regulatoare secundare, care reglează mărimile intermediare măsurabile $y_3(t)$ și $y_2(t)$ respectiv.

În structura sistemului sunt indicate trei contururi: conturul 1 (dreptunghiul cu linie întreruptă) format din regulatorul $H_{R3}(s)$ și subprocesul $H_3(s)$, conturul 2 (dreptunghiul cu linie întreruptă cu un punct) format din regulatorul $H_{R2}(s)$, conturul 1 și subprocesul $H_2(s)$ și conturul 3 format din regulatorul $H_{R1}(s)$, conturul 2 și subprocesul $H_1(s)$.

În funcție de complexitatea procesului pot fi structurate în cascadă mai multe regulatoare, care asigură implicit o limitare simultană a mai multor mărimi intermediare din structura sistemului și cea a ieșirii.

Pentru utilizarea eficientă a avantajelor structurilor reglării în cascadă se impune ca variabilele intermediare să se aleagă conform anumitor considerente ca avantaje.

1. Mărimile intermediare să fie uşor accesibile măsurării prin mijloace tehnice simple şi fără dificultăți la montarea acestora pentru fiecare mărime.

2. Subprocesele să nu conțină mai mult de două constante de timp, iar valoarea lor să fie cât mai redusă.

3. Rezultă că mărimile intermediare vor avea o viteză de răspuns mai rapidă decât mărimea de ieșire și astfel, se compensează acțiunea perturbațiilor dominate asupra procesului.

Pe lângă avantajele de reglare și limitarea simultană a mai multor mărimi, de reducerea influenței unor perturbații asupra mărimii de ieșire $y(t)$, care determină un grad de invarianţă al acestei mărimi în raport cu perturbaţiile mult mai ridicat decât în cazul sistemelor convenţionale şi de creşterea vitezei de răspuns în raport cu modificarea referinţei, structura de reglare în cascadă datorită prezenței mai multor reacții negative, are și avantajul unei sensibilități reduse la variația anumitor parametri ai modelului procesului la acțiunea unor perturbații parametrice și rezultă o mai bună robustețe.

Dificultățile în obținerea unor performanțe mai bune, în baza structurilor de reglare în cascadă, depind de alegerea și acordarea optimă a algoritmilor de reglare, având în vedere că regulatoarele buclelor interioare au referința care se fixează extern de către un alt regulator.

În general pentru bucla interioară se recomandă un regulator de tipul P sau PI și foarte rar un regulator PID. Se recomandă bucla interioară să aibă o viteză de răspuns mai mare decât bucla principală și se recomandă un regulator P, deși are dezavantajul unei reglări cu eroare. Creșterea coeficientului de transfer în bucla interioară conduce la creșterea vitezei de răspuns și la diminuarea erorii.

Pentru bucla exterioară se recomandă regulatoare de tipul PI, PID.

Pentru acordarea optimă a regulatoarelor în structurile de reglare în cascadă pentru procese lente se recomandă metode experimentale, metoda gradului maximal. Acordarea se inițiază cu buclele interioare separat deconectând regulatoarele din celelalte bucle, presupunând că buclele funcționează independent.

Exemplul 3.2. Se dă structura sistemului de reglare în cascadă dată în fig. 3.4. Se cere de calculat funcția de transfer a sistemului automat închis.

Soluționare. Pornind de la structura sistemului de reglare în cascadă cu trei bucle, se prezentă procedura de calcul presupunând că parametrii regulatoarelor se vor determina printr-o oarecare metodă.

Se consideră cunoscuți parametrii regulatorului $H_{R3}(s)$ și atunci se calculează f.d.t a buclei închise:

$$H_0^3(s) = \frac{H_{R3}(s)H_{p3}(s)}{1+H_{R3}(s)H_{p3}(s)}.$$

Se determină f.d.t. a obiectului echivalent al conturului doi:

$$H'_{p2}(s) = H_0^3(s)H_{p2}(s).$$

Se presupune că sau calculat parametrii regulatorului $H_{R2}(s)$ şi atunci se calculează f.d.t a buclei închise:

$$H_0^2(s) = \frac{H_{R2}(s)H'_{p2}(s)}{1+H_{R2}(s)H'_{p2}(s)}.$$

Se determină f.d.t. a obiectului echivalent al buclei principale:

$$H'_{p1}(s) = H_0^2(s)H_{p1}(s).$$

Se presupune că s-au calculat parametrii regulatorului $H_{R1}(s)$ şi atunci se calculează f.d.t a buclei închise a sistemului:

$$H_0(s) = \frac{H_{R1}(s)H'_{p1}(s)}{1+H_{R1}(s)H'_{p1}(s)} = \frac{B(s)}{A(s)}.\blacksquare$$

3.5 Structura sistemului automat cu predictor Smith

În procese industriale și tehnologice, datorită evoluției lente a proceselor fizice și chimice, determină apariția timpului mort, ceea ce aduce la dificultăți la conducerea acestor procese. Timpul mort influențează negativ asupra stabilității și performanțelor sistemului [4, 5].

Același efect se obține și în cazul când obiectele se conduc cu regulatoare numerice.

Dacă se cer performanțele sistemului să fie superioare, atunci se utilizează regulatoare speciale ca *regulatorul cu predicție Smith* sau algoritmi de compensare a timpului mort – utilizarea *reglării cu predicție*, care prezintă structuri de sistem cu scoaterea timpului mort în afara buclei de reglare [4, 5].

Structura sistemului cu *regulatorul cu predicție Smith* se dă în fig. 3.5. Utilizarea acestei structuri conduce la construirea unui model paralel cu scopul compensării timpului mort.

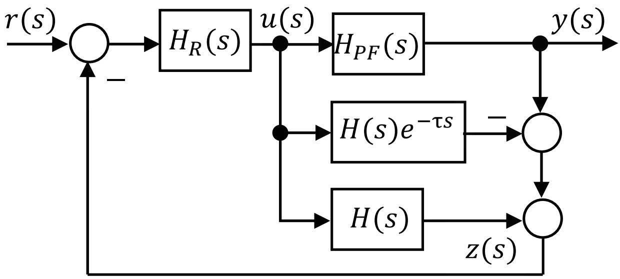

Fig. 3.5. Structura sistemului cu predictor Smith

Se consideră procesul descris de f.d.t. $H(s)$ stabilă, proprie şi cu timp mort de forma:

$$H_{PF}(s) = H(s)e^{-\tau s}. \tag{3.14}$$

Algoritmul de reglare se proiectează pe baza f.d.t. între semnalele $r(s)$ şi $z(s)$, care nu conţine timpul mort în bucla de reglare:

$$H_{zr}(s) = \frac{H_R(s)H(s)}{1+H_R(s)H(s)}. \tag{3.15}$$

Se determină f.d.t. între mărimile $r(s)$ şi $y(s)$ cu relaţia:

$$H_0(s) = T(s) = \frac{H_R(s)H(s)e^{-\tau s}}{1+H_R(s)H(s)} = H_{zr}(s)e^{-\tau s}. \tag{3.16}$$

Relația (3.16) evidențiază modalitatea de alegere și proiectare a regulatorului pe baza modelului fără timp mort și întârzierea procesului cu mărimea τ.

Se consideră modelul aproximat al procesului:

$$\hat{H}_P(s) = \hat{H}(s)e^{-\hat{\tau}s}, \tag{3.17}$$

iar al modelului real este de aceeași formă:

$$H_P(s) = H(s)e^{-\tau s} \tag{3.18}$$

și structura de reglare cu predictor Smith este dată în fig. 3.6.

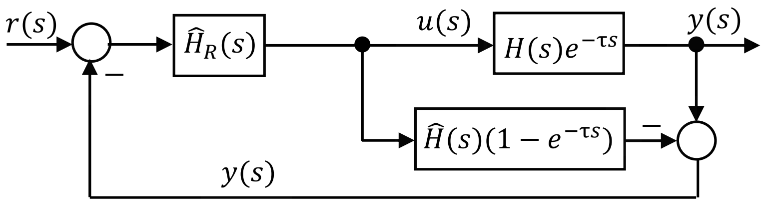

Fig. 3.6. Structura sistemului modificată cu predictor Smith

F.d.t. $\hat{H}_R(s)$ a regulatorului se determină pe baza modelului părţii fixate fără timp mort, iar regulatorul cu predictor Smith are f.d.t

$$H_R(s) = \frac{\hat{H}_R(s)}{1+\hat{H}_R(s)\hat{H}(s)(1-e^{-\tau s})}. \tag{3.19}$$

F.d.t. a canalului direct se descrie:

$$H_d(s) = H_R(s)H_P(s) = \frac{\hat{H}_R(s)H(s)e^{-\tau s}}{1+\hat{H}_R(s)\hat{H}(s)(1-e^{-\hat{\tau}s})}, \tag{3.20}$$

iar f.d.t. a sistemului închis se calculează cu expresia:

$$H_0(s) = \frac{\hat{H}_R(s)H(s)e^{-\tau s}}{1+\hat{H}_R(s)\hat{H}(s)+\hat{H}_R(s)H(s)e^{-\tau s}-\hat{H}_R(s)\hat{H}(s)e^{-\hat{\tau}s}} =$$

$$= \frac{\hat{H}_R(s)H(s)e^{-\tau s}}{1+\hat{H}_R(s)\hat{H}(s)+\hat{H}_R(s)[H(s)e^{-\tau s}-\hat{H}(s)e^{-\hat{\tau}s}]}. \tag{3.21}$$

Dacă în (3.21) $\hat{\tau} = \tau$ şi $\widehat{H}(s) = H(s)$, atunci $H_0(s)$ are forma:

$$H_0(s) = \frac{\widehat{H}_R(s)H(s)}{1+\widehat{H}_R(s)\widehat{H}(s)}e^{-\tau s} = H_{zr}(s)e^{-\tau s}. \quad (3.22)$$

Din (3.21) diferența din paranteză evidențiază incertitudinea aditivă exprimată în forma:

$$L_A(s) = H(s)e^{-\tau s} - \widehat{H}(s)e^{-\hat{\tau} s} \quad (3.23)$$

și f.d.t. (3.21) ia forma:

$$H_0(s) = \frac{\widehat{H}_R(s)H(s)e^{-\tau s}}{1+\widehat{H}_R(s)\widehat{H}(s)+\widehat{H}_R(s)L_A(s)}. \quad (3.24)$$

Similar se evidențiază incertitudinile multiplicative exprimate:

$$L_M(s) = \frac{H(s)e^{-\tau s}}{\widehat{H}(s)e^{-\hat{\tau} s}} - 1 \quad (3.25)$$

și f.d.t. (3.21) cu (3.25) are forma:

$$H_0(s) = \frac{\widehat{H}_R(s)H(s)e^{-\tau s}}{1+\widehat{H}_R(s)\widehat{H}(s)+\widehat{H}_R(s)\widehat{H}(s)e^{-\hat{\tau} s}\left[\frac{H(s)e^{-\tau s}}{H(s)e^{-\hat{\tau} s}}-1\right]} =$$

$$= \frac{\widehat{H}_R(s)H(s)e^{-\tau s}}{1+\widehat{H}_R(s)\widehat{H}(s)+\widehat{H}_R(s)\widehat{H}(s)e^{-\hat{\tau} s}L_M(s)}. \quad (3.26)$$

Analiza robusteții stabilității și performanțelor sistemului cu regulatorul $\widehat{H}_R(s)$ proiectat pe baza modelului fără timp mort poate fi studiată pentru diferite clase de incertitudini structurate și nestructurate pentru $\tau \neq \hat{\tau}$ şi $H(s) \neq \widehat{H}(s)$.

F.d.t. (3.20) a sistemului deschis cu incertitudini multiplicative se descrie în forma:

$$H_d(s) = \frac{\widehat{H}_R(s)\widehat{H}(s)e^{-\hat{\tau} s}}{1+\widehat{H}_R(s)\widehat{H}(s)(1-e^{-\hat{\tau} s})}\frac{H(s)e^{-\tau s}}{H(s)e^{-\hat{\tau} s}} = \widehat{H}_d(s)[L_M(s)+1], \quad (3.27)$$

unde $\widehat{H}_d(s)$ este f.d.t. a canalului direct când $\tau = \hat{\tau}$ și $H(s) = \widehat{H}(s)$.

Se consideră modelul procesului cu f.d.t. de forma:

$$H_P(s) = \frac{ke^{-\tau s}}{Ts+1}.$$

În baza definiției incertitudinilor multiplicative, atunci f.d.t.

$H_d(s)$ a sistemului deschis (3.27) se aduce la forma:

$$H_d(s) = \frac{\hat{H}_R(s)\hat{H}(s)e^{-\hat{\tau}s}}{1+\hat{H}_R(s)\hat{H}(s)(1-e^{-\hat{\tau}s})}\frac{k}{\hat{k}}\frac{\hat{T}s+1}{(\hat{T}\pm\Delta)s+1}e^{-\delta s} =$$

$$= \hat{H}_d(s)\frac{k}{\hat{k}}\frac{\hat{T}s+1}{(\hat{T}\pm\Delta)s+1}e^{-\delta s}, \qquad (3.28)$$

unde $\hat{H}_d(s) = \frac{\hat{H}_R(s)\hat{H}(s)e^{-\hat{\tau}s}}{1+\hat{H}_R(s)\hat{H}(s)(1-e^{-\hat{\tau}s})}$, $\delta = \tau - \hat{\tau}$, $\Delta = T - \hat{T}$.

Din analiza răspunsurilor indiciale pentru diferite incertitudini minime $\delta \neq 0$ şi $\Delta \neq 0$ rezultă că strategia de reglare cu predictor Smith are o bună robustețe a stabilității și a performanțelor sistemului proiectat [1, 2].

Exemplul 3.3. Se consideră modelul real al procesul descris cu f.d.t. [4, 5]:

$$H_P(s) = \frac{ke^{-\tau s}}{Ts+1} = \frac{e^{-4.2s}}{10s+1},$$

și un model de aproximare cu f.d.t. de forma:

$$\hat{H}_P(s) = \frac{\hat{k}e^{-\hat{\tau}s}}{\hat{T}s+1} = \frac{e^{-4s}}{8s+1},$$

Se admitee că parametrii modelelor obiectului de reglare se exprimă cu relațiile: $\tau \neq \hat{\tau}$, $T \neq \hat{T}$ şi $k = \hat{k}$ şi se cere să se analizeze efectul parametrilor $\delta = \tau - \hat{\tau}$ ($\delta \in [0.2 \div 0.8]$) şi $\Delta = T - \hat{T}$ ($\Delta \in [2 \div 4]$) asupra performanţelor sistemului cu regulator proiectat în baza modelului aproximat.

Soluționare. Se proiectează regulatorul impunând ca răspunsul indicial al sistemului să fie descris de f.d.t. de forma:

$$H_0(s) = \frac{\hat{k}}{\hat{T}s+\hat{k}}e^{-\tau s} = \frac{1}{T_0 s+1}e^{-\tau s}$$

cu $T_0 = \hat{T}/\hat{k} = 8/1 = 8$ s.

Se determină modelul f.d.t. al sistemului deschis fără timp mort după relația:

$$H_d(s) = \frac{H_0(s)}{1-H_0(s)} = \frac{\frac{1}{T_0 s+1}}{1-\frac{1}{T_0 s+1}} = \frac{1}{T_0 s}.$$

Rezultă că în canalul direct este conectat un element integrator cu constanta de timp de integrare $T_0 = 8$ s.

F.d.t. a căii directe se exprimă:

$$H_d(s) = \hat{H}_R(s)H_P(s).$$

Din f.d.t. a sistemului deschis se determină modelul f.d.t. a regulatorului PI:

$$\hat{H}_R(s) = \frac{H_d(s)}{H_P(s)} = \frac{1/\hat{T}_0 s}{1(\hat{T}_0 s+1)} = \frac{\hat{T}_0 s+1}{\hat{T}_0 s} = 1 + \frac{1}{\hat{T}_0 s} = 1 + \frac{\hat{k}}{s} = \frac{8s+1}{8s},$$

care este un regulator PI cu parametrii $\hat{k} = 1$, $T_i = \hat{T}_0 = 8$ s, $k_i = \hat{k} = 0.125\ \mathrm{s}^{-1}$.

Pentru acest caz incertitudinea multiplicativă are forma:

$$L_M(s) = \frac{H(s)e^{-\tau s}}{\hat{H}(s)e^{-\hat{\tau} s}} - 1 = \frac{H(s)}{\hat{H}(s)} e^{-(\tau-\hat{\tau})s} - 1 = \frac{H(s)}{\hat{H}(s)} e^{-\delta s} - 1 = \frac{\hat{T}s+1}{Ts+1} e^{-\delta s} - 1.$$

Dacă constanta de timp a modelului procesului este calculată cu o eroare Δ: $T = \hat{T} \pm \Delta$, atunci se obține pentru incertitudinea multiplicativă:

$$L_M(s) = \frac{\hat{T}s+1}{(\hat{T}\pm\Delta)s+1} e^{-\delta s} - 1.$$

Pentru cazul când $\delta \in [0.2 \div 0.6]$ şi $\Delta \in [2 \div 4]$ se calculează valoarea constantei de timp a procesului la valoarea erorii mari admisibile $\Delta = 4$ şi $T = \hat{T} \pm \Delta = 8 + 4 = 12$ s, $\hat{T} = 8$ s şi valoarea timpului procesului cu eroarea minimă admisibilă $\delta = 0.2$, $\delta = \tau - \hat{\tau} = \tau - 4 = 0.2$, $\tau = 4.2$ s. S-a simulat sistemul cu regulatorul Smith pentru diferite valori ale incertitudinilor δ și Δ și s-au analizat performanțele sitemului și s-a constatat că strategia de reglare cu predictor Smith are o bună robustețe a stabilității și performanțelor.■

Chestionar și probleme

1. De ce se utilizează sisteme de conducere combinată și care este principiul de funcționare?
2. Care este obiectivul sistemului la reproducerea semnalului de referință?
3. Ce proprietăți are compensatorul în sisteme de conducere combinată?
4. Numiți și explicați condțiile de realizabilitate fizică a compensatorului?
5. Cum explicați noțiunea de invarianță la realizarea compensatorului?
6. De ce se utilizează sisteme de reglare în cascadă?
7. Explicați avantagele și dezavantajele răglării în cascadă.
8. Ce metode se aplică pentru acordarea regulatoarelor în sisteme de reglare în cascadă ?
9. Se consideră funcția de transfer a unui proces tehnologic:

$$H_P(s) = \frac{ke^{-\tau s}}{a_0 s^2 + a_1 s + a_2}.$$

Explicați cum se vor obține părțile separate ale procesului.

10. Cum explicați apariția timpului mort în procesele industriale?
11. Prin ce metode se reduce influența timpului mort din procese?
12. Explicați noțiunile de incertitudini aditive și multiplicative.
13. Care este avantajul structurii regulatorului cu predicție Smith?
14. Cum se proiectează predictorul Smith?

4 MODELAREA MATEMATICĂ A SISTEMELOR NUMERICE DE REGLARE AUTOMATĂ

4.1 Modelarea blocurilor din structura sistemului numeric monovariabil

Structura funcţională uzuală a unui sistem numeric de reglare automată monovariabil este dată în fig. 4.1, unde sunt precizate semnalele procesate de fiecare bloc separat şi natura acestor semnale [2, 3, 4, 16].

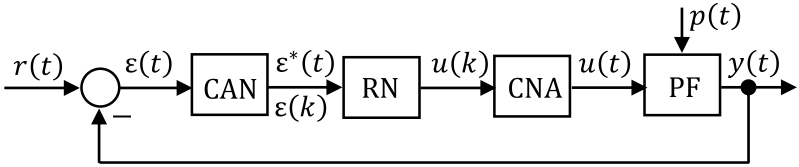

Fig. 4.1. Schema funcțională a sistemului numeric de reglare automată

În structura sistemului sunt utilizate însemnările: CAN este convertorul analogic numeric sau interfața de conversie, RN – regulator numeric, CNA - convertorul numeric analogic sau interfața de conversie, PF – partea fixată (care include elementul de execuţie, instalația tehnologică – procesul condus și traductorul), semnalele: $r(kT)$ – referinţa, $\varepsilon(t)$, $\varepsilon(kT)$ – eroarea continuă și eșantionată a sistemului, $u(kT)$, $u(t) -$ mărimea de reglare (comandă) eșantionată și discret-continuă, $y(t) -$ ieşirea procesului continuă, $p(t)$ $-$perturbația.

Se analizează procesarea semnalelor de către fiecare element funcţional în parte ale structurii sistemului.

1. Partea fixată PF este un sistem dinamic continuu, având mărimea de intrare semnalul continuu cuantificat $u(t)$ şi mărimea de ieşire semnalul continuu analogic $y(t)$ şi se modelează printr-o funcţie de transfer $H_P(s)$ în forma operaţională:

$$y(s) = H_P(s)u(s). \tag{4.1}$$

2. Algoritmul numeric de reglare automată (ANRA) sau regulatorul numeric (RN) prelucrează semnalul erorii:

$$\varepsilon(k) = r(k) - y(k) \qquad (4.2)$$

pentru a elabora semnalul numeric al conducerii:

$$u(k) = f(\varepsilon(k)). \qquad (4.3)$$

Din punctul de vedere al prelucrării numerice semnalele $r(k)$, $y(k)$ şi $u(k)$ se prezintă ca şiruri de valori implicate într-un proces de calcul iterativ.

Algoritmul de reglare se implementează sub forma unei ecuaţii cu diferenţe finite pornind de la ecuaţia diferenţială de forma:

$$u^{(s)}(t) + p_{s-1}u^{(s-1)}(t) + \cdots + p_1\dot{u}(t) + p_0u(t) =$$
$$= q_r\varepsilon^r(t) + q_{r-1}\varepsilon^{(r-1)}(t) + \cdots + q_1\dot{\varepsilon}(t) + q_0\varepsilon(t) \qquad (4.4)$$

sau cu diferenţe finite obţinute prin metode de aproximare:

$$\frac{\Delta^{(s)}u(k)}{T^s} + p_{s-1}\frac{\Delta^{(s-1)}u(k)}{T^{s-1}} + \cdots + p_1\frac{\Delta u(k)}{T} + p_0u(k) =$$
$$= q_r\frac{\Delta^{(r)}\varepsilon(k)}{T^r} + q_{r-1}\frac{\Delta^{(r-1)}\varepsilon(k)}{T^{r-1}} + \cdots + q_1\frac{\Delta\varepsilon(k)}{T} + q_0\varepsilon(k), \qquad (4.5)$$

unde prin Δ se notează diferenţa înapoi – metoda dreptunghiului cu întârziere: $\Delta u(k) = u(k) - u(k-1)$, $\Delta\varepsilon(k) = \varepsilon(k) - \varepsilon(k-1)$.

Ecuaţia (4.5) în formă operaţională în transformata z este:

$$u(z) = H_R(z)\varepsilon(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}\varepsilon(z), \qquad (4.6)$$

care prezintă f.d.t. a regulatorului:

$$H_R(z) = \frac{u(z)}{\varepsilon(z)} = \frac{Q(z)}{P(z)} = \frac{q_rz^r + q_{r-1}z^{r-1}\cdots + q_1z + q_0}{z^s + p_{s-1}z^{s-1} + \cdots + p_1z + p_0} =$$
$$= \frac{q_r + q_{r-1}z^{-1} + \cdots + q_1z^{-(r-1)} + q_0z^{-r}}{1 + p_{s-1}z^{-1} + \cdots + p_1z^{-(r-1)} + p_0z^{-r}}, r \le s. \qquad (4.7)$$

3. *Convertorul CAN* are rolul unui eşantionator care din semnalul continuu $y(t)$ produce semnalul numeric $y(k)$. Eşantionatorul ideal se prezintă ca un element cheie ideală (fig. 4.2, a), care produce o succesiune de impulsuri ideale sau impulsuri Dirac:

$$m(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t - kT). \qquad (4.8)$$

Elementul CAN este un modulator la ieşirea căruia se obţine un proces de modulaţie în impulsuri Dirac, având la intrări semnalele $y(t)$ şi $m(t)$ (fig. 4.2, b), iar simbolic se dă în fig. 4. 2, c transformare precisă.

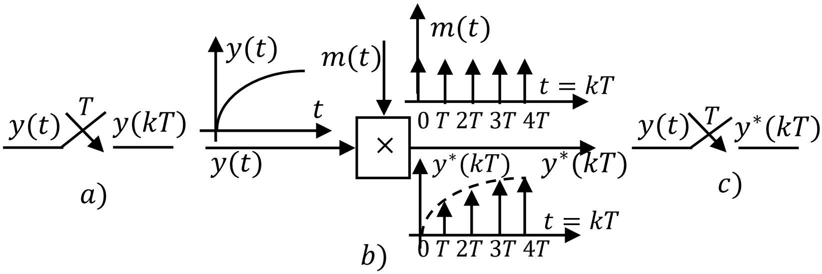

Fig. 4.2. Discretizarea semnalului ieşirii sistemului

Deci eşantionarea este modelată ca un proces neliniar datorită blocului de multiplexare la ieşirea căruia se obţine semnalul discretizat:

$$y^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT)\delta(t - kT). \tag{4.9}$$

Mărimea $y^*(t)$ conţine informaţii asupra valorii numerice a eşantioanelor – ordonatelor reale $y(kT)$, dar într-o reprezentare de tip distribuţii δ. Reprezentarea grafică a lui $y(kT)$ din fig. 4.2, a se utilizează pentru semnificaţia fizică, iar aceea din fig. 4.2, c modelarea matematică corectă.

4. *Convertorul CNA* îndeplineşte rolul unui extrapolator de ordinul zero sau element de reţinere de ordinul zero (EROZ), care din semnalul numeric $u(kT)$ produce semnalul continuu cuantificat $u(t)$ (fig. 4.3, a).

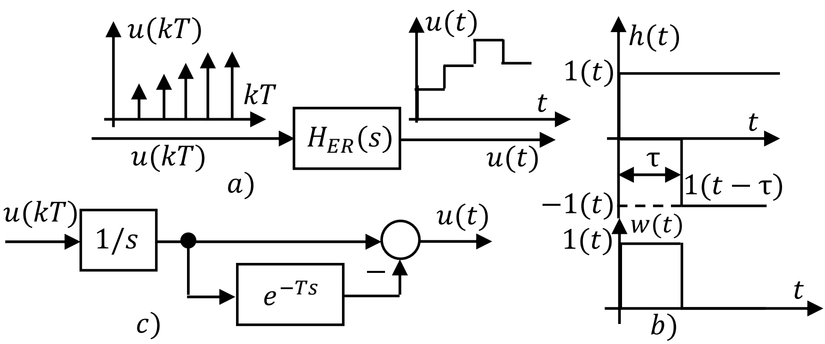

Fig. 4.3. Formarea semnalului de elementul de reținere

Extrapolarea de ordin zero este modelată ca un proces liniar şi dată în formă operaţională:

$$u(s) = H_{EROZ}(s)u^*(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-Ts})u^*(s),$$

$$H_{EROZ}(s) = \frac{u(s)}{u^*(s)} = \frac{1}{s}(1 - e^{-Ts}). \qquad (4.11)$$

Formarea impulsurilor dreptunghiulare se dă în fig. 4.3 b şi realizarea lor fig. 4.3, c.

Deoarece funcţionarea părţii fixate PF este un proces continuu, iar funcţionarea regulatorului RN este un proces numeric, este necesar de a prezenta descrierea sistemului numeric închis atât ca model continuu în transformata Laplace s, cât şi ca model discret în transformata z.

Astfel, se obţine schema structurală a SNRA dată în fig. 4.4.

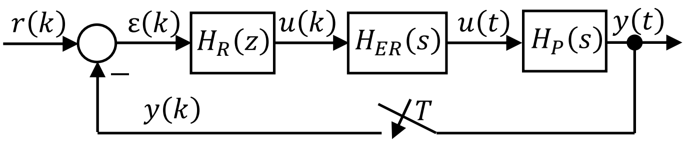

Fig. 4.4. Schema structurală a SNRA

Semnalul fizic $y(kT)$ al CAN eşantionat în impulsuri Dirac, iar în regulatorul RN ca un şir numeric. Semnalul fizic $u(kT)$ în regulatorul RN se descrie ca un şir numeric, iar în CNA ca fiind eşantionat cu impulsuri δ. Elementele CAN, RN şi CNA funcţionează sincronizat.

4.2 Modelarea sistemului numeric ca sistem continuu cu eşantionare

Deoarece mărimea de ieşire $y(t)$ a sistemului este o mărime continuă şi performanţele trebuie să fie formulate în termenii evoluţiei în timp continuu, atunci este necesar de a obţine modelul continuu al sistemului [16].

Pornind de la structura sistemului (fig. 4.4) elementele EROZ şi PF sunt înseriate şi mărimea de ieşire este:

$$y(s) = H_{ER}(s)H_P(s)u^*(s), \qquad (4.12)$$

iar confom teorei sistemelor cu eşantionare expresia (4.12) va fi:

$$y^*(s) = [H_{ER}(s)H_P(s)]^* u^*(s), \tag{4.13}$$

unde $y^*(s)$ este transformata Laplace a mărimii $y^*(t)$, care reprezintă mărimea de ieşire a regulatorul numeric în variabila s se obţine expresia:

$$u^*(s) = H_R^*(s)\varepsilon^*(s) = H_R^*(s)(r^*(s) - y^*(s)). \tag{4.14}$$

Structura sistemului ca sistem continuu cu eşantionare se dă în fig. 4.5.

F.d.t. a regulatorului $H_R^*(s)$ nu are sens fizic propriu, doar este un algoritm, care procesează semnalele discrete în regulator şi se descrie şi în timp continuu cu procesări cu timp morţi, multipli perioadei de eşantionare T, deoarece f.d.t. $H_R^*(s)$ este o funcţie raţională în operatorii e^{Ts} sau e^{-Ts}.

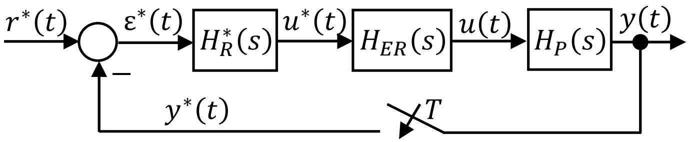

Fig. 4.5. Schema structurală a SNRA

Cunoscând f.d.t. $H_{ER}(s)$, $H_P(s)$ şi $H_R^*(s)$, se poate determina imaginea în transformata Laplace a lui $y(t)$:

$$y(s) = H_{ER}(s)H_P(s)\frac{H_R^*(s)}{1+[H_{ER}(s)H_P(s)]^* H_R^*(s)} r^*(s). \tag{4.15}$$

Din analiza expresiei (4.15) rezultă că mărimea $y(s)$ nu este o funcţie raţională în s utilizarea acesteia este dificilă.

Dacă se face mutarea eşantionatorului de pe calea de reacţie la ieşirea căii directe, atunci se obţine schema (fig. 4.6), în care valorile mărimii de ieşire $y(kT)$ a părţii fixate PF sunt cunoscute numai la momentele de eşantionare $t = kT$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

În acest caz mărimea de ieşire se prezintă în forma operaţională:

$$y^*(s) = H_0^*(s)r^*(s) = \frac{[H_{ER}(s)H_P(s)]^* H_R^*(s)}{1+[H_{ER}(s)H_P(s)]^* H_R^*(s)} r^*(s). \tag{4.16}$$

Nici imaginea lui $y^*(s)$ nu este o funcţie raţională în s, dar aceste modele de tip continuu vor fi utilizate pentru a caracteriza performanţele sistemului în circuit închis.

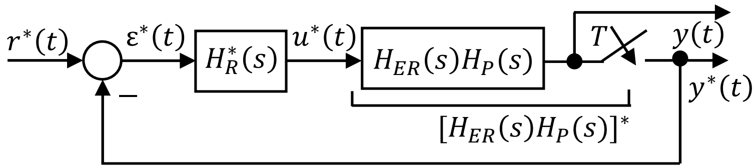

Fig. 4.6. Schema structurală a SNRA cu eşantionarea ieşirii

4.3 Modelarea sistemului numeric ca sistem discret

Deoarece regulatorul realizează in algoritm discret în baza valorilor discrete ale lui $y(kT)$ apare necesitatea de a obţine modelul discret al sistemului. Analizând sistemul discret obţinem pentru partea fixată cu EROZ mărimea ieşirii în formă operaţională [5, 16]:

$$y(z) = H_{PE}(z)u(z), \tag{4.17}$$

unde f.d.t. $H_{PE}(z)$ se calculează utilizând tabele după relaţia, iar transformata $z = e^{Ts}$ este transformata :

$$H_{PE}(z) = Z\{H_{ER}(s)H_p(s)\} = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{H_p(s)}{s}\right\}. \tag{4.18}$$

În cazul când partea fixată conține componenta timpului mort, atunci f.d.t. a părţii fixate se descrie în forma:

$$H_p(s) = e^{-\tau s}H(s), \tag{4.19}$$

unde $H(s)$este o raţională în s.

Se obţine transformata z de la elementul cu timp mort:

$$Z\{e^{-\tau s}\} = z^{-d}, \tag{4.20}$$

unde $d = \tau/T$ este un număr întreg de perioade de eşantionare $d = 0$, 1, 2,…, iar T este perioada de eşantionare.

Relaţia (4.18) cu timp mort se descrie în forma:

$$H_{PE}(z) = Z\{H_{ER}(s)e^{-\tau s}H(s)\} = (1 - z^{-1})z^{-d}Z\left\{\frac{H(s)}{s}\right\}. \tag{4.21}$$

Regulatorul se descrie în formă operaţională în transformata z:

$$u(z) = H_R(z)\varepsilon(z). \tag{4.22}$$

Cu relaţiile (4.21)-(4.22) structura sistemului discret se dă în fig. 4.7.

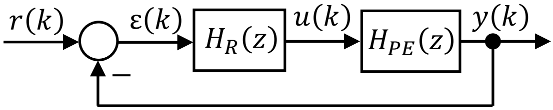

Fig. 4.7. Modelul structurii de reglare numerică ca sistem discret

Semnalul discret $y(kT)$ în raport cu semnalul discret al referinţei $r(kT)$ în formă operaţională este:

$$y(z) = H_0(z)r(z) = \frac{H_R(z)H_{PE}(z)}{1+H_R(z)H_{PE}(z)}r(z), \tag{4.23}$$

unde $H_0(z)$ este f.d.t. a sistemului în circuit închis.

Expresia (4.23) este echivalentul discret al descrierii continue realizată prin relaţia:

$$y^*(s) = H_0^*(s)r^*(s), \tag{4.24}$$

unde se utilizează egalităţile:

$$r(z)|_{z=e^{-Ts}} = r^*(s),\ y(z)|_{z=e^{-Ts}} = y^*(s),\ H_0(z)|_{z=e^{-Ts}} = H_0^*(s).$$

Se consideră că atât f.d.t. $H_0(z)$, cât şi $y(z)$ sunt funcţii raţionale în z, ceea ce prezintă avantaje la utilizarea acestor modele de tip discret ale sistemelor numerice.

Exemplul 4.1. Se consideră modelul obiectului de reglare descris de f.d.t.:

$$H_P(s) = \frac{ke^{-\tau s}}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)} = e^{-\tau s}\frac{k}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)} = \frac{b_0 e^{-\tau s}}{a_0 s^2+a_1 s+a_2}$$

cu date nummerice ale parametrilor: coeficientul de transfer $k = 0.5$, constantele de timp $T_1 = 5.0$ s, $T_2 = 2.0$ s și timpul mort $\tau = 1.0$ s, parametrii genericisunt: $b_0 = k = = 0.5$, $a_0 = T_1T_2 = 5 \cdot 2 = 10$ s^2, $a_1 = T_1 + T_2 = 5 + 2 = 7$ s, $a_2 = 1$.

Se cere să se calculeze modelul numeric al obiectului în formă exactă fără elementul EROZ și cu elementul EROZ.

Soluționare. Se calculează perioada (pasul) de eşantionare cu relația:

$$T \approx 0.1\min\{T_1,\ T_2\} = 0.1\min\{2, 5\} = 0.1 \cdot 2 = 0.2 \text{ s}.$$

Se introduce transformata z prin relația $e^{Ts} = z$.

Se determină componenta timpului mort $e^{-\tau s}$ exprimată ca număr întreg d perioade de eșantionare:

$e^{-\tau s} = z^{-d}$, $d = \frac{\tau}{T} = \frac{1.0}{0.2} = 5$, $z^{-d} = z^{-5}$.

1. Se determină f.d.t. numerică a parții continue fără elementul EROZ, utilizând tabelul A2.1 Anexa 2, rândul 6 și se obține:

$$H_P(z) = Z\left\{\frac{ke^{-\tau s}}{(T_1s+1)(T_2s+1)}\right\} = z^{-d}Z\left\{\frac{k}{(T_1s+1)(T_2s+1)}\right\} =$$

$$= \frac{z^{-d}k(e^{-T/T_1}-e^{-T/T_2})}{T_1-T_2}\frac{z}{(z-e^{-T/T_1})(z-e^{-T/T_2})} = \frac{z^{-d}b_0z}{a_0z^2-a_1z+a_2} = \frac{z^{-d}0.0093z^{-1}}{1-1.8656z^{-1}+0.8693z^{-2}},$$

unde sunt notațiile $b_0 = \frac{k(d_1-d_2)}{T_1-T_2} = \frac{0.5(0.9608-0.9048)}{T_1-T_2} = 0.0093$, $a_0 = 1$, $a_1 = d_1 + +d_2 = e^{-T/T_1} + e^{-T/T_2} = 0.9608 + 0.9048 = 1.8656$, $a_2 = d_1 \cdot d_2 = e^{-T/T_1} \cdot \cdot e^{-T/T_2} = 0.9608 \cdot 0.9608 = 0.8693$, $d_1 = e^{-T/T_1} = e^{-0.2/5} = 0.9608$, $d_2 = = e^{-T/T_2} = e^{-0.2/2} = 0.9048$.

2. Se determină f.d.t. numerică a elementului EROZ înseriat cu partea fixată continuă și utilizând tabelul A2.1 Anexa 2, rândul 9 se obține:

$$H_P(z) = Z\left\{e^{-\tau s}\frac{k}{(T_1s+1)(T_2s+1)}\right\} = z^{-d}Zk[\frac{z}{z-1} + \frac{T_1}{T_2-T_1}\frac{z}{z-e^{-T/T_1}} - \frac{T_2}{T_2-T_1}\frac{z}{z-e^{-T/T_2}}].$$

$$H_{PE}(z) = Z\{H_{ER}(s)e^{-\tau s}H(s)\} = \left(\frac{z-1}{z}\right)z^{-d}Z\left\{\frac{k}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}\right\} =$$

$$= z^{-d}\frac{z-1}{z}Z\left[\frac{kz}{z-1} + \frac{kT_1}{T_2-T_1}\frac{z}{z-e^{-T/T_1}} - \frac{kT_2}{T_2-T_1}\frac{z}{z-e^{-T/T_2}}\right] = z^{-d}\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{1-a_1z^{-1}+a_2z^{-2}} =$$

$$= z^{-5}\frac{0.8861z^{-1}+0.4814z^{-2}}{1-1.8656z^{-1}+0.8693z^{-2}},$$

unde sunt notațiile $b_0 = k + \frac{kT_1}{T_2-T_1} - \frac{kT_2}{T_2-T_1} = 0.5 + \frac{0.5\cdot5}{2-5} - \frac{0.5\cdot2}{T_2-T_1} = 0$, $b_1 = k(e^{-T/T_1} +$

$$+e^{-T/T_2}) + \frac{kT_1}{T_2-T_1}(1 + e^{-T/T_2}) - \frac{kT_2}{T_2-T_1}(1 + e^{-T/T_1}) = 0.5(0.9608 +$$

$$+0.9048) + \frac{0.5\cdot5}{2-5}(1 + 0.9608) - \frac{0.5\cdot2}{2-5}(1 + 0.9048) = 0.8861,$$

$$b_1 = k \cdot e^{-T/T_1} \cdot e^{-T/T_2} + \frac{kT_1}{T_2-T_1}e^{-T/T_2} - \frac{kT_2}{T_2-T_1}e^{-T/T_1} =$$

$$= \; 0.5 \cdot 0.9608 \cdot 0.9048 + \frac{0.5\cdot5}{2-5}0.9048 - \frac{0.5\cdot2}{2-5}0.9608 = 0.4814;$$

$$a_0 = 1,\ a_1 = e^{-T/T_1}+e^{-T/T_2} = 0.9048 + 0.9608 = 1.8656,$$

$$a_1 = e^{-T/T_1} \cdot e^{-T/T_2} = 0.9048 \cdot 0.9608 = 0.8693.$$■

4.4 Modele discrete ale sistemelor multivariabile

Modelarea sistemelor multivariabile depinde de forma de descriere matematică a părţii fixate care poate fi intrare-ieşire sau intrare-stare-ieşire [1, 4, 5, 16].

1. Se consideră partea fixată dată prin matricea de transfer $H_{PE}(s)$ și transformata z este:

$$\boldsymbol{H}_{PE}(z) = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{\boldsymbol{H}_{PF}(s)}{s}\right\}. \tag{4.25}$$

2. Partea fixată PF continuă este prezentată în forma intrare-stare-ieşire uzual prin notaţia $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{\Sigma}_P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D})$:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{4.26}$$

$$y = Cx + Du.$$

În cazul dat pentru (4.26) există două modalităţi de abordare a modelării structurii de reglare numerică:

Se obţine o reprezentare intrare-stare-ieşire de tip discret:

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k), \tag{4.27}$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k),$$

unde matricea fundamentală:

$$\Phi = e^{AT}, \Gamma = \left[\int_0^T e^{AT} d\tau\right] B. \tag{4.28}$$

Se obţine o reprezentare intrare-ieşire de tip continuu de forma:

$$H_{PE}(s) = C[sI - A]^{-1}B + D, \tag{4.29}$$

care permite de a utiliza ideea de transformare de tip (4.25).

În cazul când matricea A nu are valori proprii nule (nu sunt elemente integratoare), atunci integrala Γ din (4.28) poate fi rescrisă:

$$\Gamma = A^{-1}(e^{AT} - I)B. \tag{4.30}$$

Astfel, se constată că pentru modelul (4.27) necesită evaluarea exponenţialei matriceale Φ din (4.28).

Modelul discret al PF include extrapolatoarele de ordin zero de pe canalele de intrare $u(t)$, iar schema structurală a SNRA se dă în fig. 4.8.

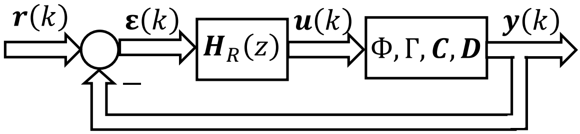

Fig. 4.8. Schema bloc structurală a SNRA multivariabil

Din (4.26) soluţia se descrie pentru intervalul $kT, (k+1)T$:

$$x\big((k+1)T\big) = e^{A\left((k+1)T-kT\right)}x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A\left((k+1)T-\tau\right)}Bu(kT)\,d\tau \qquad (4.31)$$

cu calculul părţii fixate a lui PF în mod discret:

$$H_{PE}(z) = C[zI - \Phi]^{-1}\Gamma + D. \qquad (4.32)$$

Metodele de discretizare exactă a modelelor continue se prezintă în diagrama din fig. 4.9.

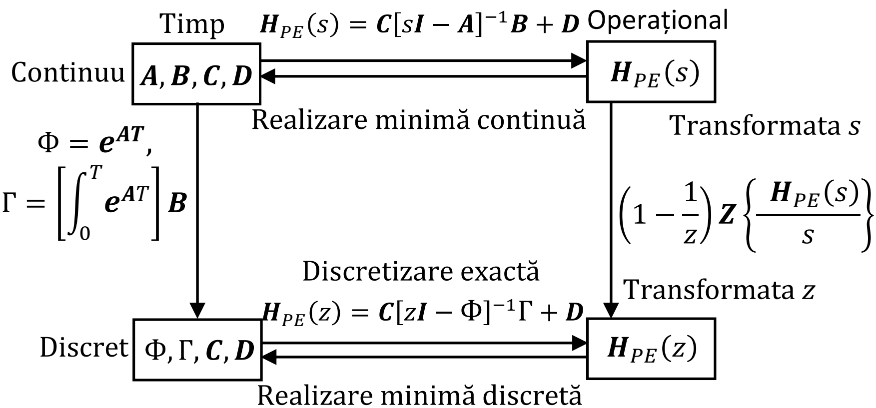

Fig. 4.9. Diagrama discretizării modelului părţii fixate

Se atenţionează că parcurgerea diagramei plecând de la $H_{PE}(s)$ şi ajungând la (Φ, Γ, C, D) pe cele două trasee posibile conduce la modele discrete intrare-stare-ieşire echivalente şi nu identice, deoarece construcţia realizărilor minimale este arbitrară [1, 16].

4.5 Discretizarea aproximativă a modelelor intrare-ieşire

Se consideră un sistem automat continuu descris de o f.d.t. raţională de ordinul n şi atunci acest sistem poate fi modelat printr-o schemă bloc care conţine n integratoare. Fiecare integrator este descris de o ecuaţie diferenţială de forma [4, 16]:

$$\frac{dy(t)}{dt} = u(t), \tag{4.33}$$

care are soluţia:

$$y(t) = \int_0^t u(t)dt. \tag{4.34}$$

Expresia (4.34) în formă operaţională va fi:

$$y(s) = \frac{1}{s}u(s). \tag{4.35}$$

Se cere să se calculeze aproximativ soluţia lui $y(t)$ la momentele de eşantionare, deci se face evoluţia aproximativă a lui $y(kT)$, $t = kT$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Se consideră pentru $u(t)$ o evoluţie arbitrară dată în fig. 4.10, a şi atunci din soluţia (4.34) se obţine:

$$y(kT) - y\big((k-1)T\big) = \int_{(k-1)T}^{kT} u(\tau)d\tau, \tag{4.36}$$

unde integrala are valoarea ariei haşurate în fig. 4.10, a.

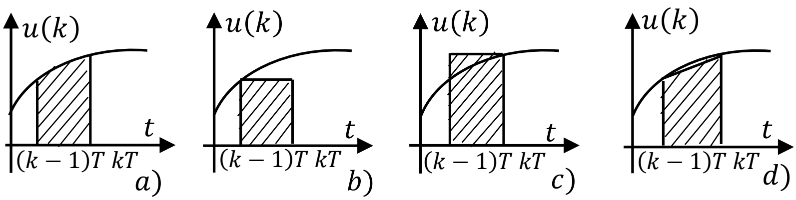

Fig. 4.10. Metode de discretizare

Cele mai larg utilizate metode de aproximare (discretizare) aproximativă sunt:

1. Metoda dreptunghiului în avans (MDA).
2. Metode dreptunghiului în întârziere (MDÎ).

3. Metoda trapezului (MT) sau metoda transformării biliniare.

Toate metodele se bazează pe evaluarea aproximativă a integralei din (4.36) şi care vor fi analizate în paralel. Prin aproximarea integralei, ecuaţia (4.36) se rescrie pentru fiecare dintre metode:

1. MDA (fig. 4.11, b): $y(kT) - y\big((k-1)T\big) \approx Tu((k-1)T)$.(4.37)

2. MDÎ (fig. 4.11, c): $y(kT) - y\big((k-1)T\big) \approx Tu(kT)$. (4.38)

3. MT (fig. 4.11, d): $y(kT) - y\big((k-1)T\big) \approx T\frac{u(k-1)T+u(kT)}{2}$. (4.39)

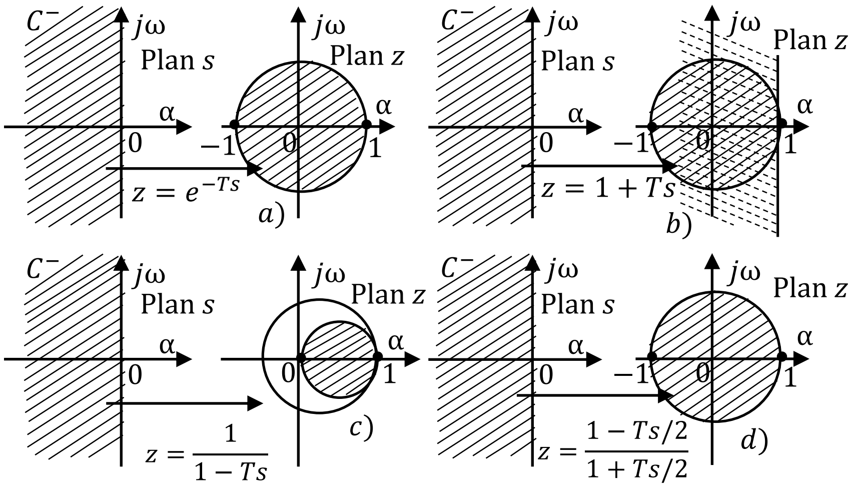

Fig. 4.11. Transformarea planului s în planul z

Dacă se aplică transformata z la aproximările (4.37)–(4.39), atunci se obţin relaţiile de calcul aproximativ ale f.d.t. continue prin substituirea lui s cu următoarele expresii pentru metodele:

Metoda dreptunghiului în avans:

$$s \approx \frac{z-1}{T} = \frac{1-z^{-1}}{Tz^{-1}}. \qquad (4.40)$$

Metode dreptunghiului în întârziere:

$$s \approx \frac{z-1}{Tz} = \frac{1}{T}(1-z^{-1}). \qquad (4.41)$$

Metoda trapezului:

$$s \approx \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} = \frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}. \quad (4.42)$$

Expresiile (4.40) – (4.42) pot fi privite şi ca aproximările Pade ale lui $z = e^{Ts}$ pentru variabila complexă date în fig. 4.11. În fig. 4.11, a se dă transformarea corectă a semiplanului C^- a planului s în planul z, iar a metodelor de transformarea aproximativă a semiplanului C^- a planului s în planul z se dau în fig. 4.11, b, c, d.

Metoda dreptunghiului în avans (fig. 4.11, b):

$$z = e^{Ts} \approx 1 + Ts. \quad (4.43)$$

Metode dreptunghiului în întârziere (fig. 4.11, c):

$$z = e^{Ts} \approx \frac{1}{e^{-Ts}} \approx \frac{1}{1-Ts}. \quad (4.44)$$

Metoda trapezului (fig. 4.11, d):

$$z = e^{Ts} = \frac{e^{(T/2)s}}{e^{-(T/2)s}} \approx \frac{1+(T/2)s}{1-(T/2)s}. \quad (4.45)$$

Analizând aproximaţiile prin metodele prezentate se constată că discretizarea prin metoda MDA poate transforma o funcţie de transfer continuă stabilă într-o f.d.t. discretă instabilă. Există o corelaţie dintre stabilitatea sistemului cu perioada de eşantionare şi regiunii cu polii alocaţi ai f.d.t. a sistemului. Metodele MDÎ şi MT dau rezultate stabile.

Aproximările de tip discret în domeniul timp pentru funcţionarea integratorului se realizează utilizând următoarele metode.

Metoda dreptunghiului în avans:

$$y(kT) = \int_0^k u(\tau)d\tau \approx T\sum_{j=1}^{k} u\big((j-1)T\big), \quad (4.46)$$

Metoda dreptunghiului în întârziere:

$$y(kT) = \int_0^k u(\tau)d\tau \approx T\sum_{j=1}^{k} u(jT), \quad (4.47)$$

Metoda trapezului:

$$y(kT) = \int_0^k u(\tau)d\tau \approx T\sum_{j=1}^{k} \frac{u((j-1)T)+u(jT)}{2}. \quad (4.48)$$

Pentru ecuaţia diferenţială se utilizează următoarele scheme de integrare cu pas constant:

Metoda dreptunghiului în avans este metoda Euler înainte (predictor sau explicită):

$$y(kT) \approx y\big((k-1)T\big) + T\dot{y}\big((k-1)T\big). \tag{4.49}$$

Metoda dreptunghiului în întârziere este metoda Euler înapoi (corector sau implicită):

$$y(kT) \approx y\big((k-1)T\big) + T\dot{y}(kT). \tag{4.50}$$

Metoda trapezului este metoda Euler modificată (predictor-corector):

$$y(kT) \approx y\big((k-1)T\big) + T\,\frac{\dot{y}((k-1)T)+\dot{u}(kT)}{2}. \tag{4.51}$$

Metoda Euler înainte poate conduce la instabilitate numerică.

În privinţa preciziei schemele de integrare înainte şi înapoi introduc o eroare locală de ordinul lui T^2 şi una globală de ordinul lui T, iar metoda Euler modificată introduce o eroare locală de ordinul T^3 şi una globală de ordinul lui T^2.

Metoda MDA păstrează în modelul discret gradele numărătorului şi numitorului din modelul continuu, iar metoda dreptunghiului în întârziere şi metoda trapezului conduc în discret la grade egale pentru numărător şi numitor. Metoda DÎ introduce zerouri suplimentare în $z =$ $= 0$, iar metoda trapezului introduce zerouri suplimentare în $z = 1$.

Aceste aproximări sunt larg aplicate pentru modelarea de tip discret atât a părţii fixate cât şi a algoritmului de reglare. Modelele discrete au o importanţă deosebită pentru algoritmul de reglare, care în formă finală se prezintă în ecuaţii cu diferenţe finite necesare la implementarea algoritmului pe microprocesoare.

Dacă este cunoscută ecuaţia diferenţială a algoritmului de reglare, atunci aplicarea metodei DÎ poate fi utilizată în domeniul timp ca o transformare directă a ecuaţiei diferenţiale în ecuaţia cu diferenţe finite:

$$u^{(n)}(t) + p_{n-1}u^{n-1}(t) + \cdots + p_1\dot{u}(t) + p_0u(t) =$$
$$= q_m\varepsilon^{(m)}(t) + q_{m-1}\varepsilon^{m-1}(t) + \cdots + q_1\dot{\varepsilon}(t) + q_0\varepsilon(t),\ m \le n \tag{4.52}$$

şi ecuaţia cu diferenţe finite:

$$\frac{\Delta^{(n)}u(kT)}{T^n} + p_{n-1}\frac{\Delta^{(n-1)}u(kT)}{T^{n-1}} + \cdots + p_1\frac{\Delta u(kT)}{T} + p_0 u(kT) =$$

$$= q_m\frac{\Delta^{(m)}\varepsilon(kT)}{T^m} + q_{m-1}\frac{\Delta^{(m-1)}\varepsilon(kT)}{T^{m-1}} + \cdots + q_1\frac{\Delta\varepsilon(kT)}{T} + q_0\varepsilon(kT). \quad (4.53)$$

În baza acestei metode se efectuează calculul aproximativ al derivatei unei funcţii $x(t)$:

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{x(kT)-x\big((k-1)T\big)}{T} = \frac{\Delta x(kT)}{T} \quad (4.54)$$

şi în formă generală:

$$x^{(i)}(t) = \frac{\Delta^{(i)}x(kT)}{T^i}, \quad (4.55)$$

unde Δ este diferenţa la stânga sau înapoi şi $\Delta x(kT) = x(kT) - -x((k-1)T)$, care corespunde acţiunii operatorului din planul complex $(1 - z^{-1})$ asupra funcţiei imagine.

De asemenea ecuaţiile diferenţiale se aproximează prin utilizarea metodei trapezului.

Aplicarea metodei dreptunghiului în avans conduce la ecuaţii cu diferenţe cu termeni anticipativi, care nu pot fi realizaţi.

Exemplul 4. 2. Se consideră modelul obiectului de reglare descris de f.d.t.:

$$H_P(s) = \frac{ke^{-\tau s}}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)} = e^{-\tau s}\frac{k}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)} = \frac{d_0 e^{-\tau s}}{c_0 s^2+c_1 s+c_2}$$

cu date numerice ale parametrilor: coeficientul de transfer $k = 0.5$, constantele de timp $T_1 = 5.0$ s, $T_2 = 2.0$ s și timpul mort $\tau = 1.0$ s, parametrii generici sunt: $d_0 = k = 0.5$, $c_0 = T_1T_2 = 5 \cdot 2 = 10$ s^2, $c_1 = T_1 + T_2 = 5 + 2 = 7$ s, $c_2 = 1$.

Se cere să se calculeze modelul numeric aproximat al obiectului de reglare după metodele DA, DÎ și trapezului.

Soluționare. Se calculează perioada de eşantionare cu relația:

$T \approx 0.1\min\{T_1,\ T_2\} = 0.1\min\{2, 5\} = 0.1 \cdot 2 = 0.2$ s.

Se introduce transformata z prin relația $e^{Ts} = z$.

Se determină componenta timpului mort $e^{-\tau s}$ exprimată în număr întreg d perioade de eșantionare:

$$e^{-\tau s} = z^{-d},\ d = \frac{\tau}{T} = \frac{1.0}{0.2} = 5,\ z^{-d} = z^{-5}.$$

Se determină f.d.t. discretă $H_P(z)$a părții continue fără timp mort, substituind variabila s cu variabila z și seutilizează metodele de aproximare DA, DÎ și trapezului.

Metoda dreptunghiului în avans cu utilizarea substituţiei (4.40):

$$H_P(z) = Z\left\{\frac{e^{-\tau s}d_0}{c_0 s^2+c_1 s+c_2}\right\} = z^{-d}Z\left\{\frac{d_0}{c_0(\frac{z-1}{T})^2+c_1\frac{z-1}{T}+c_2}\right\} = \frac{z^{-d}d_0' z}{c_0' z^2-c_1' z+c_0'} =$$

$$= \frac{z^{-5}0.002z^{-1}}{1-1.86z^{-1}+0.864z^{-2}} = \frac{z^{-5}b_0 z^{-1}}{1-a_1 z^{-1}+a_2 z^{-2}},$$

unde sunt notațiile $d_0' = kT^2 = 0.5\cdot 0.2^2 = 0.02$, $c_0' = T_1T_2 = 5\cdot 2 = 10$, $c_1' =$ $= 2T_1T_2 - T(T_1+T_2) = 2\cdot 5\cdot 2 - 0.2(T_1+T_2) = 18.6$, $c_2' = T_1T_2 - T(T_1+T_2) +$ $+T^2$ $=5\cdot 2 - 0.2(5+2) + 0.2^2 = 8.64$.

Metoda dreptunghiului în întârziere cu utilizarea substituţiei (4.40):

$$H_P(z) = Z\left\{\frac{e^{-\tau s}d_0}{c_0 s^2+c_1 s+c_2}\right\} = z^{-d}Z\left\{\frac{d_0}{c_0(\frac{z-1}{Tz})^2+c_1\frac{z-1}{Tz}+c_2}\right\} = \frac{z^{-d}d_0' z}{c_0' z^2-c_1' z+c_2'} =$$

$$= \frac{z^{-5}0.0002z^{-1}}{1-1.8706z^{-1}+0.8741z^{-2}},$$

unde sunt notațiile $d_0' = kT^2 = 0.5\cdot 0.2^2 = 0.02$, $c_0' = T_1T_2 + T(T_1+T_2) + T^2 =$ $= 5\cdot 2 + 0.2(5+2) + 0.2^2 = 11.44$, $c_1' = 2T_1T_2 + T(T_1+T_2) = 2\cdot 5\cdot 2 + 0.2(5+$ $+2) = 21.4$, $c_2' = T_1T_2 = 5\cdot 2 = 10$.

Metoda trapezului cu utilizarea substituţiei (4.42):

$$H_P(z) = Z\left\{\frac{e^{-\tau s}d_0}{c_0 s^2+c_1 s+c_2}\right\} = z^{-d}Z\left\{\frac{d_0}{c_0(\frac{2(z-1)}{T(z+1)})^2+c_1\frac{2(z-1)}{T(z+1)}+c_2}\right\} =$$

$$= \frac{z^{-d}(d_0' z^2+d_0' z+d_0')}{c_0' z^2-c_1' z+c_2'} = \frac{z^{-5}(0.000467+0.00093z^{-1}+0.000467z^{-2}}{1-1.8706z^{-1}+0.8693z^{-2}} = \frac{z^{-5}(b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2})}{1-a_1z^{-1}+a_2z^{-2}},$$

unde sunt notațiile $d_0' = kT^2 = 0.5\cdot 0.2^2 = 0.02$, $d_1' = 2kT^2 = 2\cdot 0.5\cdot 0.2^2 = 0.04$, $d_2' = 0.5\cdot 0.2^2 = 0.02$, $c_0' = 4T_1T_2 + 2T(T_1+T_2) + T^2 = 4\cdot 5\cdot 2 + 2\cdot 0.2(5+$ $+2) + 0.2^2 = 42.84$, $c_1' = 8T_1T_2 - 2T^2 = 8\cdot 5\cdot 2 - 2\cdot 0.2^2 = 79.92$, $c_2' = 4T_1T_2 -$ $-2T(T_1+T_2) + T^2 = 4\cdot 5\cdot 2 - 2\cdot 0.2(5+2) + 0.2^2 = 37.24$.

În tabelul 4.1 se dau valorile numerice ale parametrilor modelelor numerice ale obiectului exacte (fără și cu elementul EROZ (ex. 4.1)) și prin aproximare după metodele dreptunghiului în avans, în întârziere și trapezului (ex. 4.2).■

Tabelul 4.1. Parametrii modelelor discrete (exemplele 4.1, 4.2)

Metoda de calcul	Parametrii modelului discret					
	b_0	b_1	b_2	a_0	a_1	a_2
Fără EROZ	-	0.0093	-	1	1.8656	0.8693
Cu EROZ	0	0.8861	0.4814	1	1.8656	0.8693
MDA	-	0.002	-	1	1.8600	0.8640
MDÎ	-	0.0002	-	1	1.8706	0.8741
MT	0.00047	0.00093	0.00047	1	1.8655	0.8693

Din analiza parametrilor modelelor discrete calculate se constată că coeficienții a_0, a_1 și a_2 aproximativ au aceleași valori ca în cazul calcului analitic.

În Anexa 1 se dau semnale în domeniul timpului continuu și discret și imaginile lor în transformata s și transformata z.

În Anexa 2 se dau modele de elemente dinamice în transformata Lapace s și transformata z.

4.6 Discretizarea aproximativă a modelelor intrare-stare-ieşire

Pornind de la modelul ISI în timp continuu în forma [1, 4, 5, 16]:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}u(t),$$
$$y(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}u(t) \tag{4.56}$$

și se obţine în transformata s expresia în forma:

$$s\boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(s) + \boldsymbol{B}u(s),$$
$$y(s) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(s) + \boldsymbol{D}u(s). \tag{4.57}$$

De la forma (4.57) aplicând metoda de aproximare a dreptunghiului cu avans se obţine în transformata z expresia de forma:

$$z\boldsymbol{x}(z) \approx (\boldsymbol{I} + T\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}(z) + T\boldsymbol{B}u(z),$$
$$y(z) = Cx(z) + Du(z), \tag{4.58}$$

căreia în domeniului timpului îi corespunde următorul model discret aproximativ:

$$x(k+1) \approx (I + AT)x(k) + TBu(k),$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k). \tag{4.59}$$

Modelul exact al expresiei (4.57) în formă discretă este:

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k),$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k), \tag{4.60}$$

unde $\Phi = e^{AT}$ numită matricea fundamentală, $\Gamma = \left[\int_0^T e^{A\tau}\right] B$.

Matricele Φ şi Γ se calculează aproximativ cu relaţiile:

$$\Phi \approx I + A, \Gamma \approx A^{-1}(I + AT - AT)B. \quad (4.61)$$

Dacă se calculează expresia (4.60) cu expresia (4.61) se obţine expresia (4.59).

Obţinerea modelelor aproximative prin aplicarea metodelor dreptunghiului în întârziere şi trapezului de la modele ISI este similară, dar se atenţionează că vor conduce la un model discret în care matricele C şi D nu se păstrează, dar se obţin alte matrici şi modelul în domeniului timpului discret are forma:

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k),$$

$$y(k) = Hx(k) + Ju(k). \quad (4.62)$$

Discretizarea aproximativă se tratează ca o echivalenţă între aproximările în domeniul timpului, care se realizează cu scheme de integrare numerică şi aproximările în domeniul complex, realizate între variabilele operaţionale s şi z conform diagramei dată în fig. 4.12.

Timp Pornind de la matricea $H_P(s)$ către (Φ, Γ, H, J) pe cele două trasee posibile, modelele de intrare-stare-ieşire discrete obţinute nu mai sunt echivalente ca în cazul discretizării exacte.

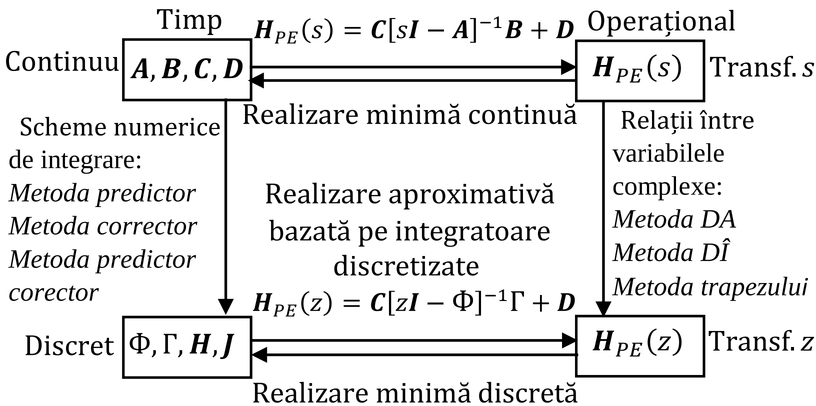

Fig. 4.12. Diagrama de discretizare a modelului ISI

4.7 Criterii de performanță utilizate în reglarea numerică

Criteriile de performanţă sau criteriile de calitate ale sistemului automat definesc obiectivele reglării şi se clasifică în criterii locale şi criterii globale.

Criteriile locale sunt corelate cu natura semnalelor exogene referinţa şi perturbaţia, care acţionează asupra procesului condus.

Criteriile globale sau integrale (numite şi sintetice) prezintă formalismul matematic aplicat pentru descrierea procesului condus.

4.7.1 *Criteriile locale de performanţă*

Proiectarea SNRA pe baza criteriilor locale de performanţă conduce la obţinerea unui anumit răspuns al sistemului studiat când referinţa este un semnal de tipul treaptă, rampă, parabolă etc. sau perturbaţia care este definită ca semnal tipic. Caracterizarea cantitativă a unor răspunsuri ale sistemului la semnale de referinţă sau perturbaţii cunoscute se exprimă prin mai mulţi criterii de performanţă: eroarea staţionară ε, timpul de reglare t_r, suprareglarea σ, timpul de creştere t_c, timpul primului maxim t_m, gradul de amortizare δ etc. [5, 16].

Utilizând valorile criteriilor se pot compara răspunsul real cu cel considerat ideal pentru sistemul automat studiat.

Pe baza răspunsului indicial al unui sistem de reglare automată se definesc indicii de performanţă locali pentru regimul tranzitoriu astfel:

1. Eroarea staţionară reprezentată discret este o valoare constantă a semnalului erorii:

$$\varepsilon = \lim_{k\to\infty} \varepsilon(k) \tag{4.63}$$

sau în transformata z eroarea este:

$$\varepsilon(z) = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})\, \varepsilon(z). \tag{4.64}$$

Pentru un sistem numeric cu structura cunoscută eroarea staţionară se calculează cu relaţia:

$$\varepsilon(z) = r(z) - y(z) = r(z) - H_d(z)\varepsilon(z) =$$

$$= \frac{1}{1+H_d(\mathrm{z})} r(z) = \big(1 - H_0(\mathrm{z})\big) r(z), \qquad (4.65)$$

unde $H_d(\mathrm{z}) = H_R(z)H_P(z)$ este f.d.t. a sistemului deschis.

Pentru diverse tipuri de semnale de referinţă se obţin erorile de regim staţionar apelând la teorema valorii finale (4.64). Astfel, pe baza coeficienţilor erorilor definiţi prin relaţiile:

1) coeficientul erorii la poziţie:

$$k_p = \lim_{z \to 1} H_d(\mathrm{z}), \qquad (4.66)$$

2) coeficientul erorii la viteză:

$$k_v = \lim_{z \to 1} \frac{1}{T}(z-1)H_d(\mathrm{z}), \qquad (4.67)$$

Se prezintă următoarele expresii pentru calculul erorilor la poziţie $\varepsilon_p(z)$ şi viteză $\varepsilon_v(z)$:

$$\varepsilon_p(z) = \lim_{z \to 1}(1 - z^{-1})\,\varepsilon(z) = \lim_{z \to 1}(1 - z^{-1}) \frac{1}{1-z^{-1}} \frac{1}{1+H_d(\mathrm{z})} = \frac{1}{1+k_p}, \qquad (4.68)$$

$$\varepsilon_v(z) = \lim_{z \to 1}(1 - z^{-1})\,\varepsilon(z) = \lim_{z \to 1}(1 - z^{-1}) \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \frac{1}{1+H_d(\mathrm{z})} = \frac{1}{k_v}. \qquad (4.69)$$

Se pot stabili relaţii între coeficientul erorii de viteză şi poli-zerouri ale sistemului automat în buclă închisă:

$$\varepsilon_v(z) = \frac{1}{k_v} = \lim_{z \to 1}(1 - z^{-1}) \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \frac{1}{1+H_d(\mathrm{z})} =$$

$$= \lim_{z \to 1}(1 - z^{-1}) \frac{T}{z-1}[1 - H_0(\mathrm{z})]. \qquad (4.70)$$

Dacă eroarea staţionară pe poziţie $\varepsilon_p(z) = 0$, atunci eroarea pe viteză va fi o valoare finită şi se obține:

$$\lim_{z \to 1} H_0(\mathrm{z}) = 1, \qquad (4.71)$$

ceea ce conduce la o nedeterminare în relaţia (4.70).

În acest caz la relaţia (4.70) se aplică regula lui L'Hospital şi utilizând (4.71) se obține:

$$\varepsilon_v(z) = \frac{1}{k_v} = \lim_{z\to 1}(-T)\frac{\frac{d}{dz}(H_0(\mathrm{z}))}{\frac{d}{dz}(z-1)} = -T\lim_{z\to 1}\frac{\frac{d}{dz}(H_0(\mathrm{z}))}{H_0(\mathrm{z})} =$$

$$= -T\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left(\ln H_0(\mathrm{z})\right). \qquad (4.72)$$

Dacă f.d.t. $H_0(\mathrm{z})$ este funcţie de poli-zerouri ale sistemului:

$$H_0(\mathrm{z}) = \frac{k_0\sum_{j=1}^{m}(z-z_j)}{\sum_{i=1}^{n}(z-p_i)}, \qquad (4.73)$$

atunci eroarea de viteză (4.70) se calculează cu expresia:

$$\varepsilon_v(z) = \frac{1}{k_v} = -T\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}[\ln k_0 + \sum_{j=1}^{m}\ln\left(z - z_j\right) - \sum_{i=1}^{n}(z - p_i)] =$$

$$= T\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left(\ln H_0(\mathrm{z})\right) = T[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-p_i} - \sum_{j=1}^{m}\frac{1}{1-z_j}]. \qquad (4.74)$$

4.7.2 *Criterii globale de performanţă*

Pentru a caracteriza în mod general comportarea unui SNRA într-un regim de funcţionare dat se utilizează eroarea $\varepsilon(k)$ dintre răspunsul ideal dorit - referinţa $r(k)$ şi răspunsul real obţinut $y(k)$ al sistemului.

Dacă eroarea staţionară $\varepsilon(k) = 0$, atunci se pot utiliza pentru SNRA criterii globale derivate din criteriile integrale folosite în domeniul timpului continuu [5, 16].

Pentru proiectarea unui SNRA descris printr-un model intrare-ieşire se pot utiliza următoarele tipuri de criterii:

$$J_1 = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon(k) \to \min. \qquad (4.75)$$

$$J_2 = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^2(k) \to \min. \qquad (4.76)$$

$$J_3 = \sum_{k=0}^{\infty}|\varepsilon(k)| \to \min. \qquad (4.77)$$

$$J_4 = \sum_{k=0}^{\infty}k|\varepsilon(k)| \to \min. \qquad (4.78)$$

$$J_5 = \sum_{k=0}^{\infty}[\varepsilon^2(k) + \alpha u^2(k)] \to \min. \qquad (4.79)$$

Cel mai larg utilizat pentru proiectare este criteriul pătratic J_2, însă acesta poate conduce la un răspuns puternic oscilant. Folosind criteriile

J_3 şi J_4 procesul tranzitoriu este mai atenuat.

Dacă este necesar şi controlul comenzii $u(k)$, atunci se recomandă aplicarea criteriul J_5, unde $\alpha \geq 0$ este un coeficient de ponderare care se alege în funcţie de aplicaţie.

În cazul descrierii SNRA prin formalismul intrare-stare-ieşire se pot utiliza criterii globale.

Pentru sisteme monovariabile criteriul:

$$J_6 = \sum_{k=0}^{\infty}[x^T(k)Qx(k) + \alpha u^2(k)] \rightarrow \min \tag{4.80}$$

şi pentru sisteme multivariabile:

$$J_7 = \sum_{k=0}^{\infty}[x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Pu(k)] \rightarrow \min, \tag{4.81}$$

unde $x(k)$ este starea sistemului, iar $u(k)$ mărimea de comandă.

Dacă pentru sistemul monovariabil se aleg corespunzător elementele matricei de ponderare Q (care va fi simetrică şi semipozitiv definită) şi a coeficientului de ponderare α, atunci se pot obţine răspunsuri dorite şi un nivel optim al secvenţei de comandă $u(k)$.

Pentru sistemele multivariabile se aleg matricele de ponderare Q şi P (simetrică şi semipozitiv definită).

Criteriile J_6 şi J_7 pot fi determinate şi pentru un număr finit N perioade de eşantionare:

$$J_8 = x^T(N)Sx(N) + \sum_{k=0}^{N-1}[x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Pu(k)] \rightarrow \min. \tag{4.82}$$

Utilizarea criteriului J_8 cu matricea simetrică semipozitiv definită S evedenţiază necesitatea atingerii unei stări finale $x(N)$ a sistemului optimizat pe un orizont finit.

Existenţa mai multor criterii impune alegerea lor în funcţie de natura semnalelor exogene, de tipul procesului, de modul de descriere a modelului matematic şi de metoda de proiectare. Această alegere reprezintă una dintre cele mai dificile sarcini ale proiectantului.

Chestionar și probleme

1. Caracterizați elementele funcţionale din schema funcțională și structurală a sistemului de reglare numerică.
2. Explicați de ce această structură de sistem este numită hibridă.

3. Cum se poate obține descrierea matematică a structurii sistemului de reglare numerică?

4. Dați explicație a noțiunii de perioadă de eșantionare/discretizare.

5. Este cunoscută funcția de transfer a părții fixate:

$$H_P(s) = \frac{k}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)} = \frac{5}{s(5s+1)(14s+1)}.$$

Calculați perioadă de eșantionare/discretizare.

6. Este cunoscută funcția de transfer a părții fixate:

$$H_P(s) = \frac{e^{-\tau s}k}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)} = \frac{9e^{-5s}}{s(13s+1)(15s+1)}.$$

Calculați perioadă de eșantionare/discretizare.

7. Explicați modul de funcționare a elementului de reținere de ordinul zero și prezentați modelul matematic – funcția de transfer.

8. Prezentați schema structurală a elementului de rețineте de ordinul zero.

9. Cum se poate obține modelul matematic cu eșantionare al părţii fixate?

10. Explicați cum se obţine funcția de transfer a sistemului deschis și închis?

11. Prezentați și explicați modelul matematic al sistemului monovariabil cu eșantionare în forma intrare-stare-ieșire.

12. Cum explicați noţiunea de discretizare aproximativă a modelelor intrare-ieșire?

13. Numiți metodele de discretizare aproximativă a modelelor intrare-ieșire și explicați esența metodelor.

14. Este cunoscută funcția de transfer a părții fixate:

$$H_P(s) = \frac{k}{s(T_1 s+1)} = \frac{5}{s(10s+1)}.$$

Determinați funcția de traansfer discretă a părții fixate în transformata z.

15. Este cunoscută funcția de transfer a părții fixate:

$$H_P(s) = \frac{k}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)} = \frac{3}{s(9s+1)(11s+1)}.$$

Calculați funcția de traansfer discretă a părții fixate în transformata z.

16. Este cunoscută funcția de transfer a părții fixate:

$$H_P(s) = \frac{e^{-\tau s}k}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)} = \frac{7e^{-4s}}{s(8s+1)(12s+1)}.$$

Calculați funcția de traansfer discretă a părții fixate în transformata z.

5 ALGORITMI DE REGLARE NUMERICĂ DERIVAŢI DIN LEGI DE REGLARE CONTINUE

5.1 Introducere

Se vor prezenta algoritmi de reglare numerici derivaţi din legi de reglare continue care stau la baza regulatoarelor clasice din sistemele unificate de automatizare pentru procese industriale. Pentru perioade de eşantionare mici comportarea algoritmilor de reglare şi în general a sistemelor de reglare este cvasicontinuă. În aceste condiţii pentru acordarea regulatoarelor pot fi extinse metode de acordare din domeniul sistemelor continue.

Dintre legile neliniare se vor prezenta legea bipozițională şi tripozițională datorită domeniilor extinse de utilizare.

Pentru a corecta anumiți indici de performanţă se utilizează des în sistemele continue elementul de avans-întârziere, care se va da varianta discretă.

Principala lege de reglare tipizată continua este algoritmul proporțional-integrator-derivativ, care pentru anumite clase de procese are un caracter de optimalitate. Din acest motiv obţinerea unui algoritm PID numeric este o necessitate [1, 4, 5, 16].

Dacă mărimea reglată este afectată de semnale zgomote cu un spectru în zona frecvenţelor relative joase raportate la frecvenţa de eşantionare se recomandă filtrarea numerică a mărimii măsurate.

Semnalele zgomote de frecvenţă ridicată vor fi filtrate cu circuite pasive RC plasate pe interfața cu intrări analogice. În mod obișnuit filtrarea numerică se realizează cu varianta discretă a elementului de întârziere de ordinul întâi.

5.2 Filtrarea numerică de întârziere de ordinul unu

În cazul continuu filtrele elemente de întârziere de ordinul unu au factorul de amplificare unitar şi constanta de timp T_1.

Având mărimea măsurată $y(s)$ ca mărime de intrare şi ca mărime de ieşire cea de filtrate $y_f(s)$, modelul filtrului se descrie cu f.d.t.:

$$H(s) = \frac{y_f(s)}{y(s)} = \frac{1}{T_1 s+1}. \tag{5.1}$$

Forma discretă a filtrului (5.1) se obţine folosind metoda dreptunghiului în întârziere:

$$\frac{T_1}{T} \Delta y_f(k) + y_f(k) = y(k). \tag{5.2}$$

Prin prelucrarea relaţiei (5.2) se ajunge la forma:

$$y_f(k) = \frac{T_1}{T_1+T} y_f(k-1) + \frac{T}{T_1+T} y(k). \tag{5.3}$$

Pentru reducerea timpului de calcul se preferă reducerea numărului de înmulțiri din (5.3) prin adunarea şi scăderea în membrul drept al relaţiei a termenului $\frac{T}{T_1+T} y(k-1)$ şi se obţine:

$$y_f(k) = y_f(k-1) + \frac{T}{T_1+T} (y(k) - y_f(k-1). \tag{5.4}$$

Evident sunt şi alte posibilităţi de filtrare numerică a zgomotelor prin utilizarea filtrelor cu bandă constantă, cu bandă adaptive sau a filtrului cu mediere.

5.3 Algoritmul de avans-întârziere numeric

Elementul avans-întârziere continuu este modelat cu f.d.t.:

$$H(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{T_1 s+1}{T_2 s+1}. \tag{5.5}$$

În funcţie de constantele de timp T_1, T_2 acţiunea elementului poate fi de tipul:

1. De avans (derivativ) dacă $T_1 > T_2$.
2. De proporționalitate pentru $T_1 = T_2$.
3. De întârziere (cu inerție) dacă $T_1 < T_2$.

Funcția de transfer (5.5) se transformă în ecuația diferențială:

$$T_2 \dot{y}(t) + y(t) = T_1 \dot{u}(t) + u(t).$$

Aplicând metoda dreptunghiului în întârziere la ecuația diferențială se obține ecuația cu diferențe finite:

$$\frac{T_2}{T}\Delta y(k) + y(k) = \frac{T_1}{T}\Delta u(k) + u(k) \qquad (5.6)$$

sau

$$y(k) = \frac{T_2}{T_2+T}y(k-1) + \frac{T_1+T}{T_2+T}u(k) - \frac{T_1}{T_2+T}u(k-1). \qquad (5.7)$$

Pentru reducerea timpului de calcul se preferă reducerea numărului de înmulțiri de la 3 la 2 şi atunci se adună şi se scade în membrul drept al relaţiei a termenului $\frac{T}{T_2+T}y(k-1)$ şi se obţine expresia:

$$y(k) = y(k-1) + \frac{T}{T_2+T}\big(u(k) - y(k-1)\big) +$$

$$+\frac{T_1}{T_2+T}(u(k) - u(k-1)). \qquad (5.8)$$

5.4 Algoritmii bipoziţionali şi tripoziţionali

Algoritmii bipoziţionali şi tripoziţionali se realizează cu regulatoare cu caracteristica neliniară de tipul bipozițională şi tripozițională care sunt utilizate în aplicaţiile industriale datorită simplităţii lor. Caracteristica de tip releu a acestor algoritmi permite aplicarea procesului a puterii totale într-un timp scurt şi, în rezultat, se obţine o comandă optimală după rapiditate în timp. Însă, în general, performanţele obţinute pentru sistem sunt inferioare sistemelor cu regulatoare liniare [16].

5.4.1 *Algoritmul bipoziţional*

Algoritmul bipoziţional formează o comandă $u(k)$ binară, executabilă prin comutarea unui contact al interfeţei de ieşiri numerice a regulatorului. Pe baza caracteristicii de reglare bipoziţionale dată în fig. 5.1, a dependenţa funcţională a comenzii în raport cu eroarea de reglare $\varepsilon(k)$ se poate exprima sub forma:

$$u(k)=\begin{cases}0 & \text{pentru } \varepsilon(k)\le -\Delta,\\ 1 & \text{pentru } \varepsilon(k)\ge \Delta,\\ u(k-1) & \text{pentru } |\,\varepsilon(k)|<\Delta,\end{cases} \tag{5.9}$$

unde Δ este semihisterezisul caracteristicii bipoziţionale. Cele două comenzi ale regulatorului codificate cu 0 şi 1 conduc la un singur parametru de acord Δ.

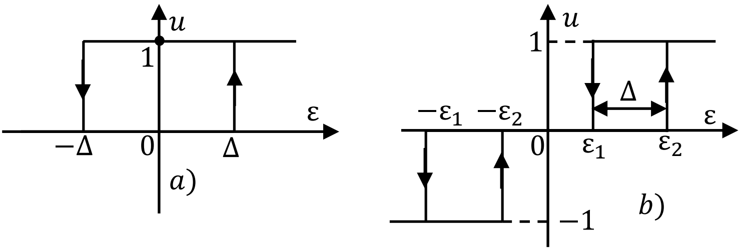

Fig. 5.1. Caracteristica statică bipozițională a) și tripoziționalǎ b)

Algoritmul bipoziţional presupune efectuarea la momentul curent de eşantionare kT a următorilor paşi:

1. Achiziția mărimii măsurate prin interfața de intrări analogice.
2. Prelucrarea primară a datei citite (filtrare numerică).
3. Calculul erorii de reglare $\varepsilon(k)=r(k)-y(k)$.
4. Dacă eroarea $\varepsilon(k)\ge\Delta$ se transmite interfeţei de ieşiri numerice comanda de poziţionare pe 1 a contactului releului şi salt la pasul 7.
5. În cazul când eroarea $\varepsilon(k)\le-\Delta$ se transmite interfeţei de ieşiri numerice comanda de poziţionare pe 0 a contactului releului şi salt la pasul 7.
6. Dacă eroarea $|\varepsilon(k)|<0$, atunci se păstrează poziţia contactului din momentul de eşantionare precedent.
7. Actualizarea comenzii precedente $u(k-1)=u(k)$.

Pentru a se evita calculul efectiv al erorii de reglare $\varepsilon(k)$ se calculează o singură mărime, care exprimă suma sau diferenţa dintre semnalul referinţei şi histerezis notându-le:

$$r_1=r+\Delta \text{ şi } r_2=r-\Delta, \tag{5.10}$$

care permit exprimarea dependenței (5.10) sub forma:

$$u(k) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } y(k) \geq r_1, \\ 1 & \text{pentru } y(k) \leq r_2, \\ u(k-1) & \text{pentru } r_2 < y(k) < r_1. \end{cases} \tag{5.11}$$

Pentru acest caz valorile lui r_1 şi r_2 se calculează de către operator la oricare modificare a referinţei sau a histerezisului caracteristicii bipoziționale.

5.4.2 *Algoritmul tripoziţional*

Algoritmul tripoziţional se utilizează pentru comanda servomotoarelor electrice cu viteză constantă care se utilizează ca elemente de acţionare a elementelor de execuţie. Cele trei comenzi care le furnizează algoritmul tripoziţional se codifică cu 1, 0 şi -1, corespunzător celor trei stări ale servomotorului: acţionarea într-un sens, repaus şi acţionare în sens opus a organului de reglare. Aceste comenzi se realizează cu două contacte de releu ale interfeței de ieşiri numerice care sunt acționate conform caracteristicii de reglare dată în fig. 5.1, b.

În acest caz dependenţa funcţională a comenzii în raport cu eroarea de reglare $\varepsilon(k)$ se poate exprima sub forma:

$$u(k) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } \varepsilon(k) \geq \varepsilon_2(k), \\ 0 & \text{pentru } |\varepsilon(k)| < \varepsilon_1(k), \\ -1 & \text{pentru } \varepsilon(k) \leq -\varepsilon_2(k), \\ u(k-1) & \text{pentru } \varepsilon_1 < |\varepsilon(k)| < \varepsilon_2(k). \end{cases} \tag{5.12}$$

Se constată că algoritmul are doi parametri de acord $\varepsilon_1(k)$ şi $\varepsilon_2(k)$, care sunt funcţii de forma zonei de insensibilitate:

$$z = \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2} \tag{5.13}$$

sau a lățimii ciclului de histerezis:

$$\Delta = \varepsilon_2 - \varepsilon_1. \tag{5.14}$$

Astfel, utilizarea algoritmului tripoziţional pentru comanda elementelor de acţionare, asigură eficienţa dacă perioada de eşantionare este mult mai mică decât timpul necesar parcurgerii întregii curse a organului de reglare.

Algoritmul tripoziţional presupune efectuarea la momentul curent de eşantionare kT a următorilor pași:

1. Achiziția mărimii măsurate prin interfața de intrări analogice.
2. Prelucrarea primară a datei citite (filtrare numerică).
3. Calculul erorii de reglare $\varepsilon(k) = r(k) - y(k)$.
4. Dacă eroarea $\varepsilon(k) \geq \Delta$ se transmite interfeţei de ieşiri numerice comanda de poziţionare pe 1 a contactului releului şi salt la pasul 7.
5. Dacă eroarea $\varepsilon(k) \leq -\Delta$ se transmite interfeţei de ieşiri numerice comanda de poziţionare pe 0 a contactului releului şi salt la pasul 7.
6. Dacă eroarea $|\varepsilon(k)| \leq \Delta$ se păstrează poziţia contactului din momentul de eşantionare precedent.
7. Actualizarea comenzii precedente $u(k-1) = u(k)$.

5.5 Algoritmi numerici de reglare

5.5.1 *Algoritmul PID numeric de poziţie şi incremental*

Pentru legile de reglare continue de tip PID f.d.t. se dă de relaţia:

$$H_R(s) = \frac{u(s)}{\varepsilon(s)} = k_p + \frac{1}{T_i s} + T_d s = k_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) =$$

$$= k_p\left(1 + \frac{k_i}{s} + k_d s\right), \qquad (5.15)$$

unde k_p este coeficientul de proporționalitate sau parametrul de acord, T_i – constanta de timp de integrare, T_d – constanta de timp de derivare, iar $k_i = \frac{1}{k_p T_i}$ – coeficientul integral, $k_d = \frac{T_d}{k_p}$ – coeficientul derivativ.

Algoritmul PID se poate descrie și în forma:

$$H_{PID}(s) = k_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)\frac{T_d s+1}{T_f s+1},$$

ceea ce este o conexiune serie a algoritmului proporțional, algoritmului PI și elementului derivator real cu forțare (conexiune paralelă a elementului derivator real cu elementul cu inerție de ordinul unu).

Din (5.15) se obţine ecuaţia diferenţială a algoritmului PID ideal:

$$u(t) = k_p\left(\varepsilon(t) + \frac{1}{T_i}\int_0^t \varepsilon(t) + T_d\frac{d\varepsilon(t)}{dt}\right). \quad (5.16)$$

Pentru perioade mici de eşantionare T relaţia (5.16) poate fi transformată într-o ecuaţie cu diferenţe, aplicând expresiei (5.16) metoda dreptunghiului în întârziere de discretizare aproximativă și se obţine:

$$u(k) = k_p\left(\varepsilon(k) + \frac{T}{T_i}\sum_{j=1}^{k}\varepsilon(j) + \frac{T_d}{T}(\varepsilon(k) - \varepsilon(k-1))\right). \quad (5.17)$$

Deoarece acest algoritm oferă valoarea totală a comenzii $u(k)$ care defineşte poziţia elementului de execuţie se numeşte *algoritm de poziţie.* Acest algoritm de reglare nu este recursiv şi este mai puţin adecvat pentru programe.

Pentru a calcula comanda la pasul curent al algoritmului de poziţie este necesară cunoașterea valorii integralei până la momentul $k-$ -1, deci algoritmul trebuie iniţializat.

Dacă elementul de execuţie este de tip proporțional, atunci utilizarea algoritmilor de poziţie asigură controlul ieşirii sau poziției elementului de execuţie.

Pentru a obţine un algoritm recursiv se calculează mărimea $u(k-1)$ cu un pas înapoi:

$$u(k-1) = k_p\left(\varepsilon(k-1) + \frac{T}{T_i}\sum_{j=1}^{k-1}\varepsilon(j) + \frac{T_d}{T}(\varepsilon(k-1) - \varepsilon(k-2))\right) \quad (5.18)$$

şi scăzând expresia (5.18) din (5.17) se obţine relaţia:

$$\Delta u(k) = u(k) - u(k-1) = k_p[(\varepsilon(k) - \varepsilon(k-1)) + \frac{T}{T_i}\varepsilon(k) +$$

$$+\frac{T_d}{T}(\varepsilon(k)-2\varepsilon(k-1)+\varepsilon(k-2))]. \quad (5.19)$$

După unele transformări expresia (5.19) se obține o ecuație recursivă a mărimii de comandă $u(k)$ exprimată prin $u(k-1)$ și parametrii regulatorului PID numeric de forma [1, 4, 5, 16]:

$$u(k)=u(k-1)+q_0\varepsilon(k)+q_1\varepsilon(k-1)+q_2\varepsilon(k-2) \quad (5.20)$$

sau în forma:

$$u(k)=u(k-1)+\sum_{i=0}^{2} q_i\,\varepsilon(k-i), \quad (5.21)$$

unde parametrii de acord numerici q_0, q_1, q_2 se descriu prin parametrii algoritmului PID continuu k_p, T_i, T_d şi a perioadei T de eşantionare în forma:

$$q_0=k_p\left(1+\frac{T}{T_i}+\frac{T_d}{T}\right),\ q_1=-k_p\left(1+2\frac{T_d}{T}\right),\ q_2=k_p\frac{T_d}{T},\ p_1=1. \quad (5.22)$$

Pentru algoritmul PID numeric (5.20) cu paramerii (5.22) funcţia de transfer discretă este:

$$H_R(z)=\frac{u(z)}{\varepsilon(z)}=\frac{q_0z^2+q_1z+q_2}{z-1}=\frac{q_0+q_1z^{-1}+q_2z^{-2}}{1-z^{-1}}=\frac{Q(z^{-1})}{P_1(z^{-1})}. \quad (5.23)$$

În acest algoritm se determină incrementul comenzii $\Delta u(k)$ în momentul de eşantionare kT şi algoritmul este numit *algoritm incremental* sau *algoritm de viteză* [1, 4, 5, 16].

Din analiza relaţiei (5.20) se constată că algoritmul este de tip PDD2 incremental deoarece incrementul $\Delta u(k)$ are componente proporţionale cu eroarea $\varepsilon(k)$, cu diferenţa finită $\Delta\varepsilon(k)$ care este echivalentă unei derivări discrete şi cu diferenţa de ordinul doi $\Delta^2\varepsilon(k)$ – echivalentă cu derivata a doua.

Pentru a obţine un algoritm PID elementul de execuţie trebuie să fie de tip integrator, ce asigură controlul vitezei medii sau momentane a comenzii elementului de execuţie, care prin integrare devine increment de poziţie.

În acest caz algoritmul nu mai trebuie inițializat fiindcă comanda se generează sub forma unui increment $\Delta u(k)$, iar amplitudinea incrementului poate fi controlată prin valorile parametrilor q_0, q_1, q_2 funcție de parametrii k_p, T_i, T_d şi perioada de eşantionare T.

O altă posibilitate o constituie determinarea domeniilor de variaţie ale parametrilor q_0, q_1, q_2, astfel încât răspunsul indicial să fie apropiat de al unui algoritm PID continuu.

Pentru aceasta se consideră treapta unitară aplicată la intrare:

$$\varepsilon(k) = 1(k) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } k \geq 0, \\ 0 & \text{pentru } k < 0 \end{cases} \tag{5.24}$$

şi pe baza relaţiei de recurenţă (5.20) se obţine răspunsul indicial prin calculul comenzii la momentul eșantionării pentru un număr $\overline{0,k}$ de perioade de eșantionare:

$$\begin{aligned} &u(0) = q_0, \\ &u(1) = u(0) + q_0 + q_1 = q_0 + q_0 + q_1 = 2q_0 + q_1, \\ &u(2) = u(1) + q_0 + q_1 + q_2 = 2q_0 + q_1 + q_0 + q_1 + q_2 = \\ &= 3q_0 + 2q_1 + q_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &u(k) = u(k-1) + q_0 + q_1 + q_2 = (k+1)q_0 + kq_1 + (k-1)q_2. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Pentru a obţine un răspuns indicial apropiat de al unui regulator PID continuu se impun următoarele condiţii:

$$u(1) < u(0),\ u(k) > u(k-1) \text{ pentru } k \geq 2, \tag{5.26}$$

care se transformă pentru parametrii regulatorului cu $q_0 > 0$ în relaţiile:

$$\begin{aligned} &2q_0 + q_1 < q_0 \text{ sau } q_1 < -q_0, \\ &q_0 + q_1 + q_2 > 0 \text{ sau } q_2 > -(q_0 + q_1). \end{aligned} \tag{5.27}$$

Din (5.27) va rezulta un coeficient de proporţionalitate pozitiv dacă este satisfăcută relaţia coeficienţilor $q_0 > q_2$.

Astfel, între parametrii de acord ai algoritmului PID discret se stabilesc relaţiile de inegalităţi:

$$q_0 > 0,\, q_1 < -q_0,\, -(q_0 + q_1) < q_2 < q_0. \tag{5.28}$$

Răspunsul indicial al algoritmului PID numeric este dat în fig. 5.2, a.

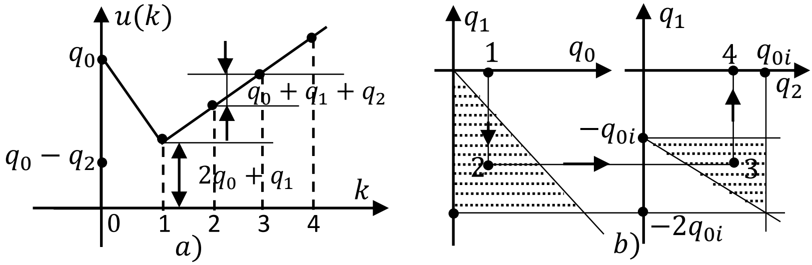

Fig. 5.2. Răspunsul indicial a) și domeniile de variaţie ale parametrilor algoritmului PID numeric b)

Din relaţiile (5.28) rezultă domeniile de variaţie ale parametrilor de acord care sunt reprezentate în fig. 5.2, b). Pentru o valoare fixată q_{0i}, parametrii q_0, q_1, q_2 trebuie plasaţi în zonele punctate pe traseul 1-2-3-4.

Prin anularea componentei cu ajutorul parametrilor k_p, T_i, T_d din (5.22)-(5.23) se pot obţine variantele discrete ale algoritmilor P, I, PI, PD.

Algoritmul incremental, datorită formei recursive, are avantajul trecerii de la regimul manual la cel automat fără şocuri deoarece se transmit elementului de execuţie incremente $\Delta u(k)$ de comandă care determină deplasări mici succesive.

Alt avantaj este în lipsa sumei din (5.18) care eliminarea pericolului atingerii rapide a valorii de saturaţie a comenzii $u(k)$.

Algoritmii PID numerici pot fi obţinuţi aplicând metoda trapezului de discretizare la expresia (5.16) şi se obţine funcția de transfer discretă în forma:

$$H_R(z) = \frac{q_0 z^2 + q_1 z + q_2}{p_0 z^2 - p_1}\Big|_{p_0=1} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - p_1 z^{-2}} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})}, \qquad (5.29)$$

unde parametrii q_i şi p_j se descriu cu relaţiile:

$$q_0 = k_p + \frac{T}{2T_i} + 2\frac{T_d}{T},\ q_1 = k_p\frac{T}{T_i} - 4\frac{T_d}{T},$$

$$q_2 = -k_p + \frac{T}{2T_i} + 2\frac{T_d}{T},\ p_0 = 1,\ p_1 = 1. \qquad (5.30)$$

Algoritmul obţinut este un algoritm recurent de ordinul doi a cărui ecuaţie cu diferenţe finite are forma (prin operatorul de deplasare q^{-1}):

$$u(k) = \frac{q_0 + q_1 q^{-1} + q_2 q^{-2}}{1 - p_1 q^{-2}}\varepsilon(k),$$

$$u(k)(1 - p_1 q^{-2}) = \varepsilon(k)(q_0 - q_1 q^{-1} + q_2 q^{-2}),$$

$$u(k) - p_1 q^{-2} u(k) = q_0 \varepsilon(k) - q_1 q^{-1}\varepsilon(k) + q_2 q^{-2}\varepsilon(k) \qquad (5.31)$$

sau în forma:

$$u(k) - p_1 u(k-2) = q_0\varepsilon(k) - q_1\varepsilon(k-1) + q_2\varepsilon(k-2),$$

$$u(k) = p_1 u(k-2) + q_0\varepsilon(k) - q_1\varepsilon(k-1) + q_2\varepsilon(k-2). \qquad (5.32)$$

Ecuațiile cu diferențe finite pentru algoritmi PID pot fi obținute direct din ecuațiile diferențiale aplicând metodele respective de discretizare sau din funcțiile de transfer, utilizând metodele de aproximare a dreptunghiului în avans, dreptunghiului în întârziere și metoda trapezului.

Pentru alegerea metodei de discretizare se iau în considerație următorii factori:

1. Precizia de aproximare a algoritmului continuu.
2. Complexitatea relațiilor de calcul ale parametrilor algoritmului obținut.

3. Posibilitățile de structurare (optimizare) a algoritmului pentru implementarea lui cu flexibilitate ridicată.

Exemplul 5.1. Se consideră algortimul PID continu descris cu funcția de transfer cu parametrii calculați în ex. 2.23: $k_p = 3.65$, $T_i = 1.773$, $k_i = 0.564$, $k_d = 4.916$ și perioada de eșantionare $T = 0.2$ s:

$$H_{PID}(s) = \frac{u(s)}{\varepsilon(s)} = \frac{Q(s)}{P(zs)} = k_p + \frac{1}{T_i s} + T_d s = 3.65 + \frac{1}{1.773s} + 4.916s.$$

Se cere să se determine algoritmul PID numeric utilizând metodele de aproximare dreptunghiului în avans, dreptunghiului în întârziere și metoda trapezului.

Soluționare. 1. *Metoda dreptunghiului în avans*. În f.d.t. a algoritmului PID continuu se utilizează substituția lui s cu z din (4.40) și după unele transformări se obține algoritmul PID numeric:

$$H_{PID}(z) = \frac{u(z)}{\varepsilon(z)} = k_p + \frac{T}{T_i(z-1)} + T_d\frac{z-1}{T} = \frac{k_pT_iT(z-1)+T^2+T_dT_i(z-1)^2}{T_iT(z-1)} =$$

$$= \frac{q_0'z^2+q_1'z+q_2'}{p_0'z^2-p_1'} = \frac{q_0+q_1z^{-1}+q_2z^{-2}}{1-p_1z^{-2}} = \frac{24.58-45.51z^{-1}+21.0428z^{-2}}{1-z^{-2}} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})},$$

unde $q_0 = \frac{q_0'}{p_0'} = \frac{T_dT_i}{T_iT} = \frac{T_d}{T} = 24.58$, $q_1 = \frac{q_1'}{p_0'} = \frac{k_pT_iT-2T_dT_i}{T_iT} = k_p - 2\frac{T_d}{T} = -45.51$, $q_2 = \frac{q_2'}{p_0'} = \frac{-k_pT_iT+T_dT_i+T^2}{T_iT} = -k_p + \frac{T}{T_i} + \frac{T_d}{T} = 21.0428$, $p_1 = 1$ sunt parametrii numerici.

2. *Metoda dreptunghiului în întârziere*. În f.d.t. a algoritmului PID continuu se utilizează substituția lui s cu z din (4.41) și după unele transformări se obține algoritmul PID numeric:

$$H_{PID}(z) = \frac{u(z)}{\varepsilon(z)} = k_p + \frac{Tz}{T_i(z-1)} + T_d\frac{z-1}{Tz} = \frac{k_pT_iTz(z-1)+T^2z^2+T_dT_i(z-1)^2}{T_iTz(z-1)} =$$

$$= \frac{q_0'z^2+q_1'z+q_2'}{p_0'z^2-p_1'} = \frac{q_0+q_1z^{-1}+q_2z^{-2}}{1-p_1z^{-2}} = \frac{28.3428-52.81z^{-1}+24.58z^{-2}}{1-z^{-2}} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})},$$

unde $q_0 = \frac{q_0'}{p_0'} = \frac{k_pT_iT+2T_dT_i+T^2}{T_iT} = k_p + \frac{T}{T_i} + \frac{T_d}{T} = 28.3428$, $q_1 = \frac{q_1'}{p_0'} = \frac{k_pT_iT+2T_dT_i}{T_iT} = k_p + 2\frac{T_d}{T} = 52.81$, $q_2 = \frac{q_2'}{p_0'} = \frac{T_dT_i}{T_iT} = \frac{T_d}{T} = 24.58$, $p_1 = 1$ sunt parametrii numerici.

3. *Metoda trapezului*. În f.d.t. a algoritmului PID continuu se substitue s cu z din (4.42) și după unele transformări se obține algoritmul PID numeric:

$$H_{PID}(z) = k_p + \frac{T(z+1)}{2T_i(z-1)} + \frac{2T_d(z-1)}{T(z+1)} = \frac{2k_pT_iT(z^2-1)+T^2(z+1)^2+4T_dT_i(z-1)^2}{2T_iT(z^2-1)} =$$

$$= \frac{q_0'z^2+q_1'z+q_2'}{p_0'z^2-p_1'} = \frac{q_0+q_1z^{-1}+q_2z^{-2}}{p_0-p_1z^{-2}} = \frac{24.58-45.51z^{-1}+-45.51z^{-2}}{1-z^{-2}} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \frac{u(z)}{\varepsilon(z)},$$

unde $q_0 = \frac{q_0'}{p_0'} = \frac{2k_pT_iT+4T_dT_i+T^2}{T_iT} = k_p + 2\frac{T_d}{T} = 52.8664$, $q_1 = \frac{q_1'}{p_0'} = \frac{2T^2-8T_dT_i}{T_iT} = \frac{T}{T_i} -$ $-4\frac{T_d}{T} = -98.2072$, $q_2 = \frac{q_2'}{p_0'} = \frac{-4k_pT_iT+4T_dT_i+T^2}{T_iT} = -k_p + \frac{T}{2T_i} + 2\frac{T_d}{T} = 45.5664$, $p_1 = 1$ sunt parametrii numerici.

Exemplul 5.2. Se consideră modelul obiectului de reglare descris cu f.d.t. cu parametrii cunoscuți:

$$H(s) = \frac{ke^{-\tau s}}{(T_1s+1)(T_2s+1)} = \frac{ke^{-\tau s}}{a_0s^2+a_1s+a_2} = \frac{0.5e^{-s}}{10s^2+7s+1}.$$

Parametrii algoritmului PID numeric sunt calculați în ex. 5.1 pentru perioada de eșantionare $T = 0.2$ s după metodele de aproximare MDA, MDÎ și MT.

Se cere să se analizeze performanțele sistemului cu algoritmul PID continuu (ex. 2.23) și sistemului cu regulatorul PID numeric (ex. 5.1) și să se obţină mărimea comenzii în timpului discret a algoritmului PID numeric calculat cu metoda trapezului.

Soluționare. S-a simulat sistemul automat cu regulatorul PID continuu și sistemul cu regulatorul PID numeric acordat după metodele de aproximare MDA. MDÎ și MT și răspunsurile indiciale sunt date în fig. 5.3 (alura 1 – sistemul cu regulatorul

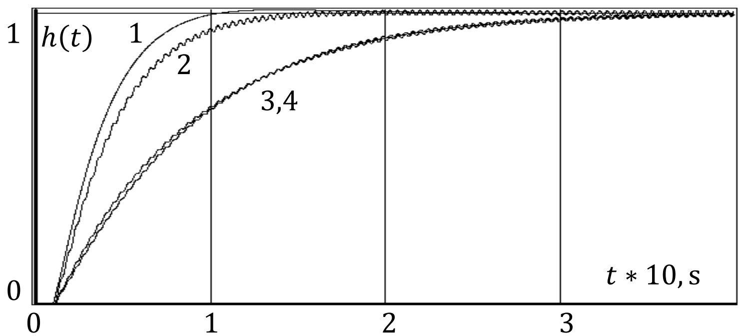

Fig. 5.3. Răspunsurile indiciale ale sistemului automat

PID continuu, alura 2 – sistemul cu regulatorul PID numeric calculat cu metoda trapezului, alura 3,4 – sistemul cu regulatorul PID numeric calculat după metodele DA și DÎ). Sistemul cu regulatorul PID numeric acordat după matoda trapezului cel mai precis reproduce performanțele sistemului continuu.

Pentru regulatorul PID numeric acordat după metoda trapezului se determină mărimea comenzii în domeniul timpului discret:

$$H_{PID}(z^{-1}) = \frac{q_0 - q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-2}} = \frac{52.8665 - 98.2071 z^{-1} + 45.6664 z^{-2}}{1 - z^{-2}} = \frac{u(z^{-1})}{\varepsilon(z^{-1})},$$

$$u(kT) = u((k-2)T) + 52.8665\varepsilon(kT) - 98.2071\varepsilon\big((k-1)T\big) +$$

$$+45.5664\varepsilon\big((k-2)T\big).\blacksquare$$

5.5.2 *Algoritmul PID numeric cu filtrare*

Pentru evitarea şocurilor în multe aplicaţii componenta derivativă D nu se introduce în canalul erorii $\varepsilon(k)$, dar se introduce în canalul măsurii $y(k)$ [4, 5]:

$$u(s) = k_p(\varepsilon(s) + \frac{1}{T_i}\frac{\varepsilon(s)}{s} - T_d s y(s)). \tag{5.33}$$

Pentru a fi satisfăcută condiţia de realizabilitate fizică a regulatorului şi evitării şocurilor în multe aplicaţii componenta derivativă D se filtrează cu un element de ordinul unu având constanta de timp $T_f =$ $= \alpha T_d = (0.1 \cdots 0.125)T_d$ şi nu se introduce în canalul erorii $\varepsilon(k)$, dar se introduce în canalul măsurii $y(k)$. Astfel, pentru algoritmul PID continuu se obţine expresia în forma:

$$u(s) = k_p\left(\varepsilon(s) + \frac{1}{T_i}\frac{\varepsilon(s)}{s} - \frac{T_d s y(s)}{\alpha T_d s + 1}\right) =$$

$$= k_p(\varepsilon(s) + \frac{1}{T_i}\frac{\varepsilon(s)}{s} - T_d s \frac{1}{\alpha T_d s + 1} y(s)). \tag{5.34}$$

Această filtrare elimină componentele tip zgomot din măsura lui $y(k)$ care ar fi amplificate prin derivare.

Mărimea măsurată filtrată este:

$$y_f(\mathrm{s}) = \frac{1}{T_f s + 1} y(s). \tag{5.35}$$

Varianta incrementală a algoritmului PID obţinută prin aplicarea metodei dreptunghiului în întârziere de discretizare are forma:

$$\Delta u(k) = u(k) - u(k-1) = k_p[(\varepsilon(k) - \varepsilon(k-1)) -$$

$$-\frac{T}{T_i}\varepsilon(k) - \frac{T_d}{T}((y_f(k) - 2y_f(k-1) - y_f(k-2))]. \qquad (5.36)$$

Dacă se consideră şi componenta proporţională P prelucrează măsura filtrată $y_f(k)$, se obţine algoritmul PID modificat de forma:

$$u(k) = u(k-1) + k_p[-(y_f(k) - y_f(k-1)) + \frac{T}{T_i}\varepsilon(k) -$$

$$-\frac{T_d}{T}((y_f(k) - 2y_f(k-1) - y_f(k-2))]. \qquad (5.37)$$

Astfel, pot fi obţinute forme discrete şi pentru alţi algoritmi PID, cum ar fi cei cu interinfluenţă.

Algoritmii PID numerici pot fi obţinuţi aplicând metoda trapezului de discretizare la forma serie continuă:

$$H_R(s) = k_R(1 + \frac{1}{T_i s})(\frac{T_d s+1}{\alpha T_d s+1}) \qquad (5.38)$$

sau în formă operaţională:

$$u(s) = k_p(1 + \frac{1}{T_i s})(\frac{T_d s+1}{\alpha T_d s+1})\varepsilon(s). \qquad (5.39)$$

Efectuând discretizarea (5.39) prin metoda dreptunghiului în întârziere se obţine un algoritm recursiv de ordinul doi de forma:

$$H_R(z) = \frac{q_0 + q_1 q^{-1} + q_2 q^{-2}}{1 + p_1 q^{-1} + p_2 q^{-2}}, \qquad (5.40)$$

unde parametrii q_i şi p_j se determină cu relaţiile:

$$q_0 = \frac{k_p(T-T_i)(T-T_d)}{T_i(\alpha T_d - T)},\ q_1 = \frac{k_p T(T_i+T_d) - 2k_p T_i T_d}{T_i(\alpha T_d - T)},\ q_2 = \frac{k_p T_d}{\alpha T_d - T},$$

$$p_1 = \frac{T-2\alpha T_d}{\alpha T_d - T},\ p_2 = \frac{2\alpha T_d}{\alpha T_d - T}. \tag{5.41}$$

O formă generală a algoritmului recurent de ordinul n are forma:

$$H_R(z) = \frac{q_0 z^n + q_1 z^{n-1} + \cdots + q_{n-1} z + q_n}{z^n + p_1 z^{n-1} + \cdots + p_{n-1} z + p_n} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + \cdots + q_{n-1} z^{n-1} + q_n z^{-n}}{1 + p_1 z^{-1} + \cdots + p_{n-1} z^{n-1} + p_n z^{-n}} \tag{5.42}$$

sau în forma:

$$u(k) = \sum_{i=0}^{n} q_i\, \varepsilon(k-i) - \sum_{j=1}^{n} p_j\, u(k-j). \tag{5.43}$$

Pentru simplificarea procedurilor de implementare a algoritmilor PID cu filtrare acestea se structurează sub forma unor module standard P, I şi PD cu filtrare (fig. 5.4).

Utilizarea structurilor modulare permite obţinerea unui algoritm numeric uşor de implementat pe cale numerică cu fiabilitate ridicată şi posibilităţi de realizare a diferitor regimuri de funcţionare. În aceste cazuri se obţine comanda discretă pentru fiecare modul şi se configurează structura necesară a algoritmului.

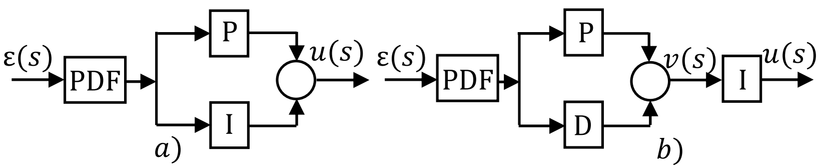

Fig. 5.4. Algoritmul PID modular cu filtrare

Se prezintă algoritmii discreţi pentru fiecare modul P, I (fig. 5.4, a) şi PD (fig. 5.4, b).

Componenta proporţională-derivativă cu filtrare PDF (fig. 5.4) se descrie cu ecuaţia diferenţială:

$$\alpha T_d \frac{dv(t)}{dt} + v(t) = T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + \varepsilon(t), \tag{5.44}$$

iar echivalentul discret (5.44) ca element cu anticipaţie-întârziere prin utilizarea metodei dreptunghiului în întârziere are forma:

$$\alpha T_d \frac{v(k)-v(k-1)}{T} + v(k) = T_d \frac{\varepsilon(k)-\varepsilon(k-1)}{T} + \varepsilon(k). \qquad (5.45)$$

După unele transformări în (5.45) se obţine mărimea de ieşire a modulului PFD:

$$v(k) = \frac{\alpha T_d}{\alpha T_d+T} v(k-1) + \frac{T_d+T}{\alpha T_d+T} \varepsilon(k) - \frac{T_d}{\alpha T_d+T} \varepsilon(k-1). \ (5.46)$$

Pentru componenta proporţională se obţine:

$$u_p(k) = k_p v(k), \qquad (5.47)$$

iar pentru integrală prin aplicarea metodei dreptunghiului de discretizare se obţine expresia:

$$u_i(k) = u_i(k-1) + k_p \frac{T}{T_i} v(k). \qquad (5.48)$$

Astfel, la ieşirea sumatorului se obţine semnalul:

$$u(k) = u_p(k) + u_i(k). \qquad (5.49)$$

5.5.3 *Algoritmul PID numeric modificat*

Se utilizează câteva variante de structuri de algoritmi de tipul PID modificaţi: PI-D, I-PD şi PID cu două grade de libertate, care prelucrează diferit variabilele de intrare în regulator: referinţa, eroarea şi mărimea măsurată a procesului [1, 4, 5].

Se analizează algoritmul PI-D numeric modificat. Structura sistemului cu algoritmul PID modificat se dă în fig. 5.5, care se descrie:

$$u(s) = k_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) r(s) - k_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{\alpha T_d s + 1}\right) y(s) =$$

$$= H_{PI}(s) r(s) - H_D(s) y(s). \qquad (5.50)$$

În acest caz algoritmul PI se plasează pe canalul direct, iar componenta derivativă D se plasează pe calea de reacţie şi prelucrează semnalul măsurii $y_n(t)$, eliminând semnalul zgomot $n(t)$ şi mărimea de comandă $u(t)$.

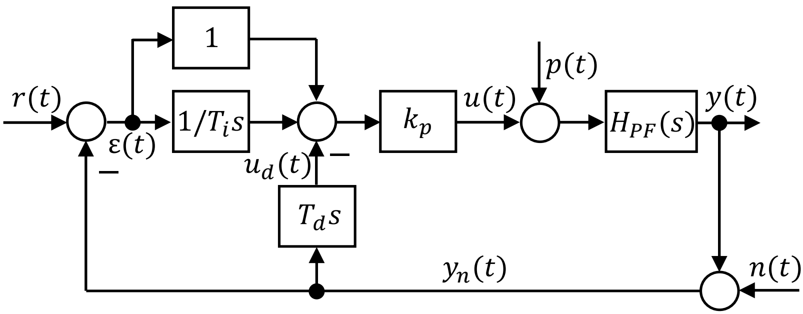

Fig. 5.5. Structura sistemului cu regulatorul PI-D

Pentru algoritmii PI şi D se pot obţine formelele numerice aplicând metoda dreptunghiului în întârziere sau metoda trapezului.

Pentru algoritmul PI se obţine:

$$H_{PI}(z^{-1}) = k_p\left(1+\frac{T}{T_i}\frac{1}{1-z^{-1}}\right) = \frac{q_0-q_1z^{-1}}{1-z^{-1}}, \tag{5.51}$$

iar $q_0 = k_p\left(1+\frac{T}{T_i}\right)$, $q_1 = k_p$, $p_0 = p_1 = 1$ - parametrii regulatorului.

Pentru regulatorul PID cu filtrare se obține:

$$H_{PID}(z^{-1}) = k_p\left(1+\frac{T}{T_i}\frac{1}{1-z^{-1}}+\frac{T_d}{\alpha T_d+\frac{T}{1-z^{-1}}}\right) =$$

$$= k_p\left(1+\frac{T}{T_i}\frac{1}{1-z^{-1}}+\frac{T_d(1-z^{-1})}{\alpha T_d(1-z^{-1})+T}\right) = \frac{q_0-q_1z^{-1}+q_2z^{-2}}{p_0-p_1z^{-1}+p_2z^{-2}}, \tag{5.52}$$

unde $q_0 = \frac{k_p(\alpha T_d(T_i+T)+T_i(T_d+T)+T^2)}{T_i(\alpha T_d+T)}$, $q_1 = \frac{k_p(\alpha T_d(2T_i+T)+T_i(2T_d+T))}{T_i(\alpha T_d+T)}$, $q_2 = \frac{k_pT_dT_i(\alpha+1)}{T_i(\alpha T_d+T)}$, $p_0 = 1$, $p_1 = \frac{T_i(2\alpha T_d+T)}{T_i(\alpha T_d+T)}$, $p_2 = \frac{T_i\alpha T_d}{T_i(\alpha T_d+T)}$ - parametrii regulatorului.

După efectuarea calculelor expresia (5.50) cu (5.51)–(5.55), mărimea de comandă se exprimă în forma structurii de regulator RST:

$$u(k) = \frac{T(q^{-1})}{R(q^{-1})} r(k) - \frac{S(q^{-1})}{R(q^{-1})} y(k) \tag{5.53}$$

sau în forma:

$$u(k) = \sum_{i=0}^{2} t_i r(k-i) - \sum_{i=0}^{2} s_n y(k-n) - \sum_{i=1}^{2} r_j u(k-j),$$

unde polinoamele $T(q^{-1})$, $R(q^{-1})$, $S(q^{-1})$ se obţin din expresiile (5.51) şi (5.52) şi în domeniul timpului discret sunt:

$$\begin{aligned} T(q^{-1}) &= t_0 + t_1 q^{-1} + t_2 q^{-2}, \\ R(q^{-1}) &= r_0 + r_1 q^{-1} + r_2 q^{-2}, \\ S(q^{-1}) &= s_0 + s_1 q^{-1} + s_2 q^{-2}, \end{aligned} \tag{5.54}$$

unde coeficienţii ca parametrii regulatorului se calculează în funcţie de parametrii k_p, T_i, T_d şi perioada de eşantionare T.

Structura comenzii din (5.50) prezintă in algoritm cu două grade de libertate sau forma canonică de regulator RST.

Utilizarea diverselor variante de algoritmi PID modificați pentru care se obțin forme echivalente discrete, în toate cazurile conduc la o structură standard de regulator (5.53) cu două grade de libertate cu diferite polinoame $T(q^{-1})$, $R(q^{-1})$, $S(q^{-1})$.

5.6 Optimizarea parametrilor de acord ai regulatorului

Parametrii de acord ai unui algoritm PID numeric pot fi optimizaţi folosind una din următoarele metode [16]:

1. Pe baza unui model al procesului se pot obţine parametrii optimi minimizând un criteriu de performanţă al sistemului.

2. Dacă se cunoaşte modelul procesului se determină parametrii de acord ai regulatorului printr-o metodă de alocare poli-zerouri.

3. Se folosesc reguli de acordare a regulatorului pe baza unor caracteristici obţinute din răspunsul indicial sau din oscilaţiile la limită

de stabilitate al sistemului închis și se calculează parametrii de acord.

5.6.1 *Optimizarea parametrilor regulatorului utilizând un model al procesului*

Această metodă utilizează un criteriu de performanţă pătratică:

$$J = \sum_{k=0}^{M}(\varepsilon^2(k) + \gamma k_p^2 \Delta u^2(k)), \tag{5.55}$$

unde incrementul se determină:

$$\Delta u(k) = u(k) - \bar{u} \tag{5.56}$$

este deviaţia comenzii de la:

- valoarea de regim staţionar a comenzii $\bar{u} = u(\infty)$ pentru perturbaţii de tip treaptă;
- dispersia $\bar{u} = D\{u(k)\}$ pentru perturbaţii stocastice;
- γ este un factor de ponderare, iar k_p este coeficientul de transfer de regim staţionar al procesului:

$$k_p = \frac{y(\infty)}{u(\infty)}. \tag{5.57}$$

Minimizarea criteriului (5.55) se realizează prin metode numerice de optimizare.

5.6.2 *Optimizarea pe baza ecuaţiei caracteristice a sistemului închis*

Metodele din această categorie pornesc de la ecuaţia caracteristică a sistemului numeric închis:

$$A(z) = 1 + H_R(z^{-1})H_P(z^{-1}) = 0 \tag{5.58}$$

și pe baza performanţelor se impun rădăcinile ecuaţiei caracteristice.

Astfel, dacă se consideră cunoscută partea fixată:

$$H_P(z^{-1}) = \frac{b_1 z^{-1}+b_2 z^{-1}+\cdots+q_m z^{-m}}{1+a_1 z^{-1}+\cdots+a_n z^{-n}},\ m < n \tag{5.59}$$

şi algoritmul PID incremental:

$$H_R(z^{-1}) = \frac{q_0 - q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1-z^{-1}}, \tag{5.60}$$

atunci ecuaţia caracteristică a sistemului este:

$$A(z) = 1 + H_R(z^{-1})H_P(z^{-1}) = (1 - z^{-1})(1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}) +$$
$$+ a_n z^{-n}) + (q_0 - q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2})(\ b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + q_m z^{-m}) = 0. \tag{5.61}$$

Deoarece raportul dintre gradele polinoamelor părții fixate din (5.59) este $m \le n$, atunci rezultă pentru polinomul caracteristic gradul $m + 2$.

Se consideră polinomul caracteristic dorit de forma:

$$P_d(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} \cdots + a_{m+2} z^{-(m+2)}, \tag{5.62}$$

coeficienţii căruia pot fi determinaţi prin alocare de poli pe baza performanţelor impuse sistemului.

Fiindcă regulatorul PID are numai 3 parametri de acord va exista o soluţie unică numai dacă $m + 2 = 3$. Dacă această condiţie nu este satisfăcută, atunci se alege pentru algoritmul PID următoarea formă:

$$H_R(z^{-1}) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{(1-z^{-1}) \prod_{i=1}^{p}(1+\gamma_i z^{-1})}, \tag{5.63}$$

astfel ca să se respecte egalitatea:

$$m + 2 = 3 + p. \tag{5.64}$$

Exemplul 5.3 [16]. Se consideră partea fixată descrisă cu f.d.t.:

$$H_P(s) = \frac{k(1-T_1 s)}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)} = \frac{(1-4s)}{(4s+1)(10s+1)}.$$

Se cere să se calculeze:

1. Să se determine modelele discrete ale părţii fixate pentru perioada de eşantionare $T = 1$ şi 5 s folosind pentru discretizare metoda dreptunghiului în avans.

2. Să se calculeze parametrii unui regulator PID pentru cele două perioade de eşantionare astfel încât sistemul numeric închis să aibă polii $z_1 = 0.125$, $z_2 = 0.375$, $z_{3,4} = 0.25 \pm j0.375$.

Rezolvare. 1. Se determină ecuaţia diferenţială a părţii fixate pentru f.d.t.:

$$H_P(s) = \frac{k_p(1-T_1 s)}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)} = \frac{y(s)}{u(s)}$$

sau în forma operaţională și forma ecuației diferențiale:

$$y(s)(1 + T_1 s)(1 + T_2 s) = u(s)k_p(1 - T_1 s),$$

$$T_1 T_2 s^2 y(s) + (T_1+T_2)sy(s) + y(s) = -k_p T_1 su(s) + u(s)k_p,$$

$$T_1 T_2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + (T_1+T_2)\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = -k_p T_1 \frac{du(t)}{dt} + k_p u(t).$$

La ecuaţia diferenţială se aplică metoda de discretizare a dreptunghiului în avans şi se obţine forma discretă:

$$\frac{T_1 T_2}{T^2}\Delta^2 y(k) + \frac{T_1+T_2}{T}\Delta y(k) + y(k) = k_p u(k) - k_p T_1 \Delta u(k),$$

unde $\Delta^2 y(k) = y(k+2) - 2y(k+1) + y(k)$, $\Delta y(k) = y(k+1) - y(k)$, $\Delta u(k) =$ $= u(k+1) - u(k)$.

Efectuând calculele asupra ecuaţiei cu diferenţe se obţine ecuaţia recurentă:

$$\frac{T_1 T_2}{T^2} y(k+2) + \left(\frac{T_1+T_2}{T} - 2\frac{T_1 T_2}{T^2}\right) y(k+1) + \left(\frac{T_1 T_2}{T^2} - \frac{T_1+T_2}{T} + 1\right) y(k) =$$

$$= -\frac{k_p T_1}{T} u(k+1) + \left(k_p + \frac{k_p T_1}{T}\right) u(k).$$

Ultima relaţie se împarte la termenul $\frac{T_1 T_2}{T^2}$ şi introducând datele numerice ale parametrilor modelului părţii fixate k_p, T_1, T_2 se obţine ecuaţia recursivă:

$$y(k+2) + (0.35T - 2)y(k+1) + (1 - 0.35T + 0.025T^2)y(k) =$$

$$= -0.1Tu(k+1) + (0.025T^2 + 0.1T)u(k).$$

Din ecuaţia recursivă se obţine f.d.t. discretă de ordinul $m = 2$ cu coeficienţii necunoscuţi:

$$H_P(z^{-1}) = \frac{y(k)}{u(k)} = \frac{b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}.$$

Coeficienţii f.d.t. se calculează în funcţie de perioada de eşantionare şi se dau în tabelul 5.1.

Tabelul 5.1. Coeficienţii f.d.t. ai modelului procesului

Coeficienţii f.d.t.	**Perioada de eşantionare T**	
	$\boldsymbol{T = 1}$ **s**	$\boldsymbol{T = 5}$ **s**
b_1	-0.1	-0.5
b_2	0.125	1.125
a_1	-1.65	-0.25
a_2	0.675	-0.125

2. Pe baza polilor impuşi modelului sistemului se determină ecuaţia caracteristică dorită:

$$A(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4) =$$

$$= z^4 - (z_1 + z_2 + z_3 + z_4)z^3 + (z_1z_2 + z_3z_4 + (z_1 + z_2)(z_3 + z_4))z^2 -$$

$$-(z_1z_2(z_3 + z_4) + z_3z_4(z_1 + z_2))z + z_1z_2z_3z_4 = 0.$$

Se calculează polinomul caracteristic cu datele numerice ale polilor:

$$P_d(z^{-1}) = 1 - z^{-1} + 0.5z^{-2} - 0.125z^{-3} + 0.0095z^{-4}.$$

Deoarece ordinul sistemului proiectat este egal cu 4, iar a modelului procesului este egal cu 2, atunci este necesar să fie îndeplinită condiţia (5.64) $m + 2 = 3 + p$, care implică adăugarea unui pol suplimentar în f.d.t. discretă a regulatorului și se obține:

$$H_R(z^{-1}) = \frac{q_0+q_1z^{-1}+q_2z^{-2}}{(1-z^{-1})(1+\gamma z^{-1})}.$$

Pe baza modelelor discrete ale regulatorului şi părţii fixate se construiește polinomul caracteristic al sistemului închis de forma:

$$P_{d0}(z^{-1}) = (1 - z^{-1})(1 + \gamma z^{-1})(1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}) +$$

$$+(q_0 + q_1z^{-1} + q_2z^{-2})(b_1z^{-1} + b_2z^{-2}).$$

Pentru determinarea valorilor parametrilor regulatorului numeric se identifică coeficienţii polinomului P_d şi polinomului P_{d0} şi se obţine sistemul de ecuaţii algebrice:

$$\gamma + q_0 b_1 = -1 - a_1 + 1,$$

$$\gamma(a_1 - 1) + q_0 b_2 + q_1 b_1 = 0.5 - a_2 + a_1,$$

$$\gamma(a_2 - a_1) + q_1 b_2 + q_2 b_1 = -0.125 + a_2,$$

$$-\gamma a_2 + q_2 b_2 = 0.0095,$$

care se rezolvă utilizând forma matriceală:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_1 - 1 & b_2 & b_1 & 0 \\ a_2 - a_1 & 0 & b_2 & b_1 \\ -a_2 & 0 & 0 & b_2 \end{bmatrix}}_{B} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma \\ q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}}_{q} = \underbrace{\begin{bmatrix} -a_1 \\ 0.5 - a_2 + a_1 \\ -0.125 + a_2 \\ 0.0095 \end{bmatrix}}_{A}$$

sau în forma: $q = B^{-1}A$.

Se calculează parametrii regulatorului pentru cele două perioade de eşantionare, care sunt prezentate în tabelul 5.2.

Tabelul 5.2. Parametrii regulatorului

Parametrii regulatorului	**Perioada de eşantionare T**	
	$T = 1$ **s**	$T = 5$ **s**
γ	131.9093	0.7667
q_0	277.6357	1.0335
q_1	-344.165	-0.3415
q_2	131.9093	-0.0767

Astfel, funcţia de transfer discretă a regulatorului $H_{R1}(z^{-1})$cu parametrii de acord calculaţi pentru perioada de eşantionare $T = 1$ s și regulatorului $H_{R2}(z^{-1})$ cu perioada $T = 5$ s se descriu:

$$H_{R1}(z^{-1}) = \frac{277.6357 - 344.165z^{-1} + 131.9093z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 + 131.9093z^{-1})} = \frac{277.6357 - 344.165z^{-1} + 131.9093z^{-2}}{1 + 130.9093z^{-1} - 131.9093z^{-2}},$$

$$H_{R2}(z^{-1}) = \frac{1.0335 - 0.3415z^{-1} - 0.0767z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 + 0.7667z^{-1})} = \frac{1.0335 - 0.3415z^{-1} - 0.0767z^{-2}}{1 - 0.2333z^{-1} - 0.7667z^{-2}}.$$

S-a simulat sistemul numeric cu regulatorul sintetizat. Pentru perioada de eșantionare $T = 1$ s sistemul numeric este instabil, iar pentru perioada $T = 5$ s sistemul numeric este stabil cu un răspuns aperiodic cu timpul de creștere și de reglare egale $t_c =$ $= t_r = 125$ s.■

5.6.3 *Pe baza unor reguli de acordare*

Aceste reguli permit determinarea cu aproximație pe cale experimentală a valorilor optime ale parametrilor de acord ai algoritmului selectat de tipul PID. Dacă perioada de eşantionare este suficient de mică, atunci comportarea regulatorului de tipul PID discret este cuasicontinuu şi, deci, este apropiată de răspunsul regulatorului continuu.

Pentru aceste cazuri se aplică regulile de acordare a regulatoarelor aplicând metoda Ziegler-Nichols etc., care permite determinarea parametrilor regulatorului pentru procese lente cu răspunsul indicial aproximat cu modele cu inerţie de ordinul unu cu timp mort cu f.d.t. [16]:

$$H_P(s) = \frac{ke^{-\tau s}}{T_0 s+1}. \tag{5.65}$$

Deoarece în sistemul numeric există elementul de reţinere de ordinul zero, timpul mort echivalent al părţii fixate se modifică. Pornind de la f.d.t. a elementul de reţinere de ordinul zero:

$$H_{ER}(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s}, \tag{5.66}$$

în domeniul frecvenților se reprezintă în forma:

$$H_{ER}(j\omega) = \frac{1-e^{-Tj\omega}}{j\omega} = \frac{1-\cos\omega T + j\sin\omega T}{j\omega} =$$

$$= T\,\frac{\sin\omega T/2}{\omega T/2}\,e^{-j\omega\frac{T}{2}} = T\mathrm{sinc}\frac{\omega T}{2}\,e^{-j\omega\frac{T}{2}}, \tag{5.67}$$

care se caracterizează printr-un element de atenuare $T\mathrm{sinc}\frac{\omega T}{2}e^{-j\omega\frac{T}{2}}$ şi un timp mort egal cu $T/2$.

Prezenţa elementului de reţinere de ordin zero în structura părţii fixate conduce la modificarea timpului mort echivalent:

$$\tau_e = \tau + \frac{T}{2}. \tag{5.68}$$

Pentru aceste cazuri se aplică regulile clasice de acordare a regulatoarelor aplicând metoda Ziegler-Nichols etc. Timpul mort τ_e echivalent din (5.68) se utilizează pentru acordarea regulatorului în funcţie de rezultatele identificării experimentale.

Există metode elaborate special pentru acordarea regulatoarelor numerice bazate pe răspunsul indicial al sistemului în circuit închis (fig. 5.6, a) sau pe caracteristicile oscilaţiilor întreţinute la limita de stabilitate

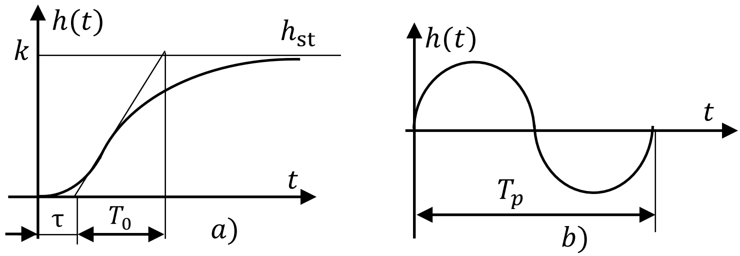

Fig. 5.6. Răspunsul indicial al procesului a) şi oscilaţii întreţinute în sistem b)

(fig. 5.6, b), pentru care s-au obţinut expresii empirice pentru algoritmii P, PI, PID (PID modificat) care sunt date în tabelele 5.3 şi 5.4.

Tabelul 5.3. Acordarea pe baza răspunsului indicial

Tip regulator	**Parametrii de acord**		
	k_p	T/T_i	T_d/T
P	$\frac{T_0}{\tau_e + \mathrm{T}}$	–	–
PI	$\frac{0.9T_0}{\tau_e} - \frac{0.135T_0T}{\tau_e^2}$	$\frac{0.27T_0T}{k_p\tau_e^2}$	–
PID	$\frac{1.2T_0}{\tau + T} - \frac{0.3T_0T}{\tau_e^2}$	$\frac{0.6T_0T}{k_p\tau_e^2}$	$\frac{0.5T_0}{k_pT}$

Expresiile din tabelul 5.3 se aplică pentru $\tau/T_0 \rightarrow 0$.

Relaţiile din tabel 5.4 sunt funcții de parametrii critici k_{cr}, T_p ai sistemului și sunt valabile pentru condiţiile când perioada $T \leq 2\tau$ şi nu sunt recomandate pentru condiţia când perioada de eșantionare $T \approx 4\tau$.

Tabelul 5.4. Acordarea pe baza regimului critic

Tip regulator	Parametrii de acord		
	k_p	T/T_i	T_d/T
P	$0.5k_{\text{cr}}$	–	–
PI	$(0.45-0.27)\dfrac{k_{\text{cr}}}{T_p}$	$0.54\frac{k_{\text{cr}}}{k_p}\frac{T}{T_p}$	–
PID	$0.6k_{\text{cr}}\dfrac{T}{T_p}$	$1.2\dfrac{k_{\text{cr}}}{k_p}\dfrac{T}{T_p}$	$\dfrac{3}{40}\dfrac{k_{\text{cr}}}{k_p}\dfrac{T_p}{T}$

5.7 Alegerea optimă a perioadei de eşantionare

Pentru regulatoarele numerice perioada de eşantionare T este însă un parametru de acord.

Algoritmii numerici de reglare obținuți prin discretizarea algoritmilor continui au performanțe mai reduse datorită aproximării componentelor integrală I și derivativă D, ca rezultat a pierderii de informație la etapele de cuantizare și eșantionare. Pentru alegerea perioadei de eșantionare sunt recomandate relații experimentale care determină raportul între perioada de eșantionare T și constanta de timp derivare T_d [4, 5, 16].

La valori foarte mici ale perioadei de eșantionare T (deci frecvențe mari de eșantionate) ca avantaj se obține o bună aproximare a algoritmului de conducere, dar dezavantajul acestui algoritm este volumul mare de calcule, ceea ce conduce la costuri ridicate ale interfeței de proces și numărul buclelor de reglare realizate cu un singur regulator este redus etc.

Dacă perioada de eșantionare T este mare, atunci pierderea de informație în procesul de eșantionare conduce la o precizie redusă în evoluția sistemului și la acțiunea perturbațiilor starea sistemului ne este controlabilă între momentele de eșantionare.

Cerințele de performanță impuse sistemului la urmărirea referinței și rejecția perturbațiilor sunt factorii principali la alegerea perioadei de eșantionare. Cunoașterea performanțelor elementelor de execuție și a traductoarelor, cât și clasa de perturbații care acționează asupra sistemului impun cerințele de bază la alegerea perioadei de eşantionare.

Alegerea şi optimizarea perioadei de eşantionare poate fi realizată utilizând diferite criterii cum ar fi [4, 16].

1. Performanţele impuse sistemului numeric de reglare.
2. Dinamica procesului.
3. Spectrul de frecvenţă al perturbaţiilor.
4. Tipul elementului de execuţie.
5. Echipamentul de măsură.
6. Modelul procesului identificat.
7. Eficienţa economică a sistemului numeric.

Pornind de le performanţele impuse sistemului, pe baza lărgimii de bandă $\omega_B = 2\pi f_B$ a sistemului în buclă închisă perioada de eşantionare se alege din condiţia:

$$T \approx \left(\frac{1}{8} \cdots \frac{1}{16}\right)\frac{1}{f_B}. \tag{5.69}$$

În funcţie de dinamica procesului există posibilităţi de alegere a perioadei de eşantionare. Astfel, dacă timpul mort τ al procesului este dominant, atunci se recomandă relaţia:

$$T \approx \left(\frac{1}{4} \cdots \frac{1}{8}\right)\tau. \tag{5.70}$$

Pentru cazurile când constanta de timp determinată după tangenta punctului de inflexiune cu model de ordinul unu cu timp mort perioada de eşantionare este funcţie de raportul τ/T_0 şi se alege în forma:

$$T \approx (1.2 \cdots 0.35)\tau \text{ dacă raportul } 0.1 \le \tau/T_0 \le 1, \tag{5.71}$$

$$T \approx (0.35 \cdots 0.22)\tau \text{ dacă raportul } 1 \le \tau/T_0 \le 10. \tag{5.72}$$

Dacă spectrul perturbaţiilor este limitat la ω_{max}, atunci pe baza teoremei lui Shannon se alege perioada de eşantionare T în forma:

$$T \approx \frac{\pi}{\omega_{max}}. \tag{5.73}$$

Se identifică modelul procesului pe baza răspunsului indicial şi perioada de eşantionare se alege după timpul de creştere t_c în forma:

$$T \approx (\frac{1}{6} \cdots \frac{1}{12}) t_c. \tag{5.74}$$

Pentru a conduce mai multe bucle de reglare se folosesc perioade de eşantionare mai mici. Se recomandă în acest caz perioade de eşantionare în funcţie de variabila de reglare. În tabelul 5.5 sunt prezentate recomandările de alegere a perioadei de eşantionare pentru variabile care caracterizează câteva din cele mai larg utilizate procese.

Tabelul 5.5. Parametrii regulatorului

Variabila reglată	**Perioada de eşantionare *T*,** s
Debit	$1 \cdots 3$
Nivel	$5 \cdots 10$
Presiune	$1 \cdots 5$
Temperatura	$10 \cdots 20$

5.8 Funcţii suplimentare ale regulatorului PID numeric

5.8.1 *Metode antisaturaţie*

Un regulator cu componenta integrală I care comandă un element de execuţie poare intra în saturaţie şi produce deteriorarea performanţelor sistemului. Astfel, dacă eroarea sistemului $\varepsilon(t)$ are valori mari, integratorul I determină intrarea în saturaţie a elementului de execuţie şi sistemul rămâne deschis chiar dacă mărimea de ieşire $y(t)$ se va modifica. În acest timp componenta I va creşte la valori mari. Când valoarea erorii $\varepsilon(t)$ se va reduce, micşorarea componentei I la valori normale se va produce într-un interval de timp mare.

Acest efect se numeşte *antisaturaţie*, iar metodele pentru evitarea lui metode antisaturaţie [1, 4, 5, 16, 18].

1. Una *din metode antisaturaţie este oprirea acţiunii componentei integrale la intrarea în saturaţie a elementului de execuţie.*

Dacă algoritmul de reglare este programat pe baza relaţiei (5.20):

$$u(k) = u(k-1) + q_0\varepsilon(k) - q_1\varepsilon(k-1) + q_2\varepsilon(k-2), \quad (5.75),$$

atunci termenul integral se poate anula prin:

$$\varepsilon(k-1) = 0, \text{ dacă } u_{\min} \geq u(k) \geq u_{\max} \quad (5.76)$$

sau dacă $|\varepsilon(k)| < \varepsilon_{\max}(k)$.

2. *A doua metodă antisaturaţie* este prezentată în fig. 5.7. În acest caz se foloseşte o reacţie suplimentară care prelucrează eroarea cu relaţia:

$$\varepsilon_s(k) = u(k) - v(k) \quad (5.77)$$

dintre ieşirea $u(k)$ a elementului de execuţie şi comanda $v(k)$ regulatorului. Această eroare este ponderată cu coeficientul $1/T_u$, unde T_u este constanta de timp de urmărire şi aplicată componentei I.

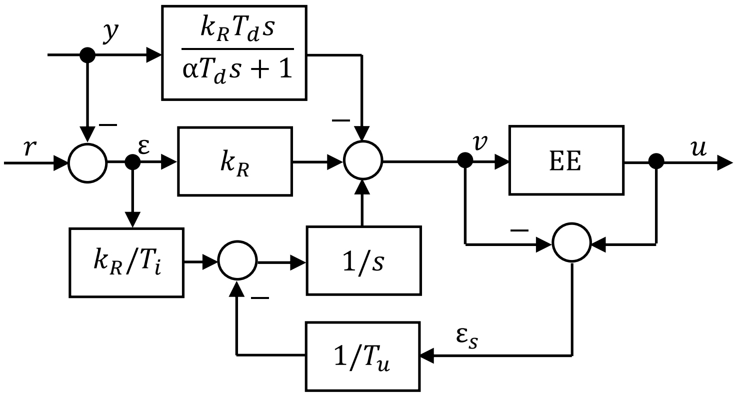

Fig. 5.7. Structura unui regulatorul PID cu desaturare

Eroarea $\varepsilon_s(k)$ este zero, dacă elementul de execuţie nu este saturat. La intrarea în saturaţie eroarea $\varepsilon_s(k)$ devine diferit de zero, dar reacţia suplimentară va tinde să anuleze eroarea suplimentară. Astfel, integratorul I este resetat în aşa mod încât ieşirea regulatorului se menţine la limita de saturaţie.

5.8.2 *Comutarea manual–automat*

Regulatoarele PID pot funcţiona în mod MANUAL (M) şi

AUTOMAT (A). În modul MANUAL, ieşirea regulatorului $u(t)$ se generează de un operator prin acţiuni de creştere sau scădere.

Regulatoarele pot funcţiona în conexiune cascadă (CASC) cu alte regulatoare sau cu alte elemente neliniare multiplicatoare sau selectoare, care pot funcţiona în regim CALCULATOR cu fixarea referinţei de la nivelul ierarhic superior sau comanda este calculată la nivelul superior şi este transmisă elementului de execuţie. În modul de funcţionare MANUAL regulatorul PID este în regim de rezervă sau este defect.

În timpul funcţionării regulatorului PID se pot acorda parametrii lui (fig. 5.8, a, b, c).

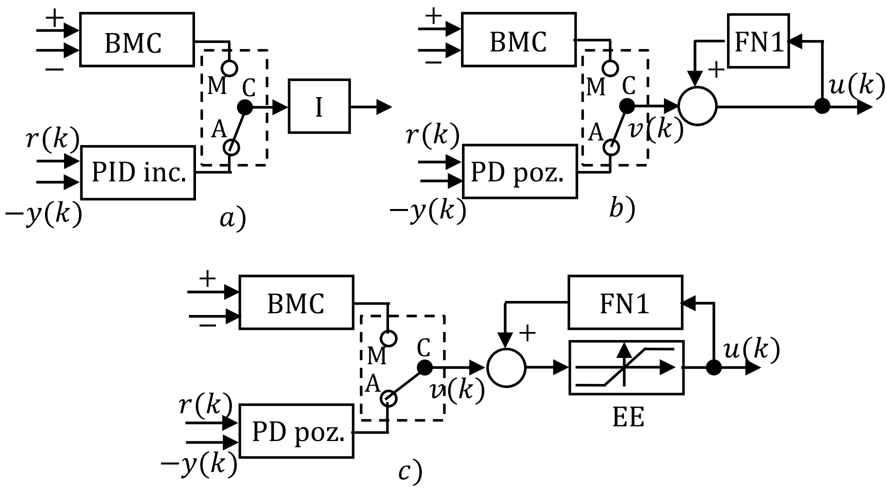

Fig. 5.8. Scheme de comutare manual (M)–automat (A)

Pentru evitarea şocurilor de trecere de pe MANUAL pe AUTOMAT şi invers, care pot afecta funcţionarea procesului, se includ funcţii de echilibrare a comenzii. În cazurile de comutare se verifică valoarea mărimii de ieşire a integratorului care trebuie să fie corectă.

Deoarece regulatorul este un sistem dinamic sunt necesare măsuri de echivalare a comenzii pentru a nu provoca șocuri, atunci când se schimbă modul de operare de pe *manual* (M) pe *automat* (A). La trecerea de pe manual M la automat A se verifică dacă valoarea de ieșire a integratorului este corectă în momentul comutării și transfer este fără șocuri (fig. 5.8, a, b, c).

Transferul fără șocuri este uşor de obţinut pentru regulatorul PID incremental. Integratorul este prevăzut cu un comutator C (fig. 5.8, a), care permite alegerea incrementului comenzii $\Delta u(k)$ de la blocul manual de elaborare a comenzii BMC sau de la regulatorul PID incremental. Deoarece comutatorul C manipulează numai incremente nu vor exista variații mari la schimbarea regimului de funcționare. Funcționarea integratorului se aproximează cu relația:

$$u(z) = \frac{T}{1-z^{-1}} \varepsilon(z)$$

sau în domeniul timpului discret:

$$u(k) = \frac{T}{1-q^{-1}} \varepsilon(k).$$

Pentru algoritmul PID de poziţie comutarea se va face după schema din fig. 5.8, b. Componenta integrală se implementează cu ajutorul unui filtru numeric FN1 de tip întârziere de ordinul unu cu funcția de transfer:

$$H_f(s) = \frac{1}{1+T_i s},$$

care este plasat într-o buclă cu reacţie pozitivă și funcția de transfer a canalului intrarea $v(k)$ −ieșirea $u(k)$ are forma:

$$H_1(s) = \frac{u(s)}{v(s)} = \frac{1}{1-H_f(s)} = \frac{1}{1-\frac{1}{1+T_i s}} = \frac{1+T_i s}{T_i s}, \qquad (5.78)$$

ceea ce evidențiază că ieșirea pe manual este incrementată. Constanta de timp T_i este constanta de timp a filtrului.

Pentru a realiza protecția antisaturație se recomandă schema din fig. 5.8, c în care pe cale directă s-a inclus o caracteristică statică de tip saturație a elementului de execuție EE.

Dacă se consideră algoritmul PID modificat:

$$u(k) = u(k-1) + k_p[-(y_f(k) - y_f(k-1)) + \frac{T}{T_i}\varepsilon(k) -$$

$$-\frac{T_d}{T}((y_f(k) - 2y_f(k-1) - y_f(k-2))]. \quad (5.79)$$

În acest caz structura care asigură transferul fără şocuri de pe manual M pe automat A, cât şi proprietatea antisaturaţie se dă în fig. 5.9.

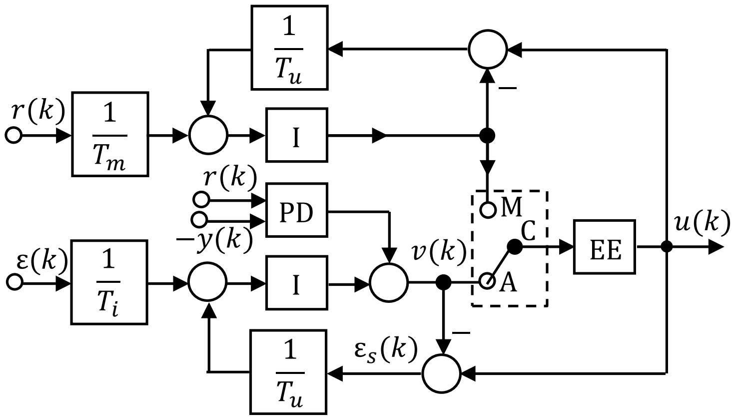

Fig. 5.9. Regulatorul PID cu comutare M–A și dispozitiv antisaturație

Constanta de timp T_m fixează viteza de variaţie a comenzii în regim manual şi se alege în funcţie de tipul elementului de execuţie. Pentru constanta de timp T_u se recomandă două variante de alegere:

$$T_u = T_i \quad (5.80)$$

sau în forma:

$T_u = (0.1 \cdots 0.5)T_i$ în funcție de tipul procesului.

Când mărimea de ieşire $u(t)$ a elementului de execuţie EE nu este posibil de măsurat, atunci aceasta poate fi modelat şi modelul generează un semnal echivalent utilizat pentru calculul erorii $\varepsilon_s(k) = u(k) - v(k)$.

Efectul saturației integrale poate fi redus, urmărind starea elementului de acționare, care intră în saturație și compensând semnalul aplicat la intrarea integratorului (fig. 5.10).

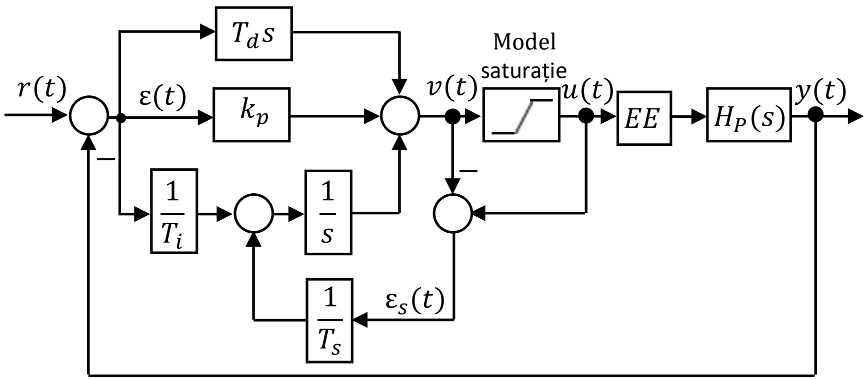

Fig. 5.10. Compensarea saturației copmonentei integrative

5.9 Autoacordarea regulatoarelor PID

5.9.1 *Preliminarii*

În reglarea numerică a proceselor se păstrează utilizarea algoritmului PID datorită bunei cunoașteri a acestora atât de către proiectanți cât şi de cei din exploatare.

Obţinerea unor performanţe satisfăcătoare necesită însă o reacordare în timp real a regulatorului PID. Printre cele mai larg utilizate procedee de acordare se numără şi cele bazate pe caracteristicile oscilaţiilor ce se instalează la limita de stabilitate. Efectuarea experimentelor presupune însă atingerea limitei de stabilitate, proces care poate dura uneori nepermis de mult sau poate determina funcţionarea instalaţiei într-un regim nefavorabil.

Din aceste motive s-au dezvoltat metode specifice și cele mai răspândite procedee de autoacordare se bazează pe răspunsul indicial şi pe caracteristicile oscilaţiilor obţinute într-o buclă de reglare cu releu.

5.9.2 *Metode bazate pe răspunsul indicial*

Pentru clasa de procese lente şi foarte lente cu timp mort, determinarea răspunsului indicial la semnal treaptă unitară şi caracterizarea acestuia prin parametrii coeficientul de transfer k, constanta de timp T_0 şi timpul mort τ (fig. 5.11, a) cu f.d.t. de forma:

$$H_p(s) = \frac{ke^{-\tau s}}{T_0 s+1}, \tag{5.81}$$

permit calculul parametrilor regulatorului conform datelor din tabelul 5.6, unde coeficientul $a = k\tau/T_0$.

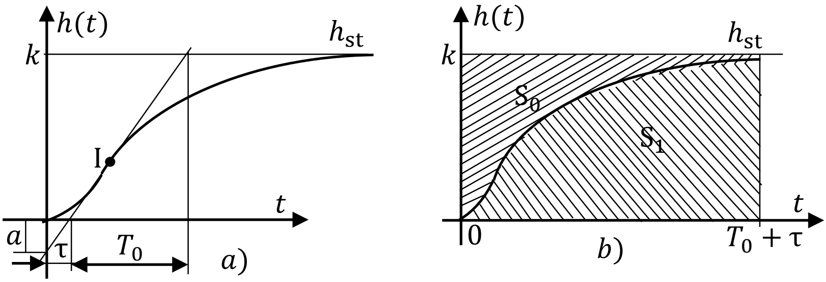

Fig. 5.11. Răspunsul experimental al procesului industrial a) şi ariile răspunsului b)

Tabelul 5.6. Acordarea pe baza răspunsului indicial

Tip regulator	Parametrii de acord		
	k_p	T_i	T_d
P	$1/a$	–	–
PI	$0.9/a$	3τ	–
PID	$1.2/a$	2τ	0.5τ

Această procedură este dificilă de automatizat pentru a obţine punctul de inflexiune I pe panta maximă a răspunsului sistemului şi deci determinarea parametrilor a, τ şi k.

Altă metodă de determinare a parametrilor procesului k, T_0 şi τ se bazează pe calculul unor arii S_0, S_1 (fig. 5.11, b). Procedura constă în ridicarea răspunsului procesului şi determinarea coeficientului de transfer k în regim staționar și ariei S_0 deasupra curbei şi cu ajutorul acestei arii ce găseşte suma $T_0 + \tau$ cu relaţia:

$$T_0 + \tau = \frac{S_0}{k}. \tag{5.82}$$

Se determină aria S_1 sub răspunsul procesului până la momentul de timp $T_0 + \tau$ şi se calculează valoarea constantei de timp după relaţia:

$$T_0 = \frac{eS_1}{k}, \tag{5.83}$$

unde e este baza logaritmului natural.

Cunoscând suma S și comstanta de timp T_0 a procesului, se determină timpul mort:

$$S = T_0 + \tau, \tau = S - T_0.$$

5.9.3 *Metode bazate pe caracteristicile oscilaţiilor la limita de stabilitate*

Procedeul de autoacordare bazat pe răspunsul la semnal treaptă este sensibil la perturbaţii fiindcă necesită experimente în sistemul deschis. Depășirea acestui impediment se realizează prin utilizarea metodei cu releu, bazată pe caracteristicile oscilaţiilor la limita de stabilitate ale sistemului închis.

În sistemul închis cu procesul studiat şi cu un releu pot să se instaleze oscilaţii întreţinute, care prezintă un sistem neliniar cu ciclu-limită (fig. 5.12).

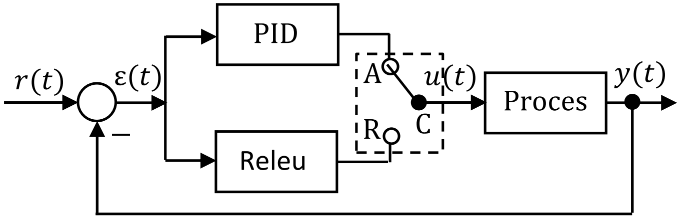

Fig. 5.12. Structura sistemului de autoacordare cu releu

Parametrii ciclului-limită oferă informaţii despre dinamica procesului şi acestea pot fi utilizate pentru acordarea parametrilor regulatoarelor de tipul PID.

Pentru acordarea regulatorului PID comutatorul C se trece pe poziţia R – acordare şi astfel se introduce în bucla de reglare un releu bipoziţional, care înlocuieşte regulatorul PID, şi în sistem se instalează oscilaţii stabile cu parametrilor cririci k_{cr}, T_p și pe baza acestora se acordează parametrii regulatorului PID şi se introduce în bucla de reglare.

Pentru determinarea parametrilor oscilaţiilor sistemul neliniar format din partea liniară – modelul procesului cu f.d.t. $H_P(s)$ şi neliniaritatea este releul bipoziţional se aplică metoda funcţiei de descriere.

Se consideră un ciclu cu perioada T_p şi pulsaţia $\omega_0 = 2\pi/T_p$ astfel încât ieşirea $u(t)$ releului este o formă de undă dreptunghiulară simetrică şi periodică, descrisă de relaţia:

$$u(t) = \begin{cases} c \text{ pentru } \varepsilon > 0, \\ -c \text{ pentru } \varepsilon < 0, \end{cases} \tag{5.84}$$

unde c este amplitudinea releului.

Funcţia $u(t)$ este o funcţie periodică şi poate fi descompusă în serie Fourier de forma:

$$u(t) = \frac{4c}{\pi}\left(\cos\omega_0 t - \frac{1}{3}\cos 3\omega_0 t + \frac{1}{5}\cos 5\omega_0 t - \cdots\right), \tag{5.85}$$

care pune în evidență amplitudinea fundamentală egală cu $4b/\pi$. Partea liniară se consideră ca un filtru trece-jos şi la ieşirea acesteia va fi numai prima armonică. Astfel, amplitudinea erorii a_ε poate fi exprimată din (5.85) prin relaţia locului de transfer în forma:

$$a_\varepsilon = \frac{4c}{\pi}|H_P(j\omega_0)|. \tag{5.86}$$

Pentru ca să existe oscilaţiile de pulsaţie ω_0 este necesar ca locul de transfer al părţii liniare $H_P(j\omega_0)$ să intersecteze semiaxa reală negativă ce reprezintă locul de transfer al releului ideal (fig. 5.13).

Condiţia de intersecţie a celor două locuri de transfer se exprimă:

$$\arg H_P(j\omega_0) = -\pi, \tag{5.87}$$

$$k_{cr} = \frac{1}{|H_P(j\omega_0)|} = \frac{4c}{\pi a_\varepsilon}, \tag{5.88}$$

unde k_{cr} este factorul de amplificare echivalent al releului pentru transmisia semnalului sinusoidal cu amplitudinea a_ε.

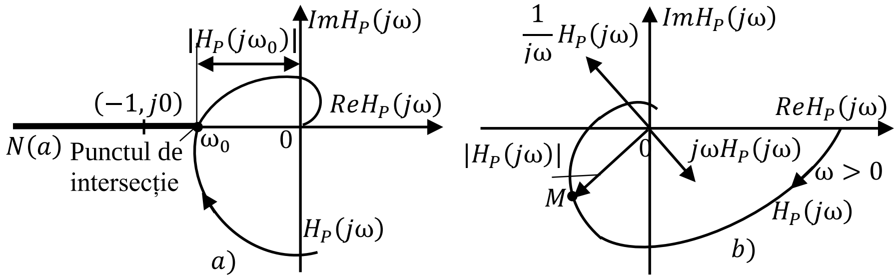

Fig. 5.13. Locurile de transfer ale părţii fixate $H_P(j\omega)$ şi a releului $N(a)$ $a)$ și modificarea lui $|H_P(j\omega)|$ cu componentele I și D ale regulatorului PID $b)$

Astfel, un experiment cu releu în sistemul închis permite măsurarea amplitudinii oscilaţiilor a_ε, a perioadei acestora T_p şi utilizând expresia (5.88) se calculează valoarea lui k_{cr} la amplitudinea c cunoscută a releului. Mărimea k_{cr} este coeficientul critic al sistemului la limita de stabilitate cu reglare proporţională.

În metoda Ziegler-Nichols regimul critic se instalează aplicând regulatorul proporţional, iar în metoda utilizării releului modelul părţii liniare trebuie să posede un defazaj în modul cel puţin π în zona frecvenţilor înalte.

Dacă mărimile k_{cr} şi T_p au fost determinate, atunci pot fi folosite diferite metode de acordare a parametrilor regulatoarelor.

5.9.4 *Acordarea cu metoda Ziegler-Nichols*

Acordarea regulatorului de tipul PID pe baza parametrilor k_{cr} şi

T_p prin metoda Ziegler-Nichols se obţin relaţiile prezentate în tabelul 5.7.

Tabelul 5.7. Acordarea pe baza regimului critic

Tip regulator	Parametrii de acord		
	k_p	T_i	T_d
P	$0.5k_{\mathrm{cr}}$	–	–
PI	$0.45k_{\mathrm{cr}}$	$0.8T_p$	–
PID	$0.6k_{\mathrm{cr}}$	$0.5T_p$	$0.125T_p$

În urma acordării regulatorului PID în sistemul automat rezultă amortizări slabe, iar pentru îmbunătățirea performanţelor se recomandă modificarea euristică a parametrilor k_p, T_i şi T_d ai regulatorului PID.

5.9.5 *Acordarea cu metoda rezervei de stabilitate*

Metoda rezervei de stabilitate, pe lângă parametrii critici k_{cr} şi T_p, utilizează şi performanţele corelate cu rezerva de stabilitate în amplitudine A_m şi fază φ_m [16].

1. *Acordarea cu metoda rezervei de stabilitate în amplitudine* A_m.

Această metodă poate fi realizată cu un regulator proporțional cu parametrul de acord calculat cu relaţia:

$$k_p = \frac{k_{cr}}{\mathrm{A}_m}. \tag{5.89}$$

Pentru a rezolva problema reglării se utilizează regulatorul PI sau PID. Parametrii de acord ai algoritmului PID pot fi acordaţi utilizând expresia locului de transfer:

$$H_R(j\omega) = k_p\left(1 + \frac{1}{j\omega T_i} + j\omega T_d\right) =$$

$$= k_p\left(1 + \frac{1}{j\omega T_i}(1 - \omega^2 T_i T_d)\right). \tag{5.90}$$

Rezerva de stabilitate în amplitudine se obţine, dacă parametrul de acord va avea valoarea din (5.89) şi impunând condiţia în (5.90):

$$1 - \omega^2 T_i T_d = 0, \tag{5.91}$$

de unde se calculează parametrul de acord al componentei integrale:

$$T_i = \frac{1}{\omega^2 T_d}. \tag{5.92}$$

Timpul de derivare se alege euristic sau se impune un raport a parametrilor $T_d = \alpha T_i$ care din practică automatizărilor se recomandă $\alpha \leq 0.5$ (la acordarea optimă a parametrilor regulatorului PID valoarea optimă a lui $\alpha > 0.25$, dar care se limitează la valoarea $\alpha = 0.25$):

$$T_d = \alpha T_i = \frac{1}{4} T_i = 0.25 T_i, \tag{5.93}$$

iar timpul de integrare din (5.92) cu (5.93) se calculează cu relaţia:

$$T_i^{\,2} = \frac{1}{\alpha\omega^2} = \frac{4}{\omega^2} \text{ sau } T_i = \frac{2}{\omega}. \tag{5.94}$$

2. *Acordarea cu metoda rezervei de stabilitate în fază* φ_m. Se construieşte locul de transfer $H_P(j\omega)$ al părţii fixate care se dă în fig. 5.13, *b*. Se consideră punctul A pe curbă, care poate fi deplasat în planul complex prin intermediul unor algoritmi de reglare PI, PD şi PID prin modificarea parametrilor de acord. Punctul M poate fi mișcat în direcţia lui $H_P(j\omega)$ prin modificarea parametrului k_p al algoritmului P şi pe direcţii ortogonale prin modificarea componentelor I şi D. Procedura de acordare constă în modificarea locului de transfer $H_P(j\omega)$ cu modificarea componentelor P, I şi D până se obţine rezerva de stabilitate în fază.

Se construieşte locul de transfer al sistemului deschis $H_d(j\omega)$ (fig. 5.13, *b*) modificând frecvenţa $\omega = 0 \cdots \infty$ după expresia:

$$H_d(j\omega) = H_R(j\omega) H_P(j\omega) = k_p \left(1 + \frac{1}{j\omega T_i} + j\omega T_d\right) H_P(j\omega) =$$

$$= k_p \left(1 + j(\omega T_d - \frac{1}{\omega T_i})\right) H_P(j\omega). \tag{5.95}$$

Se determină intersecţia lui $H_d(j\omega)$ cu semiaxa reală negativă pentru pulsaţia $\omega = \omega_0$ şi impunând o rezervă de stabilitate în fază, atunci argumentul lui $H_d(j\omega_0)$ va fi:

$$\arg H_d(j\omega_0) = -\pi + \varphi_m. \tag{5.96}$$

În aceste condiţii rezultă că rezerva de stabilitate se determină din (5.95) cu relaţia din paranteza din interior:

$$\omega_0 T_d - \frac{1}{\omega_0 T_i} = \mathrm{tg}\varphi_m. \tag{5.97}$$

Cunoscând rezerva de fază φ_m, relaţia (5.97) cu (5.76) se transformă în ecuaţie algebrică de ordinul doi cu necunoscuta parametrului T_i şi valoarea acesteia se exprimă:

$$\omega_0 \alpha T_i - \frac{1}{\omega_0 T_i} = \mathrm{tg}\varphi_m,\ \omega_0^2 \alpha T_i^2 - \mathrm{tg}\varphi_m \omega_0 T_i - 1 = 0,$$

$$T_i = \frac{\mathrm{tg}\varphi_m \omega_0 + \sqrt{\mathrm{tg}^2\varphi_m \omega_0^2 + 4\omega_0^2\alpha}}{2\omega_0^2\alpha} = \frac{\mathrm{tg}\varphi_m + \sqrt{\mathrm{tg}^2\varphi_m + 4\alpha}}{2\omega_0\alpha}. \tag{5.98}$$

În continuare, se determină valoarea parametrului $T_d = \alpha T_i$.

Parametrul se determină din condiţia:

$$|H_d(j\omega_0)| = \left|k_p\left(1 + j(\omega_0 T_d - \frac{1}{\omega_0 T_i})\right) H_P(j\omega_0)\right| =$$

$$= \left|k_p(1 + j\mathrm{tg}\varphi_m) H_P(j\omega_0)\right| = 1, \tag{5.99}$$

de unde rezultă:

$$k_p = \frac{\cos\varphi_m}{|H_p(j\omega_0)|} = k_{cr}\cos\varphi_m. \tag{5.100}$$

Cunoscând parametrii regimului critic k_{cr}, ω_0 ai sistemului, impunând valoarea rezervei de stabilitate în fază φ_m și alegând valoarea lui α, se calculează parametrii k_p, T_i, T_d de acord ai algoritmului PID.

Chestionar și probleme

1. De ce este necesar de filtrat semnalele în sistemul automat?
2. Explicați noțiunea de semnal zgomot în sistemul automat.
3. Ce proprietăți dinamice are elementul de filtrare și cu ce tipuri de elemente se descrie?
4. Scrieți funcția de transfer a unui filtru de semnal continuu.
5. Cum se poate obține forma discretă a filtrului numeric?
6. Scrieți f.d.t. a algoritmului de avans-întârziere continuu și explicați proprietățile acestuia.
7. Care sunt avantajele algoritmului bipozițional și tripozițional?
8. Explicați modul de funcționare al algoritmului bipozițional și tripozițional?
9. Scrieți f.d.t. a algoritmului PID continuu, numiți parametrii lui și explicați sensul fizic al acestora.
10. Explicați cum se obține algoritmul PID numeric pozițional și incremental?
11. Numiți parametrii algoritmului PID numeric incremental și explicați cum se calculează aceștea.
12. Pentru algoritmul PID numeric explicați sensul fizic al parametrilor.
13. Cum se alege perioada de eșantionare pentru calculul parametrilor algoritmului PID numeric?
14. Scrieți f.d.t. a algoritmului PID numeric modificat și explicați modul de funcționare.
15. Explicați noțiunea de optimizare a parametrilor algoritmului PID numeric.
16. Cum se alege perioada de eșantionare optimă?
17. Ce funcții suplimentare se includ în regulatorul PID numeric?
18. Cum poate fi limitată intrarea în saturație a elementului de execuție?
19. Care este necesitatea autoacordării regulatorului PID?
20. Cum poate fi realizată autoacordarea regulatorului PID?
21. Care este procedura de autoacordare a parametreilor regulatorului PID prin utilizarea metodei Ziegler-Nchols?

6 PROIECTAREA SISTEMULUI NUMERIC DUPĂ METODA INTRARE-IEȘIRE

6.1 Preliminarii

Algoritmii derivaţi din legile de reglare continuă se obţin prin discretizarea algoritmilor continui. În cazul algoritmilor netipizaţi proiectarea pe baza modelelor intrare–ieşire porneşte de la performanţele impuse sistemului numeric şi de la modelul procesului cu extrapolatorul şi are ca obiectiv obţinerea unui regulator numeric şi a ecuaţiei recursive pentru mărimea de conducere $u(k)$.

Există metodologii de proiectare corelate cu cazul continuu şi tehnici fără corelare cu cazul continuu. În prima categorie întră metodele de proiectare prin metode de alocare a polilor şi zerourilor în planul complex z. În a doua categorie metodele de proiectare directă în domeniul timp, bazate pe impunerea unui răspuns dorit, care conduce la un model al sistemului numeric de reglare automată închis [1, 4, 5, 16].

6.2 Proiectarea sistemelor numerice monovariabile prin metoda alocării poli-zerouri

Se admite structura sistemului automat alcătuită din regulator cu f.d.t. discretă $H_R(z)$ şi partea fixată cu elementul de reţinere de ordin zero cu f.d.t. discretă $H_P(z)$ dată în fig. 6.1.

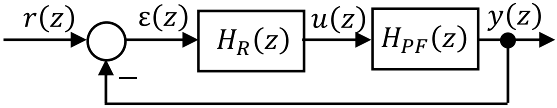

Fig. 6.1. Structura sistemului numeric

Modelul matematic a părții fixate se prezintă cu f.d.t. discretă de ordinul $n = n_A$ de forma:

$$H_P(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = z^{-d}\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = z^{-d}\frac{b_1 z^{-1} + \dots + b_{n_B} z^{-n_B}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{n_A} z^{-n_A}}, \qquad (6.1)$$

unde z^{-d} este componenta timpului mort din proces.

Modelul matematic al algoritmului netipizat se descrie cu f.d.t. discretă:

$$H_R(z) = \frac{u(z)}{\varepsilon(z)} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \frac{q_0+q_1z^{-1}+\cdots+q_{n_Q}z^{-n_Q}}{1+p_1z^{-1}+\cdots+p_{n_P}z^{-n_P}}. \tag{6.2}$$

Pornind de la modelul părții fixate (6.1) și performanțele impuse sistemului, metoda de alocare permite construirea f.d.t. discretă a regulatorului $H_R(z)$. Pe baza performanţelor impuse se determină polii f.d.t. discretă a sistemului automat închis şi se calculează polinomul caracteristic dorit. Proprietăţile sistemului închis se specifică în mod direct prin impunerea unui răspuns dorit la semnal de referinţă treaptă unitară discretă:

$$r(t) = 1(t) = 1(kT) = 1(k) \tag{6.3}$$

dat de polinomul caracteristic în variabila s de forma:

$$P_{d2}(s) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 \tag{6.4}$$

sau în formă discretă:

$$P_{d2}(z) = z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2 \tag{6.5}$$

cu coeficienții:

$$\alpha_1 = -2e^{-\xi\omega_n T}\cos(\omega_n T\sqrt{1-\xi^2}),\ \alpha_2 = e^{-2\xi\omega_n T}. \tag{6.6}$$

Pentru sistemul numeric fără suprareglare, dinamica dominantă poate fi determinată de un element de ordinul unu cu f.d.t. discretă de forma:

$$P_{d1}(z) = z - \alpha \text{ cu } \alpha = e^{-T/T_0}, \tag{6.7}$$

unde T_0 este constanta de timp dorită a sistemului proiectat.

De asemenea elementul de ordinul unu se poate utiliza împreună cu cel de ordinul doi, atunci când nu este îndeplinită condiţia de realizabilitate fizică.

Deci, în cazul cel mai general, polinomul caracteristic este:

$$P_c(z) = P_{d2}(z)\prod_{i=3}^{m} P_{di}(z) = (z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2)\prod_{i=3}^{m}(z - \alpha_i) =$$

$$= 1 + \beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \cdots + \beta_r z^{-r}. \qquad (6.8)$$

Pentru a determina parametrii regulatorului $H_R(z)$ (6.2) se calculează polinomul caracteristic al sistemului numeric cu structura din fig. 6.1 şi se identifică coeficienţii cu cei ai polinomului (6.8).

Astfel, se calculează f.d.t. $H_0(z)$ discretă a sistemului automat închis care are forma:

$$H_0(z) = \frac{y(z)}{r(z)} = \frac{H_R(z)H_P(z)}{1+H_R(z)H_P(z)} = \frac{\frac{Q(z)}{P(z}z^{-d}\frac{B(z)}{A(z)}}{1+\frac{Q(z)}{P(z}z^{-d}\frac{B(z)}{A(z)}} =$$

$$= \frac{Q(z^{-1})B(z^{-1})z^{-d}}{P(z^{-1})A(z^{-1})+Q(z^{-1})B(z^{-1})z^{-d}} = \frac{Q(z^{-1})}{P_{c0}(z^{-1})}. \qquad (6.9)$$

Polinomul caracteristic din (6.9) are forma:

$$P_{c0}(z^{-1}) = P(z^{-1})A(z^{-1}) + Q(z^{-1})B(z^{-1})z^{-d} =$$
$$=(1 + p_1 z^{-1} + \cdots + p_{n_P} z^{-n_P})(1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_{n_A} z^{-n_A}) +$$
$$+(q_0 + q_1 z^{-1} + \cdots + q_{n_Q} z^{-n_Q})(b_1 z^{-1} + \cdots + b_{n_B} z^{-n_B})\, z^{-d}, \qquad (6.10)$$

care are gradul:

$$n_c = n_Q = \max(n_P + n, n_Q + n + d). \qquad (6.11)$$

Pentru eliminarea erorii de poziție $\varepsilon = 0$ se impune condiția ca f.d.t. $H_0(z) = 1$ și din (6.9) rezultă condiția $P(1)A(1) = 0$, care este, în general, satisfăcută pentru suma coeficienților din (6.2):

$$\sum_{i=1}^{n_P} p_i = -1. \qquad (6.12)$$

Deoarece sunt $n_c + 1$ ecuații, atunci pentru obținerea unei soluții unice pentru cei $n_P + n_Q + 1$ parametri ai regulatorului se impune egalitatea:

$$n_c + 1 = n_P + n_Q + 1. \tag{6.13}$$

Din condiţia (6.11) rezultă următoarele două cazuri de determinare a gradelor polinomului caracteristic:

$$n_P \geq n_Q + d, => n_c = n_P + n,$$

$$n_Q = n, => n_P \geq n + d, \tag{6.14}$$

$$n_P \leq n_Q + d, => n_c = n_Q + n + d,$$

$$n_P = n + d, => n_Q > d. \tag{6.15}$$

Alegând cele mai mici grade pentru polinoamele regulatorului

$$n_Q = n \text{ și } n_P = n + d. \tag{6.16}$$

Pornind de la condiția îndeplinită în relația (6.16), rezultă că determinarea parametrilor de acord implică rezolvarea ecuației diofantice (6.10) de gradul $2n + d$:

$$P_{c0}(z^{-1}) = P(z^{-1})A(z^{-1}) + Q(z^{-1})B(z^{-1})z^{-d}. \tag{6.17}$$

Polinomul (6.17) împreună cu condiția (6.12), poate fi pusă sub forma matricială:

$$Q_R = R^{-1}\beta. \tag{6.18}$$

Datorită condiției (6.16) zerourile procesului vor apare în f.d.t. a sistemului $H_0(z)$ influenţând performanţele impuse prin alocare.

Pentru a elimina acest dezavantaj atunci când procesul are zerouri se recomandă alocarea polilor și zerourilor f.d.t. $H_0(z)$, care pornește de la alocarea poli–zerouri pentru in sistem de ordinul doi de forma:

$$H_0(z) = \frac{k_0(z-z_1)}{(z-p_1)(z-p_2)}. \tag{6.19}$$

Impunând condiția de anulare a erorii de poziție $\varepsilon = 0$, se impune condiția ca f.d.t. $H_0(z) = 1$ şi din (6.19) rezultă:

$$k_0 = \frac{(1-p_1)(1-p_2)}{1-z_1}, \tag{6.20}$$

iar pe baza unor criterii locale t_r, σ de performanță impuse se determină poziția zeroului z_1 şi a polilor p_1, p_2 în planul complex al rădăcinilor.

Dacă performanțele sistemului sunt satisfăcute, atunci se verifică și condiția de realizabilitate prin excesul de poli – zerouri ai f.d.t. a sistemului închis și a procesului:

$$(p-z)_{H_0} \geq (p-z)_{H_p}. \tag{6.21}$$

În cazul când condiția din (6.19) nu satisface relația (6.21), atunci se adaugă poli suplimentari în așa mod plasați în planul z, astfel încât să nu influențeze performanţele determinate de polii dominanți p_1, p_2.

Dacă s-a determinat f.d.t. discretă $H_0(z)$, atunci se calculează f.d.t. discretă a sistemului deschis cu relația:

$$H_d(z) = \frac{H_0(z)}{1-H_0(z)} = H_R(z)H_P(z), \tag{6.22}$$

din care se definește f.d.t. discretă a algoritmului de reglare:

$$H_R(z) = \frac{1}{H_P(z)}H_d(z) = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})}. \tag{6.23}$$

Procedura de proiectare a algoritmilor de reglare numerică pe baza alocării poli–zerouri a f.d.t. discretă $H_0(z)$ a sistemului presupune efectuarea următoarelor etape.

1. Se construiește f.d.t. $H_0(z)$ de forma (6.19) pe baza unor criterii locale de performanță (t_r, σ) şi se testează asigurarea acestora. Dacă nu sunt satisfăcute unele criterii, atunci se introduc poli şi zerouri suplimentari până când sunt satisfăcute toate performanțele reglării.

2. Se verifică condiția de realizabilitate fizică (6.21). Dacă nu este îndeplinită, atunci se reia procesul introducerii unor poli - zerouri verificându-se atât performanțele sistemului cât şi realizabilitatea algoritmului proiectat.

3. Se calculează f.d.t. discretă $H_R(z)$ a algoritmului de reglare cu relațiile (6.22) și (6.23).

Exemplul 6.1. Se dă structura sistemului de reglare numerică a temperaturii în cuptorul termic (fig. 6.2). Elementele funcționale ale sistemului sunt: traductorul Tr de temperatură – termocuplu, adaptorul Ad, regulatorul numeric RN cu convertoarele analog numeric CAN și numeric analog CNA și elementul de execuție EE. Încălzirea se efectuează cu energie electrică alimentând elementul de încălzire EÎ [16].

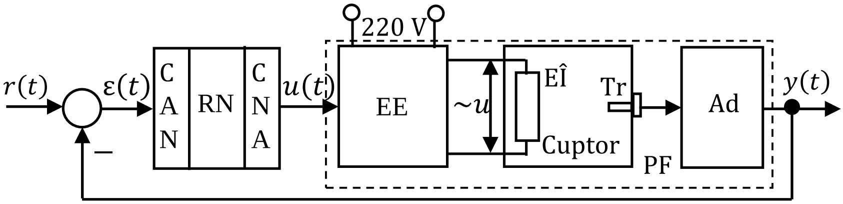

Fig. 6.2. Structura sistemului de reglare numerică a temperaturii în cuptor industrial

Date inițiale: Este cunoscută f.d.t. continuă a ansamblului de elemente ca partea fixată PF cu intrarea $u(t)$ și ieșirea adaptorului $y(t)$:

$$H_P(s) = \frac{ke^{-\tau s}}{T_1 s+1} = e^{-10s}\frac{2}{50s+1} = \frac{y(s)}{u(s)}.$$

Se cere: 1. Să se determine modelul discret al părții fixate alegând perioada T de eșantionare în funcție de dinamica procesului.

2. Să se proiecteze un algoritm numeric care să asigure performanțele timpul de reglare $t_r \leq 10$ s şi suprareglarea $\sigma \leq 4.3$ %.

Rezolvare: 1.1. Se determină raportul $\frac{\tau}{T_1} = \frac{10}{50} = 0.2$ şi perioada T de eșantionare se alege din condiția:

$$T = (1.2 \cdots 0.35)\tau = 0.5 \cdot 10 = 5 \text{ s}.$$

1.2. Pentru modelul obiectului fără timp mort se determină ecuația diferențială:

$$H_{P1}(s) = \frac{2}{50s+1} = \frac{y(s)}{u(s)},$$

$$50\dot{y}(t) + y(t) = 2u(t).$$

1.3. Se calculează modelul discret al părții fixate fără timp mort, aplicând metoda dreptunghiului în avans la ecuația difernțială și se obține:

$\frac{50}{5}[y(k+1)-y(k)]+y(k)=2u(k),$

$y(k+1)-y(k)+0.1y(k)=0.2u(k),$

$y(k+1)-0.9y(k)=0.2u(k).$

Funcția de transfer discretă este:

$$H(z^{-1})=\frac{b_1z^{-1}}{1-a_1z^{-1}}=\frac{0.2z^{-1}}{1-0.9z^{-1}},$$

unde $b_0=0$, $b_1=0.2$, $a_0=1$, $a_1=-0.9$.

1.4. Se determină transformata z a componentei timpului mort:

$$d=\frac{\tau}{T}=\frac{10}{5}=2,\ z^{-d}=z^{-2}.$$

1.5. Modelul discret al părții fixate cu timp mort va fi:

$$H(z^{-1})=z^{-2}\frac{0.2z^{-1}}{1-0.9z^{-1}}=\frac{0.2z^{-3}}{1-0.9z^{-1}}.$$

2.1. Se construiește polinomul caracteristic dorit pentru performanțele impuse: $\sigma\leq 4.3$ %, $\xi=0.7071$, $t_r\leq 10$ s.

Pentru $t_r\leq 10$ s, se utilizează relația [4, 5]:

$$\frac{4}{\xi\omega_n}\leq 10,\ \omega_n\geq\frac{4}{t_r\xi}=\frac{4}{10\cdot 0.7071}=0.5657\ \text{s}^{-1}.$$

Se calculează polinomul dorit de ordinul doi:

$$P_{d2}(z)=z^2+\alpha_1z+\alpha_2,$$

unde coeficienții se calculează cu relațiile:

$$\alpha_1=-2e^{-\xi\omega_nT}\cos(\omega_nT\sqrt{1-\xi^2})=$$

$$=-2e^{-0.7071\cdot 0.5657\cdot 5}\cos(0.5657\cdot 5\sqrt{1-0.7071^2})=-0.27,$$

$$\alpha_2=e^{-2\xi\omega_nT}=e^{-2\cdot 0.707\cdot 0.5657\cdot 5}=0.0183.$$

2.2. Deoarece gradul polinomului caracteristic trebuie să fie $n_c=2n+d=$ $=2\cdot 1+2=4$ rezultă necesitatea de a mai introduce doi poli suplimentari situați în planul s la distanțe mai mari decât ale polilor dominanți.

Se aleg polii suplimentari $p_3=0.8$ şi $p_4=0.9$ şi polinomul caracteristic dorit are forma:

$$P_c(z) = P_{d2}(z)(z - \alpha_3)(z - \alpha_4),$$

cu $\alpha_3 = e^{-p_3 T} = e^{-0.8\cdot 5} = 0.0183,\ \alpha_4 = e^{-p_4 T} = e^{-0.9\cdot 5} = 0.0111,$

$$P_c(z) = P_{d2}(z)(z - \alpha_3)(z - \alpha_4) =$$

$$= (z^2 - 0.27z + 0.02)(z - 0.018)(z - 0.01) =$$

$$= (z^2 - 0.27z + 0.02)(z^2 - 0.028z + 0.00018) =$$

$$= z^4 - 0.298z^3 + 0.02774z^2 - 0.0006z + 0.0000036.$$

Rezultă polinomul caracteristic dorit:

$$P_c(z^{-1}) = 1 - 0.298z^{-1} + 0.02774z^{-2} - 0.0006z^{-3} + 0.0000036z^{-4},$$

iar coeficienții sunt: $\beta_1 = -0.298$, $\beta_2 = 0.02774$, $\beta_3 = -0.0006$, $\beta_4 = 0.0000036$.
Deoarece $n = 1$ şi $d = 2$ se va alege un regulator cu gradul:

$n_Q = n = 1$ şi $n_P = n + d = 1 + 2 = 3$ de forma:

$$H_R(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1}}{1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + p_3 z^{-3}}.$$

Se egaliează polinoamele:

$$1 + \beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \beta_3 z^{-3} + \beta_4 z^{-4} =$$

$$= (1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + p_3 z^{-3})(1 - a_1 z^{-1}) + b_1 z^{-1}(q_0 - q_1 z^{-1})z^{-2},$$

$$1 + \beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \beta_3 z^{-3} + \beta_4 z^{-4} =$$

$$= 1 + (p_1 + a_1)z^{-1} + (a_1 p_1 + p_2)z^{-2} + (a_1 p_2 + p_3 + b_1 q_0)z^{-3} +$$

$$+(a_1 p_3 + b_1 q_1)z^{-4}.$$

Prin compararea coeficienților rezultă sistemul de ecuații algebrice. Pentru determinarea valorilor numerice ale parametrilor regulatorului numeric se identifică coeficienții polinomului rădăcinilor P_d şi polinomul P_{d0} şi se obţine sistemul de 4 ecuații algebrice:

$z^0: 1 = 1,$
$z^{-1}:\ a_1 + p_1 = \beta_1,$
$z^{-2}:\ a_1 p_1 + p_2 = \beta_2,$
$z^{-3}:\ a_1 p_2 + p_3 + b_1 q_0 = \beta_3,$
$z^{-4}:\ a_1 p_3 + b_1 q_1 = \beta_4,$

la care se adaugă condiția de anulare a erorii $\varepsilon = 0$:

$$-1 = p_1 + p_2 + p_3.$$

Cele cinci ecuații se pun sub formă matricială, care se rezolvă utilizând forma matriceală:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 1 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 & b_1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{R}} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ q_0 \\ q_1 \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{q_R}} = \overbrace{\begin{bmatrix} \beta_1 - a_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ 1 \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{\beta}}$$

sau în forma:

$$\boldsymbol{q_R} = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{\beta}.$$

Se calculează parametrii regulatorului:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.9 & 1 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & -0.9 & 0 & 0.2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{R}} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ q_0 \\ q_1 \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{q_R}} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0.602 \\ 0.02774 \\ -0.0006 \\ 0.0000036 \\ -1 \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{\beta}}.$$

Se obține soluția:

$$\boldsymbol{q_R} = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{\beta} = [p_1\ \ p_2\ p_3\ \ q_0\ \ q_1\ ] = [0.602\ \ 0.5695\ -2.1715\ \ 13.4172\ -9.7717\ ]$$

cu parametrii regulatorului:

$$p_1 = 0.602,\ p_2 = 0.5695,\ p_3 = -2.1715,\ q_0 = 13.4172,\ q_1 = -9.7717.$$

Funcția de transfer a regulatorului sintetizat are forma:

$$H_R(z^{-1}) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1}}{1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + p_3 z^{-3}} = \frac{13.4172 - 9.7717 z^{-1}}{1 + 0.602 z^{-1} + 0.5695 z^{-2} - 2.1715 z^{-3}}.$$

S-a simulat sistemul numeric cu regulatorul cu parametrii sintetizați și sistemul este instabil.■

6.3 Proiectarea sistemului automat după metoda polinomială

Se consideră funcția de transfer $H_{PF}(s) = H_P(s)$ a parttii fixate continue care se transformă în funcția de transfer în transformata z în formă factorizată [13, 14]:

$$H_P(z) = Z\{H_P(s)\} = Z\left\{\frac{B(s)}{A(s)}\right\} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{B_i(z)B_e(z)}{A_i(z)A_e(z)}. \tag{6.24}$$

unde $B_i(z)$ și $A_i(z)$ sunt polinoamele care conțin zerourile în interiorul cercului unitate, iar $B_e(z)$ și $A_e(z)$ – conțin zerourile situate pe cerc și în afara cercului unitate.

Dacă polinoamele nu conțin zerouri pe cerc și în afara cercului unitar, atunci polinoamele $B_e(z) = 1$ și $A_e(z) = 1$ și dacă polinoamele $B_i(z)$ și $A_i(z)$ nu conțin zerouri în interiorul cercului unitate, atunci polinoamele $B_i(z)$ și $A_i(z)$ sunt egale cu termenii constanți ale acestor polinoame. Se notează gradele polinoamelor respective: n_{B_i}, n_{B_e}, n_{A_i}, n_{A_e}, $n_A = n$.

După performanțe impuse sistemului și modelul părții fixate cunoscute se construiește funcția de transfer $H_0(z)$ dorită a sistemului numeric închis:

$$H_0(z) = \frac{H_R(z)H_P(z)}{1+H_R(z)H_P(z)}. \tag{6.25}$$

În baza cerințelor de performanță impuse sistemului sintetizat se construieşte polinomul $G(z)$ dorit (ecuația caracteristică) de forma:

$$B_e(z)M(z) + A_e(z)N(z)(z-1)^r = G(z), \tag{6.26}$$

unde polinoamele $M(z)$ și $N(z)$ sunt necunoscute, iar termenul $(z-1)^r -$ gradul de astatism al sistemului care asigură eroarea staționară $\varepsilon = 0$.

Se notează gradele polinoamelor $G(s)$, $M(s)$ și $N(s)$ n_G, n_M, n_N.

Fiind cunoscute funcțiile de transfer $H_P(z)$ ale părții fixate și a sistemului numeric închis $H_0(z)$ din (6.25) și (2.26), se obține funcția de transfer a algoritmului numeric de reglare în forma:

$$H_R(z) = \frac{H_0(z)}{1-H_0(z)}\frac{1}{H_P(z)} = \frac{A_i(z)M(z)}{B_i(z)N(z)(z-1)^r} = \frac{Q(z)}{P(z)}, \tag{6.27}$$

unde $Q(z)$ și $P(z)$ sunt polinoamele regulatorului.

În cazurile când modelul obiectului conține astatism, atunci în f.d.t. (6.27) a regulatorului gradul de astatism $r = 0$.

Sistemul sintetizat va fi robust (grosier) dacă funcția de transfer a regulatorului (6.27) nu va conține polinoamele $B_e(z)$ și $A_e(z)$ cu zerourile în afara cercului unitar.

La sinteza algoritmului numeric de reglare este necesar ca acesta să fie fizic realizabil și sistemul numeric să fie robust. Condiția de realizabilitate fizică a regulatorului se formulează astfel:

Funcția pondere a regulatorului este nulă la valorile negative ale argumentului (timpului) sau gradul numărătorului m_Q a regulatorului să fie mai mic ca gradul numitorului n_P a regulatorului $m_Q < n_P$.

Se analizează condiţiile necesare pentru determinarea gradelor polinoamelor necunoscute $M(z)$ și $N(z)$ pentru ca regulatorul să fie fizic realizabil și ecuaţia polinomială să aibă soluţie.

Condițiile de realizabilitate fizică a regulatorului din sistemul (6.27) se exprimă cu inegalitatea:

$$n_{A_i} + n_M \leq n_{B_i} + n_N + r. \tag{6.28}$$

Condițiile de soluționare a ecuației polinomiale (6.26) se rezumă: dacă numărul coeficienților polinoamelor necunoscute $M(z)$ și $N(z)$ nu este mai mic decât numărul ecuațiilor algebrice, care se obțin prin egalarea coeficienților de pe lângă aceleași puteri din stânga și dreapta a ecuației (6.26). Din (6.26) rezultă numărul coeficienților necunoscuți $(n_M + 1) + (n_N + 1)$, iar numărul de ecuații algebrice este $n_G + 1$ și condiția de soluționare a ecuației polinomiale este inegalitatea:

$$n_M + n_N + 1 \geq n_G. \tag{6.29}$$

În relația (6.26) gradele polonoamelor din partea stângă și partea dreaptă sunt egale și se obține egalitatea:

$$n_G = n_{A_e} + n_N + r, \tag{6.30}$$

din care se determină gradul polinomului necunoscut $N(z)$:

$$n_N = n_G - n_{A_e} - r. \tag{6.31}$$

Prin unirea relației (6.28) a condițiilor de realizabilitate fizică a regulatorului cu relația (6.29) și cu condiția (6.30) se obține inegalitatea:

$$n_{A_e} + r - 1 \leq n_M \leq n_{B_i} + n_G - n_A, \tag{6.32}$$

unde $n_A = n_{A_i} + n_{A_e}$ este gradul numitorului părții fixate.

Astfel, condițiile realizabilității fizice a regulatorului și soluționare a ecuației polinomiale se realizează, dacă gradele polinoamelor necunoscute $M(z)$ și $N(z)$ satisfac relațiile (6.31) și (6.32).

Din (6.32) se obține gradul polinomului caracteristic dorit al sistemului sintetizat, care trebuie să satisfacă inegalitatea:

$$n_G \geq n_{A_e} + r + n_A - 1 - n_{B_i}. \tag{6.33}$$

La etapa inițială s-a admis că este cunoscută funția de tarnsfer $H_0(z)$ a sistemului închis sintetizat, dar rezultă că aceasta nu poate fi numită apiori (6.25).

Procedura de sinteza a sistemului automat conform metodei polinomiale se reduce la următoarele etape.

1. Polinoamele funcției de transfer discretă $H_P(z)$ a părții fixate se descompun în formă fracționară (6.24).

2. Pornind de la cerințele de performanță în regim tranzitoriu și astatism ale sistemului sintetizat, se construiește polinomul caracteristic dorit $G(z)$, care să satisfacă condiția (6.33) și se stabilește gradul de astatism r al sistemului sintetizat.

3. Din relațiile (6.28)-(6.30) se determină gradele polinoamelor necunoscute $M(z)$ și $N(z)$ și se scriu polinoamele cu coeficienții necunoscuți.

4. Se substituie polinoamele necunoscute $M(z)$ și $N(z)$ în ecuația polinomială (6.26) și se alcătuiește sistemul de ecuații algebrice, egalând coeficienții din partea stângă și dreaptă de pe lângă aceleași puteri ale lui z, din care se determină coeficienții polinoamelor $M(z)$ și $N(z)$.

5. Se substituie polinoamele calculate $M(z)$ și $N(z)$ în funcția de

transfer (6.27) a regulatorului și se determină parametrii polinoamelor $Q(z)$ și $P(z)$ ai regulatorului.

Pentru simplificarea structurii regulatorului sintetizat se recomandă ca gradele polinoamelor $G(z), M(z)$ și $N(z)$ să fie cât mai reduse.

Exemplul 6.2. Se consideră funcția de transfer discretă a părții fixate [13, 14]:

$$H_P(z) = \frac{z+2}{(z-0.5)(z-1.5)}.$$

Se cere să se sintetizeze algoritmul numeric de reglare, pentru care eroarea staționară a sistemului să fie nulă și răspunsul sistemului numeric să se finiseze într-un număr finit de perioade de eșantionare. Să se determine mărimea comenzii în formă operațională și în timpul discret.

Soluționare. 1. Funcția de transfer a părții fixate se descompune conform relației (6.24):

$$H_P(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{z+2}{(z-0.5)(z-1.5)} = \frac{B_i(z)B_e(z)}{A_i(z)A_e(z)},$$

unde se notează zerourile din interiorul cercului unitar $B_i(z) = 1$ și zerourile din afara cercului unitar $B_e(z) = z + 2$, zerourile din interiorul cercului unitar $A_i(z) = z - 0.5$ și zerourile din afara cercului unitar $A_e(z) = z - 1.5$.

Gradele polinoamelor $n_A = 2, n_{B_i} = 0, n_{B_e} = 1, n_{A_i} = 1, n_{A_e} = 1$.

2. În structura părții fixate nu se conține astatism și pentru asigurarea erorii staționare $\varepsilon = 0$ se alege gradul de astatism $r = 1$ în structura regulatorului și se determină gradul polinomului caracteristic după relația (6.33):

$$n_G \geq n_{A_e} + r + n_A - 1 - n_{B_i}, n_G \geq 1 + 1 + 2 - 1 - 0 = 3.$$

Polinomul caracteristic are gradul minimal $n_G = 3$ și, la condiția ca răspunsul sistemului să se finiseze de nu numar finit de perioade de eșantionare, se alege de forma:

$$G(z) = z^3.$$

3. Din relațiile (6.31) și (6.32) se determină gradele polinoamele $M(z)$ și $N(z)$:

$$n_N = n_G - n_{A_e} - r = 3 - 1 - 1 = 1, n_N = 1,$$

$$n_{A_e} + r - 1 \leq n_M \leq n_{B_i} + n_G - n_A, 1 + 1 - 1 \leq n_M \leq 0 + 2 - 2, n_M = 1.$$

Se construiesc polinoamele necunoscute cu coeficienții necunoscuți:

$$M(z) = m_0 z + m_1, N(z) = n_0 z. + n_1.$$

4. Se substituie polinoamele $M(z)$ și $N(z)$ în ecuația polinomială (6.26) și se obține:

$$B_e(z)M(z) + A_e(z)N(z)(z-1)^r = G(z),$$

$$(z+2)(m_0 z + m_1) + (z-1.5)(n_0 z + n_1)(z-1) = z^3$$

și după transformările respective se obține ecuația polinomială în forma:

$$n_0 z^3 + z^2(m_0 - 2.5n_0 + n_1) + z(2m_0 + m_1 + 1.5n_0 - 2.5n_1) +$$

$$+2m_1 + 1.5n_1 = z^3,$$

din care se alcătuiește sistemul de ecuații algebrice și se calculează coeficienții necunoscuți ai polinoamellor $M(z)$ și $N(z)$:

$$z^3: n_0 = 1,$$

$$z^2: m_0 - 2.5n_0 + n_1 = 0,$$

$$z: 2m_0 + m_1 + 1.5n_0 - 2.5n_1 = 0,$$

$$z^0: 2m_1 + 1.5n_1 = 0,$$

$$m_0 = 1.2619, m_1 = -0.9286, n_0 = 1, n_1 = 1.2381.$$

Astfel polinoamele $M(z)$ și $N(z)$ au forma numerică:

$$M(z) = m_0 z + m_1 = 1.2619z - 0.9286,$$

$$N(z) = n_0 z + n_1 = z + 1.2381.$$

5. Se introduc polinoamele $M(z)$ și $N(z)$ în relația de calcul a funcției de transfer (6.27) a regulatorului și se obține:

$$H_R(z) = \frac{u(z)}{\varepsilon(z)} = \frac{A_i(z)M(z)}{B_i(z)N(z)(z-1)^r} = \frac{(z-0.5)(m_0 z+m_1)}{(n_0 z+n_1)(z-1)} = \frac{(z-0.5)(1.2619z-0.9286)}{(z+1.2381)(z-1)} =$$

$$= \frac{1.2619z^2-1.5596z+0.4643}{z^2+0.2381z-1.2381} = \frac{1.2619-1.5596z^{-1}+0.4643z^{-2}}{1+0.2381z^{-1}-1.2381z^{-2}} = \frac{q_0-q_1z^{-1}+q_2z^{-2}}{1+p_1z^{-1}-p_2z^{-2}} = \frac{Q(z)}{P(z)},$$

unde parametrii regulatorului au valorile $q_0 = 1.2619$, $q_1 = 1.5596$, $q_2 = 0.4643$, $p_1 = 0.2381$, $p_2 = 1.2381$.

6. Se determină mărimea de conducere în formă operaţională și în domeniul timpului:

$$u(z^{-1}) = -p_1 z^{-1}u(z^{-1}) + p_2 z^{-2}u(z^{-1}) + q_0\varepsilon(z^{-1}) - q_1 z^{-1}\varepsilon(z^{-1}) +$$

$$+q_2 z^{-2}\varepsilon(z^{-1}) = -0.2381z^{-1}u(z^{-1}) + 1.2381z^{-2}u(z^{-1}) + 1.2619\varepsilon(z^{-1}) -$$

$$-1.5596z^{-1}\varepsilon(z^{-1}) + 0.4643z^{-2}\varepsilon(z^{-1});$$

$$u(kT) = -0.2381u((k-1)T) + 1.2381u((k-2)T) + 1.2619\varepsilon(kT) -$$

$$-1.5596z^{-1}\varepsilon\big((k-1)T\big) + 0.4643z^{-2}\varepsilon\big((k-2)T\big).\blacksquare$$

Exemplul 6.3. Se consideră modelul părții fixate descrisă de funcția de transfer discretă în forma:

$$H_P(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{b_1z+b_2}{a_0z^2-a_1z+a_1}=\frac{0.001z+0.001}{z^2-1.8656z+0.8693}=\frac{0.001z+0.001}{(z-0.9615)(z-0.9041)}.$$

Se cere să se sintetizeze algoritmul de reglare pentru modelul părții fixate prin metoda polinomială și să se determine comanda numerică în timpul discret.

Soluționare. 1. Se determină rădăcinile polinomului numitorului funcței de transfer a părții fixate și se descompune conform relației (6.24):

$$H(z)=\frac{b_1z+b_2}{a_0z^2-a_1z+a_2}=\frac{0.001z+0.001}{z^2-1.8656z+0.8693}=\frac{0.001z+0.001}{(z-0.9615)(z-0.9041)}=\frac{B_i(z)B_e(z)}{A_i(z)A_e(z)},$$

unde rădăcinile $z_1=0.9615$, $z_2=0.9041$, $B_i(z)=1$, $B_e(z)=0.001z+0.001$, $A_i(z)=z^2-1.8656z+0.8693$, $A_e(z)=1$.

Gradele polinoamelor sunt $n_A=2$, $n_{B_i}=0$, $n_{B_e}=1$, $n_{A_i}=2$, $n_{A_e}=0$.

2. În obiect nu se conține astatism și pentru asigurarea erorii staționare nule, astatism se introduce în structura regulatorului - gradul de astatism $r=1$ și se determină gradul polinomului caracteristic după relația (6.33):

$$n_G\geq n_{A_e}+r+n_A-1-n_{B_i}, n_G\geq 0+1+2-1-0=2.$$

Polinomul caracteristic are gradul minimal $n_G=2$ și, la condiția ca răspunsul sistemului să se finiseze de nu numar finit de perioade de eșantionare, se alege de forma:

$$G(z)=z^2.$$

3. Din relațiile (6.31) și (6.32) se determină gradele polinoamele $M(z)$ și $N(z)$:

$$n_N=n_G-n_{A_e}-r=2-0-1=1, n_N=1,$$

$$n_{A_e}+r-1\leq n_M\leq n_{B_i}+n_G-n_A, 0+1-1\leq n_M\leq 0+2-2, n_M=0.$$

Se construiesc polinoamele necunoscute:

$$M(z)=m_0, N(z)=n_0z+n_1.$$

4. Se verifică condiția de soluționare a ecuației polinomiale (6.29):

$$n_M+n_N+1\geq n_G, 0+1+1=2.$$

5. Se substituie polinoamele $M(z)$ și $N(z)$ în ecuația polinomială (6.26) și se obține:

$$B_e(z)M(z)+A_e(z)N(z)(z-1)^r=G(z),$$

$$(0.001z+0.001)m_0+(n_0z+n_1)(z-1)=z^2$$

și după transformările respective se obține ecuația polinomială în forma:

$$n_0 z^2 + z(n_1 - n_0 + 0.001m_0) + (0.001m_0 - n_1) = z^2,$$

din care se alcătuiește sistemul de ecuații algebrice pentru calcularea coeficienților polinoamelor $M(z)$ și $N(z)$:

$$z^2:\ n_0 = 1,$$

$$z:\ \ n_1 - n_0 + 0.001m_0 = 0,$$

$$z^0:\ -n_1 + 0.001m_0 = 0,$$

care s-a soluționat și s-au obținut valorile numerice ale coeficienților:

$$m_0 = 500, n_0 = 1, n_1 = 0.5.$$

6. Se introduc polinoamele $M(z)$ și $N(z)$ în relația de calcul a funcției de transfer (6.27) a regulatorului și se obține:

$$H_R(z) = \frac{A_i(z)M(z)}{B_i(z)N(z)(z-1)^r} = \frac{(z^2-1.8656z+0.8693)m_0}{(n_0 z+n_1)(z-1)} = \frac{(z^2-1.8656z+0.8693)500}{(z+0.5)(z-1)} =$$

$$= \frac{500z^2-932.8z+434.65}{z^2-0.5z-0.5} = \frac{500-932.8z^{-1}+434.65z^{-2}}{1-0.5z^{-1}-0.5z^{-2}} = \frac{q_0-q_1z^{-1}+q_2z^{-2}}{1-p_1z^{-1}-p_2z^{-2}} = \frac{Q(z)}{P(z)} = \frac{u(z)}{\varepsilon(z)}.$$

7. Se determină mărimea de conducere în formă operaţională și în domeniul timpului:

$$u(z^{-1}) = p_1 z^{-1}u(z^{-1}) + p_2 z^{-2}u(z^{-1}) + q_0\varepsilon(z^{-1}) - q_1 z^{-1}\varepsilon(z^{-1}) +$$

$$+q_2 z^{-2}\varepsilon(z^{-1}),$$

$$u(z^{-1}) = 0.5z^{-1}u(z^{-1}) + 0.5z^{-2}u(z^{-1}) + 500\varepsilon(z^{-1}) -$$

$$-932.8z^{-1}\varepsilon(z^{-1}) + 434.65z^{-2}\varepsilon(z^{-1});$$

$$u(kT) = 0.5u((k-1)T) + 0.5u((k-2)T) + 500\varepsilon(kT) -$$

$$-932.8z^{-1}\varepsilon\big((k-1)T\big) + 434.65z^{-2}\varepsilon\big((k-2)T\big).$$

S-a simulat sistemul numeric cu regulatorul cu parametrii sintetizați și răspunsul indicial (alura 1) se dă în fig. 6.3, iar performanțele sunt: timpul de creștere și de reglare $t_c = t_r = 5.56$ s.

Alura 2 din fig. 6.3 este răspunsul indicial al sistemului numeric cu obiectul dat și regulatorul PID numeric acordat cu metoda trapezului, performanțele sunt: timpul de creștere și de reglare $t_c = t_r = 15.52$ s.

Performanțele sistemului numeric cu regulatorul acordat după metoda polinomială sunt mai ridicate (timpul de reglare este mai redus de 2.79 ori decât timpul de reglare a sistemului cu regulatorul PID numeric).■

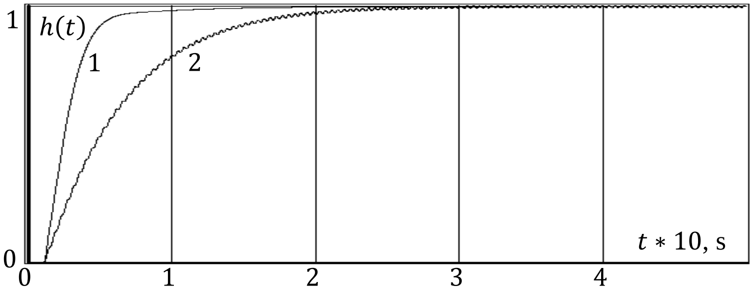

Fig. 6.3. Răspunsurile indiciale ale sistemului automat numeric

Chestionar și probleme

1. Cum se determină polii dominanți ai sistemului numeric proiectat?

2. Explicați procedura de proiectare a regulatorului numeric cu aplicarea metodei poli-zerouri.

3. Dacă se impune ca eroarea staţionară a sistemului numeric închis să fie egală cu zero, atunci ce condiţii se impun pentru funcția de tranafer $H_0(z)$ a sistemului?

4. Cum explicați excesul de poli-zerouri ai părții fixate și excesul de poli-zerouri ai sistemului numeric închis și care este raportul acestora? Prezentați exemple ale părrții fixate și a sistemului.

5. Care va fi excesul de poli-zerouri ai regulatorului dacă sistemul numeric este static?

6. Care va fi excesul de poli-zerouri ai regulatorului dacă sistemul numeric este asstatic?

7. Prezentați funcția de transfer a regulatorul numeric proiectat după funcția de transfer a sistemului deschis.

8. Cum explicați condiția de realizabilitate fizică a regulatorului proiectat?

9. Este cunoscută funcșia de transfer a regulatorului numeric:

$$H_R(z) = \frac{q_0+q_1z^{-1}}{1+p_1z^{-1}+p_2z^{-2}+p_3z^{-3}}.$$

Determinați excesul de poli-zerouri și condiția de realizabilitate fizică.

10. Fiind dată funcția de transfer a părții fixate:

$$H_P(z) = \frac{3z+6}{(7z+2)(3z-9)}$$

explicați procedura de proiectare a regulatorului numeric după metoda polinomială.

11. Pentru funcția de transfer de la p. 10 determinați excesul de poli-zerouri ai părții fixate.

12. Pentru funcția de transfer de la p. 10 determinați stabilitatea părții fixate.

7 PROIECTAREA ALGORITMILOR NUMERICI DE REGLARE ÎN DOMENIUL TIMPULUI

7.1 Introducere

Algoritmii de reglare obținuți prin discretizarea algoritmilor continui au în general performanțe reduse datorită aproximării componentelor integrală și derivativă și ca urmare a pierderii de informație în procesul de eșantionare și cuantificare.

Proiectarea algoritmilor numerici în domeniul timpului utilizează mai multe metode, dintre care se evidențiază metodele timpului finit și metoda timpului minim, care vor fi expuse în continuare. Aceşti algoritmi se bazează pe răspunsul sistemului fără suprareglare. Algoritmul de reglare se proiectează pe baza unui model discret al părții fixate și prin impunerea unui răspuns dorit al sistemului de reglare automată [4, 16].

7.2 Metoda timpului finit

Metoda timpului finit folosește conceptul de impunerea unui anumit răspuns indicial al mărimii reglate la semnalul de referință treaptă unitară, care prezintă răspunsul impus fără suprareglare numit *algoritmul normal* (AN) sau dacă se fixează și evoluția mărimii de conducere prezintă *algoritmul extins* (AE).

7.2.1 *Metoda răspunsului impus-algoritmul normal*

Se consideră schema structurală a sistemului de reglare automată cu regulator numeric cu f.d.t. discretă $H_R(z)$ și cu procesul continuu descris de f.d.t. $H_P(s)$ și elementul de reținere de ordin zero cu f.d.t. $H_{ER}(s)$ este dată în figura 7.1.

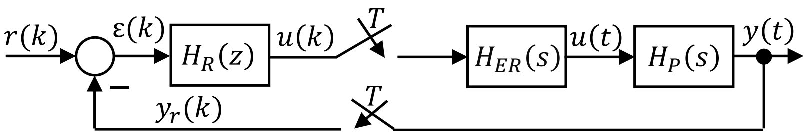

Fig. 7.1. Schema structurală a sistemului numeric

Se consideră sistemul la inrarea căruia acționează referința de tip treaptă unitară discretă dată de relația:

$$r(k) = 1(k) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } k = 0, 1, 2, \dots, \\ 0 & \text{pentru } k < 0 \end{cases} \tag{7.1}$$

și se impune un anumit răspuns mărimii de reglare $y(k)$ astfel ca să fie asigurate toate performanţele sistemului automat în regim tranzitoriu şi staţionar. Se impune ca regimul staționar să se stabilizeze în m perioade de eşantionare, care este numit *timp finit*:

$$y(k) = r(k) = 1(k), \tag{7.2}$$

iar mărimea de comandă după m perioade de eşantionare va fi:

$$u(k) = u(m) = \text{const, pentru } k \geq m. \tag{7.3}$$

Astfel, se presupune că partea fixată se descrie cu f.d.t. discretă de gradul m în forma:

$$H_p(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}} = \frac{y(z^{-1})}{u(z^{-1})}. \tag{7.4}$$

Mărimea răspunsului impus (dorit) în formă operațională discretă a lui $y_d(z^{-1})$ se descrie de relația:

$$y_d(z^{-1}) = \underbrace{y(1)z^{-1} + y(2)z^{-2} + \dots + y(m-1)z^{-(m-1)}}_{\text{regimul tranzitoriu}} +$$

$$+ \underbrace{y(m)z^{-m} + y(m+1)z^{-(m+1)} + \dots}_{\text{regimul staționar}}, \tag{7.5}$$

iar mărimea de conducere în formă operațională discretă este:

$$u(z^{-1}) = u(0) + u(1)z^{-1} + \dots + u(m-1)z^{-(m-1)} +$$

$$+ u(m)z^{-m} + u(m+1)z^{-(m+1)} + \dots, \tag{7.6}$$

în care nu se cunosc valorile $u(k)$ până la valoarea $u(m-1)$, iar $u(m) = u(m+1) = 1$ este regimul staționar unitar.

Valoarea comenzii în regim staționar se poate determina din condiția ca sistemul numeric să atingă regimul staționar o valoare a răspunsului $y_{\mathrm{st}} = 1 = y_m$.

Pornind de la răspunsul sistemului dat de relația:

$$y(k) = H_P(z^{-1})u(k) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(k), \tag{7.7}$$

din care se exprimă mărimea comenzii:

$$u(k) = y(k)\frac{A(z^{-1})}{B(z^{-1})} = \frac{1+\sum_{i=1}^{m} a_i}{1+\sum_{j=1}^{m} b_j} = \frac{1}{k_0}, \tag{7.8}$$

unde $k_0 = \lim_{z\to 1} H_P(z^{-1})$ reprezintă coeficientul de transfer al procesului.

Cunoscând răspunsul sistemului din expresia (7.5) și admițând că la intrarea sistemului acționează semnalul treaptă unitară discretă $r(z^{-1}) = 1(z^{-1}) = 1/(1 - z^{-1})$, se determină f.d.t. discretă dorită a sistemului închis în forma:

$$H_{0d}(z^{-1}) = \frac{y_d(z^{-1})}{r(z^{-1})} = y_d(z^{-1})\frac{1}{1-z^{-1}} = (1 - z^{-1})\sum_{k=0}^{\infty} y(k)z^{-k} =$$
$$= (1 - z^{-1})[y(1)z^{-1} + y(2)z^{-2} + \dots + y(m-1)z^{-(m-1)} +$$
$$+z^{-m}\frac{1}{1 - z^{-1}}] = y(1)z^{-1} + (y(2) - y(1))z^{-2} + \dots + (y(m-1) -$$
$$-y(m-2))z^{-(m+1)} + (1 - y(m-1))z^{-m}, \tag{7.9}$$

unde valoarea componentelor $y(m) = y(m+1) = \dots = 1$, iar timpul de reglare $t_r = m$ perioade de eşantionare.

În expresia (7.9) se introduc notațiile:

$$\begin{aligned} p_1 &= y(1), \\ p_2 &= y(2) - y(1), \\ p_3 &= y(3) - y(2), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_m &= 1 - y(m-1) \end{aligned} \tag{7.10}$$

și va avea forma:

$$H_{0d}(z^{-1}) = P(z^{-1}) = p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \dots + p_m z^{-m}. \tag{7.11}$$

Din expresia (7.10) după unele transformări rezultă condiția:

$$\sum_{j=1}^{m} p_j = 1, \tag{7.12}$$

care impune ca algoritmul cu răspunsul fără suprareglare să conțină componenta integrativă.

Din (7.11) se constată ecuația caracteristică a sistemului închis care este de forma:

$$z^m = z + z^2 + \cdots + z^m = 0. \tag{7.13}$$

Valorile coeficienților p_i din (7.10) se calculează după eșantioanele $y(1), \cdots, y(m-1)$ și polinomul $P(z^{-1})$ este determinat.

Sistemul automat este cu un grad de libertate şi f.d.t. a sistemului închis se exprimă:

$$H_0(z^{-1}) = \frac{H_R(z^{-1})H_P(z^{-1})}{1+H_R(z^{-1})H_P(z^{-1})} = \frac{H_d(z^{-1})}{1+H_d(z^{-1})}, \tag{7.14}$$

de unde se determină f.d.t. a sistemului deschis:

$$H_d(z^{-1}) = \frac{H_0(z^{-1})}{1-H_0(z^{-1})} = H_R(z^{-1})H_P(z^{-1}). \tag{7.15}$$

Deoarece f.d.t. $H_d(z^{-1})$ se determină din f.d.t. $H_0(z^{-1})$ a sistemului închis, iar a procesului este cunoscută, atunci din (7.15) se calculează f.d.t. a regulatorului:

$$H_R(z^{-1}) = \frac{u(z^{-1})}{\varepsilon(z^{-1})} = H_d(z^{-1})\frac{1}{H_P(z^{-1})} = \frac{H_0(z^{-1})}{1-H_0(z^{-1})}\frac{A(z^{-1})}{B(z^{-1})} =$$

$$= \frac{P(z^{-1})}{1-P(z^{-1})}\frac{A(z^{-1})}{B(z^{-1})} = \frac{Q(z^{-1})}{1-P(z^{-1})} = \frac{q_0+q_1z^{-1}+q_2z^{-2}+\cdots+q_mz^{-m}}{1-p_1z^{-1}-p_2z^{-2}-\cdots-p_mz^{-m}}. \tag{7.16}$$

Relația (7.16) este un algoritm recursiv de ordinul $2m$ și fizic realizabil.

Algoritmul obținut (7.16) poate fi simplificat utilizând polinomul $Q(z^{-1})$ de forma:

$$Q(z^{-1}) = \frac{u(z^{-1})}{r(z^{-1})} = (1 - z^{-1})[u(0) + u(1)z^{-1} + \cdots +$$

$$+u(m-1)z^{-(m-1)} + u(m)(z^{-m} + u(m+1)z^{-(m+1)} + \cdots)] =$$

$$= (1 - z^{-1})[u(0) + u(1)z^{-1} + \cdots +$$

$$+u(m-1)z^{-(m-1)} + u(m)z^{-m}\frac{1}{1 - z^{-1}}] =$$

$$= q_0 + q_1 z^{-1} + \cdots + q_m z^{-m}, \tag{7.17}$$

unde se utilizează notațiile:

$$\begin{aligned} &q_0 = u(0), \\ &q_1 = u(1) - u(0), \\ &q_2 = u(2) - u(1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &q_m = u(m) - u(m-1). \end{aligned} \tag{7.18}$$

Din relația (7.18) după unele transformări se obține:

$$\sum_{i=0}^{m} q_i = q_0 + q_1 + q_2 + \cdots + q_m = u(m). \tag{7.19}$$

În relația (7.4) se aplică (7.17) și se obține f.d.t. discretă a procesului în forma:

$$H_P(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{y(z^{-1})}{u(z^{-1})} = \frac{H_0(z^{-1})r(z^{-1})}{Q(z^{-1})r(z^{-1})} = \frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})} =$$

$$= \frac{p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \cdots + p_m z^{-m}}{q_0 + q_1 z^{-1} + \cdots + q_m z^{-m}}. \tag{7.20}$$

Funcția de transfer a regulatorului din (7.16) se calculează cu f.d.t. a părții fixate exprimă prin (7.20) și se obține:

$$H_R(z^{-1}) = H_d(z^{-1})\frac{1}{H_P(z^{-1})} = \frac{P(z^{-1})}{1 - P(z^{-1})}\frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \frac{Q(z^{-1})}{1 - P(z^{-1})} =$$

$$= \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + \cdots + q_m z^{-m}}{1 - p_1 z^{-1} - p_2 z^{-2} - \cdots - p_m z^{-m}}. \tag{7.21}$$

În acest caz algoritmul de reglare obținut din (7.21) este fizic realizabil de ordinul m a părții fixate.

Pentru calculul parametrilor se utilizează relația (7.4) și (7.20) în forma:

$$\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})},$$

$$\frac{b_1 z^{-1}+b_2 z^{-2}+\cdots+b_m z^{-m}}{1+a_1 z^{-1}+\cdots+a_m z^{-m}} = \frac{p_1 z^{-1}+p_2 z^{-2}+\cdots+p_m z^{-m}}{q_0+q_1 z^{-1}+\cdots+q_m z^{-m}}. \qquad (7.22)$$

Dacă se impune coeficientul $q_0 = 1$ din (7.22), atunci și în acest scop toți termenii din partea dreaptă a relației (7.22) se împart la q_0 şi se obţine:

$$\frac{b_1 z^{-1}+b_2 z^{-2}+\cdots+b_m z^{-m}}{1+a_1 z^{-1}+\cdots+a_m z^{-m}} = \frac{\frac{p_1}{q_0} z^{-1}+\frac{p_2}{q_0} z^{-2}+\cdots+\frac{p_m}{q_0} z^{-m}}{\frac{q_0}{q_0}+\frac{q_1}{q_0} z^{-1}+\cdots\frac{+q_m}{q_0} z^{-m}} =$$

$$= \frac{p_1' z^{-1}+p_2' z^{-2}+\cdots+p_m' z^{-m}}{1+q_1' z^{-1}+\cdots+q_m' z^{-m}}. \qquad (7.23)$$

Din echivalența expresiei (7.23) egalând coeficienții de pe lângă z^{-1} de aceleaşi puteri din partea stângă şi partea dreaptă de la numitor şi respectiv de la numărător se obţin expresiile de calcul ai parametrilor algoritmului de reglare în forma:

$$q_i = a_i q_0,\ i = \overline{1,m} \text{ şi } p_j = b_j q_0,\ j = \overline{1,m}. \qquad (7.24)$$

În relațiile (7.24) parametrii q_i, p_j depind de valoarea lui $q_0 =$ $= u(0)$, care prezintă valoarea comenzii iniţiale și care poate depăşi limitele admisibile pentru elementul de execuţie, de unde rezultă, că regulatorul atinge nivelul de saturație al comenzii.

Pentru calculul parametrului q_0 se utilizează expresia (7.24) cu $p_j = b_j q_0$ din (7.12) și se obține:

$$\sum_{j=1}^{m} p_j = \sum_{j=1}^{m} b_j q_0 = 1, \qquad (7.25)$$

de unde parametrul q_0 se exprimă:

$$q_0 = \frac{1}{b_1+b_2+\cdots+b_m} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{m} b_j}. \qquad (7.26)$$

Valoarea inițială a comenzii din (7.23) este:

$$u(0) = q_0 = \frac{p_1}{b_1}, \qquad (7.27)$$

unde valoarea lui p_1 caracterizează viteza de răspuns a sistemului și prin alegerea acestui coeficient se poate limita valoarea comenzii inițiale [4].

Dacă se impune o viteză mai mare de răspuns p_1 rezultă timp de creștere t_c mare și atunci comanda inițială $u(0)$ este mai mare pentru un coeficient b_1 dat, care este funcție de perioada de eșantionare.

Astfel, polinoamele din f.d.t. (7.22) a algoritmului de reglare cu relațiile (7.24) se exprimă prin parametrii părții fixate și parametrul q_0 în forma:

$$Q(z^{-1}) = q_0 A(z^{-1}) \text{ și } P(z^{-1}) = q_0 B(z^{-1}). \tag{7.28}$$

În final, f.d.t. (7.21) a algoritmului de reglare va avea forma:

$$H_R(z^{-1}) = \frac{u(z^{-1})}{\varepsilon(z^{-1})} = \frac{Q(z^{-1})}{1-P(z^{-1})} = \frac{q_0 A(z^{-1})}{1-q_0 B(z^{-1})} = \frac{q_0+q_1 z^{-1}+\cdots+q_m z^{-m}}{1-p_1 z^{-1}-p_2 z^{-2}-\cdots-p_m z^{-m}}. \tag{7.29}$$

Algoritmul sintetizat în domeniul timpului discret $u(kT)$ obținut prin această procedură este un algoritm recurent și cauzal și se reprezintă în forma de realizare:

$$u(kT) = q_0 \varepsilon(kT) + \sum_{i=1}^{n} q_i \varepsilon((k-i)T) - \sum_{j=1}^{n} p_i u\big((k-j)T\big). \tag{7.30}$$

În cazul când modelul procesului conține componenta timpului mort:

$$H_P(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} z^{-d}, \tag{7.31}$$

unde $d \geq 0$, $d \in N$ care reprezintă timpul mort al procesului, atunci algoritmul de reglare se reprezintă de relația:

$$H_R(z^{-1}) = \frac{u(z^{-1})}{\varepsilon(z^{-1})} = \frac{q_0 A(z^{-1})}{1-q_0 B(z^{-1}) z^{-d}} = \frac{Q(z^{-1})}{1-P(z^{-1})}. \tag{7.32}$$

Concluzii: 1. Acest algoritm s-a obținut din f.d.t. discretă a sistemului închis cu m poli în origine (7.11), ceea ce presupune o sensibilitate ridicată a sistemului automat la variația parametrilor.

2. Deoarece valoarea inițială a comenzii $u(0) = q_0$ se determină de $\sum_{j=1}^{m} b_j$ ai modelului discret al părţii fixate, atunci pentru sume mici ale coeficienților b_j se obțin valori mari ale comenzii $u(0)$, care pot determina intrarea în saturație a componentei integrale I a regulatorului și, respectiv, a elementului de execuție.

Procedura de proiectare a algoritmului de reglare.

1. Se determină perioada de eșantionare.

2. Se calculează f.d.t. discretă a părții fixate cu perioada de eșantionare aleasă.

3. Se calculează valoarea lui $u(0)$ şi se verifică încadrarea în limitele admisibile ale comenzii.

4. Se calculează parametrii regulatorului cu relațiile (7.24).

5. Se determină f.d.t. discretă $H_R(z^{-1})$ a algoritmului de reglare după relaţia (7.29).

6. Se verifică prin simulare performanțele sistemului proiectat.

7. Dacă sunt satisfăcute toate performanțele sistemului, atunci procedura de proiectare este încheiată, iar dacă nu sunt asigurate toate performanțele, urmează de recalculat modelul părții fixate cu altă valoare a perioadei de eșantionare și de repetat procedura de proiectare.

Exemplul 7.1. Se dă modelul obiectului de reglare cu parametrii coeficientul de transfer $k = 0.5$, constantele de timp $T_1 = 5$ s, $T_2 = 2\ s$ și timpul mort $\tau = 1.0$ s descris cu f.d.t. de forma:

$$H_P(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{ke^{-\tau s}}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)} = \frac{ke^{-\tau s}}{a_0 s^2+a_1 s+a_2} = \frac{0.5e^{-s}}{10s^2+7s+1},$$

unde $a_0 = T_1 T_2 = 5 \cdot 2 = 10$ s^2, $a_1 = T_1 + T_2 = 5 + 2 = 7$ s, $a_2 = 1$.

Se cere de efectuat.

1. Să se determine perioada de eșantionare.

2. Să se calculeze funcția de transfer discretă a modelului părții fixate.

3. Să se sintetizeze algoritmul de conducere după metoda răspunsului impus–algoritmul normal.

Schema structurală a sistemului de reglare automată cu regulator numeric cu procesul continuu descris de f.d.t. este prezentată în figura 7.1.

Soluționare. Se efectuează următoarele etape.

1. Se determină perioada de eșantionare cu relația:

$$\frac{T}{T_1+T_2} \geq 0.36,\ T = 0.36(T_1 + T_2) = 0.36(5 + 2) = 2.52 \approx 3 \text{ s}.$$

2. Se introduce transformata:

$$z = e^{Ts}.$$

3. Se determină componenta discretă a timpului mort în transformata z:

$$Z\{e^{-\tau s}\} = z^{-d},\ d = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{3} = 0.3333 \approx 0,\ z^{-d} = z^{-0} = 1.$$

4. Se determină f.d.t. echivalentă a conexiunii serie a elementului de reținere

cu f.d.t. $H_{ER}(s)$ și a părții fixate cu f.d.t. $H_P(s)$:

$$H(s) = H_{ER}(s)H_P(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{ke^{-\tau s}}{T_1T_2s^2+(T_1+T_2)s+1} = (1-e^{-Ts})\frac{ke^{-\tau s}}{T_1T_2s^3+(T_1+T_2)s^2+s}.$$

5. Utilizând perioada de eșantionare T, se determină modelul discret al f.d.t. echivalente aplicând metoda trapezului de aproximare, care se aduce la forma standard împărțind termenii de la numărător și numitor la d_0z^3 și se obține forma:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = z^{-d}(1-z^{-1})Z\left\{\frac{k}{T_1T_2s^3+(T_1+T_2)s^2+s}\right\} =$$

$$= z^{-d}\frac{z-1}{z}\frac{k}{T_1T_2\left(\frac{2(z-1)}{T(z+1)}\right)^3+(T_1+T_2)\left(\frac{2(z-1)}{T(z+1)}\right)^2+\frac{2(z-1)}{T(z+1)}} =$$

$$= z^{-d}\frac{z-1}{z}\frac{kT^3(z+1)^3}{T_1T_28(z-1)^3+4T(T_1+T_2)(z+1)(z-1)^2+2T^2(z+1)^2(z-1)} =$$

$$= z^{-d}\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+b_3z^{-3}}{1-a_1z^{-1}+a_2z^{-2}} = \frac{y(z^{-1})}{u(z^{-1})}.$$

6. Se calculează coeficienții modelului discret aproximat:

$$b_0 = \frac{kT^3}{8T_1T_2+4T(T_1+T_2)+2T^2} = \frac{0.5.\cdot 3^3}{8\cdot 5\cdot 2+4\cdot 3(5+2)+2\cdot 3^2} = 0.0742,$$

$$b_1 = \frac{3kT^3}{8T_1T_2+4T(T_1+T_2)+2T^2} = \frac{3\cdot 0.5\cdot 3^3}{8\cdot 5\cdot 2+4\cdot 3(5+2)+2\cdot 3^2} = 0.2225,$$

$$b_2 = \frac{3kT^3}{8T_1T_2+4T(T_1+T_2)+2T^2} = \frac{3\cdot 0.5\cdot 3^3}{8\cdot 5\cdot 2+4\cdot 3(5+2)+2\cdot 3^2} = 0.2225,$$

$$b_3 = \frac{kT^3}{8T_1T_2+4T(T_1+T_2)+2T^2} = \frac{0.5\cdot 3^3}{8\cdot 5\cdot 2+4\cdot 3(5+2)+2\cdot 3^2} = 0.0742,$$

$$a_1 = \frac{16T_1T_2-4T^2}{8T_1T_2+4T(T_1+T_2)+2T^2} = \frac{16T_1T_2-4T^2}{8\cdot 5\cdot 2+4\cdot 3(5+2)+2\cdot 3^2} = 0.6813,$$

$$a_2 = \frac{8T_1T_2-4T(T_1+T_2)+2T^2}{8T_1T_2+4T(T_1+T_2)+2T^2} = \frac{8T_1T_2-4T(T_1+T_2)+2T^2}{8\cdot 5\cdot 2+4\cdot 3(5+2)+2\cdot 3^2} = 0.0769.$$

7. Funcția de transfer discretă aproximată a modelului obiectului de ordinul $m = 2$ ($d = 0$) este:

$$H_P(z^{-1}) = \frac{y(z^{-1})}{u(z^{-1})} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+b_2z^{-3}}{1-a_1z^{-1}+a_2z^{-2}} =$$

$$= \frac{0.0742+0.2225z^{-1}+0.2225z^{-2}+0.0742z^{-3}}{1-0.6813z^{-1}+0.0769z^{-2}}.$$

8. Se determină algoritmul normal de reglare cu modelul obiectului discret de ordinul $m = 2$ și perioada de eșantionare T descris cu funcția de transfer de forma:

$$H_R(z^{-1}) = \frac{u(z^{-1})}{\varepsilon(z^{-1})} = \frac{Q(z^{-1})}{1-P(z^{-1})} = \frac{q_0 A(z^{-1})}{1-q_0 z^{-d} B(z^{-1})} =$$

$$= \frac{q_0(1-a_1 z^{-1}+a_2 z^{-2})}{1-q_0(b_0+b_1 z^{-1}+b_2 z^{-2}+b_3 z^{-3})} = \frac{q_0-q_1 z^{-1}+q_2 z^{-2}}{1-p_0-p_1 z^{-1}-p_2 z^{-2}-p_3 z^{-3}} = \frac{Q(z^{-1})}{1-P(z^{-1})}.$$

9. Se determină parametrul q_0 care prezintă comanda $u(0)$ la momentul inițial de timp cu relația:

$$q_0 = u(0) = \frac{1}{b_0+b_1+b_2+b_3} = \frac{1}{0.0742+0.2225+0.2225+0.0742} = 1.6852.$$

10. Se determină parametrii q_1, q_2, p_0, p_1, p_2, p_3 algoritmului normal după relațiile:

$$q_1 = -q_0 a_1 = -1.6852 \cdot 0.6813 = -1.1481,$$

$$q_2 = q_0 a_2 = 1.6852 \cdot 0.0769 = 0.1296,$$

$$p_0 = q_0 b_0 = 1.6852 \cdot 0.0742 = 0.1250,$$

$$p_1 = q_0 b_1 = 1.6852 \cdot 0.2225 = 0.3749,$$

$$p_2 = q_0 b_2 = 1.6852 \cdot 0.2225 = 0.3749,$$

$$p_3 = q_0 b_3 = 1.6852 \cdot 0.0742 = 0.1250.$$

11. Se prezintă funcția de transfer a algoritmului normal calculat:

$$H_R(z^{-1}) = \frac{q_0-q_1 z^{-1}+q_2 z^{-2}}{1-p_0-p_1 z^{-1}-p_2 z^{-2}-p_3 z^{-3}} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} =$$

$$= \frac{1.6852-1.1481 z^{-1}+0.1296 z^{-2}}{1-0.1250-0.3730 z^{-1}-0.3730 z^{-2}-0.1250 z^{-3}} = \frac{u(z^{-1})}{\varepsilon(z^{-1})}.$$

12. Mărimea comenzii se prezintă în forma operațională în z și în domeniul timpului discret:

$$u(z^{-1})P(z^{-1}) = \varepsilon(z^{-1})Q(z^{-1}),$$

$$u(z^{-1})(1-p_0-p_1 z^{-1}-p_2 z^{-2}-p_3 z^{-3}) = \varepsilon(z^{-1})(q_0-q_1 z^{-1}+q_2 z^{-2}),$$

$$u(z^{-1}) - p_0 u(z^{-1}) - p_1 z^{-1} u(z^{-1}) - p_2 z^{-2} u(z^{-1}) - p_3 z^{-3} u(z^{-1}) =$$

$$= q_0 \varepsilon(z^{-1}) - q_1 z^{-1} \varepsilon(z^{-1}) + q_2 z^{-2} \varepsilon(z^{-1})$$

și pentru timpul discret:

$$u(kT) = p_0 u(kT) + p_1 u((k-1)T) + p_2 u((k-2)T) + p_3 u((k-3)T) +$$

$$+ q_0 \varepsilon(kT) - q_1 \varepsilon((k-1)T) + q_2 \varepsilon((k-2)T),$$

$$u(kT) = 0.1250 u(kT) + 0.3749 u((k-1)T) + 0.3749 u((k-2)T) +$$

$$+ 0.1250 u((k-3)T) + 1.6852 \varepsilon(kT) - 1.1481 \varepsilon((k-1)T) +$$

$+0.1296\varepsilon((k-2)T)$.

S-a simulat sistemul cu regulatorul sintetizat după metoda algoritmului normal și răspunsul indicial se dă în fig. 7.2, iar performanțele sunt: timpul de creștere și de reglare $t_c = t_r = 15.96$ s cu durata impulsului $\tau_i = 1.5$ s ■.

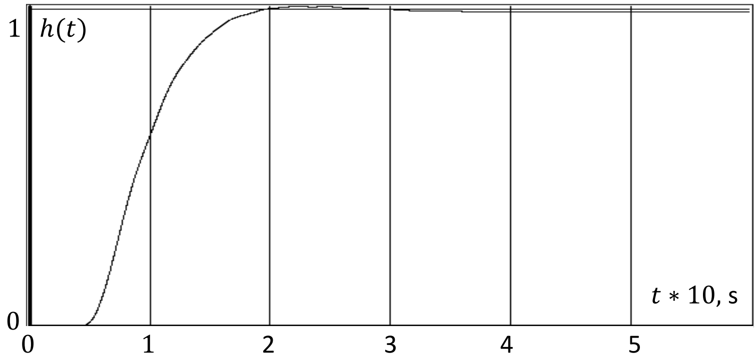

Fig. 7.2. Răspunsul indicial al sistemului cu algoritmul normal

7.2.2 *Metoda răspunsului impus-algoritmul extins*

Pentru a avea posibilitatea de a controla valoarea inițială $u(0)$ a comenzii și a evita intrarea în saturație a regulatorului, se extinde durata regimului tranzitoriu al sistemului cu o perioadă de eșantionare și timpul de reglare va fi $t_r = m+1$ perioade de eşantionare.

În cazul dat polinoamele $Q(z^{-1})$ şi $P(z^{-1})$ din (7.22) iau forma:

$$Q(z^{-1}) = q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \cdots + q_{m+1} z^{-(m+1)}, \qquad (7.33)$$

$$P(z^{-1}) = p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \cdots + p_{m+1} z^{-(m+1)}. \qquad (7.34)$$

În scopul identificării parametrilor de acord ai algoritmului de reglare q_i şi p_j ca funcții de parametrii părții fixate cu relațiile (7.25):

$$q_i = a_i q_0,\ i = \overline{1,m};\ p_j = b_j q_0,\ j = \overline{1,m}, \qquad (7.35)$$

se folosește o rădăcină comună $(\alpha z - 1) = (\alpha - z^{-1}) = 0$ şi $z = 1/\alpha$ în polinoamele (7.33) şi (7.34), care descrie raportul acestor polinoame în forma:

$$H_R(s) = \frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})} = \frac{(p'_1 z^{-1} + p'_1 z^{-2} + \cdots + p'_{m+1} z^{-(m+1)})(\alpha - z^{-1})}{q'_0 + q'_1 z^{-1} + q'_2 z^{-2} + \cdots + q'_{m+1} z^{-(m+1)})(\alpha - z^{-1})} =$$

$$= \frac{p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \cdots + p_{m+1} z^{-(m+1)}}{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \cdots + q_{m+1} z^{-(m+1)}}. \qquad (7.36)$$

Din echivalența expresiei (7.36) egalând coeficienții de pe lângă z^{-1} de aceleaşi puteri din partea stângă şi partea dreaptă de la numitor şi respectiv de la numărător se obțin expresiile de calcul ai parametrilor algoritmului extins de reglare în forma:

$$\begin{aligned} &q_0 = \alpha q_0', \\ &q_1 = \alpha q_1' - q_0', \\ &q_2 = \alpha q_2' - q_1', \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &q_m = \alpha q_m' - q_{m-1}', \\ &q_{m+1} = -q_m'; \end{aligned} \qquad (7.37')$$

$$\begin{aligned} &p_1 = \alpha p_1', \\ &p_2 = \alpha p_2' - p_1', \\ &p_3 = \alpha p_3' - p_2', \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &p_m = \alpha p_m' - p_{m-1}', \\ &p_{m+1} = -p_m. \end{aligned} \qquad (7.37'')$$

Din (7.37) valoarea inițială a comenzii se calculează cu relația:

$$u(0) = q_0 = \alpha q_0' = \frac{1}{\sum_{j=1}^{m} b_j}. \qquad (7.38)$$

Pentru calculul parametrului q_0' se utilizează suma relației (7.12) și (7.37) în forma:

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{m+1} = \alpha p_1' + (\alpha p_1' - p_1') + \cdots +$$
$$+(\alpha p_m' - p_{m-1}') - p_m' = (\alpha - 1)\sum_{j=1}^{m} p_j = (\alpha - 1)\sum_{j=1}^{m} b_j\, q_0' =$$
$$= \left(\frac{q_0}{q_0'} - 1\right) q_0' \sum_{j=1}^{m} b_j = (q_0 - q_0')\sum_{j=1}^{m} b_j = 1. \qquad (7.39)$$

Din expresia (7.39) se calculează parametrul:

$$q_0' = q_0 - \frac{1}{\sum_{j=1}^{m} b_j}. \tag{7.40}$$

Parametrul $q_0 = u(0)$ se alege în funcție de limitările impuse conducerii, iar următorii parametri ai algoritmului de reglare se determină după relațiile:

$$\begin{aligned}
&q_1 = q_0(a_1 - 1) + \frac{1}{\sum_{j=1}^{m} b_j},\\
&q_2 = q_0(a_2 - a_1) + \frac{a_1}{\sum_{j=1}^{m} b_j},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&q_m = q_0(a_m - a_{m-1}) + \frac{a_{m-1}}{\sum_{j=1}^{m} b_j},\\
&q_{m+1} = -a_m\left(q_0 - \frac{1}{\sum_{j=1}^{m} b_j}\right);
\end{aligned} \tag{7.41'}$$

$$\begin{aligned}
&p_1 = q_0 b_1,\\
&p_2 = q_0(b_2 - b_1) + \frac{b_1}{\sum_{j=1}^{m} b_j},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&p_m = q_0(b_m - b_{m-1}) + \frac{b_{m-1}}{\sum_{j=1}^{m} b_j},\\
&p_{m+1} = -b_m\left(q_0 - \frac{1}{\sum_{j=1}^{m} b_j}\right).
\end{aligned} \tag{7.41''}$$

Funcția de transfer a algoritmului de reglare cu coeficienții din (7.41) are forma:

$$H_R(z^{-1}) = \frac{Q(z^{-1})}{1-P(z^{-1})} = \frac{q_0+q_1z^{-1}+q_2z^{-2}+\dots+q_{m+1}z^{-(m+1)}}{1-p_1z^{-1}-p_2z^{-2}-\dots-p_{m+1}z^{-(m+1)}}. \tag{7.42}$$

Valoarea inițială $u(0)$ a conducerii se alege din condiţia $u(1) \leq$ $\leq u(0)$ şi aceste mărimi se calculează:

$$u(1) = q_1 + q_0 = a_1 u(0) + \frac{1}{\sum_{j=1}^{m} b_j}, \tag{7.43}$$

$$u(0) = q_0 \geq \frac{1}{1-a_1}\frac{1}{\sum_{j=1}^{m} b_j}. \tag{7.44}$$

Pentru modele discrete ale proceselor cu timp mort algoritmul numeric de reglare se prezintă cu relația:

$$H_R(z^{-1}) = \frac{q_0 A(z^{-1})(\alpha - z^{-1})}{1 - q_0 B(z^{-1}) z^{-d}(\alpha - z^{-1})} = \frac{Q(z^{-1})}{1 - P(z^{-1})}. \quad (7.45)$$

Algoritmul extins de reglare obținut este cauzal de dimensiunea $(m+1)$, ceea ce necesită un efort suplimentar la implementare.

Funcția de transfer $H_0(z)$ a sistemului numeric închis conține $(m+1)$ poli în origine, care conduce la un răspuns rapid, dar sistemul are o sensibilitate ridicată în raport cu variațiile parametrilor modelului obiectului de reglare.

Valoarea comenzii inițiale poate fi aleasă, astfel ca să se ivite intrarea în saturație a regulatorului în primul tact și să se asigure performanțele dorite pentru sistemul automat.

Alegerea comenzii inițiale face posibilă alegerea perioadei de eșantionare mai mică ca la algoritmul normal, care reduce riscul apariției unor fenomene necontrolate între momentele de eșantionare.

Metoda algoritmului extins presupune ca modelul procesului să nu conţină incertitudini parametrice, iar polinomul $B(z)$ să aibă zerourile alocate în discul unitar.

Procedura de proiectare a algoritmului extins de reglare:

1. Se determină perioada de eșantionare.

2. Se calculează f.d.t. discretă a părții fixate cu perioada de eșantionare aleasă.

3. Se calculează valoarea lui $u(0) = q_0$ şi se verifică încadrarea în limitele admisibile ale comenzii.

4. Se calculează parametrii regulatorului cu relațiile (7.41).

5. Se determină f.d.t. discretă $H_R(z^{-1})$ a algoritmului de reglare după relația (7.42).

6. Se verifică prin simulare performanțele sistemului proiectat.

7. Dacă sunt satisfăcute toate performanțele sistemului automat, atunci procedura de proiectare este încheiată, iar dacă nu sunt asigurate toate performanțele, urmează de recalculat modelul părții fixate cu altă valoare a perioadei de eșantionare și altă valoare inițială a conducerii și de repetat procedura de proiectare.

Exemplul 7.2. Se dă modelul obiectului de reglare cu parametrii coeficientul de transfer $k = 0.5$, constantele de timp $T_1 = 5$ s, $T_2 = 2$ s, timpul mort $\tau = 1.0$ s și este aproximat cu metoda trapezului cu f.d.t. din exemplul 7.1:

$$H_P(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = z^{-d} \frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+b_3z^{-3}}{1-a_1z^{-1}+a_2z^{-2}},$$

unde ordinul modelului $m = 2$, d - numărul de perioade de eșantionare a timpului mort.

Se cere să se sintetizeze algoritmul de reglare–algoritmul extins.

Soluționare. Se efectuează următoarele etape.

1. Se determină perioada de eșantionare cu relația:

$$\frac{T}{T_1+T_2} \geq 0.22,\ T = 0.22(T_1 + T_2) = 0.22(5 + 2) = 1.54 \approx 2 \text{ s.}$$

2. Se determină componenta timpului mort după relația:

$$d = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{2} = 0.5 \approx 1,\ z^{-d} = z^{-0.5} = z^{-1}.$$

3. Se calculează coeficienții modelului discret cu perioada de eșantionare $T = 2$ s:

$$b_0 = \frac{kT^3}{8T_1T_2+4T(T_1+T_2)+2T^2} = \frac{0.5\cdot2^3}{8\cdot5\cdot2+4\cdot2(5+2)+2\cdot2^2} = 0.0278,$$

$$b_1 = \frac{3kT^3}{8T_1T_2+4T(T_1+T_2)+2T^2} = \frac{3\cdot0.5\cdot2^3}{8\cdot5\cdot2+4\cdot2(5+2)+2\cdot2^2} = 0.0833,$$

$$b_2 = \frac{3kT^3}{8T_1T_2+4T(T_1+T_2)+2T^2} = \frac{3\cdot0.5\cdot2^3}{8\cdot5\cdot2+4\cdot2(5+2)+2\cdot2^2} = 0.0833,$$

$$b_3 = \frac{kT^3}{8T_1T_2+4T(T_1+T_2)+2T^2} = \frac{0.5\cdot2^3}{8\cdot5\cdot2+4\cdot2(5+2)+2\cdot2^2} = 0.0278,$$

$$a_1 = \frac{16T_1T_2-4T^2}{8T_1T_2+4T(T_1+T_2)+2T^2} = \frac{16\cdot5\cdot2-4\cdot2^2}{8\cdot5\cdot2+4\cdot2(5+2)+2\cdot2^2} = 1.0000,$$

$$a_2 = \frac{8T_1T_2-4T(T_1+T_2)+2T^2}{8T_1T_2+4T(T_1+T_2)+2T^2} = \frac{8\cdot5\cdot2-4\cdot2\cdot(5+2)+2\cdot2^2}{8\cdot5\cdot2+4\cdot2(5+2)+2\cdot2^2} = 0.2222.$$

Funcția de transfer discretă a modelului obiectului aproximat este m =2:

$$H_P(z^{-1}) = \frac{y(z^{-1})}{u(z^{-1})} = z^{-1} \frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+b_3z^{-3}}{1-a_1z^{-1}+a_2z^{-2}} =$$

$$= \frac{b_0z^{-1}+b_1z^{-2}+b_2z^{-3}+b_3z^{-4}}{1-a_1z^{-1}+a_2z^{-2}} = \frac{0.0278z^{-1}+0.0833z^{-2}+0.0833z^{-3}+0.0278z^{-4}}{1-1.0000z^{-1}+0.2222z^{-2}}.$$

4. Se determină algoritmul extins de reglare cu perioada T de eșantionare de ordinul $m + 1 + d = 2 + 1 + 0 = 3$ de forma:

$$H_R(z^{-1}) = \frac{Q(z^{-1})}{1-z^{-1}P(z^{-1})} = \frac{q_0+q_1z^{-1}+q_2z^{-2}+q_3z^{-3}}{1-p_1z^{-1}-p_2z^{-2}-p_3z^{-3}} = \frac{Q(z^{-1})}{1-P(z^{-1})} = \frac{u(z^{-1})}{\varepsilon(z^{-1})}.$$

5. Se determină parametrul $q_0 = u(0)$ - comanda la momentul inițial de timp:

$$q_0 = \frac{1}{b_0+b_1+b_2+b_3} = \frac{1}{0.0278+0.0833+0.0833+0.0278} = 4.50045.$$

Se verifică realizarea condiției (7.44):

$$u(0) = q_0 \geq \frac{1}{1-a_1}\frac{1}{\sum_{j=0}^{3} b_j} = \frac{1}{1+1.0}\frac{1}{0.0278+0.0833+0.0833+0.0278} = 2.2502,$$

care este respectată.

6. Se determină parametrii algoritmului extins de reglare după relaţiile (7.41):

$$q_1 = q_0(a_1 - 1) + \frac{1}{\sum_{j=0}^{3} b_j} = 4.50045(-1.0 - 1) + \frac{1}{0.2222} = -4.50045,$$

$$q_2 = q_0(a_2 - a_1) + \frac{a_1}{\sum_{j=0}^{3} b_j} = 4.50045(0.2222 + 1.0) - \frac{1.2222}{0.2222} = 0,$$

$$q_3 = q_0(a_3 - a_2) + \frac{a_2}{\sum_{j=0}^{3} b_j} = 4.50045(0 - 0.2222) + \frac{0.2222}{0.2222} = 0.0001,$$

$$q_4 = -a_2\left(q_0 - \frac{1}{\sum_{j=0}^{3} b_j}\right) = -0.2222\left(4.50045 - \frac{1}{0.2222}\right) = 0,$$

$$p_1 = q_0 b_0 = 4.50045 \cdot 0.0278 = 0.1251,$$

$$p_2 = q_0(b_1 - b_0) + \frac{b_0}{\sum_{j=0}^{3} b_j} = 4.5004(0.0833 - 0.0278) + \frac{0.0278}{0.2222} = 0.3749,$$

$$p_3 = q_0(b_2 - b_1) + \frac{b_1}{\sum_{j=0}^{3} b_j} = 4.5004(0.0833 - 0.0833) + \frac{0.0833}{0.2222} = 0.3749,$$

$$p_4 = -b_3\left(q_0 - \frac{1}{\sum_{j=0}^{3} b_j}\right) = -0.0278\left(4.50045 - \frac{1}{0.2222}\right) = 0.$$

7. Funcția de transfer a algoritmului extins calculat este:

$$H_R(z^{-1}) = \frac{u(z^{-1})}{\varepsilon(z^{-1})} = \frac{q_0-q_1z^{-1}+q_2z^{-2}+q_3z^{-3}}{1-p_1z^{-1}-p_2z^{-2}-p_3z^{-3}} = \frac{4.50045-4.50045z^{-1}+0.0001z^{-3}}{1-0.1251z^{-1}-0.3749z^{-2}-0.3749z^{-3}}.$$

8. Mărimea comenzii în forma operațională este:

$$u(z^{-1})P(z^{-1}) = \varepsilon(z^{-1})Q(z^{-1}),$$

$$u(z^{-1})(1 - p_1z^{-1} - p_2z^{-2} - p_3z^{-3}) = \varepsilon(z^{-1})(q_0 - q_1z^{-1} + q_2z^{-3}),$$

$$u(z^{-1}) = p_1z^{-1}u(z^{-1}) + p_2z^{-2}u(z^{-1}) + p_3z^{-3}u(z^{-1}) +$$

$+q_0\varepsilon(z^{-1}) - q_1 z^{-1}\varepsilon(z^{-1}) + q_3 z^{-3}\varepsilon(z^{-1})$.

Comanda în domeniul timpului discret este:

$u(kT) = p_1 u((k-1)T) + p_2 u((k-2)T) + p_3 u((k-3)T) +$

$+q_0\varepsilon(kT) - q_1\varepsilon\big((k-1)T\big) + q_3\varepsilon((k-3)T) =$

$= 0.1251u((k-1)T) + 0.3749u((k-2)T) + 0.3749u((k-3)T) +$

$+4.50045\varepsilon(kT) - 4.50045\varepsilon((k-1)T) + 0.0001\varepsilon((k-3)T)$.

Termenii membrului din dreapta expresiei sunt amplitudinile comenzii la momentele de eșantionare $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

S-a simulat sistemul cu regulatorul sintetizat după metoda algoritmului extins.

În f.d.t. a algoritmului de reglare calculat la numărător se produce compensarea parametrilor q_0 cu q_1, iar $q_2 = 0$ și $q_3 \approx 0$. În rezultat răspunsul indicial al sistemului este răspunsul unui element real derivativ. S-au recalculat parametrii regulatorului cu perioada de discretizare $T = 2.5$ s, $q_0 = 2.6014$, $q_1 = -2.161$, $q_2 = 4.6823$, $p_1 =$ $= 0.1248$, $p_2 = 0.2167$, $p_3 = 0.2167$. Răspunsul indicial al sistemului se dă în fig. 7.3, iar performanțele sunt la valoarea regimului staționar $y_{\text{st}} = 0.5409$: timpul de creștere $t_c = 17.23$ s, suprareglarea $\sigma = 21.09$ %, timpul de reglare $t_r = 34.61$ s.■

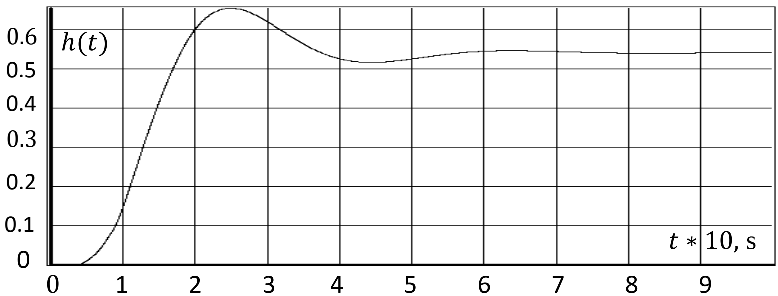

Fig. 7.3. Răspunsul indicial al sistemului cu algoritmul extins

7.2.3 *Alegerea perioadei de eșantionare*

În cazul dat pentru asigurarea unei comportări calitative a sistemului cu algoritmul normal a răspunsului impus se impune condiția de alegere optimă a perioadei de eșantionare. Din analiza algoritmilor expuși rezultă că valoarea inițială a conducerii $u(0)$ este invers proporţională cu suma coeficienţilor b_j a părţii fixate. Însă, valorile coeficienților b_j este funcţie de perioada de eşantionare şi cu creşterea acesteia valorile lor cresc. Rezultă că pentru reducerea valorii iniţiale a lui $u(0)$ este necesar mărirea perioadei de eșantionare [4, 16].

Pentru *algoritmul normal* (7.32) al răspunsului impus sistemului se recomandă alegerea perioadei de eșantionare T ca funcţie de proprietăţile dinamice ale procesului – constantele de timp ale părţii fixate sau de timpul de creştere al răspunsului procesului dată de relaţiile:

$$\frac{T}{T_\Sigma} \geq 0.36 \text{ sau } \frac{T}{T_{95}} \geq 0.18, \tag{7.46}$$

iar pentru *algoritmul extins* (7.45) al răspunsului impus sistemului automat se recomandă alegerea perioadei de eșantionare T în forma:

$$\frac{T}{T_\Sigma} \geq 0.22 \text{ sau } \frac{T}{T_{95}} \geq 0.11, \tag{7.47}$$

unde în aceste relații T_Σ este suma constantelor de timp ale f.d.t. continue a părţii fixate, iar mărimea $T_{95} = t_c$ este timpul de creștere al răspunsului procesului până la 95 % din valoarea staționară.

7.2.4 *Metoda răspunsului timpului minim*

Pentru obținerea unui algoritm de dimensiune redusă se presupune a construi f.d.t. discretă a sistemului numeric deschis $H_d(z^{-1})$ de dimensiuni reduse. Forma minimă a f.d.t. $H_d(z^{-1})$ a sistemului deschis se definește pentru semnale tipice treaptă și rampă [4, 16].

Se consideră cazul general când semnalul discret al referinței este aplicat la intrarea sistemului numeric se descrie în forma:

$$r(z^{-1}) = \frac{M(z^{-1})}{(1-z^{-1})^N}, \tag{7.48}$$

unde $M(z^{-1})$ este un polinom fără zerouri în $z = 1$, iar $N = 1, 2, 3, ...$ este un număr întreg pozitiv natural.

Pentru forme particulare ale polinomului $M(z^{-1})$ şi anumite valori ale lui *N* se obțin semnalele tipice.

1. Dacă polinomul $M(z^{-1}) = 1$ şi numărul $N = 1$, atunci se obţine semnalul treaptă:

$$r(z^{-1}) = \frac{1}{1-z^{-1}}. \tag{7.49}$$

2. Dacă polinomul $M(z^{-1}) = Tz^{-1}$ şi numărul $N = 2$, atunci se obţine semnalul rampă:

$$r(z^{-1}) = \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}\,. \tag{7.50}$$

Proiectarea sistemului numeric prin metoda timpului minim se bazează pe impunerea performanțelor sistemului:

1. Eroarea staționară a sistemului automat să fie nulă pentru momentele de eșantionare pentru intrările polinomiale de un grad anumit.

2. Răspunsul tranzitoriu al sistemului să fie cât mai rapid posibil şi cu timpul de reglare definit de un număr minim de perioade de eșantionare.

3. Realizabilitatea fizică a algoritmului de reglare.

Pentru satisfacerea performanței de eroare staționară $\varepsilon = 0$ se consideră structura standard a unui sistem numeric pentru care transformata z a erorii se dă de relaţia:

$$\varepsilon(z) = r(z) - y(z) = r(z) - H_0(z)r(z) = r(z)(1 - H_0(z)), \tag{7.51}$$

unde $H_0(z)$ este f.d.t. discretă a sistemului automat închis.

Utilizând teorema valorii finale a transformatei z se calculează expresia erorii staţionare $\varepsilon(z)$:

$$\varepsilon(z) = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})r(z)\big(1 - H_0(z^{-1})\big) =$$

$$= \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})\frac{M(z^{-1})}{(1-z^{-1})^N}\big(1 - H_0(z^{-1})\big). \tag{7.52}$$

Deoarece polinomul $M(z^{-1})$ nu are zerouri în $z = 1$, condiţia necesară pentru eroare staţionară nulă este:

$$1 - H_0(z^{-1}) = (1 - z^{-1})^N F(z^{-1}), \tag{7.53}$$

unde $F(z^{-1})$ este un polinom în z^{-1}, care nu are zerouri la $z = 1$. Din expresia (7.53) se calculează f.d.t. discretă a sistemului închis cu relaţia:

$$H_0(z^{-1}) = \frac{z^N - (z-1)^N F(z^{-1})}{z^N}. \quad (7.54)$$

Ecuația caracteristică a sistemului numeric obținut cu algoritmul răspunsului impus este:

$$z^p = 0, \text{ pentru } p \geq N, \quad (7.55)$$

unde p este un număr pozitiv întreg.

Astfel, dacă ecuația caracteristică a unui sistem numeric are forma (7.55) și are rădăcini numai în $z = 0$, atunci eroarea staționară a sistemului va tinde la zero într-un număr finit de perioade de eşantionare, iar răspunsul sistemului este aperiodic.

Se verifică condiția de realizabilitate fizică a regulatorului cu relația:

$$(p - z)_{H_0} = (p - z)_{H_P}, \quad (7.56)$$

care dacă nu este îndeplinită, atunci se utilizează polinomul $F(z^{-1})$.

Pentru diferite tipuri de semnale de intrare expresia (7.53) va lua forme particulare ca:

1. Pentru semnal de referință treaptă unitară discretă $r(k) = 1(k)$ şi $N = 1$ se obţine:

$$H_0(z^{-1}) = 1 - (1 - z^{-1})F(z^{-1}). \quad (7.57)$$

2. Pentru semnal de referință rampă unitară discretă $r(k) =$ $= k1(k)$ şi $N = 2$ se obţine:

$$H_0(z^{-1}) = 1 - (1 - z^{-1})^2 F(z^{-1}). \quad (7.58)$$

3. Pentru semnal de referință parabolă unitară discretă $r(z) =$ $= t^2 1(t)$ şi $N = 3$ se obţine:

$$H_0(z^{-1}) = 1 - (1 - z^{-1})^3 F(z^{-1}). \quad (7.59)$$

Pentru a obține răspunsul minimal pentru fiecare tip de semnal în parte se cere ca polinomul $F(z^{-1}) = 1$ şi expresiile (7.57)–(7.59) au forma următoare:

1. Pentru semnal de referință treaptă unitară discretă $r(k) = 1(k)$ şi $N = 1$ se obţine:

$$H_0(z^{-1}) = 1 - (1 - z^{-1})F(z^{-1}) = 1 - 1 + z^{-1} = z^{-1}. \quad (7.60)$$

2. Pentru semnal de referință rampă $r(t) = t1(t)$, $N = 2$ şi $F(z^{-1})$ se obţine:

$$H_0(z^{-1}) = 1-(1 - z^{-1})^2 F(z^{-1}) = 1 - 1 + 2z^{-1} - z^{-2} =$$
$$= 2z^{-1} - z^{-2}. \quad (7.61)$$

3. Pentru semnal de referință parabolă $r(z) = t^2 1(t)$ $N = 3$ şi $F(z^{-1})$ se obţine:

$$H_0(z^{-1}) = 1 - (1 - z^{-1})^3 F(z^{-1}) = 3z^{-1} - 3z^{-2} + z^{-3}. \quad (7.62)$$

Din relațiile (7.60)–(7.62) se constată că eroarea staționară se va anula pentru semnalul treaptă discretă într-o perioadă de eșantionare, pentru semnal rampă discretă eroarea se va anula în două perioade de eșantionare şi pentru semnal parabolă discretă se anulează pe durata a trei perioade de eșantionare.

Această condiție este posibilă numai dacă este asigurată condiția de realizabilitate fizică a algoritmului elaborat, fără a cere ca $F(z^{-1}) \neq$ $\neq 1$.

Dacă este construită f.d.t. discretă $H_0(z^{-1})$ a sistemului închis pentru semnalul de intrare specificat şi este cunoscută f.d.t. discretă $H_P(z^{-1})$ a procesului, atunci se poate calcula f.d.t. discretă a algoritmului de reglare după relația:

$$H_R(z^{-1}) = \frac{H_0(z^{-1})}{1-H_0(z^{-1})} \frac{1}{H_P(z^{-1})} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})}. \quad (7.63)$$

Astfel, răspunsul sistemului automat numeric este minimal pentru referința considerată, iar performanțele sunt optimale.

Pentru modele de procese asimptotic stabile (de fază minimă) se va obține un algoritm de reglare recurent cauzal de dimensiune minimă, dacă se compensează toate zerourile polinomului caracteristic al procesului.

Utilizarea modelelor (7.60)–(7.62) pentru sinteza algoritmului numeric de reglare, având o formă minimă, poate conduce la algoritmi necauzali, la care valorile comenzii inițiale pot fi necontrolabile.

Deoarece algoritmul de reglare conține modelul invers al modelului procesului se cere precauție la compensarea singularităților instabile ale procesului.

Observație: În cadrul acestor metode valoarea erorii staționare este egală cu zero în momentele de eșantionare, dar între momentele de eșantionare eroarea nu trebuie să fie zero, deoarece ieșirea sistemului automat tinde de a intra într-un regim oscilatoriu în jurul valorii staționare.

Pentru acest caz modelul discret al obiectului de reglare se aplica modelul discret al obiectului obținute pentru algoritmul normal sau algoritmul extins.

Exemplul 7.3. Se consideră modelul obiectului de reglare cu parametrii coeficientul de transfer $k = 0.5$, constantele de timp $T_1 = 5$ s, $T_2 = 2$ s, timpul mort $\tau = 1.0$ s.

Se cere să se elaboreze algoritmul timpului minimal și să se determine mărimea comenzii în formă operațională și în domeniul timpului discret.

Soluționare. 1. Modelul matematic discret aproximat poate fi utilizat de la cazul algoritmului normal sau de la algoritmul extins. Se utilizează modelul discret aproximat prin metoda trapezului de la algoritmul extins descris cu f.d.t:

$$H_P(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{B(z)}{A(z)} = z^{-1}\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+b_3z^{-3}}{a_0-a_1z^{-1}+a_2z^{-2}} =$$

$$= \frac{0.048z^{-1}+0.1442z^{-2}+0.1442z^{-3}+0.048z^{-4}}{1-0.8307z^{-1}+0.1385z^{-2}}.$$

2. Se construiește funcția de transfer discretă $H_0(z)$ a sistemului închis de forma (7.60):

$$H_0(z) = z^{-2}.$$

3. Se construiește algoritmul timpului minim fiind cunoscute f.d.t. $H_P(z)$ a procesului și f.d.t. $H_0(z)$ a sistemului închis după relația (7.63):

$$H_R(z^{-1}) = \frac{H_0(z^{-1})}{1-H_0(z^{-1})}\frac{1}{H_P(z^{-1})} = \frac{H_0(z^{-1})}{1-H_0(z^{-1})}\frac{A(z^{-1})}{B(z^{-1})} =$$

$$= \frac{z^{-2}}{1-z^{-2}}\frac{1-a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}{z^{-1}(b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+b_3z^{-3})} =$$

$$= \frac{z^{-2}}{1-z^{-2}}\frac{1-1.0z^{-1}+0.2222z^{-2}}{z^{-1}(0.0278+0.0833z^{-1}+0.0833z^{-2}+0.0278z^{-3})} =$$

$$= \frac{z^{-1} - 1.0z^{-2} + 0.2222z^{-3}}{0.0278 + 0.0833z^{-1} + 0.0555z^{-2} - 0.0555z^{-3} - 0.0833z^{-4} - 0.0278z^{-5}} =$$

$$= \frac{35.9712z^{-1} - 35.9712z^{-2} + 7.9928z^{-3}}{1 + 2.9964z^{-1} + 1.9964z^{-2} - 1.9964z^{-3} - 2.9964z^{-4} - z^{-5}} =$$

$$= \frac{q_1z^{-1} - q_2z^{-2} + q_3z^{-3}}{p_0 + p_1z^{-1} + p_2z^{-2} - p_3z^{-3} - p_4z^{-4} - p_5z^{-5}} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \frac{u(z^{-1})}{\varepsilon(z^{-1})},$$

unde parametrii algoritmului au valorile $q_0 = 0$, $q_1 = 35.9712$, $q_2 = 35.9712$, $q_3 = = 7.9928$, $p_0 = 1$, $p_1 = 2.9964$, $p_2 = 1.9964$, $p_3 = 1.9964$, $p_4 = 2.9964$, $p_5 = 1$.

4. Mărimea comenzii în forma operațională este:

$$u(z^{-1})P(z^{-1}) = \varepsilon(z^{-1})Q(z^{-1}),$$

$$u(z^{-1})(p_0 + p_1z^{-1} + p_2z^{-2} - p_3z^{-3} - p_4z^{-4} - p_5z^{-5}) =$$

$$= \varepsilon(z^{-1})(q_1z^{-1} - q_2z^{-2} + q_3z^{-3}),$$

$$u(z^{-1}) = \frac{1}{p_0}[-p_1z^{-1}u(z^{-1}) - p_2z^{-2}u(z^{-1}) + p_3z^{-3}u(z^{-1}) + p_4z^{-4}u(z^{-1}) +$$

$$+p_5z^{-5}u(z^{-1}) + q_1z^{-1}\varepsilon(z^{-1}) - q_2z^{-2}\varepsilon(z^{-1}) + q_3z^{-3}\varepsilon(z^{-1})].$$

Mărimea comenzii în domeniul timpului discret cu coeficienții calculați este:

$$u(kT) = \frac{1}{p_0}[-p_1u((k-1)T) - p_2z^{-2}u((k-2)T) + p_3u\big((k-3)T\big) +$$

$$+p_4z^{-4}u((k-4)T) + p_5u((k-5)T) + q_1\varepsilon\big((k-1)T\big) -$$

$$-q_2\varepsilon\big((k-2)T\big) + q_3\varepsilon\big((k-3)T\big)];$$

$$u(kT) = \frac{1}{0.0278}[-0.0833u((k-1)T) - 0.0555u\big((k-2)T\big) +$$

$$+0.0555u((k-3)T) + 0.0278u\big((k-4)T\big) + 0.0278u\big((k-5)T\big) +$$

$$+\varepsilon\big((k-1)T\big) - \varepsilon\big((k-2)T\big) + 0.2222\varepsilon\big((k-3)T\big)],$$

$$u(kT) = -2.9964u\big((k-1)T\big) - 1.9964u\big((k-2)T\big) +$$

$$+1.9964u((k-3)T) + 2.9964u\big((k-4)T\big) + u\big((k-5)T\big) +$$

$$+35.9712\varepsilon\big((k-1)T\big) - 35.9712\varepsilon\big((k-2)T\big) + 7.9928\varepsilon\big((k-3)T\big).$$

Exemplul 7.4. Se consideră un motor de curent continuu, a cărui schemă este dată în fig. 7.4, iar modelul matematic descrie transferul tensiune–unghiul axului [16].

Parametrii motorului: coeficientul de transfer $k = 2$, constanta de timp electromecanică $T_0 = 4$ s.

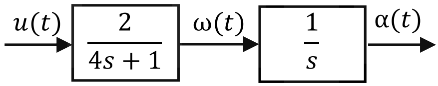

Fig. 7.4. Modelul matematic al motorului de curent continuu

Funcţia de transfer a motorului ca obiect de reglare este de ordinul $m = 2$:

$$H_P(s) = \frac{\alpha(s)}{u(s)} = \frac{k}{s(T_0 s+1)} = \frac{2}{s(4s+1)}.$$

Se cere: 1. Să se calculeze algoritmul de reglare normal pentru modelul dat al motorului de curent continuu.

2. Să se determine algoritmul de reglare extins pentru valoarea iniţială a comenzii $u(0) = 4$.

3. Să se calculeze algoritmul de reglare care să asigure răspunsul minimal la semnal de referinţă treaptă unitară.

Rezolvare.

1.1. Se alege perioada de eşantionare din condiţia (7.46):

$\frac{T}{T_\Sigma} \geq 0.36$, rezultă $T = 0.36 T_\Sigma = 0.36 T_0 = 0.36 \cdot 4 = 1.44 \approx 2$ s.

1.2. Funcția de transfer a motorului se transformă în ecuația diferențială:

$$\alpha(s)(4s^2 + s) = 2u(s), \; 4s^2\alpha(s) + s\alpha(s) = 2u(s),$$

$$4\frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} + \frac{d\alpha(t)}{dt} = 2u(t).$$

1.3. Se determină modelul discret al obiectului, aplicănd metoda de discretizare a dreptungiului în avans cu perioada calculată $T = 2$ s și ecuația diferențială se transformă în ecuație cu diferențe în forma:

$$4\frac{\Delta^2\alpha(k)}{T^2} + \frac{\Delta\alpha(k)}{T} = 2u(k),$$

$$\alpha(k+2) - 2\alpha(k+1) + \alpha(k) + 0.5[\alpha(k+1) - \alpha(k)] = 2u(k),$$

$$\alpha(k+2) - 1.5\alpha(k+1) + 0.5\alpha(k) = 2u(k).$$

Acestei ecuații îi corespunde expresia operațională în transformata z:

$$\alpha(z)(z^2 - 1.5z + 0.5) = 2u(z),$$

$$\alpha(z^{-1})(1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}) = 2z^{-2}u(z^{-1}),$$

din care se determină f.d.t. discretă de forma:

$$H_P(z^{-1}) = \frac{\alpha(z^{-1})}{u(z^{-1})} = \frac{2z^{-2}}{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}} = \frac{b_2 z^{-2}}{1-a_1 z^{-1}+a_2 z^{-2}} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$$

cu parametrii: $b_1 = 0$, $b_2 = 2$, $a_1 = -1.5$, $a_2 = 0.5$, ordinul $m = 2$.

1.4. Se calculează valoarea iniţială a mărimii de comandă $u(0) = q_0$ după relația (7.26) :

$$q_0 = \frac{1}{b_1+b_2} = \frac{1}{b_2} = \frac{1}{2} = 0.5.$$

1.5. Se calculează parametrii algoritmului normal după relaţiile (7.24):

$$q_1 = q_0 a_1 = 0.5(-1.5) = -0.75,\ q_2 = q_0 a_2 = 0.5 \cdot 0.5 = 0.25,$$

$$p_1 = q_0 b_1 = 0.5 \cdot 0 = 0,\ p_2 = q_0 b_2 = 0.5 \cdot 2 = 1.$$

1.6. Funcția de transfer a algoritmului normal este:

$$H_R(z^{-1}) = \frac{u(z^{-1})}{\varepsilon(z^{-1})} = \frac{Q(z^{-1})}{1-P(z^{-1})} = \frac{q_0+q_1 z^{-1}+q_2 z^{-2}}{1-p_2 z^{-2}} = \frac{0.5-0.75z^{-1}+0.25z^{-2}}{1-z^{-2}},$$

care este fizic realizabil deoarece are gradul egal cu al părţii fixate $m = 2$.

2.1. Pentru algoritmul exins perioada se calculează cu relaţia (7.47):

$T = 0.22T_\Sigma = 0.22 \cdot 4 = 0.88$ s. Se alege perioada $T = 2$ s.

În acest caz parametrii părţii fixate sunt cei calculaţi mai sus în p. 1.5:

$$b_1 = 0,\ b_2 = 2,\ a_1 = -1.5,\ a_2 = 0.5,\ m = 2,$$

iar f.d.t. discretă a părții fixate are forma:

$$H_P(z) = \frac{\alpha(z)}{u(z)} = \frac{2z^{-2}}{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}}.$$

2.2. Se calculează valoarea iniţială a mărimii de comandă $u(0) = q_0 = 4$ şi se verifucă condiţia $u(0) \geq u(1)$ sau condiția dată de relația:

$$q_0 \geq \frac{1}{1-a_1}\frac{1}{\sum_{j=1}^{m} b_j} = \frac{1}{1+1.5}\frac{1}{2} = 0.2,$$

care este asigurată.

2.3. Se calculează parametrii algoritmului extins după relațiile (7.41):

$q_1 = q_0(a_1 - 1) = 4(-1.5 - 1) = 4 \cdot (-2.5) = -10,$

$q_2 = q_0(a_2 - a_1) + \frac{a_1}{\sum_{j=1}^{m} b_j} = 4(0.5 + 1.5) - \frac{1.5}{2} = 4 \cdot 2 - 0.75 = 7.25,$

$q_3 = -a_2(q_0 - \frac{1}{\sum_{j=1}^{m} b_j}) = -0.5\left(4 - \frac{1}{2}\right) = -0.5 \cdot 3.5 = -1.75,$

$p_1 = q_0 b_1 = 0.5 \cdot 0 = 0,$

$p_2 = q_0(b_2 - b_1) + \frac{1}{\sum_{j=1}^{m} b_j} = 4 \cdot 2 + \frac{1}{2} = 8.5,$
$p_3 = -b_2(q_0 - \frac{1}{\sum_{j=1}^{m} b_j}) = -2\left(4 - \frac{1}{2}\right) = -7.0.$

2.4. Se construieşte f.d.t. discretă a algoritmului extins:

$$H_R(z^{-1}) = \frac{u(z^{-1})}{\varepsilon(z^{-1})} = \frac{Q(z^{-1})}{1-P(z^{-1})} = \frac{q_0+q_1z^{-1}+q_2z^{-2}+q_3z^{-3}}{1-p_2z^{-2}-p_3z^{-3}} =$$

$$= \frac{4-10z^{-1}+7.25z^{-2}-1.75z^{-3}}{1-8.5z^{-2}+7z^{3}}.$$

3.1 Se consideră modelul părţii fixate de la punctul unu, care are excesul de poli–zerouri $(p-z)_{H_P} = 2$.

Răspunsul minimal pentru un semnal treaptă este asigurat de un model de f.d.t. $H_0(z^{-1}) = z^{-1}$, dar care nu asigură realizabilitatea fizică a algoritmului de reglare şi atunci se alege f.d.t. de forma $H_0(z^{-1}) = z^{-2}$, care asigură condiția de realizabilitate fizică a algoritmului proiectat.

3.2. Se construieşte algoritmul de reglare minimal după relaţia (7.63):

$$H_R(z^{-1}) = \frac{u(z^{-1})}{\varepsilon(z^{-1})} = \frac{H_0(z^{-1})}{1-H_0(z^{-1})}\frac{1}{H_P(z^{-1})} = \frac{z^{-2}}{1-z^{-2}}\frac{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}}{2z^{-2}} =$$

$$= \frac{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}}{2(1-z^{-2})} = \frac{0.5-0.75z^{-1}+0.25z^{-2}}{1-z^{-2}} = \frac{q_0-q_1z^{-1}+q_2z^{-2}}{1-p_2z^{-2}} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})},$$

unde parametrii de acord ai algoritmului timpului minim de reglare elaborat au valorile $q_0 = 0.5$, $q_1 = 0.75$, $q_2 = 0.25$, $p_1 = 0$, $p_2 = 1$.

Condiţia de realizabilitate fizică a algoritmului este îndeplinită și rezultă că eroarea se va anula după două perioade de eşantionare, iar utilizând expresia (7.59) rezultă pentru polinomul $F(z^{-1})$ o expresie diferită de 1: $F(z^{-1}) = 1 + z^{-1}$, care confirmă alegerea corectă a f.d.t. a sistemului numreic închis:

$$H_0(z^{-1}) = 1 - (1 - z^{-1})F(z^{-1}) = 1 - (1 - z^{-1})(1 + z^{-1}) =$$
$$= 1 - 1 + z^{-1} - z^{-1} + z^{-2} = z^{-2}.$$

S-a simulat sistemul cu regualtorul sintetizat și răspunsul indicial se dă în fig. 7.5 cu performanțele: timpul de creștere $t_c = 6.85$ s, suprareglarea $\sigma = 12.04$ %, timpul de reglare $t_r = 16.69$ s.■

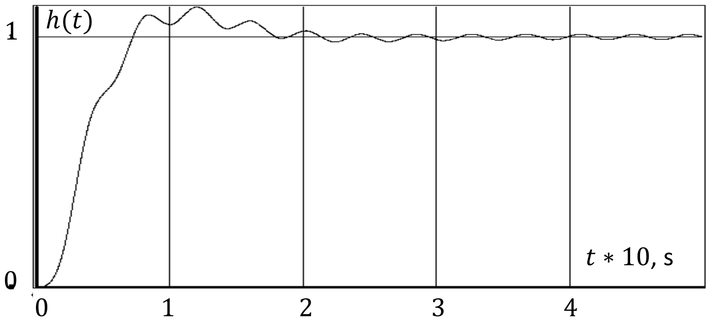

Fig. 7.5. Răspunsul indicial al sistemului cu regulatorul minimal la ex. 7.4

Chestionar și probleme

1. Explicați conceptul mefodei timpului finit.

2. Prin ce metode se poate obține modelul discret al procesului condus?

3. Cum se alege perioada de eșantionare și care sunt etapele de calcul a algoritmului normal?

4. Cum se alege valoarea inițială a comenzii $u(0)$?

5. Cum se alege perioada de eșantionare și care sunt etapele de calcul a algoritmului extins?

6. Cum se alege perioada de eșantionare și care sunt etapele de calcul a algoritmului timpului minimal?

7. Prin ce se diferențiază algoritmul extins de algoritmul normal?

8. Explicați cum se alegere funcția de transfer a sistemului numeric închis la metoda timpului minimal?

9. Explicați procedura de proiectare a regulatorului numeric după metoda timpului minimal.

10. Pentru modelul obiectului de reglare continuu cu funcția de transfer cu parametrii cunoscuți:

$$H_P(s) = \frac{k}{s(T_0 s+1)} = \frac{3}{s(9s+1)}$$

alegeţi perioada de eșantionare și elaboraţi algoritmul normal.

10. Pentru modelul obiectului de reglare discret obținut la p. 10 elaboraţi algoritmul timpului minimal.

8 PRIOECTAREA ALGORITMILOR NUMERICI DE REGLARE PENTRU PROCESE MULTIVARIABILE

8.1 Modele matematice ale proceselor multivariabile

Procesele tehnologice complexe se caracterizează prin două sau mai multe variabile de intrare şi ieşire se numesc procese multivariabile şi rezultă necesitatea de reglare a mai multor variabile [1, 4, 5, 16].

În corespundere cu dimensiunea procesului (fig. 8.1) se utilizează un număr adecvat de traductoare şi elemente de execuţie pentru fiecare canal a mărimilor reglate. Schema structurală a unui sistem automat multivariabil se dă în fig. 8.2 cu regulatorul pe calea directă, în care sunt însemnările: $u_1, \dots, u_m$ mărimile de intrare, EE – elemente de execuţie, $v_1, \dots, v_m$ – vectorul mărimii de reglare a procesului, z - vectorul ieşirii procesului P– obiectivul conducerii, T – traductoare, $y_1, \dots, y_n$ - mărimile măsurate ale procesului, $p_1, \dots, p_r$ - vectorul perturbaţiilor.

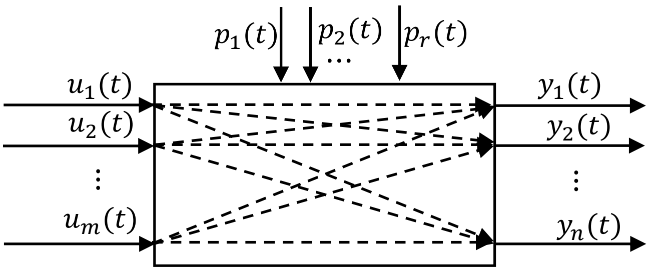

Fig. 8.1. Proces multivariabil

Transferul intrare–ieșire dintre mărimea de ieșire $\boldsymbol{y}(t)$ este funcţie de vectorii intrărilor $\boldsymbol{u}(t)$ şi $\boldsymbol{p}(t)$:

$$\boldsymbol{y}(t) = f(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{p}(t)). \tag{8.1}$$

Conducerea unui proces multivariabil se efectuează pe baza unui obiectiv definit prin mărimea de calitate $\boldsymbol{z}$, care exprimă parametrii tehnologici: temperaturi, presiuni, debite, concentraţii etc. sau mărimi netehnologice: randamente, cantităţi producţii etc. Cu ajutorul vectorului $\boldsymbol{z}$ obiectivul conducerii se exprimă prin necesitatea urmăririi de catre $\boldsymbol{z}$ a unui program impus de tehnolog şi prezentat ca vector de referinţă $\boldsymbol{z}_r$.

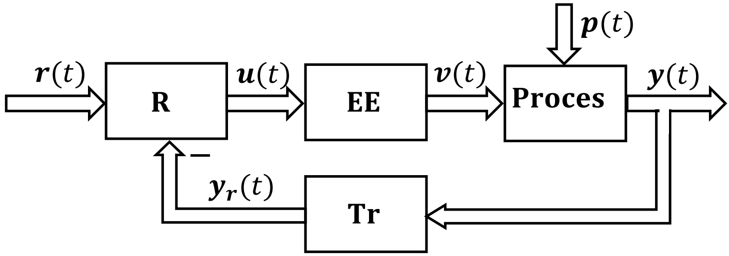

Fig. 8.2. Schema funcțională a sistemului automat multivariabil

Intervenţia asupra procesului condus se realizează prin intermediul unui set de mărimi de execuţie $\boldsymbol{v}$, iar starea curentă a procesului este cunoscută prin mărimile măsurate $y_1, \dots, y_n$. Deoarece mărimile de calitate nu sunt accesibile, atunci programul de referinţă se impune de obicei mărimilor măsurate $\boldsymbol{y}$.

Relaţiile dintre mărimile respective pe canalele directe şi de interinfluenţă au o anumită funcţie de transfer în transformata s sau z. În continuare, toate expresiile se descriu în transformata z, dar substituind variabila $z = s$ se obțin relațiile în transformata s și tratate respectiv în domeniul timpului continuu. În absenţa perturbaţiilor $p = 0$ şi considerând procesul multivariabil liniar, f.d.t. a fiecărui canal se prezintă prin $H_{ij}(z)$, $i = \overline{1,n}$ şi $j = \overline{1,m}$, iar modelul matematic al transferului intrare–ieşire al procesului multivariabil se descrie în forma:

$$\begin{aligned} y_1(z) &= H_{11}(z)u_1(z) + H_{12}(z)u_2(z) + \cdots + H_{1m}(z)u_m(z), \\ y_2(z) &= H_{21}(z)u_1(z) + H_{22}(z)u_2(z) + \cdots + H_{2m}(z)u_m(z), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n(z) &= H_{n1}(z)u_1(z) + H_2(z)u_2(z) + \cdots + H_{nm}(z)u_m(z) \end{aligned} \tag{8.2}$$

sau în forma vector matricială:

$$\boldsymbol{y}(z) = \boldsymbol{H}_{PF}(z)\boldsymbol{u}(z), \tag{8.3}$$

unde $\boldsymbol{y}(z) = [y_1(z), y_2(z), \dots, y_n(z)]^T$, $\boldsymbol{u}(z) = [u_1(z), \dots, u_m(z)]^T$, iar $\boldsymbol{H}_{PF}(z)$ este matricea de transfer a procesului de forma:

$$\boldsymbol{H}_{PF}(z) = \begin{vmatrix} H_{11}(z) & H_{12}(z) & \cdots & H_{1m}(z) \\ H_{21}(z) & H_{22}(z) & \cdots & H_{2m}(z) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ H_{n1}(z) & H_{n2}(z) & \cdots & H_{nm}(z) \end{vmatrix}, \tag{8.4}$$

în care funcțiile de transfer $H_{ii}\,(z)$ descriu transferul intrare-ieșire pe fiecare canal direct, iar funcțiile de transfer $H_{ij}\,(z)$ descriu interacțiunile dintre intrarea canalul i și ieșirea canalului j.

8.2 Algoritmi de reglare a proceselor multivariabile

Reglarea proceselor multivariabile la acţiunea semnalelor de referinţă $\boldsymbol{u}$ şi a perturbaţiilor $\boldsymbol{p}$ se realizează cu algoritmi de reglare sau regulatoare multivariabile (RMV). Regulatoarele pot fi plasate pe calea directă (fig. 8.3, *a*) sau pe calea de reacţie (fig. 8.3, *b*) a sistemului multivariabil.

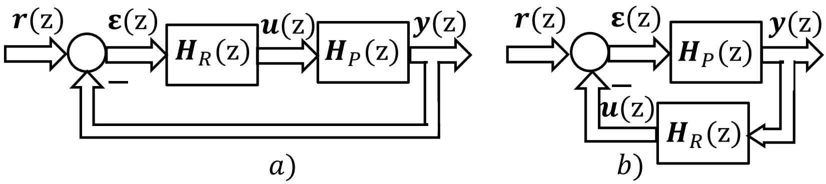

Fig. 8.3. Structuri de sisteme multivariabile

Regulatoarele RMV au rolul de a asigura atât performanţele impuse pentru fiecare canal de legătură directă intrare–ieşire, cât şi de a compensa efectul perturbaţiilor şi al interacţiunilor existente între diferite variabile pe diferite canale intrare-ieşire şi perturbaţie-ieșire.

Datorită complexităţii sistemelor multivariabile, proiectarea acestora prezintă particularităţi specifice în raport cu sistemele monovariabile.

Astfel, necesitatea compensării interacţiunilor dintre canale impune utilizarea regulatoarelor multivariabile, deoarece folosirea regulatoarelor monovariabile destinate conducerii fiecărei mărimi de ieşire y_i, numai în baza legăturilor principale intrare-ieşire, care prezintă o soluţie uşor de implementat, conduce la obţinerea unor performanţe nesatisfăcătoare.

Pentru a ilustra cele două posibilităţi de utilizare a regulatoarelor monovariabile şi multivariabile se consideră un proces cu două intrări şi două ieşiri. Acest tip de proces poate fi descris prin forme canonice P şi V (fig. 8.4). Din fig. 8.4, *a*) rezultă relaţiile intrare-ieşire care descriu aceste forme canonice. Pentru forma canonică P procesul se descrie cu matricea de transfer de forma:

$$\boldsymbol{H}(z) = \begin{vmatrix} H_{11}(z) & H_{12}(z) \\ H_{21}(z) & H_{22}(z) \end{vmatrix}, \tag{8.5}$$

iar mărimea de ieşire se exprimă prin forma:

$$\boldsymbol{y}(z) = \boldsymbol{H}(z)\boldsymbol{u}(z), \tag{8.6}$$

unde

$$\boldsymbol{y}(z) = [y_1(z), y_2(z)]^T,\ \boldsymbol{u}(z) = [u_1(z), u_2(z)]^T. \tag{8.7}$$

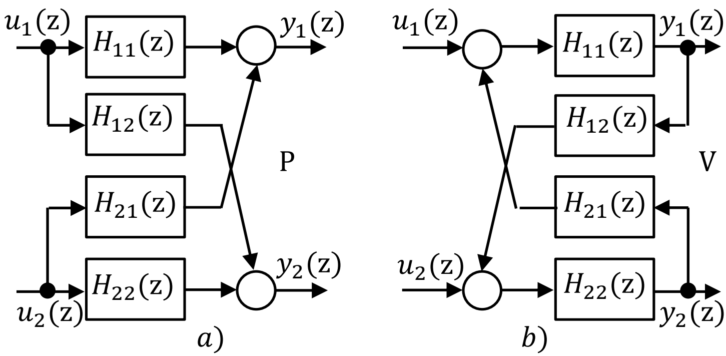

Fig. 8.4. Structuri de procese multivariabile

Pentru forma canonică V (fig. 8.4, *b*) a procesului se obține descrierea în forma:

$$\begin{vmatrix} y_1(z) \\ y_2(z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} H_{11}(z) & 0 \\ 0 & H_{22}(z) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1(z) \\ u_2(z) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & H_{12}(z) \\ H_{21}(z) & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1(z) \\ y_2(z) \end{vmatrix}. \tag{8.8}$$

Se introduc notaţiile în (8.8):

$$\boldsymbol{H}_k(z) = \begin{vmatrix} H_{11}(z) & 0 \\ 0 & H_{22}(z) \end{vmatrix}, \boldsymbol{H}_h(z) = \begin{vmatrix} 0 & H_{12}(z) \\ H_{21}(z) & 0 \end{vmatrix}, \quad (8.9)$$

unde $\boldsymbol{H}_k(z)$ este matricea diagonală alcătuită din f.d.t. care descriu canalele directe principale, iar $\boldsymbol{H}_h(z)$ prezintă matricea diagonală formată cu f.d.t. de pe canalele de interacţiune.

Relația (8.8) cu notaţiile (8.9) se prezintă în forma:

$$\boldsymbol{y}(z) = \boldsymbol{H}_k(z)\boldsymbol{u}(z) + \boldsymbol{H}_k(z)\boldsymbol{H}_h(z)\boldsymbol{y}(z) \quad (8.10)$$

sau după unele transformări se obţine:

$$\boldsymbol{y}(z)[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{H}_k(z)\boldsymbol{H}_h(z)] = \boldsymbol{H}_k(z)\boldsymbol{u}(z),$$

$$\boldsymbol{y}(z) = [\boldsymbol{I} - \boldsymbol{H}_k(z)\boldsymbol{H}_h(z)]^{-1}\boldsymbol{H}_k(z)\boldsymbol{u}(z). \quad (8.11)$$

Deoarece în structura canonică P a procesului intrările acţionează asupra tuturor ieşirilor prin f.d.t. $H_{ii}(z)$ şi $H_{ij}(z)$, rezultă că această structură de model poate fi folosită şi pentru descrierea proceselor multivariabile cu dimensiunea $m \neq n$. Însă, forma canonică V se poate utiliza pentru descrierea proceselor multivariabile numai de dimensiunea $m = n$.

Pentru un proces cu două intrări şi două ieşiri forma canonică P, structurile sistemelor de conducere cu regulatoare monovariabile şi regulatoare multivariabile se dau în fig. 8.5.

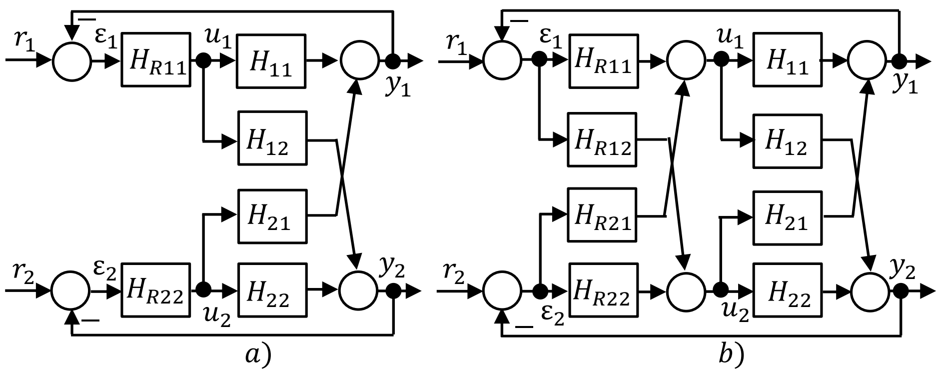

Fig. 8.5. Structuri de SMV cu regulatoare:
a) monovariabile, b) multivariabile

Structura regulatorului multivariabil conţine patru componente cu f.d.t.: primele f.d.t. $H_{R11}(z)$ şi $H_{R22}(z)$ numite regulatoare principale, care reglează mărimile respective de ieşire şi alte două f.d.t. $H_{R12}(z)$ și $H_{R21}(z)$ numite regulatoare de decuplare și care prin acţiunea lor compensează acțiunile existente de interacţiunile între cele două canale.

Numărul de blocuri de reglare din structura regulatorului multivariabil este funcţie de dimensiunea procesului analizat.

Intensitatea interacţiunilor din structura părţii fixate impune adoptarea structurii de reglare cu regulatoare monovariabile sau multivariabile. Din aceste considerente este necesar a cunoaşte modelul matematic al părţii fixate cu interacţiunile dintre canale.

În cazul utilizării regulatorului multivariabil pentru procesul multivariabil, aceasta conduce la compensarea interacţiunilor dintre canale şi se obţine o decuplare completă între intrările şi ieşirile sistemului multivariabil şi fiecare mărime reglată este influenţată numai de mărimea de referinţă a canalului respectiv. Aceste tipuri de sisteme multivariabile se numesc *decuplate* sau *autonome*.

În cazul când regulatorul multivariail nu asigură decuplarea totală a interacţiunilor, atunci rămân anumite interacţiuni între mărimi de referinţă şi mărimi reglate din canale diferite şi sistemul multivariabil este *nedecuplat* sau *neautonom*.

8.3 Acordarea optimă a regulatoarelor monovariabile pentru procese multivariabile

Dacă structura regulatorului este cunoscută, atunci acordarea optimă a parametrilor se face utilizând criterii de optimizare sau reguli de acordare.

Se consideră un proces cu două intrări şi două ieşiri, care au o largă utilizare în practică şi pentru care se prezintă proceduri (reguli) de acordare a regulatoarelor monovariabile tipizate folosite pentru conducerea lor.

Se presupune structura obiectului multivariabil de forma canonocă P cu regulatoare monovariabile grupate în matricea de transfer de forma:

$$\boldsymbol{H}_R(z) = \begin{vmatrix} H_{R11}(z) & 0 \\ 0 & H_{R22}(z) \end{vmatrix}, \tag{8.12}$$

atunci vectorul mărimii de ieşire se exprimă în forma:

$$\boldsymbol{y}(z) = \boldsymbol{H}_R(z)\boldsymbol{H}_{PF}(z)\boldsymbol{\varepsilon}(z) =$$
$$= [\boldsymbol{I} + \boldsymbol{H}_R(z)\boldsymbol{H}_{PF}(z)]^{-1}\boldsymbol{H}_R(z)\boldsymbol{H}_{PF}(z)\boldsymbol{r}(z). \tag{8.13}$$

Din expresia (8.13) se obţine ecuaţia caracteristică a sistemului multivariabil:

$$\boldsymbol{A}(z) = \det[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{H}_R(z)\boldsymbol{H}_{PF}(z)] = 0, \tag{8.14}$$

care se prezintă în forma:

$$\det\begin{bmatrix} 1 + H_{R11}(z)H_{11}(z) & H_{R22}(z)H_{21}(z) \\ H_{R11}(z)H_{12}(z) & 1 + H_{R22}(z)H_{22}(z) \end{bmatrix} = 0 \tag{8.15}$$

sau se deschide determinantul în forma:

$$(1 + H_{R11}(z)H_{11}(z))\big(1 + H_{R22}(z)H_{22}(z)\big) -$$
$$-H_{R11}(z)H_{12}(z)H_{R22}(z)H_{21}(z) = 0. \tag{8.16}$$

Termenul al doilea din (8.16) exprimă interacţiunea dintre cele două bucle de reglare monovariabile date de f.d.t. $H_{12}(z)$ şi $H_{21}(z)$ din matricea de transfer a procesului. Expresia (8.16) se aduce la forma:

$$(1 + H_{R11}(z)H_{11}(z))\big(1 + H_{R22}(z)H_{22}(z)\big) \times$$
$$\times \left[1 - \frac{H_{R11}(z)H_{12}(z)}{(1+H_{R11}(z)H_{11}(z))}\frac{H_{R22}(z)H_{21}(z)}{\big(1+H_{R22}(z)H_{22}(z)\big)}\right] = 0. \tag{8.17}$$

În expresia (8.17) al doilea termin din paranteza pătrată se înmulţeşte şi se împarte la termenul $H_{11}(z)H_{22}(z)$ şi se obține:

$$(1 + H_{R11}(z)H_{11}(z))\big(1 + H_{R22}(z)H_{22}(z)\big) \times$$
$$\times \big(1 - k(z)H_{01}(z)H_{02}(z)\big) = 0, \tag{8.18}$$

unde

$$k(z) = \frac{H_{12}(z)H_{21}(z)}{H_{11}(z)H_{22}(z)}, \tag{8.19}$$

care este numit coeficientul dinamic de cuplare şi are o influenţă asupra valorilor proprii ale întregului sistem, iar $H_{01}(z)$ şi $H_{02}(z)$ sunt f.d.t. ale buclelor de reglare monovariabile:

$$H_{0i}(z) = \frac{H_{Rii}(z)H_{ii}(z)}{1+H_{Rii}(z)H_{ii}(z)},\ i = 1, 2. \tag{8.20}$$

Împărţind expresia (8.16) la termenul $\left(1 + H_{R22}(z)H_{22}(z)\right)$ şi respectiv la termenul $(1 + H_{R11}(z)H_{11}(z))$ se obţine sistemul:

$$(1 + H_{R11}(z)H_{11}(z)(1 - k(z)H_{02}(z)) = 0, \tag{8.21}$$

$$\left(1 + H_{R22}(z)H_{22}(z)\right)(1 - k(z)H_{01}(z)) = 0. \tag{8.22}$$

Analiza relaţiilor (8.21) şi (8.22) evidenţiază că interacţiunile din proces modifică f.d.t. a părţii fixare pentru fiecare canal principal. Astfel, se constată că f.d.t. $H_{11}(z)$ a canalului unu se modifică conform (8.20):

$$H_{11}(z)\left(1 - k(z)H_{02}(z)\right) = H_{11}(z) -$$

$$-H_{12}(z)\frac{H_{R22}(z)}{1+H_{R22}(z)H_{22}(z)}H_{21}(z), \tag{8.23}$$

iar f.d.t. $H_{22}(z)$ a canalului doi se modifică conform (8.22):

$$H_{22}(z)\left(1 - k(z)H_{01}(z)\right) = H_{22}(z) -$$

$$-H_{12}(z)\frac{H_{R11}(z)}{1+H_{R11}(z)H_{11}(z)}H_{21}(z). \tag{8.24}$$

Relaţiile (8.23) şi (8.24) se descriu cu structurile de reglare pentru canalul unu în fig. 8.6, a, iar pentru canalul doi în fig. 8.6, b.

În regimul staţionar al sistemului interacţiunile se determină de coeficientul de transfer static de cuplare:

$$k_0 = \lim_{z\to 1} k(z) = \lim_{z\to 1}\frac{H_{12}(z)H_{21}(z)}{H_{11}(z)H_{22}(z)} = \frac{k_{12}k_{21}}{k_{11}k_{22}}, \tag{8.25}$$

unde k_{ij} prezintă factorul de amplificare static al f.d.t. $H_{ij}(z)$, $i, j = 1, 2$.

Se utilizează noţiunea abaterea factorului de amplificare impus de interacţiunile dintre canale dat de relaţia:

$$\delta_{ii} = 1 - k_0 H_{0j}(1),\ i,\ j = 1, 2,\ i \neq j. \tag{8.26}$$

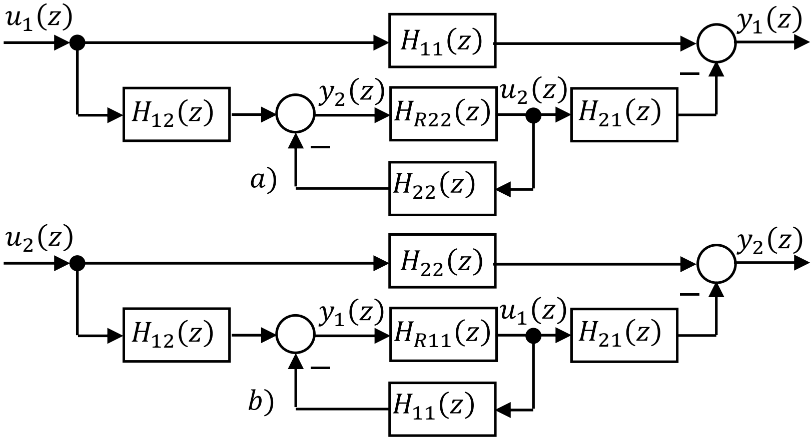

Fig. 8.6. Structurile de reglare monovariabile a canalelor unu a) şi doi b)

Reprezentarea abaterii factorului de amplificare δ_{ii} în funcţie de factorul static de cuplare k_0 (fig. 8.7) împarte procesele în două categorii:

1. Procese cuplate pozitiv atunci când $k_0 > 0$.
2. Procese cuplate negativ atunci când $k_0 < 0$.

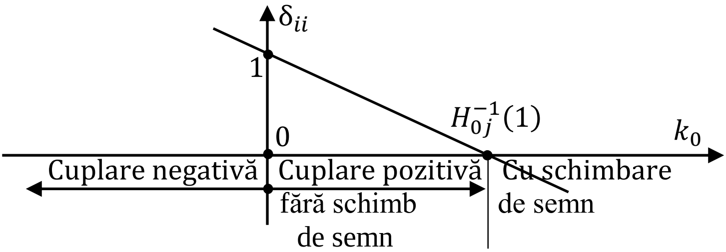

Fig. 8.7. Reprezentarea abaterii factorului de amplificare $\delta_{ii} = f(k_0)$

Alt tip de cuplare a proceselor se prezintă în raport cu f.d.t. $H_{ii}(z)$ principale şi f.d.t. $H_{ij}(z)$ de cuplare a părţii fixate. Procesele pot fi simetrice când f.d.t. principale şi de cuplare sunt identice:

$$H_{11}(z) = H_{22}(z), H_{12}(z) = H_{21}(z) \tag{8.27}$$

şi nesimetrice:

$$H_{11}(z) \neq H_{22}(z), H_{12}(z) \neq H_{21}. \quad (8.28)$$

În funcţie de tipul cuplării şi categoria proceselor s-au dezvoltat reguli de acordare a parametrilor regulatoarelor monovariabile. Există metoda bazată pe atingerea limitei de stabilitate al sistemului (regimul critic) pentru acordarea celor două regulatoare monovariabile de tip PID.

Procedura de acordare se bazează pe domeniile de stabilitate prezentate în fig. 8.8, care s-au obţinut prin reglarea procesului cu regulatoare proporţionale utilizând semnale continue [16].

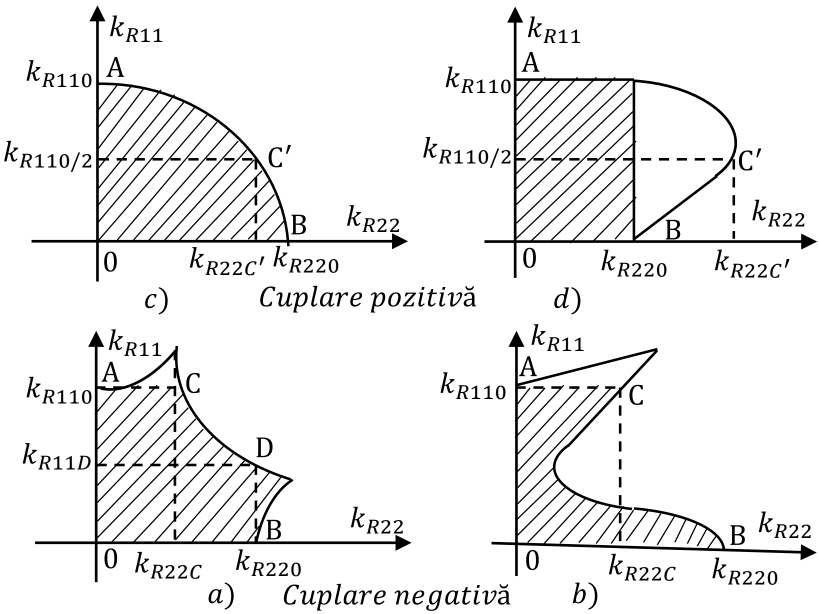

Fig. 8.8. Domeniile de stabilitate ale sistemului multivariabil: a, c – procese simetrice, b, d – procese nesimetrice

Procedura se poate extinde şi la sistemul discret, dacă se folosesc perioade de eşantionare suficient de mici ca funcţionarea sistemului multivariabil să fie cuazicontinuă.

Calculul parametrilor de acord ai regulatoarelor prin această metodă se realizează în două etape.

1. Se determină limitele de stabilitate pentru cele două bucle de

reglare monovariabile utilizând regulatoare proporţionale cu parametrii k_{R11} şi k_{R22} parcurgând paşii următori:

1.1. Se fixează $k_{R22} = 0$ şi se creşte k_{R11} până la valoarea lui k_{R110} pentru care se atinge limita se stabilitate (fig. 8.8, punctul A).

1.2. Se fixează $k_{R11} = 0$ şi se creşte k_{R22} până la valoarea lui k_{R220} pentru care se atinge limita de stabilitate (fig. 8.8, punctul B).

1.3. Se fixează $k_{R11} = k_{R110}$ şi se creşte k_{R22} până la o valoare pentru care se obţin noi oscilații cu amplitudinea constantă (fig. 8.8, numai în cazurile a şi b punctul C).

1.4. Dacă nu apar punctele intermediare C la pasul 1.3, atunci se creşte k_{R22} pentru $k_{R11} = k_{R110}/2$ şi se obţin punctele C' (fig. 8.7, cazurile c şi d).

1.5. Se fixează $k_{R22} = k_{R220}$ şi se creşte k_{R11} până se obţin noi oscilaţii cu amplitudinea constantă (fig. 8.8, cazul a, punctul D).

2. Se determină valorile optime ale parametrilor de acord k_R, T_I, T_D astfel ca:

2.1. Pentru regulatoarele P se recomandă, dacă performanţele buclei unu sunt mai importante, următoarele reguli:

$$k_{R11} = 0.5k_{R110}, k_{R22} = 0.5k_{R110},$$

dacă bucla doi este mai importantă atunci:

$$k_{R11} = 0.5k_{R11D},\ k_{R22} = 0.5k_{R110}.$$

2.2. Pentru regulatoarele PI valorile parametrilor de acord se calculează în funcție de importanța celor două bucle:

Bucla unu mai importantă:

$$k_{R11} = 0.5k_{R110}, k_{R22} = 0.5k_{R22C}, T_{Iii} = (0.8 \dots 1.2)T_{0C}, i = 1, 2.$$

Bucla doi mai importantă:

$$k_{R11} = 0.5k_{R11D}, k_{R22} = 0.5k_{R220}, T_{Iii} = 0.85T_{0ii}, i = 1, 2,$$

unde T_{0C} şi T_{0ii} sunt perioadele oscilaţiilor obţinute în punctele C şi respectiv A pentru $i = 1$ sau B pentru $i = 2$.

2.3. Pentru regulatoarele PID se recomandă calculele valorilor parametrilor de acord după expresiile:

$$k_{Rii} = 1.25k_{R110)(P)}, T_{Iii} = 0.5T_{Iii(PI)}, T_{Dii} = 0.25T_{Iii(PI)}, i = 1, 2.$$

Valorile care se obţin prin aplicarea acestor reguli pot fi utilizate şi în cazul discret folosind expresiile parametrilor discreţi q_0, q_1, q_2 în funcţie de parametrii continui k_R, T_I, T_D şi perioada de eşantionare T:

$$q_0 = k_R(1 + \frac{T}{T_I} + \frac{T_D}{T}), q_1 = -k_R(1 + 2\frac{T_D}{T}), q_2 = k_R\frac{T_D}{T}.$$

8.4 Conducerea noninteractivă a proceselor multivariabile

8.4.1 *Structuri noninteractive de sisteme multivariabile*

Utilizarea sistemelor automate cu regulatoare monovariabule pentru conducerea proceselor multivariabile cu interacţiuni strânse între canale conduce la performanţe nesatisfăcătoare. Pentru a obţine performanţe ridicate la conducerea cu astfel de procese se utilizează reglarea noninteractivă cu decuplarea canalelor în sistemul multivariabil.

Se consideră un sistem multivariabil cu dimensiunile variabilelor:

$$\mathrm{dim}\boldsymbol{y} = \mathrm{dim}\boldsymbol{u} = \mathrm{dim}\boldsymbol{p} \tag{8.29}$$

descris prin expresia mărimii de ieşire în formă operaţională:

$$\boldsymbol{y}(z) = [\boldsymbol{I} + \boldsymbol{H_R}(z)\boldsymbol{H}_{PF}(z)]^{-1}\boldsymbol{H}_R(z)\boldsymbol{H}_{PF}(z)\boldsymbol{r}(z) +$$

$$+[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{H}_R(z)\boldsymbol{H}_{PF}(z)]^{-1}\boldsymbol{H}_P(z)\boldsymbol{p}(z) \tag{8.30}$$

sau în forma vector matriceală:

$$\boldsymbol{y}(z) = \boldsymbol{H}_0(z)\boldsymbol{r}(z) + \boldsymbol{H}_{0p}(z)\boldsymbol{p}(z), \tag{8.31}$$

unde $\boldsymbol{H}_0(z)$ este matricea de transfer a sistemului multivariabil închis în raport cu semnalul de referinţă $\boldsymbol{r}(z)$, iar $\boldsymbol{H}_{0p}(z)$ este matricea de transfer a sistemului multivariabil închis în raport cu semnalul perturbaţiei $\boldsymbol{p}(z)$.

Schema structurală a sistemului multivariabil se dă în fig. 8.9.

Pentru structura sistemului multivariabil din fig. 8.9 se utilizează trei tipuri de reglări noninteractive care realizează următoarele decuplări:

1. Decuplarea sistemului deschis cu matricea de transfer:

$$\boldsymbol{H}_d(z) = \boldsymbol{H}_R(z)\boldsymbol{H}_{PF}(z), \tag{8.32}$$

care va fi o matrice diagonală.

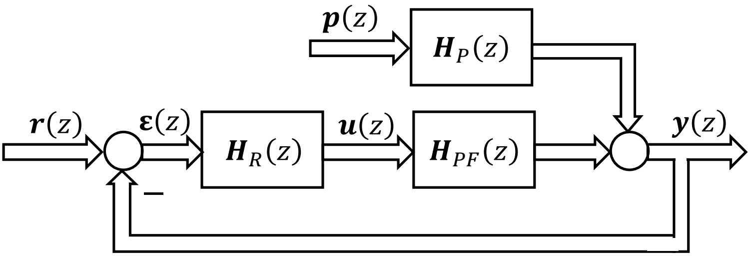

Fig. 8.9. Schema structurală a sistemului multivariabil

2. Decuplarea în raport cu mărimile de referinţă cu matricea de transfer în circuit închis $\boldsymbol{H}_0(z)$ care se cere să fie diagonală.

3. Decuplarea în raport cu perturbaţiile cu matricea de transfer $\boldsymbol{H}_{0p}(z)$ care se cere să fie diagonală.

Matricele diagonale se aleg în funcţie de performanţele dorite, reieşind din condiţiile de realizabilitate fizică a sistemului.

Proiectarea unui sistem multivariabil decuplat în raport cu perturbaţiile $\boldsymbol{p}(z)$ este dificilă deoarece matricea $\boldsymbol{H}_P(z)$ nu se cunoaşte cu precizie. Se menţionează că este dificil de realizat decuplarea simultană în raport cu semnalele de referinţă $\boldsymbol{r}(z)$ şi perturbaţiile $\boldsymbol{p}(z)$.

În continuare, se vor studia sistemele multivariabile care realizează decuplările de tipul unu şi doi.

8.4.2 *Decuplarea sistemului multivariabil deschis*

Cea mai largă aplicată decuplare în sistemele multivariabile este decuplarea în buclă deschisă care asigură o reglare noninteractivă în raport cu referinţele.

Astfel, din expresia (8.32) se calculează matricea de transfer a algoritmului de reglare în forma:

$$\boldsymbol{H}_R(z) = \boldsymbol{H}_{PF}(z)^{-1}\boldsymbol{H}_d(z) = \frac{\mathrm{adj}\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{PF}}(z)}{\det\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{PF}}(\boldsymbol{z})}\boldsymbol{H}_d(z). \tag{8.33}$$

Matricea de transfer $\boldsymbol{H}_d(z)$ se construieşte în formă diagonală:

$$\boldsymbol{H}_d(z) = \begin{vmatrix} H_{d11}(z) & 0 \\ 0 & H_{d22}(z) \end{vmatrix}, \tag{8.34}$$

unde $H_{d11}(z)$ şi $H_{d22}(z)$ sunt f.d.t. ale buclelor monovariabile obţinute în rezultatul decuplării.

În cazul când structura procesului miltivariabil este de forma canonică P cu regulatoare multivariabile, atunci în rezultatul decuplării se obţin două sisteme de reglare automată monovatiabile separate date în fig. 8.10. Pentru aceste două sisteme monovariabile deschise f.d.t. se descrie în forma:

$$H_{d11}(z) = H_{R1}(z)H_{11}(z), \tag{8.35}$$

$$H_{d22}(z) = H_{R2}(z)H_{22}(z). \tag{8.36}$$

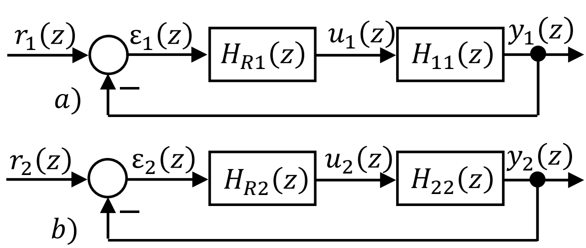

Fig. 8.10. Structurile sistemelor monovariabile

Algoritmii de reglare cu f.d.t. $H_{R1}(z)$ şi $H_{R2}(z)$ se calculează prin procedura de proiectare a celor două bucle monovariabile pe baza performanţelor impuse răspunsurilor $y_1(z)$ şi $y_2(z)$ şi de părţile fixate date de f.d.t. $H_{11}(z)$ şi $H_{22}(z)$.

În acest caz matricea de transfer $\boldsymbol{H}_R(z)$ a regulatorului multivariabil din (8.33) are forma:

$$\boldsymbol{H}_R(z) = \frac{1}{H_{11}(z)H_{22}(z) - H_{12}(z)H_{21}(z)} \times$$
$$\times \begin{bmatrix} H_{22}(z)H_{11}(z)H_{R1}(z) & -H_{21}(z)H_{22}(z)H_{R2}(z) \\ -H_{12}(z)H_{11}(z)H_{R1}(z) & H_{11}(z)H_{22}(z)H_{R2}(z) \end{bmatrix}. \qquad (8.37)$$

Din (8.37) se constată că regulatorul multivariabil are forma canonică P şi atunci regulatoarele principale se descriu cu f.d.t. de forma:

$$H_{R11}(z) = \frac{H_{22}(z)H_{11}(z)H_{R1}(z)}{H_{11}(z)H_{22}(z) - H_{12}(z)H_{21}(z)},$$
$$H_{R22}(z) = \frac{H_{11}(z)H_{22}(z)H_{R2}(z)}{H_{11}(z)H_{22}(z) - H_{12}(z)H_{21}(z)}, \qquad (8.38)$$

iar regulatoarele de decuplare au f.d.t. de forma:

$$H_{R12}(z) = \frac{-H_{21}(z)H_{22}(z)H_{R2}(z)}{H_{11}(z)H_{22}(z) - H_{12}(z)H_{21}(z)},$$
$$H_{R21}(z) = \frac{-H_{12}(z)H_{11}(z)H_{R1}(z)}{H_{11}(z)H_{22}(z) - H_{12}(z)H_{21}(z)}. \qquad (8.39)$$

Relaţiile (8.38) şi (8.39) sunt dificile în utilizarea lor şi în practica proiectării sistemelor această metodă se adoptă în funcţie de forma canonică a procesului. Deci, pentru procese în forma canonică P se vor folosi regulatoare de decuplare în forma canonică V şi, invers, pentru procese în forma canonică V se vor folosi regulatoare de decuplare în forma canonică P, iar regulatoarele principale vor fi cele proiectate prin buclele monovariabile cu f.d.t. $H_{R1}(z)$ şi $H_{R2}(z)$.

8.4.3 *Structura de reglare noninteractivă pentru procese în forma canonică P cu regulatoare de decuplare în forma canonică V*

Structura sistemului multivariabil pentru acest caz se dă în fig. 8.11.

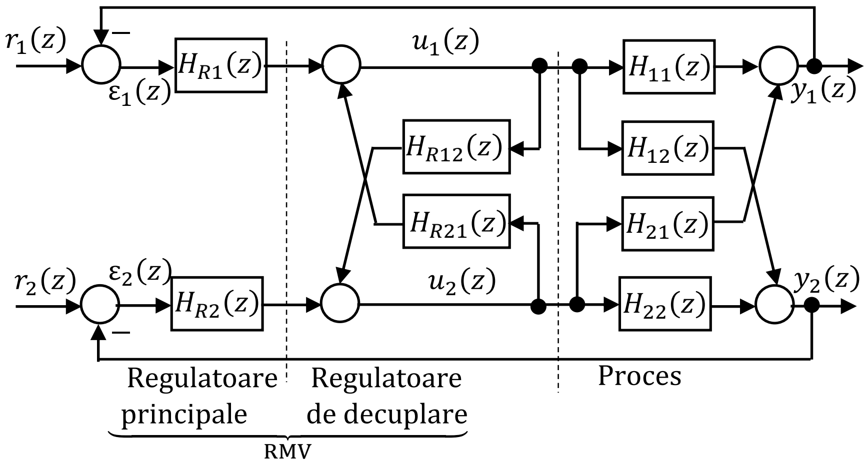

Fig. 8.11. Structura sistemului multivariabil

Pentru structura sistemului se introduc notațiile pentru matricea de transfer $\boldsymbol{H}_{Rp}(z)$ a regulatoarelor principale şi matricea de transfer $\boldsymbol{H}_{Rd}(z)$ a regulatoarelor de decuplare, care se descrie prin f.d.t. a regulatoarelor din canale în forma:

$$\boldsymbol{H}_{Rp}(z) = \begin{vmatrix} H_{R1}(z) & 0 \\ 0 & H_{R2}(z) \end{vmatrix},$$

$$\boldsymbol{H}_{Rd}(z) = |\boldsymbol{I} - \boldsymbol{H}_k(z)\boldsymbol{H}_h(z)|^{-1}\boldsymbol{H}_k(z), \tag{8.40}$$

unde matricele au forma:

$$\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}}(z) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \boldsymbol{H}_h(z) = \begin{vmatrix} 0 & H_{R21}(z) \\ H_{R12}(z) & 0 \end{vmatrix}. \tag{8.41}$$

Matricea de transfer a regulatorului se descrie în forma:

$$\boldsymbol{H}_R(z) = \boldsymbol{H}_{Rd}(z)\boldsymbol{H}_{Rp}(z) = |\boldsymbol{I} - \boldsymbol{H}_h(z)|^{-1}\boldsymbol{H}_{Rp}(z). \tag{8.42}$$

Pentru calculul funcţiilor de transfer ale algoritmilor de reglare de decuplare se aplică relaţiile (8.33) şi (8.42) şi se obţine expresia:

$$|\boldsymbol{I} - \boldsymbol{H}_h(z)|^{-1}\boldsymbol{H}_{Rp}(z) = \boldsymbol{H}_{PF}(\boldsymbol{z})^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{H}_d(z). \tag{8.43}$$

Deoarece matricea de transfer a sistemului multivariabil deschis $\boldsymbol{H}_d(z)$ este diagonală de forma (8.34) cu funcţiile de transfer (8.35)–(8.36) proiectate cu blocurile monovariabile şi atunci singura necunoscută este matricea de transfer $\boldsymbol{H}_h(z)$ alcătuită din expresiile f.d.t. ai algoritmilor de decuplare şi care se calculează din expresia (8.43) având forma:

$$\boldsymbol{H}_h(z) = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{H}_{Rp}(z)\boldsymbol{H}_d^{-1}(z)\boldsymbol{H}_{PF}(z) \tag{8.44}$$

sau cu f.d.t. în formă:

$$\begin{vmatrix} 0 & H_{R21}(z) \\ H_{R12}(z) & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} H_{R1}(z) & 0 \\ 0 & H_{R2}(z) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{1}{H_{d11}(z)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{H_{d22}(z)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} H_{11}(z) & H_{21}(z) \\ H_{12}(z) & H_{22}(z) \end{vmatrix}. \tag{8.45}$$

Efectuând calculele în expresia (8.45) se obţin funcţiile de transfer ai algoritmilor de decuplare a canalelor de forma:

$$H_{R12}(z) = -\frac{H_{12}(z)}{H_{22}(z)},\ H_{R21}(z) = -\frac{H_{21}(z)}{H_{11}(z)}. \tag{8.46}$$

Pentru acest caz reglarea noninteractivă a sistemului multivariabil este uşor de realizat, deoarece regulatoarele principale sunt cele proiectate pentru buclele monovariabile, iar regulatoarele de decuplare se calculează cu expresiile (8.46) şi se verifică realizabilitatea fizică ale acestora care este funcţie de excesul de poli-zerouri al f.d.t. $H_{ij}(z)$ în raport cu f.d.t. $H_{ii}(z)$. Aceste tipuri de regulatoare de decuplare se prezintă ca regulatoare cu compensare.

8.4.4 *Structura de reglare noninteractivă pentru procese în forma canonică V cu regulatoare de decuplare în forma canonică P*

Se consideră structura sistemului multivariabil dată în fig. 8.12.

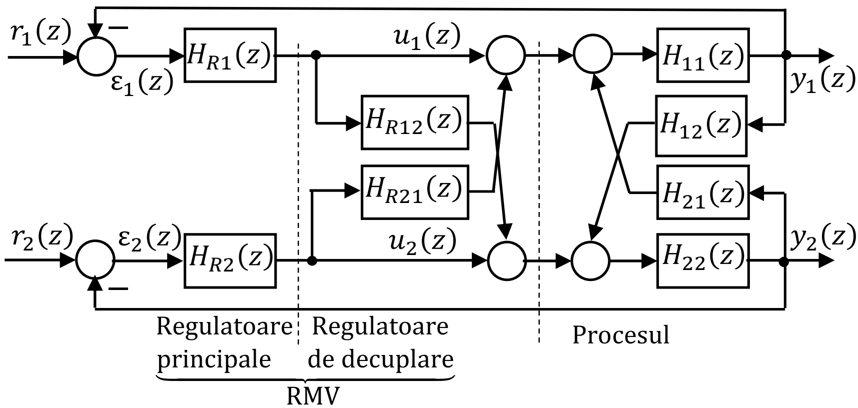

Fig. 8.12. Structura sistemului multivariabil

Regulatorul multivariabil este alcătuit din regulatoarele principale cu f.d.t. $H_{R1}(z)$ şi $H_{R2}(z)$, calculate pe baza buclelor monovariabile în urma decuplării canalelor şi din algoritmii de reglare de decuplare în forma canonică P. Matricea de transfer a regulatorului multivariabil este:

$$\boldsymbol{H}_R(z) = \boldsymbol{H}_{Rd}(z)\boldsymbol{H}_{Rp}(z) = \begin{vmatrix} 1 & H_{R21}(z) \\ H_{R12}(z) & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} H_{R1}(z) & 0 \\ 0 & H_{R2}(z) \end{vmatrix}. \tag{8.47}$$

Partea fixată de forma canonică V se descrie cu matricea de transfer de forma:

$$\boldsymbol{H}_{PF}(z) = |\boldsymbol{I} - \boldsymbol{H}_k(z)\boldsymbol{H}_h(z)|^{-1}\boldsymbol{H}_k(z), \tag{8.48}$$

unde matricele de transfer $\boldsymbol{H}_k(z)$ şi $\boldsymbol{H}_h(z)$ se descriu:

$$\boldsymbol{H}_k(z) = \begin{vmatrix} H_{11}(z) & 0 \\ 0 & H_{22}(z) \end{vmatrix}, \boldsymbol{H}_h(z) = \begin{vmatrix} 0 & H_{21}(z) \\ H_{12}(z) & 0 \end{vmatrix}. \tag{8.49}$$

Pentru calcularea funcţiilor de transfer ale regulatorului multivariabil se aplică relaţia (8.33) şi se obţine matricea:

$$\boldsymbol{H}_R(z) = \boldsymbol{H}_k^{-1}(z)|\boldsymbol{I} - \boldsymbol{H}_k(z)\boldsymbol{H}_h(z)|\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{d}}(z) \tag{8.50}$$

sau prin funcţiile de transfer se descriu în forma:

$$\begin{vmatrix} 1 & H_{R21}(z) \\ H_{R12}(z) & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} H_{R1}(z) & 0 \\ 0 & H_{R2}(z) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1/H_{11}(z) & 0 \\ 0 & 1/H_{22}(z) \end{vmatrix} \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} H_{11}(z) & 0 \\ 0 & H_{22}(z) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & H_{21}(z) \\ H_{12}(z) & 0 \end{vmatrix} \right\} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} H_{d11}(z) & 0 \\ 0 & H_{d22}(z) \end{vmatrix}. \tag{8.51}$$

Calculând expresia (8.51), se obţin f.d.t. ale regulatoarelor de decuplare în forma:

$$H_{R12}(z) = -H_{11}(z)H_{12}(z), H_{R21}(z) = -H_{22}(z)H_{21}(z). \tag{8.52}$$

Din analiza funcţiilor de transfer ale regulatoarelor din expresia (8.52) se constată că algoritmii sunt fizic realizabili deoarece se obţin ca produsul a două funcţii de transfer ale părţii fixate.

Aceste rezultate pot fi extinse pentru procese multivariabile cu mai mult de două intrări şi ieşiri.

8.4.5 *Decuplarea sistemului multivariabil închis*

Pentru proiectarea regulatorului multivariabil pentru decuplarea sistemului închis depinde de structura sistemului în funcție de cum este conectat regulatorul pe calea directă sau pe canalul de reacţie. Pentru structura sistemului cu regulatorul pe canalul direct sau în reacţie se construieşte o matrice diagonală a sistemului multivariabil închis de forma:

$$\boldsymbol{H}_0(z) = \mathrm{diag}[H_{011}(z), H_{022}(z), \dots, H_{0mm}(z)]. \tag{8.53}$$

Funcţiile de transfer $H_{0ii}(z)$, $i = \overline{1,m}$ ale fiecărui canal principal se determină pe baza performanţelor impuse mărimilor reglate $y_i(z)$ $i = \overline{1,m}$ şi a condițiilor de realizabilitate fizică a regulatorului.

8.4.6 *Decuplarea sistemului multivariabil cu regulator pe calea directă*

Pentru structura sistemului multivariabil cu regulatorul pe calea directă matricea de transfer a sistemului închis se prezintă în forma:

$$\boldsymbol{H}_0(z) = [\boldsymbol{I} + \boldsymbol{H}_d(z)]^{-1}\boldsymbol{H}_d(z), \tag{8.54}$$

unde $\boldsymbol{H}_d(z)$ este matricea de transfer a sistemului deschis şi se descrie în forma:

$$\boldsymbol{H}_d(z) = \boldsymbol{H}_R(z)\boldsymbol{H}_{PF}(z). \tag{8.55}$$

Din expresia (8.54) se calculează matricea de transfer $\boldsymbol{H}_d(z)$ a sistemului deschis în funcţie de matricea de transfer $\boldsymbol{H}_0(z)$ a sistemului închis care are forma:

$$\boldsymbol{H}_d(z) = \boldsymbol{H}_0(z)[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{H}_0(z)]^{-1}. \tag{8.56}$$

Substituind expresia (8.55) în expresia (8.56) şi după unele transformări se obţine matricea de transfer a regulatorului în forma:

$$\boldsymbol{H}_R(z) = \boldsymbol{H}_{PF}^{-1}(z)\boldsymbol{H}_0(z)[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{H}_0(z)]^{-1}, \tag{8.57}$$

care poate fi calculată numai dacă există inversele matricelor acestora.

8.4.7 *Decuplarea sistemului multivariabil cu regulator pe calea de reacţie*

Pentru structura sistemului multivariabil cu regulatorul pe calea de reacţie matricea de transfer a sistemului închis se determină din condiţia:

$$\boldsymbol{y}(z) = \boldsymbol{H}_{PF}(z)\boldsymbol{\varepsilon}(z) = \boldsymbol{H}_{PF}(z)\big(\boldsymbol{r}(z) - \boldsymbol{H}_R(z)\boldsymbol{y}(z\,)\big) =$$

$$= \boldsymbol{H}_{PF}(z)\boldsymbol{r}(z) - \boldsymbol{H}_{PF}(z)\boldsymbol{H}_R(z)\boldsymbol{y}(z). \tag{8.58}$$

După unele transformări în expresia (8.58) se obţine relaţia:

$$\boldsymbol{y}(z)[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{H}_{PF}(z)\boldsymbol{H}_R(z)] = \boldsymbol{H}_{PF}(z)\boldsymbol{r}(z), \tag{8.59}$$

de unde se determină matricea de transfer a sistemului închis:

$$\frac{\boldsymbol{y}(z)}{\boldsymbol{r}(z)} = \boldsymbol{H}_0(z) = |\boldsymbol{I} + \boldsymbol{H}_{PF}(z)\boldsymbol{H}_R(z)|^{-1}\boldsymbol{H}_{PF}(z). \tag{8.60}$$

Matricea de transfer a regulatorului se calculează din (8.60) şi după unele transformări se obţine:

$$\boldsymbol{H}_R(z) = \boldsymbol{H}_0(z)^{-1} - \boldsymbol{H}_{PF}(z)^{-1}. \tag{8.61}$$

Procedura de proiectare a algoritmului de reglare constă din următoarele etape:

1. Se dă matricea de transfer a părţii fixate a procesului condus.
2. Se impun performanţele sistemului multivariabil pentru fiecare canal intrare–ieşire.
3. Se verifică dacă matricea de transfer $\boldsymbol{H}_{PF}(z)$ a părţii fixate este

nesingulară.

4. Se construieşte f.d.t. $H_{0ii}(z)$ a canalelor în buclă închisă pe baza performanţelor impuse şi se determină matricea de transfer $\boldsymbol{H}_0(z)$ a sistemului multivariabil.

5. Se efectuează operaţia de inversare a matricelor de transfer $\boldsymbol{H}_0(z)$ a sistemului şi $\boldsymbol{H}_{PF}(z)$ a părţii fixate.

6. Se determină matricea de transfer $\boldsymbol{H}_R(z)$ a regulatorului cu relaţia (8.61).

7. Se verifică realizabilitatea fizică a algoritmului de reglare proiectat.

Exemplul 8.1 [16]. Se consideră sistemul multivariabil de reglare a umidităţii și temperaturii în înteriorul unei încăperi climatizată. Se dă o încăpere climatizată în care este necesar de creat un climat artificial prin utilizarea unui element electric $R_î$ de încălzire alimentat cu tensiunea $u(t)$ şi a aburului pentru a creşte umiditatea aerului rece. Schema bloc funcţională a procesului se prezintă în fig. 8.13. Mărimile de intrare în proces sunt $u_1 = α$ este poziția robinetului care este organul de reglare a umidității și tensiunea $u_2 = u$ aplicată încălzitorului electric $R_î$ – organ de reglare, iar mărimile de ieșire sunt umiditatea y_1 și temperatura y_2 măsurate de traductoarele Tr1 și Tr2.

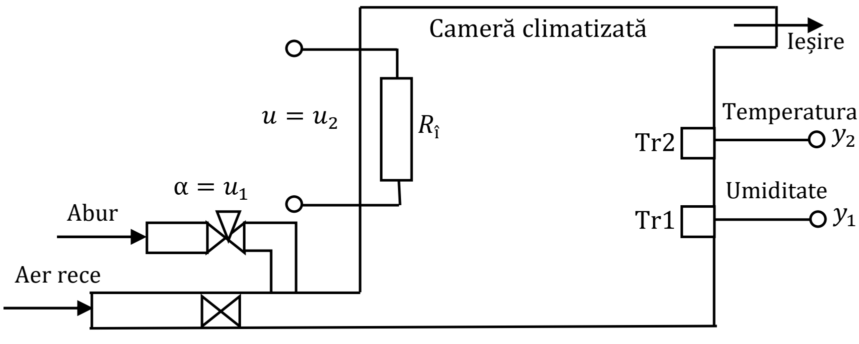

Fig. 8.13. Schema bloc funcţională a procesului

Poziţia α a robinetului şi tensiunea u aplicată încălzitorului electric $R_î$ sunt reglate cu un regulator numeric.

Poziţia α a robinetului conduce la modificarea ambelor mărimi reglate umiditatea şi temperatura şi atunci pentru partea fixată se obţine modelul matematic:

$$\begin{vmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k_\alpha}{T_\alpha s+1} & 0 \\ \frac{k'_\alpha}{T'_\alpha s+1} & \frac{k_u}{T_u s+1} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{vmatrix},$$

unde $k_\alpha = 0.5$, $T_\alpha = 10$ s sunt coeficientul de transfer și constanta de timp pe canalul principal al temperaturii, $k_u = 0.9$, $T_u = 15$ s - coeficientul de transfer și constanta de timp pe canalul principal al umidității, $k'_\alpha = 0.2$, $T'_\alpha = 7$ s - coeficientul de transfer și constanta de timp pe canalul de interinfluență temperatura-umiditate.

Se cere: 1. Să se determine modelul matematic discret al părţii fixate.

2. Să se proiecteze un sistem de reglare noninteractivă cu decuplare în circuit deschis care să asigure celor două mărimi de ieşire reglate $y_1(t)$ şi $y_2(t)$ un răspuns minimal la semnale de intrare treaptă unitară discretă şi să se construiască structura sistemului de reglare.

3. Să se proiecteze un sistem de reglare noninteractivă cu decuplare în circuit închis şi algoritmul de reglare pe calea de reacţie care să asigure celor două mărimi de ieşire reglate $y_1(t)$ şi $y_2(t)$ un răspuns la semnal de intrare treaptă unitară discretă fără suprareglare cu constantele de timp T_1 şi T_2. Să se construiască structura sistemului de reglare.

Rezolvare. 1. Se calculează modelul matematic discret al părţii fixate cu perioada de eșantionare $T = 1$ s.

Canalul unu:

$$y_1(s) = \frac{k_\alpha}{T_\alpha s+1} u_1(s) = H_{11}(s)u_1(s).$$

Canalul doi:

$$y_2(s) = \frac{k'_\alpha}{T'_\alpha s+1} u_1(s) + \frac{k_u}{T_u s+1} u_2(s) = H_{12}(s)u_1(s) + H_{22}(s)u_2(s).$$

Se aplică metoda de discretizare aproximativă - metoda dreptunghiului în întârziere la f.d.t. $H_{11}(s)$, $H_{12}(s)$ şi $H_{22}(s)$ utilizând substituţia $s = (1/T)(1 - z^{-1})$ cu perioada de eşantionare T şi se obţin f.d.t. discrete:

$$H_{11}(z^{-1}) = \frac{k_\alpha}{T_\alpha \frac{1}{T}(1-z^{-1}) + 1} = \frac{Tk_\alpha}{T_\alpha + T - T_\alpha z^{-1}} = \frac{\frac{Tk_\alpha}{T_\alpha+T}}{1-\frac{T_\alpha}{T_\alpha+T} z^{-1}} = \frac{b_{11}}{1-a_{11}z^{-1}},$$

$$H_{12}(z^{-1}) = \frac{b_{12}}{1-a_{12}z^{-1}}, \; H_{22}(z^{-1}) = \frac{b_{22}}{1-a_{22}z^{-1}},$$

unde coeficienţii au semnificaţiile: $b_{11} = \frac{Tk_\alpha}{T_\alpha+T} = \frac{1 \cdot 0.5}{10+1} = 0.0454$, $a_{11} = \frac{T_\alpha}{T_\alpha+T} =$ $= \frac{10}{10+1} = 0.909$, $b_{12} = \frac{Tk'_\alpha}{T'_\alpha+T} = \frac{1 \cdot 0.2}{7+1} = 0.025$, $a_{12} = \frac{T'_\alpha}{T'_\alpha+T} = \frac{7}{7+1} = 0.875$, $b_{22} = \frac{Tk_u}{T_u+T} = \frac{1 \cdot 0.9}{15+1} = 0.0563$, $a_{22} = \frac{T_u}{T_u+T} = \frac{15}{15+1} = 0.9375$.

Astfel, mărimile $y_1(z^{-1})$ şi $y_2(z^{-1})$ se descriu în forma operațională:

$$y_1(z^{-1}) = \frac{b_{11}}{1-a_{11}z^{-1}} u_1(z^{-1}) = \frac{0.0454}{1-0.909z^{-1}} u_1(z^{-1}),$$

$$y_2(z^{-1}) = \frac{b_{12}}{1-a_{12}z^{-1}} u_1(z^{-1}) + \frac{b_{22}}{1-a_{22}z^{-1}} u_2(z^{-1}) =$$

$$= \frac{0.025}{1-0.875z^{-1}} u_1(z^{-1}) + \frac{0.0563}{1-09375z^{-1}} u_2(z^{-1}).$$

Matricea de transfer discretă a părţii fixate are forma:

$$H_P(z^{-1}) = \begin{bmatrix} \frac{b_{11}}{1-a_{11}z^{-1}} & 0 \\ \frac{b_{12}}{1-a_{12}z^{-1}} & \frac{b_{22}}{1-a_{22}z^{-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0.0454}{1-0.909z^{-1}} & 0 \\ \frac{0.025}{1-0.875z^{-1}} & \frac{0.0563}{1-0.9375z^{-1}} \end{bmatrix}.$$

2. Matricea de transfer a sistemului deschis decuplat este:

$$H_d(z^{-1}) = \begin{bmatrix} H_{11}(z^{-1})H_{R1}(z^{-1}) & 0 \\ 0 & H_{22}(z^{-1})H_{R2}(z^{-1}) \end{bmatrix}.$$

Regulatoarele principale $H_{R1}(z^{-1})$ şi $H_{R2}(z^{-1})$ se proiectează după buclele monovariabile obţinute după decuplare, considerând un răspuns minimal fără suprareglare la semnal treaptă unitară discretă. Astfel, pentru f.d.t. a sistemelor monovariabile închise vor avea ordinul $n = 1$ şi forma:

$$H_{011}(z^{-1}) = H_{022}(z^{-1}) = z^{-1}.$$

Matricea de transfer a sistemului multivariabil va fi:

$$H_0(z^{-1}) = \begin{bmatrix} H_{011}(z^{-1}) & 0 \\ 0 & H_{022}(z^{-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^{-1} & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{bmatrix}.$$

Pentru acest caz problema reglării este rezolvată fiindcă $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ la condiţia $H_{011}(1) = H_{022}(1) = 1$. Deoarece sunt cunoscute funcțiile de transfer $H_{011}(z^{-1})$ și $H_{022}(z^{-1})$, atunci se pot calcula f.d.t. ale algoritmilor de reglare principali care se descriu cu relaţiile:

$$H_{R1}(z^{-1}) = \frac{H_{011}(z^{-1})}{1-H_{011}(z^{-1})} \frac{1}{H_{11}(z^{-1})} = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} \frac{1-a_{11}z^{-1}}{b_{11}} = \frac{z^{-1}-a_{11}z^{-2}}{b_{11}-b_{11}z^{-1}} =$$

$$= \frac{z^{-1}-0.909z^{-2}}{0.0454-0.0454z^{-1}} = \frac{22.0264z^{-1}-20.0220z^{-2}}{1-z^{-1}},$$

$$H_{R2}(z^{-1}) = \frac{H_{022}(z^{-1})}{1-H_{022}(z^{-1})} \frac{1}{H_{22}(z^{-1})} = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} \frac{1-a_{22}z^{-1}}{b_{22}} = \frac{z^{-1}-a_{22}z^{-2}}{b_{22}-b_{22}z^{-1}} =$$

$$= \frac{z^{-1}-0.9375z^{-2}}{0.0563-0.0563z^{-1}} = \frac{17.762z^{-1}-16.6518z^{-2}}{1-z^{-1}}.$$

Deoarece procesul are forma canonică P, atunci pentru regulatoarele de decuplare se alege forma canonică V şi f.d.t. a regulatoarelor au forma:

$$H_{R12}(z^{-1}) = -\frac{H_{12}(z^{-1})}{H_{22}(z^{-1})} = -\frac{b_{12}(1-a_{22}z^{-1})}{b_{22}(1-a_{12}z^{-1})} = -\frac{b_{12}-b_{12}a_{22}z^{-1}}{b_{22}-b_{22}a_{12}z^{-1}} =$$

$$= \frac{-0.025+0.025\cdot 0.9375z^{-1}}{0.0563-0.0563\cdot 0.875z^{-1}} = \frac{-0.025+0.0234z^{-1}}{0.0563-0.04935z^{-1}} = \frac{-0.4440+0.4156z^{-1}}{1-0.875z^{-1}},$$

$$H_{R21}(z^{-1}) = -\frac{H_{21}(z^{-1})}{H_{11}(z^{-1})} = -\frac{0}{H_{11}(z^{-1})} = 0.$$

Structura sistemului multivariabil proiectat se dă în fig. 8.14.

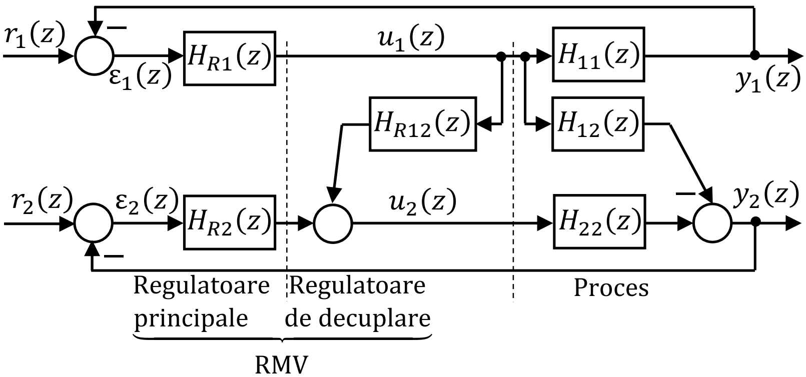

Fig. 8.14. Structura sistemului multivariabil proiectat la punctul 2

S-a simulat pe calculator sistemul multivariabil de reglare noninteractivă cu decuplare a sistemului deschis și răspunsurile indiciale se dau în fig. 8.15 - canalele fără interacțiuni în obiect, timpul de creștere și de reglare pe canalul unu $t_{1c} = t_{1r} = 25.25$ s, iar pe canalul doi - $t_{2c} = t_{2r} = 12.58$ s. și cu canalele decuplate fig. 8.16 - timpul de creștere și de reglare pe canalul unu și doi $t_{1c} = t_{1r} = 24.16$ s.

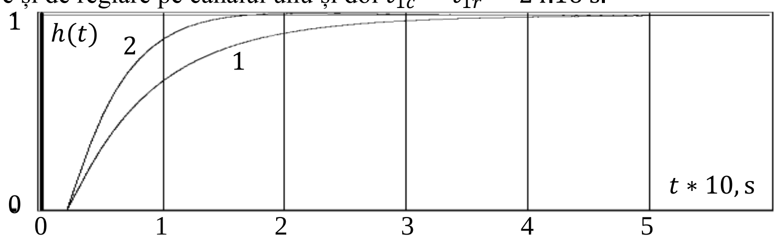

Fig. 8.15. Răspunsurile indiciale ale sistemului multivariabil cu decuplare

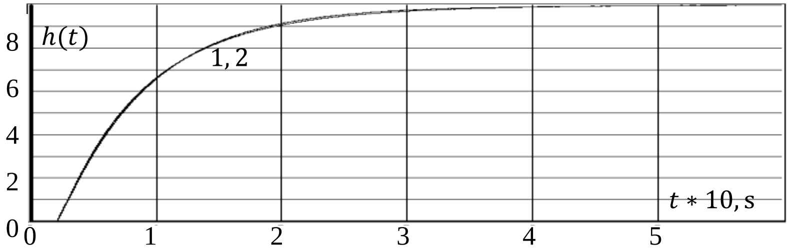

Fig. 8.16. Răspunsurile indiciale ale sistemului multivariabil decuplat

3. Proiectarea sistemului multivariabil de reglare noninteractivă cu decuplare în buclă închisă cu răspunsuri aperiodice cu constante de timp $T_1 = 15$ s şi $T_2 = 20$ s, iar f.d.t. ale sistemului vor avea forma:

$$H_{011}(s) = \frac{1}{T_1 s+1} = \frac{1}{15s+1} \text{ şi } H_{022}(s) = \frac{1}{T_2 s+1} = \frac{1}{20s+1}.$$

Funcţiile de transfer $H_{011}(s)$ şi $H_{022}(s)$ se discretizează cu metoda dreptunghiului în întârziere cu perioada de eșantionare $T = 1$ s, care vor avea forma:

$$H_{011}(z^{-1}) = \frac{c_{11}}{1-d_{11}z^{-1}},\ H_{022}(z^{-1}) = \frac{c_{22}}{1-d_{22}z^{-1}},$$

unde coeficienții au semnificația $c_{11} = \frac{T}{T_1+T} = \frac{1}{15+1} = 0.0625$, $c_{22} = \frac{T}{T_2+T} = \frac{1}{20+1} =$ $= 0.0476$, $d_{11} = \frac{T_1}{T_1+T} = \frac{15}{15+1} = 0.9375$, $d_{22} = \frac{T_2}{T_2+T} = \frac{20}{20+1} = 0.9524$.

Matricea de transfer a sistemului multivariabil este:

$$H_0(z^{-1}) = \begin{bmatrix} \frac{c_{11}}{1-d_{11}z^{-1}} & 0 \\ 0 & \frac{c_{22}}{1-d_{22}z^{-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0.0625}{1-0.9375z^{-1}} & 0 \\ 0 & \frac{0.0476}{1-0.9524z^{-1}} \end{bmatrix}.$$

Se inversează matricele procesului şi a sistemului multivariabil și se obţine:

$$H_P^{-1}(z^{-1}) = \frac{(1-a_{11}z^{-1})(1-a_{22}z^{-1})}{b_{11}b_{22}} \begin{bmatrix} \frac{b_{22}}{1-a_{22}z^{-1}} & 0 \\ \frac{b_{12}}{1-a_{12}z^{-1}} & \frac{b_{11}}{1-a_{11}z^{-1}} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{(1-a_{11}z^{-1})}{b_{11}} & 0 \\ \frac{b_{12}(1-a_{11}z^{-1})(1-a_{22}z^{-1})}{b_{11}b_{22}} & \frac{1-a_{22}z^{-1}}{b_{22}} \end{bmatrix},\ H_0^{-1}(z^{-1}) = \begin{bmatrix} \frac{1-d_{11}z^{-1}}{c_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{1-d_{22}z^{-1}}{c_{22}} \end{bmatrix}.$$

Algoritmul de reglare multivariabil se calculează cu relaţia:

$$H_R(z^{-1}) = H_0^{-1}(z^{-1}) - H_P^{-1}(z^{-1}) =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1-d_{11}z^{-1}}{c_{11}} - \frac{1-a_{11}z^{-1}}{b_{11}} & 0 \\ \frac{b_{12}(1-a_{11}z^{-1})(1-a_{22}z^{-1})}{b_{11}b_{22}(1-a_{12}z^{-1})} & \frac{1-d_{22}z^{-1}}{c_{22}} - \frac{1-a_{22}z^{-1}}{b_{22}} \end{bmatrix}.$$

Din matricea regulatorului $H_R(z^{-1})$ se determină f.d.t. ale regulatoarelor principale care au forma:

$$H_{R1}(z^{-1}) = \frac{b_{11}(1-d_{11}z^{-1})-c_{11}(1-a_{11}z^{-1})}{b_{11}c_{11}} = \frac{b_{11}-c_{11}-(b_{11}d_{11}-c_{11}a_{11})z^{-1}}{b_{11}c_{11}} =$$

$$= q_{10} - q_{11}z^{-1} = -6.0424 + 5.1071z^{-1},$$

unde $q_{10} = \frac{b_{11}-c_{11}}{b_{11}c_{11}} = \frac{0.0454-0.0625}{0.0454\cdot 0.0625} = -6.0424,$

$$q_{11} = \frac{b_{11}d_{11}-c_{11}a_{11}}{b_{11}c_{11}} = \frac{0.0454\cdot 0.9375-0.0625\cdot 0.909}{0.0454\cdot 0.0625} = -5.1071;$$

$$H_{R2}(z^{-1}) = \frac{b_{22}(1-d_{22}z^{-1})-c_{22}(1-a_{22}z^{-1})}{b_{22}c_{22}} = \frac{b_{22}-c_{22}-(b_{22}d_{22}-c_{22}a_{22})z^{-1}}{b_{22}c_{22}} =$$

$$= q_{20} - q_{21}z^{-1} = 3.3461 - 3.4692z^{-1},$$

unde $q_{20} = \frac{b_{22}-c_{22}}{b_{22}c_{22}} = \frac{0.0563-0.0476}{0.0563\cdot 0.0476} = 3.3461,$

$$q_{21} = \frac{b_{22}d_{22}-c_{22}a_{22}}{b_{22}c_{22}} = \frac{0.0563\cdot 0.9524-0.0476\cdot 0.9375}{0.0563\cdot 0.0476} = 3.4692,$$

iar regulatoarele de decuplare au f.d.t. de forma:

$$H_{R12}(z^{-1}) = \frac{b_{12}(1-a_{11}z^{-1})(1-a_{22}z^{-1})}{b_{11}b_{22}(1-a_{12}z^{-1})} = \frac{b_{12}-(b_{12}a_{22}+b_{12}a_{11})z^{-1}+b_{12}a_{11}a_{22}z^{-2}}{b_{11}b_{22}-b_{11}b_{22}a_{12}z^{-1}} =$$

$$= \frac{q_{120}-q_{121}z^{-1}+q_{122}z^{-2}}{1-p_{12}z^{-1}} = \frac{9.7656-18.0352z^{-1}+8.3230z^{-2}}{1-0.875z^{-1}};$$

unde $q_{120} = \frac{b_{12}}{b_{11}b_{22}} = \frac{0.025}{0.0454\cdot 0.0563} = 9.7656,$

$$q_{121} = \frac{b_{12}a_{22}+b_{12}a_{11}}{b_{11}b_{22}} = \frac{0.025\cdot 0.9375+0.025\cdot 0.9091}{0.0454\cdot 0.0563} = 18.0352,$$

$$q_{122} = \frac{b_{12}a_{11}a_{22}}{b_{11}b_{22}} = \frac{0.025 \cdot 0.9091 \cdot 0.9375}{0.0454 \cdot 0.0563 \cdot} = 8.3230,$$

$$p_{12} = \frac{b_{11}b_{22}a_{12}}{b_{11}b_{22}} = a_{12} = 0.875;$$

$$H_{R21}(z^{-1}) = 0.$$

Structura sistemului multivariabil proiectat se dă în fig. 8.17, în care regulatoarele principale sunt cuplate pe canalele de reacție.

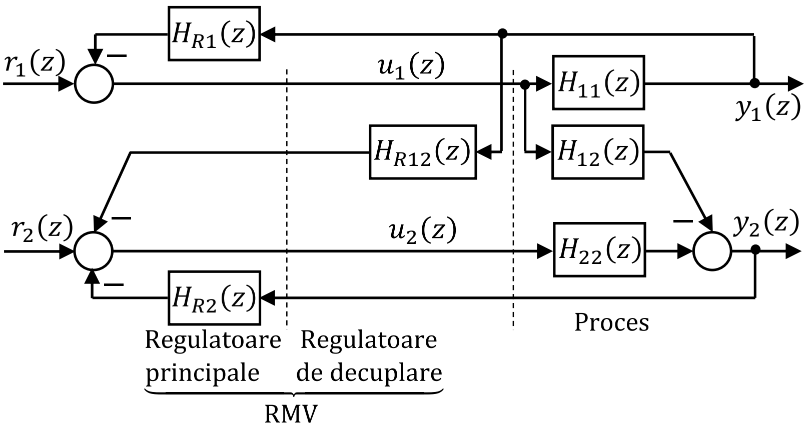

Fig. 8.17. Structura sistemului multivariabil proiectat la punctul 3

Structura sistemului multivariabil cu regulatoarele acordate s-a simulat pe calculator, iar răspunsurile indiciale se dau în fig. 8.18 și indicii de calitate sunt: timpul de creștere și de reglare pe canalul 1 $t_{1c} = t_{1r} = 26.79$ s, iar pe canalul 2 - $t_{2c} = t_{2r} =$ $= 55.31$ s.

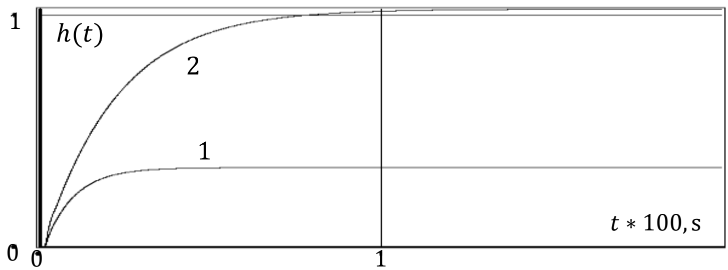

Fig. 8.18. Răspunsurile indiciale ale sistemului multivariabil decuplate cu regulatoarele principale pe canalul de reacție la p. 3

Chestionar și probleme

1. Definiți și explicați ce reprezintă un proces multivariabil?
2. Explicați noțiunile de canale directe și canale de interinfluență.
3. Scieți modelul matematic în formă operațională al unui proces multivariabil de dimensiunea 3x3 de tipul P.
4. Prezentați schema structurală a modelului procesului multivariabil definit la p. 3.
5. Prezentați matricea de transfer a modelului procesului multivariabil definit la p. 3.
6. Se dă matricea de transfer al unui proces multivariabil de dimensinea 3x3:

$$\boldsymbol{H}(z) = \begin{bmatrix} H_{11}(z) & H_{12}(z) & H_{13}(z) \\ H_{21}(z) & H_{22}(z) & H_{23}(z) \\ H_{31}(z) & H_{32}(z) & H_{33}(z) \end{bmatrix}.$$

Scrieți matricea principală și matricea de interacțiuni.
6. Cum poate fi conectat regulatorul multivariabil în structura sistemului multivariabil?
7. Cum explicați reglarea proceselor multivariabile cu regulatoare monovariabile?
8. Cum explicați reglarea proceselor multivariabile cu regulatoare multivariabile?
9. Explicați noţiunea de regulator de decuplare.
10. Scrieți matricea de tranafer a regulatorului principal pentru un proces multivariabil de dimensiunea 2x2.
11. Scrieți matricea de tranafer a regulatorului de decuplare pentru un proces multivariabil de dimensiunea 2x2.
12. Se dă matricea de transfer al unui regulator de forma:

$$\boldsymbol{H_R}(z) = \begin{bmatrix} H_{R11}(z) & H_{R12}(z) & H_{R13}(z) \\ H_{R21}(z) & H_{R22}(z) & H_{R23}(z) \\ H_{R31}(z) & H_{R32}(z) & H_{R33}(z) \end{bmatrix}.$$

Prezentați matricea regulatorului principal și a regulatorului de decuplare.
13. Ce metode se utilizează pentru acordarea regulatoarelor monovariabile?
14. Ce metode se utilizează pentru acordarea regulatoarelor multivariabile?
15. Cum explicați noțiunea de conducere noninteractivă a proceselor multivariavile?
16. Cum se calculează matricea de transfer a regulatorului pe canalul de reacție la decuplarea sistemului multivariabil?

9 SINTEZA ALGORITMULUI DE REGLARE DUPĂ STARE

9.1 Introducere

Se consideră modele de obiecte de conducere cu o intrare și o ieșire, caracterizate prin modele discrete de forma [4]:

$$x_{k+1} = \Phi x_k + \Gamma u_k, \tag{9.1}$$
$$y_k = c^T x_k, x_0 = x(0) \in R^n,$$

unde mărimile $x_k = x(k)$, $u_k = u(k)$, $y_k = y(k), k = 0, 1, 2, \ldots$, matricele (Φ, Γ, c^T) au dimensiunile și semnificația corespunzătoare.

Se presupune că sistemul (9.1) este complet, deci perechea (Φ, Γ) este controlabilă, iar perechea (Φ, c^T) este observabilă.

Problema sintezei legii de reglare după stare va fi rezolvată aplicând principiul separării. La prima etapă se consideră starea x_k accesibilă măsurării și se sintetizează matricea de comandă după stare, iar la a doua etapă se construiește vectorul de stare prin estimare sau predicție pe baza informațiilor măsurabile u_k și y_k. Se consideră modele de stare pentru care perturbațiile sunt reprezentate prin starea inițială.

În cazul problemei reglării cerințele de performanță (criteriu) se consideră aducerea stării la zero după acțiunea perturbației asupra stării inițiale a procesului condus. În cazul procedurilor bazate pe alocarea polilor, viteza de atingere a stării de echilibru (starea egală cu zero) este indirect determinată de poziția polilor în discul unitate. Cu cât polii sunt mai aproape de origine, viteza de răspuns a sistemului este mai mare.

9.2 Algoritmul de reglare cu reacție după stare

Pentru modelul (9.1) se consideră perturbații în starea inițială a sistemului. Scopul reglării după stare este de a asigura o evoluție dorită a stării, respectiv de a asigura sistemului închis o ecuație caracteristică dorită. Acesta asigură o rejecție a perturbației cu o anumită viteză.

Cea mai simplă lege de reglare după stare este [4]:

$$u_k = -f^T x_k = -[f_1\ f_2 \cdots f_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \tag{9.2}$$

llunde variabilele de stare sunt considerate măsurabile.

Introducând (9.2) în (9.1), se obține modelul sistemului cu reacție după stare:

$$x_{k+1} = (\Phi - \Gamma f^T)x_k = \Phi_0 x_k, \tag{9.3}$$

unde $\Phi_0 = \Phi - \Gamma f^T$ este matricea atașată sistemului cu reacție după stare.

Dacă se consideră și mărimea de referință r_k, atunci legea de comandă poate fi de forma:

$$\begin{aligned} u_k &= w_k - f^T x_k, \\ w_k &= w_{k-1} + k_i \varepsilon_k, \\ \varepsilon_k &= r_k - y_k, \end{aligned} \tag{9.4}$$

care, pe lângă legea de reglare după stare, include și un integrator pe calea directă care generează semnalul w_k.

În fig. 9.1 se dă structura sistemului de conducere automată cu legea de reglare hibridă după stare și eroare.

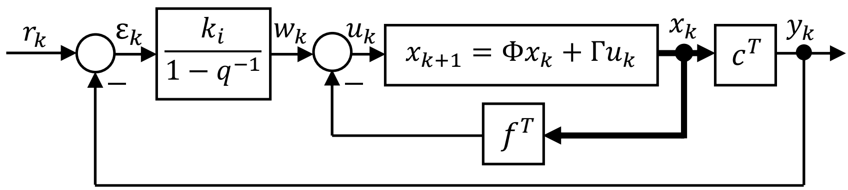

Fig. 9.1. Structura sistemului automat cu reglare hibridă

Valorile proprii ale matricei Φ_0 determină comportarea dinamică a sistemului cu reacție. Pentru o pereche (Φ, Γ) controlabilă, există totdeauna o matrice f^T care alocă o configurație dorită a valorilor proprii ale matricei $\Phi - \Gamma f^T$, conform teoremei alocării [4, 16].

Definiție. Perechea (Φ, Γ), $\Phi \in R^{n\times m}$, $\Gamma \in R^n$ este alocabilă dacă și numai dacă este controlabilă. Dacă perechea este alocabilă, atunci pentru orice mulțime simetrică $\Lambda_0 = \{\lambda_i\}$, $i = 1, \dots, n$ există o reacție unică după stare $f \in R^n$ care alocă acest spectru $\Lambda(\Phi + \Gamma f^T) = \Lambda_0$.

Ecuația caracteristică atașată sistemului cu reacție după stare este:

$$\det[zI - \Phi + \Gamma f^T] = \det[zI - \Phi_0] = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \cdots \alpha_n. \quad (9.5)$$

Dacă se aleg valorile proprii λ_i ale matricei Φ_0, astfel încât să obținem performanțele dorite, polinomul caracteristic dorit al sistemului are forma:

$$\alpha_c(z) = \prod_{i=1}^{n}(z - \lambda_i) = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \cdots \alpha_n. \quad (9.6)$$

Astfel, se forțează polinomul caracteristic al sistemului cu reacție după stare să fie identic cu ecuația caracteristică impusă prin performanțe.

Exemplul 9.1 [4,16]. Se consideră modelul continuu al părții fixate (procesului) dublu integrator descris prin funcția de transfer $H_P(s) = y(s)/u(s) = 1/s^2$.

Se cere să se proiecteze un regulator după stare care să asigure sistemului de reglare închis discret polii $z_{1,2} = \lambda_{1,2}$.

Soluționare. Ecuația diferențială a procesului este:

$$\ddot{y}(t) = u(t).$$

Se introduc variabilele de stare:

$$x_1(t) = y(t), x_2(t) = \dot{y}(t)$$

și se obține următorul model intrare-stare-ieșire pentru partea fixată:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

sau în formă vector-matriceală:

$$\dot{x} = Ax + bu,$$

$$y = c^T x,$$

unde $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $c^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Pentru a determina modelul discret al procesului se calculează matricea fundamentală Φ și vectorul γ considerând perioada de eșantionare T:

$$\Phi = e^{AT} \approx I + AT = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma = \gamma = \int_0^T e^{As} b\, ds \approx \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix}.$$

Astfel, modelul de stare în forma discretă este:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = e^{AT} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix} u(k),$$

$$y(t) = c^T x(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

sau în formă vector-matriceală:

$$x_{k+1} = x(k+1) = \Phi x_k + \Gamma u_k,$$

sau

$$x_{k+1} = \Phi x_k + \Gamma u_k = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix} u_k,$$

$$y_k = c^T x_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_k,$$

unde pentru simplificarea relațiilor în formă discret se utilizează notațiile variabilelor:

$$x(k+1) = x_{k+1}, x(k) = x_k, u(k) = u_k, y(k) = y_k, .\, x_1(k) = x_k^1, \ldots .$$

Același model de stare se obține dacă se consideră funcția de transfer în z pentru $H_P(s) = 1/s^2$, care este:

$$H_P(z) = \frac{T^2}{2} \frac{z+1}{(z-1)^2}.$$

O lege de reglare după stare poate fi de forma:

$$u_k = -f_1 x_1 - f_2 x_2.$$

Folosind legea de reglare se obține ecuația de stare a sistemului închis:

$$x_{k+1} = \Phi_0 x_k = \begin{bmatrix} 1 - f_1 \frac{T^2}{2} & T - f_2 \frac{T^2}{2} \\ -f_1 T & 1 - f_2 T \end{bmatrix} x_k.$$

Ecuația caracteristică a sistemului închis este:

$$\det[zI - \Phi_0] = z^2 + \left(f_1 \frac{T^2}{2} + f_2 T - 2 \right) z + (f_1 \frac{T^2}{2} - f_2 T + 1) = 0.$$

Se consideră ecuația caracteristică dorită a sistemului este:

$$\alpha_c(z) = \prod_{i=1}^{2} (z - \lambda_i) = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2) = z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2 = 0$$

rezultă, din identitatea celor două ecuații caracteristice, următoarele ecuaţii pentru calculul elementelor f_1 și f_2:

$$f_1 \frac{T^2}{2} + f_2 T - 2 = \alpha_1,$$

$$f_1\frac{T^2}{2} - f_2 T + 1 = \alpha_2,$$

respectiv se obțin relațiile:

$$f_1 = \frac{1}{T^2}(1 + \alpha_1 + \alpha_2),$$

$$f_2 = \frac{1}{2T}(3 + \alpha_1 + \alpha_2).$$

În acest caz există totdeauna soluție pentru f_1 și f_2 pentru toate valorile α_1, α_2. Structura sistemului de reglare după stare se dă în fig. 9.2.■

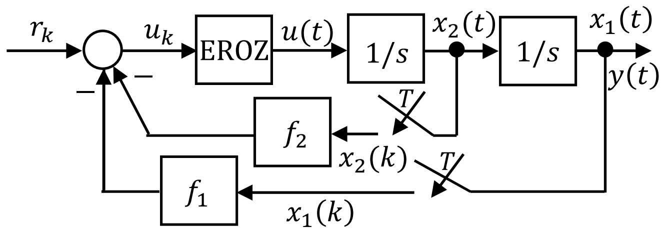

Fig. 9.2. Structura sistemului de reglare după stare

Când modelul procesului este dat în forma canonică controlabilă, matricea de comandă după stare se calculează direct în funcție de coeficienții a_i ai ecuației caracteristice a sistemului și coeficienții α_i ai ecuației caracteristice dorite a sistemului cu reacție după coeficienții α_i ai ecuației caracteristice dorite a sistemului cu reacție după stare.

Dacă perechea (Φ, Γ) este în formă canonică controlabilă:

$$\Phi_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \Gamma_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (9.7)$$

prin utilizarea comenzii $u_k = -f^T x_k$ se obține:

$$\Phi_c = \Phi - \Gamma f^T = \begin{bmatrix} -a_1 - f_1 & -a_2 - f_2 & \cdots & \cdots & -a_n - f_n \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (9.8)$$

iar ecuația caracteristică atașată sistemului este:

$$\det[zI - \Phi_0] = z^n + (a_1 + f_1)z^{n-1} + \cdots + (a_n + f_n)I_n. \quad (9.9)$$

Deoarece ecuația caracteristică dorită a sistemului cu reacție după stare are forma (9.7), rezultă din identitatea celor două ecuații (9.9) și (9.6) relațiile:

$$a_i + f_i = \alpha_i, i = 1, \dots, n \quad (9.10)$$

și se calculează $f_i = \alpha_i - a_i$.

Pentru un sistem care nu este în forma canonică controlabilă, se poate efectua o transformare liniară de forma:

$$x_k = T\tilde{x}_k,$$

care transformă sistemul descris prin perechea (Φ, Γ) într-un sistem caracterizat prin (Φ_c, Γ_c), $(\Phi, \Gamma) \xrightarrow{T} (\Phi_c, \Gamma_c)$:

$$\tilde{x}_{k+1} = T^{-1}\Phi T\tilde{x}_k + T^{-1}\Gamma u_k, \quad (9.11)$$

$$y_k = c^T T\tilde{x}_k$$

sau

$$\tilde{x}_{k+1} = \Phi_c\tilde{x}_k + \Gamma_c u_k, \quad (9.12)$$

$$y_k = c^T\tilde{x}_k,$$

unde $\Phi_c = T^{-1}\Phi T$, $\Gamma_c = T^{-1}\Gamma$, $c_c^T = c^T T$.

În baza transformării liniare, legea de comandă după stare ia forma:

$$u_k = -\tilde{f}^T\tilde{x}_k = -\tilde{f}^T T^{-1}\tilde{x}_k = -f^T x_k, \quad (9.13)$$

$$f^T = \tilde{f}^T T^{-1}.$$

Prin transformarea liniară se conservă controlabilitatea sistemului.

Pornind de la definiția matricelor Φ_c și Γ_c, rezultă că matricea de controlabilitate a sistemului transformat este:

$$R_c = [\Gamma_c \vdots \Phi_c\Gamma_c \vdots \cdots \vdots \Phi_c^{n-1}\Gamma_c]$$

sau

$$R_c = [T^{-1}\Gamma \vdots\ T^{-1}\Phi T^{-1}\Gamma \vdots \cdots] = T^{-1}R, \tag{9.14}$$

unde R este matricea de controlabilitate a sistemului inițial:

$$R = [\Gamma \vdots\ \Phi\Gamma \vdots \cdots \vdots \Phi^{n-1}\Gamma].$$

Astfel, matricea T se poate calcula cu relația:

$$T^{-1} = R_c R^{-1}. \tag{9.15}$$

Având în vedere că orice matrice verifică ecuaţia caracteristică conform teoremei Cayley-Hamilton, se poate obţine o procedură rapidă de calcul a matricei de comandă după stare, cunoscută sub denumirea de procedura Ackermann [4, 16].

Pentru deducerea acestei proceduri de calcul a matricei de comandă după stare se consideră ecuația caracteristică a sistemului sub forma:

$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1}z + a_n = \alpha_c(z).$$

Conform teoremei Cayley-Hamilton se obţine:

$$\Phi_c^n + a_1\Phi_c^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\Phi_c + a_n I_n = 0, \tag{9.16}$$

unde Φ_c este matricea în forma canonică controlabilă a sistemului condus.

Ecuația caracteristică dorită a sistemului cu reacție după stare având forma:

$$z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \alpha_2 z^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1}z + \alpha_n = \alpha_c(z),$$

conduce la forma:

$$\Phi_c^n + \alpha_1\Phi_c^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}\Phi_c + \alpha_n I_n = \alpha_c(\Phi_c). \tag{9.17}$$

Din (9.16) și (9.17) rezultă:

$$\alpha_c(\Phi_c) = (\alpha_1 - a_1)\Phi_c^{n-1} + (\alpha_2 - a_2)\Phi_c^{n-2} + \cdots + (\alpha_n - a_n)I_n. \tag{9.18}$$

Deoarece Φ_c este în forma canonică controlabilă, se observă că produsul vectorului $e_n^T = [0\ \ 0 \ldots 1]$ cu Φ_c conduce la relația:

$$e_n^T \Phi_c = [0 \;\; 0 \ldots 1 \;\; 0] = e_{n-1}^T. \tag{9.19}$$

Dacă se multiplică acest vector cu Φ_c, se obține:

$$(e_n^T \Phi_c)\Phi_c = [0 \;\; 0 \ldots 1 \;\; 0]\Phi_c = [0 \;\; 0 \ldots 1 \;\; 0 \;\; 0] = e_{n-2}^T \tag{9.20}$$

și așa mai departe:

$$e_n^T \Phi_c^{n-1} = [1 \;\; 0 \;\; 0 \ldots \;\; 0] = e_1^T.$$

Astfel, dacă se multiplică (9.18) cu vectorul e_n^T se obține:

$$e_n^T \alpha_c(\Phi_c) = (\alpha_1 - a_1)e_1^T + (\alpha_2 - a_2)e_2^T + \cdots + (\alpha_n - a_n)e_n^T \tag{9.21}$$

sau dacă ținem seama de (9.10) se obține:

$$e_n^T \alpha_c(\Phi_c) = \tilde{f}^T. \tag{9.22}$$

Matricea de comandă după stare f^T se obține:

$$f^T = \tilde{f}^T T^{-1} = e_n^T \alpha_c(\Phi_c) T^{-1} = e_n^T T^{-1} \alpha_c(\Phi) \tag{9.23}$$

și $\Phi_c = T^{-1}\Phi T,$ respectiv $(T^{-1}\Phi T)^n = T^{-1}\Phi^n T.$

Relația (9.23) cu (9.15) ia forma:

$$f^T = e_n^T [R_c R^{-1}] \alpha_c(\Phi) \tag{9.24}$$

sau, dacă se ține seama de forma matricei R_c, care are ultima linie identică cu vectorul e_n^T, se obține:

$$f^T = e_n^T R^{-1} \alpha_c(\Phi) \tag{9.25}$$

având în vedere $e_n^T R_c = e_n^T$.

Dacă se introduce notaţia:

$$h^T = [0 \;\; 0 \ldots 1] R^{-1} \tag{9.26}$$

se obține matricea de comandă după stare în forma:

$$f^T = h^T \alpha_c(\Phi). \tag{9.27}$$

După perechea (Φ, Γ) și setul de valori proprii dorite λ_i, procedura de calcul a matricei de comandă după stare presupune parcurgerea următoarelor etape:

1) se verifică controlabilitatea sistemului;

2) se calculează coeficienții α_i ai ecuației caracteristice dorite utilizând relația:

$\alpha_c(z) = \prod_{i=1}^{n}(z - \lambda_i) = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \cdots + \alpha_n$;

3) se calculează vectorul h^T după relația:

$h^T = e_n^T R^{-1}$;

4) se calculează matricea de comandă f^T cu relația:

$f^T = h^T \alpha_c(\Phi)$.

Această procedură poate fi extinsă și la sistemele cu mai multe intrări și mai multe ieșiri. Dacă perechea (Φ, Γ) este controlabilă, atunci aproape oricare ar fi matricea $F_0 \in R^{m\times n}$ și vectorul $g \in R^n$, perechea cu o singură intrare definită prin $(\Phi_1, \Gamma_1) = (\Phi + \Gamma F_0, \Gamma \mathrm{g})$ este controlabilă.

Astfel, dacă matricea f^T alocă polii perechii (Φ_1, Γ_1), respectiv $\lambda(\Phi_1 + \Gamma_1 f^T) = \Lambda$, atunci $\lambda(\Phi + \Gamma(F_0 + g f^T)) = \Lambda$, iar matricea de comandă $F = F_0 + g f^T$ alocă polii perechii inițiale (Φ, Γ), unde Λ reprezintă mulțimea valorilor proprii.

În acest caz, *procedura de sinteză a matricei de comandă*, în condițiile în care se dau (Φ, Γ, C) și mulțimea $\Lambda = \{\lambda_i\}$ a valorilor proprii dorite, presupune parcurgerea următoarelor etape:

1) se verifică controlabilitatea perechii (Φ, Γ);

2) se alege în mod aleatoriu matricea F_0 și vectorul g și se verifică controlabilitatea perechii $\Phi_1 = \Phi + \Gamma F_0$, $\Gamma_1 = \Gamma g$;

3) se determină pentru perechea (Φ_1, Γ_1) matricea de comandă f^T, conform procedurii Ackermann aplicată sistemelor monovariabile.

4) se construiește matricea de comandă F cu ajutorul relației $F = F_0 + g f^T$.

Procedura expusă pentru sisteme multivariabile evidențiază faptul că *soluția problemei nu este unică*, matricea F_0 și vectorul g alegându-se în mod aleatoriu.

Exemplul 9.2 [4, 16]. Se consideră procesul descris cu f.d.t. dublu integrator $H_P(s) = 1/s^2$.

Se cere a determina matricea de comandă după stare folosind procedura Ackermann.

Soluționare. 1. Se determină matricea de controlabilitate a sistemului:

$$R=[\Gamma \,\vdots\, \Phi\Gamma]=\left\{\begin{matrix}\frac{T^2}{2}\\ T\end{matrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{T^2}{2}\\ T\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix}\frac{T^2}{2} & 3\frac{T^2}{2}\\ T & T\end{bmatrix},$$

iar inversa acesteia are forma:

$$R^{-1}=\frac{1}{T^2}\begin{bmatrix}-1 & \frac{3T}{2}\\ 1 & \frac{T}{2}\end{bmatrix}.$$

2. Ecuația caracteristică dorită a sistemului cu reacție după stare pentru valorile proprii $\lambda_1=0.4$, $\lambda_2=0.2$ are forma:

$$(z-0.4)(z-0.2)=z^2-0.6z+0.08=\alpha_c(z),$$

iar $\alpha_c(\Phi)$ este:

$$\alpha_c(\Phi)=\begin{bmatrix}1 & 2T\\ 1 & 1\end{bmatrix}-0.2\begin{bmatrix}1 & T\\ 1 & 1\end{bmatrix}+0.08\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.48 & 1.4T\\ 0 & 0.48\end{bmatrix}.$$

3. Se calculează matricea de comandă:

$$f^T=e_n^TR^{-1}\alpha_c(\Phi)=(0\ \ 1)\frac{1}{T^2}\begin{bmatrix}-1 & \frac{3T}{2}\\ 1 & \frac{T}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.48 & 1.4T\\ 0 & 0.48\end{bmatrix}=$$

$$=(0\ \ 1)\frac{1}{T^2}\begin{bmatrix}-0.48+1.4T & 0.72-0.7T^2\\ 0.48 & -0.24T\end{bmatrix}=\frac{1}{T^2}[-0.48\ \ -0.24T].\blacksquare$$

9.3 Algoritmul de estimare a stării

În practică nu este posibilitatea ca toate variabilele de stare ale procesului să fie accesibile măsurării. Este necesar de-a construi vectorul de stare din măsurări, pornind de la structura dată a modelului procesului.

Admitem că modelul procesului are forma:

$$x_{k+1}=\Phi x_k+\Gamma u_k, \qquad (9.28)$$
$$y_k=c^Tx_k,$$

unde u_k și y_k reprezintă informații funcționale, măsurabile. Se impune a construi un model al procesului care pe baza informațiilor u_k și y_k să genereze o ieșire $\hat{y}_k=c^T\hat{x}_k$, unde $\hat{x}_k\in R^n$ reprezintă starea estimată a procesului.

9.3.1 *Calculul direct al variabilelor de stare*

Pornind de la ecuația $y_k = c^T x_k$, obținem la diferite momente discrete de timp [4, 16]:

$$y_{k-n+1} = c^T x_{k-n+1},$$
$$y_{k-n+2} = c^T x_{k-n+2}, \tag{9.29}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_k = c^T \Phi^{n-1} x_{k-n+1} + c^T \Phi^{n-2} \Gamma u_{k-n+1} + \cdots + c^T \Gamma u_{k-1}.$$

Dacă se introduc vectorii:

$$Y_k = \begin{bmatrix} y_{k-n+1} \\ y_{k-n+2} \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix} \text{ și } U_{k-1} = \begin{bmatrix} u_{k-n+1} \\ u_{k-n+2} \\ \vdots \\ u_{k-1} \end{bmatrix},$$

atunci ecuația (9.29) se scrie sub forma:

$$Y_k = W_0 x_{k-n+1} + W_u U_{k-1},$$

unde matricele W_0 și W_u au forma:

$$W_0 = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T \Phi \\ \vdots \\ c^T \Phi^{n-1} \end{bmatrix} \text{ și } W_u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c^T \Gamma & 0 & \cdots & 0 \\ c^T \Phi \Gamma & c^T \Gamma & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c^T \Phi^{n-2} \Gamma & c^T \Phi^{n-2} \Gamma & \cdots & c^T \Gamma \end{bmatrix}.$$

Matricea W_0 este inversabilă dacă sistemul este observabil și se obține starea:

$$x_{k-n+1} = {W_0}^{-1} Y_k - {W_0}^{-1} W_u U_{k-1},$$

care este funcție de Y_k și U_{k-1}.

Din ecuația de stare a sistemului se obține:

$$x_k = \Phi^{n-1} x_{k-n+1} + \Phi^{n-2} \Gamma u_{k-n+1} + \cdots + \Gamma u_{k-1}$$

sau

$$x_k = \Phi_y Y_k + \Gamma_u U_{k-1}, \tag{9.30}$$

unde

$$\Phi_y = \Phi^{n-1} w_0^{-1},\ \Gamma_u = [\Phi^{n-2}\Gamma \vdots \Phi^{n-2}\Gamma \vdots \cdots \vdots \Gamma] - \Phi^{n-1} w_0^{-1} w_0. \tag{9.31}$$

Vectorul de stare este astfel o combinație liniară a variabilelor $(y_k, y_{k-1}, \dots, y_{k-n+1)})$ și $(u_{k-1}, u_{k-2}, \dots, u_{k-n+1})$.

Pentru a ilustra modul de construcție a variabilelor de stare se analizează exemplul următor.

Exemplul 9.3 [4, 16]. Se utilizează modelul discret al procesului de la ex. 9.1:

$$x_{k+1} = \Phi x_k + \Gamma u_k = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix} u_k,$$

$$y_k = c^T x_k = [1 \quad 0] x_k.$$

Se cere să se construiască variabilele de stare.

Soluționare. Se determină variabilele de stare scriind ecuațiile:

$$y_k = x_k^1,$$

$$y_k = x_{k-1}^1 + T x_{k-1}^2 + \frac{T^2}{2} u_{k-1},$$

din care se obțin cele două variabile de stare x_k^1 și x_k^2:

$$x_k^1 = y_k,$$

$$x_k^2 = \frac{y_k - y_{k-1}}{T} + \frac{T^2}{2} u_{k-1}.$$

Astfel, variabila de stare x_k^1 se calculează direct, fiind egală cu variabila măsurată, iar variabila x_k^2 se calculează în funcție de y_k, y_{k-1} și u_{k-1}, care sunt disponibile.■

9.3.2 *Reconstrucția stării folosind un sistem dinamic*

Cea mai simplă cale de a estima starea unui proces a cărui realizare este cunoscută (Φ, Γ, c^T) presupune a construi un model al procesului sub forma [4, 16]:

$$\hat{x}_{k+1} = \Phi \hat{x}_k + \Gamma u_k, \tag{9.32}$$

$$\hat{y}_k = c^T \hat{x}_k,\ \hat{x}_0 \in R^n,$$

unde $\hat{x}_k$ reprezintă starea estimată a procesului.

Se definește eroarea de estimare $e_k = x_k - \hat{x}_k$ și rezultă:

$$e_{k+1} = \Phi e_k, \qquad (9.33)$$

ceea ce evidențiază imposibilitatea de a controla convergența stării estimate la starea reală a procesului. În cazul în care condițiile inițiale ale sistemului real (9.28) și ale sistemului (9.32), care reprezintă modelul sistemului real, convergența stării $\hat{x}_k$ la starea reală x_k a sistemului se asigură numai dacă sistemul (9.32) este asimptotic stabil.

Pentru a controla convergența stării estimate $\hat{x}_k$ la starea reală x_k, se construiește un sistem dinamic sub forma:

$$\hat{x}_{k+1} = \Phi\hat{x}_k + \Gamma u_k + L(y_k - \hat{y}_k), \qquad (9.34)$$
$$\hat{y}_k = c^T\hat{x}_k,\ \hat{x}_k \in R^n,$$

unde L este matricea de ponderare a erorii $e_k = y_k - \hat{y}_k$ dintre ieșirile procesului și predictorului (estimatorului) (9.34).

Structura predictorului de stare (9.34) este dată în fig. 9.3, a.

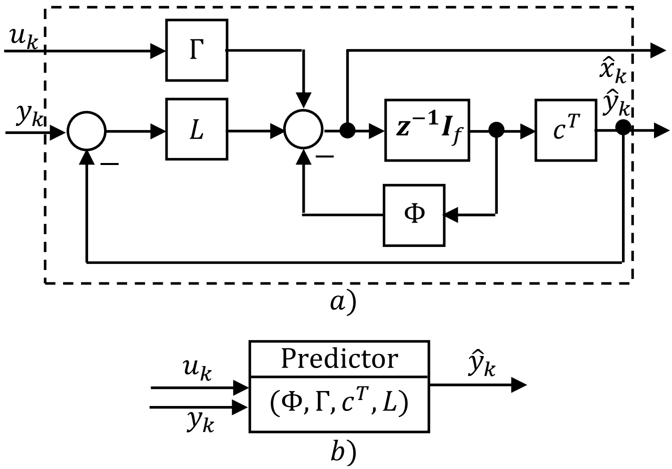

Fig. 9.3. Structura predictorului de stare

Astfel, reconstrucția stării se realizează prin includerea în sistem a ieșirilor măsurate y_k și $\hat{y}_k$, obținând starea $\hat{x}_{k+1}$ pe baza informațiilor anterioare la momentul k. Modelul (9.34) poate fi pus și sub forma:

$$\hat{x}_{k+1|k} = \Phi\hat{x}_{k|k-1} + \Gamma u_k + L(y_k - c^T\hat{x}_{k|k-1}) \qquad (9.35)$$

ceea ce evidențiază comportarea ca predictor de stare într-un pas, care generează starea $\hat{x}_{k+1}$ pe baza măsurătorilor disponibile la momentul k.

Când cele două ieșiri sunt identice, ultimul termen în (9.34) nu are nici un efect.

Modelul (9.34) poate fi descris în forma:

$$\hat{x}_{k+1} = (\Phi - Lc^T)\hat{x}_k + \Gamma u_k + Ly_k, \tag{9.36}$$
$$\hat{y}_k = c^T\hat{x}_k, \hat{x}_k \in R^n,$$

din care rezultă că dinamica predictorului de stare cu intrările u_k și y_k este descrisă de matricea $\Phi_e = \Phi - Lc^T$.

Rezultă că predictorul de stare este un sistem dinamic cu intrările măsurabile u_k și y_k și cu starea $\hat{x}_k$ și ieșirea $\hat{y}_k$ (fig. 9.3, b).

Pentru a determina matricea L, ecuația erorii de estimare (de reconstrucție) se pune sub forma:

$$e_{k+1} = (\Phi - Lc^T)e_k \tag{9.37}$$

sau

$$e_{k+1|k} = (\Phi - Lc^T)e_{k|k-1}. \tag{9.38}$$

Matricea L se alege astfel încât sistemul (9.37) să fie asimptotic stabil și eroarea $e_k \to 0$ totdeauna. Utilizarea reacției de la măsurători (termenul $L(y_k - \hat{y}_k)$ în procesul de reconstrucție a stării este posibil a face ca eroarea e_k să convergă la zero.

Sistemul (9.37) este un sistem asimptotic stabil, dacă perechea (Φ, c^T) este observabilă.

Pentru sistemul observabil, conform teoremei alocării, se posate determina o matrice L care să aloce valorile proprii ale matricei $(\Phi - Lc^T)$ în alocații apriori fixate. Astfel, indiferent de starea inițială $\hat{x}_0$, procesul de convergență a stării $\hat{x}_k$ este controlat prin alegerea matricei L a predictorului.

Determinarea matricei L este practic identică cu determinarea matricei de comandă după stare f^T prin alocarea de poli. Selecția polilor predictorului este un compromis între sensibilitatea la erorile de măsurare și recalcularea rapidă a erorilor inițiale. Un predictor rapid va converge repede, însă va fi sensibil la erorile de măsurare.

Matricea L determina în mod similar ca matricea f^T printr-o procedură de alocare a polilor, considerând dualitatea proprietăților structurale ale sistemului, controlabilitatea și observabilitatea.

Procedură cea mai simplă de calcul a matricei L folosește relația:

$$\det(zI - \Phi + Lc^T) = z^n + \widehat{\alpha}_1 z^{n-1} + \cdots + \widehat{\alpha}_n = \prod_{i=1}^{n}(z - \widehat{\lambda}_i), \tag{9.39}$$

unde $\widehat{\lambda}_i$ sunt valorile proprii dorite ale predictroului.

Utilizând procedura Ackermann extinsă la sistemul cu perechea (Φ, c^T) observabilă, se determnă matricea L în forma:

$$L^T = [0\ \ 0 \dots\ 1](W_0^T)^{-1}\alpha_e(\Phi^T)$$

sau

$$L = \alpha_e(\Phi)W_0^{-1}[0\ \ 0 \dots\ 1]^T, \tag{9.40}$$

în care W_0 este matricea de observabilitate a sistemului:

$$W_0^T = [c\ \ \Phi^T c \dots\ (\Phi^{n-1})^T c],$$

iar $\alpha_e(z)$ este polinomul caracteristic al predictorului de stare.

Alegănd matricea L astfel încât matricea $(\Phi - Lc^T)$ să aibă toate valorile proprii în origine, se obține un predictor cu răspunsul fără suprareglare. Acest predictor are proprietatea că eroarea de estimare atinge valoarea zero într-un timp finit egal cu nT.

Folosind procedura Ackermann pentru calculul matricei L a unui predictor cu răspunsul fără suprareglare, se calculează cu relația:

$$L = \Phi^n W_0^{-1}[0\ \ 0 \dots\ 1]^T. \tag{9.41}$$

Pentru evitarea întârzierilor care apar în calculul stării pe baza măsurătorilor anterioare, se utilizează un estimator de stare în forma:

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^0 + L(y_k - \hat{y}_k^0), \tag{9.42}$$

$$\hat{y}_k^0 = c^T \hat{x}_k^0,$$

unde starea estimată $\hat{x}_k^0$ se calculează cu relația:

$$\hat{x}_k^0 = \Phi\hat{x}_{k-1} + \Gamma u_{k-1}.$$

Astfel, estimatorul de stare este descris cu ecuația:

$$\hat{x}_k = \Phi\hat{x}_{k-1} + \Gamma u_{k-1} + Ly_k - Lc^T(\Phi\hat{x}_{k-1} + \Gamma u_{k-1})$$

sau

$$\hat{x}_k = (I - Lc^T)[\Phi\hat{x}_{k-1} + \Gamma u_{k-1}] + Ly_k. \tag{9.43}$$

Eroarea de estimare în acest caz este:

$$e_k = x_k - \hat{x}_k = (\Phi - Lc^T\Phi)e_{k-1}. \tag{9.44}$$

Această ecuație este similară cu (9.37) și, din definiția matricei de observabilitate W_0, rezultă că perechea $(\Phi, c^T\Phi)$ este observabilă dacă perechea (Φ, c^T) este observabilă. Astfel se constată că valorile proprii ale matricei $(\Phi - Lc^T\Phi)$ pot fi alocate arbitrar prin alegerea matricei L.

Pentru un sistem cu p ieșiri și m intrări matricea $(I - CL)$ este o matrice $p \times p$, iar matricea L se alege astfel ca $CL = I$, dacă rangul matricei C este egal cu p.

În rezultat se obține egalitatea $y_k = C\hat{x}_k$, din care rezultă că ieșirea sistemului este estimată fără eroare.

Starea la tactul k se generează pe baza informațiilor curente măsurate în cadrul unui proces iterativ. Construirea unui estimator pentru furnizarea stării $\hat{x}_k$ pe baza măsurătorilor se bazează pe informația disponibilă, de precizia de cunoaștere a modelului, de precizia de măsurare a ieșirilor din proces.

Pentru procese multivariabile cu $y_k \in R^p$ și $x_k \in R^n$, în cazul în care cele p ieșiri sunt conținute în vectorul de stare și sunt măsurabile, se construiește un estimator (predictor) minimal. Dimensiunea vectorului de stare estimat în acest caz este $(n - p)$ ($x_k \in R^{n-p}$).

Existența semnalelor zgomote la măsurarea variabilelor de stare, estimatorul complet (estimarea celor n variabile de stare) asigură precizie superioară, dar se ridică volumul calculelor.

9.4 Proiectarea regulatorului cu estimator de stare

Se consideră modelul multivariabil a unui proces în formă discretă [4, 16]:

$$x_{k+1} = \Phi x_k + \Gamma u_k, \tag{9.45}$$

$$y_k = Cx_k, x_0 \in R^n,$$

unde $u_k \in R^m$, $y_k \in R^p$, iar matricele Φ, Γ, C au dimensiunile corespunzătoare.

Dacă se cunosc matricele de comandă F și de estimare L, atunci regulatorul cu estimator de stare se descrie cu relația:

$$\hat{x}_{k+1} = \Phi x_k + \Gamma u_k + L(y_k - \hat{y}_k), \tag{9.46}$$

$$\hat{y}_k = C\hat{x}_k,$$

$$u_k = w_k - F\hat{x}_k$$

sau

$$\hat{x}_{k+1} = (\Phi - LC - \Gamma F)\hat{x}_k + \Gamma u_k + Ly_k - L\hat{y}_k, \tag{9.47}$$

$$u_k = w_k - F\hat{x}_k,$$

unde w_k este comanda dorită în regim staționar în raport cu referința.

Analizând evoluția sistemului cu reacție după stare (cu $w_k = 0$) și evidențiind eroarea de predicție, se obține pentru sistemul cu reacție după stare și cu predictor modelul compus cu starea $\tilde{x}_k = [e_k^T x_k^T]^T$ sub forma:

$$\tilde{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} e_{k+1} \\ x_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi - LC & 0 \\ \Gamma F & \Phi - \Gamma F \end{bmatrix} \tilde{x}_k. \tag{9.48}$$

Polinomul caracteristic al sistemului închis (9.48) este:

$$\det(zI - \Phi + LC) \cdot \det(zI - \Phi + \Gamma F) =$$

$$= \alpha_e(z)\alpha_c(z) = \alpha_0(z) = P_c(z), \tag{9.49}$$

unde $\alpha_e(z)$ este polinomul caracteristic al predictorului de stare, $\alpha_c(z)$ - polinomul caracteristic al sistemului închis (fig. 9.4).

Se constată că rădăcinile ecuației caracteristice a sistemului cu regulator cu estimator de stare sunt neschimbate ca urmare a principiului separării.

Regulatorul cu estimator se descrie și prin ecuațiile:

$$\hat{x}_{k+1} = [\Phi - \Gamma F - LC]\hat{x}_k + Ly_k, \tag{9.50}$$

$u_k = -F\hat{x}_k$ la $w_k = 0$.

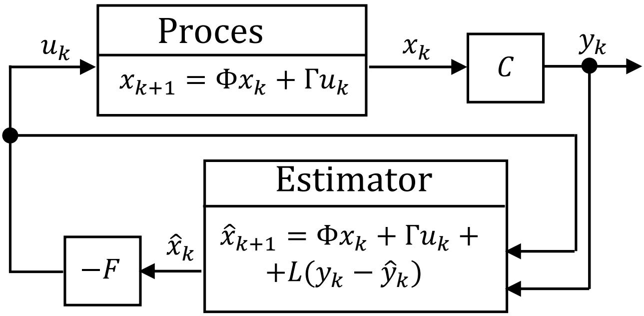

Fig. 9.4. Structura sistemului automat cu estimator

Astfel, matricea de transfer ce caracterizează comportarea regulatorului cu estimator este:

$$H_R(z) = -F[zI - \Phi + \Gamma F + LC]^{-1}L, \tag{9.51}$$

iar polinomul caracteristic a regulatorului este:

$$\det(zI - \Phi + \Gamma F + LC) = \alpha_R(z).$$

Pentru proiectarea regulatorului cu estimator (compensator dinamic) se determină matricea de comandă F, astfel încât să fie satisfăcute cerințele de performanță și în condițiile unor restricții impuse de procesul condus (elementul de execuție), iar matricea L a estimatorului se determină din condiția ca estimatorul să fie mai rapid decât regulatorul de cel puțin patru ori. Această cerință este impusă de restricțiile de timp la implementarea în timp real a legii de reglare după stare.

Pentru estimarea rapidă a stării la implementarea algoritmului de reglare, aceasta trebuie să fie corelată cu caracteristicile zgomotului și posibilitățile de rejecție ale acesteia. Tehnicile de estimare optimală a stării permit rezolvarea problemelor cu viteza maximă de estimare.

Structura sistemului de reglare cu regulator și estimator (RE) se dă în fig. 9.5. În practică, este convenabil a selecta rădăcinile ecuației caracteristice a regulatorului, pentru a satisface cerințele de performanță și restricțiile impuse de elementele de execuție, iar rădăcinile ecuației caracteristice a estimatorului (predictorului), astfel încât să se asigure o viteză ridicată de răspuns în corelație cu cerințele de rejecție a erorile de modelare și cu sensibilitatea la erorile de modelare.

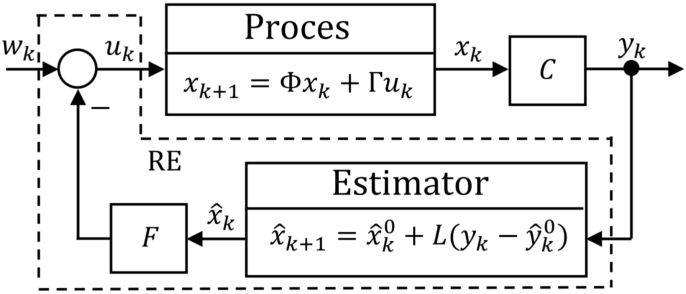

Fig. 9.5. Structura sistemului automat cu regulator și estimator

Exemplul 9.4 [16]. Se consideră partea fixată continuă descrisă prin modelul:

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_2 + 2u_1 + u_2,$$

$$\dot{x}_2 = -3x_2 + u_1,$$

$$\dot{x}_3 = x_3 - u_1 - 2u_2,$$

$$y_{f_1} = -x_1,$$

$$y_{f_2} = x_3.$$

Se cere să se proiecteze un regulator cu estimator și componentă integrală astfel încât să se obțină un răspuns aperiodic și anularea erorilor de poziție și să se reprezinte structura sistemului de reglare.

Soluționare. 1. Modelul continuu se aduce la forma intrare-stare-ieșire:

$$\dot{x}_f = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x_f + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} u,\ x_f = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},\ u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

$$y_f = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x_f,\ y_f = \begin{bmatrix} y_{f_1} \\ y_{f_2} \end{bmatrix}$$

sau în forma vector-matriceală:

$$\dot{x}_f = Ax_f + Bu,$$

$$y_f = C_f x_f,$$

unde $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, $C_f = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Pentru determinarea modelului discret se calculează matricele procesului Φ_f și Γ_f, considerând perioada de eșantionare $T = 1$ s:

$$\Phi_f = e^{AT} \approx I + AT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_f = \int_0^T e^{As} B ds \approx \begin{bmatrix} 1+s & s & 0 \\ 0 & 1-2s & 0 \\ 0 & 0 & 1+s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} 3.5 & 1.5 \\ -0.5 & 0 \\ -1.5 & -3 \end{bmatrix}.$$

3. Deoarece regulatorul va rezolva problema reglării prin intermediul unor integratoare introduse pe canalele de eroare se va construi modelul estins prin adăugarea a două stări suplimentare x_4 și x_5:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \\ x_5(k+1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \\ x_5(k) \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{cc} 3.5 & 1.5 \\ 0.5 & 0 \\ -1.5 & -3 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} r_1(k) \\ r_2(k) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \\ x_5(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_1(k) \\ r_2(k) \end{bmatrix}$$

sau

$$\boldsymbol{x}_1(k+1) = \Phi_1 \boldsymbol{x}_1(k) + \Gamma_1 \boldsymbol{u(k)} + \boldsymbol{W} \boldsymbol{y}_r(k), \ \boldsymbol{y}_r(k) = \begin{bmatrix} r_1(k) \\ r_2(k) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{y}(k) = C_1 \boldsymbol{x}_1(k) + \boldsymbol{y}_r(k).$$

4. Proiectarea unei legi de reglare după stare care să asigure un răspuns aperiodic conduce la alegerea unor rădăcini ale polinomului caracteristic al sistemului care să corespundă în cazul continuu unor valori reale negative:

$$\lambda_{1,2,3} = 0.9, (s_{1,2,3} = -0.1),$$

$$\lambda_{4,5} = 0.8, \quad (s_{4,5} = -0.2).$$

5. Deoarece perechea de matrice (Φ_1, Γ_1) este complet controlabilă se poate determina matricea de reacție după stare $\boldsymbol{F}_1$ astfel încât polinomul caracteristic dorit $P_{cr}(z)$ să aibă rădăcinile $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_5$ folosind procedura Ackermann pentru procese multivariabile.

5.1. Se aleg matricea sistemului închis $\boldsymbol{F}_0 \in R^{2\times 5}$ și vectorul $\boldsymbol{g} \in R^2$:

$$\boldsymbol{F}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

5.2. Se construiește perechea de matrice cu o intrare (Φ_0, γ_1):

$$\Phi_0 = \Phi_1 + \Gamma_1 \boldsymbol{F}_0 = \begin{bmatrix} 2 & 2.5 & 3.5 & 0 & 1.5 \\ 0 & -2 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0.5 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{g_1} = \gamma_1 \boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} 2 \\ -0.5 \\ 1.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5.3. Se verifică dacă perechea (Φ_0, γ_1) este complet controlabilă cu matricea:

$$R = [\gamma_1 \quad \Phi_0\gamma_1 \quad \Phi_0^2\gamma_1 \quad \Phi_0^3\gamma_1 \quad \Phi_0^4\gamma_1] = \det R \neq 0.$$

5.4. Se calculează inversa matricei de controlabilitate:

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} 0.179 & 0.233 & -0.161 & 0 & 0.754 \\ 0.179 & 0.233 & -0.161 & 0 & 0.754 \\ -0.385 & -0.5 & 0.346 & 0 & -1.617 \\ -0.025 & -0.033 & 0.023 & 0 & -0.107 \\ 0.051 & 0.066 & -0.046 & 0.02 & 0.215 \end{bmatrix}$$

și se reține ultima linie în $\boldsymbol{h^T}$:

$$\boldsymbol{h^T} = [0.051 \quad 0.066 \quad -0.046 \quad 0.02 \quad 0.215].$$

5.5. Se determină polinomul caracteristic $P_c(z)$:

$$P_c(z) = (z - 0.9)^3(z - 0.8)^2 = z^5 - 4.3z^4 + 7.39z^3 - 6.32z^2 + 2.7z - 0.46$$

și pe baza acestuia se determină polinomul $P_c(\Phi_0)$:

$$P_c(\Phi_0) = \Phi_0^5 - 4.3\Phi_0^4 + 7.39\Phi_0^3 - 6.32\Phi_0^2 + 2.7\Phi_0 - 0.46I =$$

$$= \begin{bmatrix} 1.98 & 620.03 & 168.64 & 0 & 71.55 \\ 0 & -395.03 & -35.32 & 0 & -67.22 \\ 0 & -511.95 & -102.85 & 0 & -108.62 \\ 1.97 & -185.17 & -22.86 & 0 & -99.32 \\ 0 & -134.44 & -36.20 & 0 & -17.52 \end{bmatrix}.$$

5.6. Se calculează vectorul $\boldsymbol{f^T}$:

$$\boldsymbol{f^T} = -\boldsymbol{h^T} P_c(\Phi_0) = [-0.101 \quad -0.193 \quad -0.084 \quad 0.302 \quad 0.441].$$

5.7. Se determină matricea de reacție după stare $\boldsymbol{F}_1$:

$$\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{F}_0 + \boldsymbol{g}\boldsymbol{f^T} = \left[\begin{array}{cc:c:cc} -0.101 & -0193 & 1.084 & 0.302 & -044 \\ -0.101 & 1.193 & -0.084 & -0.302 & 0.55 \end{array}\right] =$$

$$= [\boldsymbol{F}_{12} \quad \boldsymbol{F}_3 \quad \boldsymbol{F}_l]$$

care încheie prima etapă de proiectare.

6. În a doua etapă se estimează stările care nu sunt direct măsurabile. Se constată din modelul continuu al părții fixate că numai starea x_2 nu este măsurabilă, dar

deoarece acesta intervine în două ecuații se construiește un estimator pentru stările x_1 și x_2.

6.1. Pentru aceasta din modelul discret al părții fixate se utilizează ecuațiile:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3.5 & 1.5 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix},$$

$$y_1(k) = [-1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix},$$

sau

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \Phi \boldsymbol{x}(k) + \Gamma \boldsymbol{u}(k),$$

$$y_1(k) = C\boldsymbol{x}(k).$$

6.2. Acest model va fi folosit pentru a construi estimatorul:

$$\hat{\boldsymbol{x}}(k+1) = (\Phi - \boldsymbol{lC})\hat{\boldsymbol{x}}(k) + \Gamma \boldsymbol{u}(k) + l y_1(k).$$

$$y_1(k) = C\boldsymbol{x}(k).$$

7. Matricea $\boldsymbol{l}$ a estimatorului se calculează cu procedura Ackermann. Pentru ca estimatorul să aibă o dinamică de 4 ori mai rapidă decât a procedurii de elaborare a comenzii se aleg valorile proprii $\lambda_1^* = 0.4$ $(s_1 = -0.9)$ și $\lambda_2^* = 0.44$ $(s_1 = -0.8)$ și se parcurg următoarele etape:

7.1. Se calculează matricea de observabilitate:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ C\Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

și inversa acesteia:

$$O^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

7.2. Se construiește polinomul caracteristic al estimatorului $P_{ce}(z)$:

$$P_{ce}(z) = (z - 0.4)(z - 0.44) = z^2 - 0.84z + 0.176.$$

7.3. Se construiește polinomul $P_{ce}(\Phi)$:

$$P_{ce}(\Phi) = \Phi^2 - 0.84\Phi + 0.176I = \begin{bmatrix} 2.49 & -0.84 \\ 0 & 5.85 \end{bmatrix}.$$

7.4. Se determină matricea $\boldsymbol{l}$ a estimatorului:

$$\boldsymbol{l} = P_{ce}(\Phi)O^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.84 \\ -5.851 \end{bmatrix}.$$

7.5. Regulatorul cu estimator de stare și componenta integrală se descrie de ecuația:

$$\boldsymbol{u}(k) = \boldsymbol{F}_{12}\hat{\boldsymbol{x}}(k) + \boldsymbol{F}_3 x_3(k) + \boldsymbol{F}_l \boldsymbol{x}_i(k),$$

unde

$$\hat{\boldsymbol{x}}(k) = \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_i(k) = \begin{bmatrix} x_4(k) \\ x_5(k) \end{bmatrix}.$$

Structura sistemului de reglare cu estimator este reprezentată în fig. 9.6.■

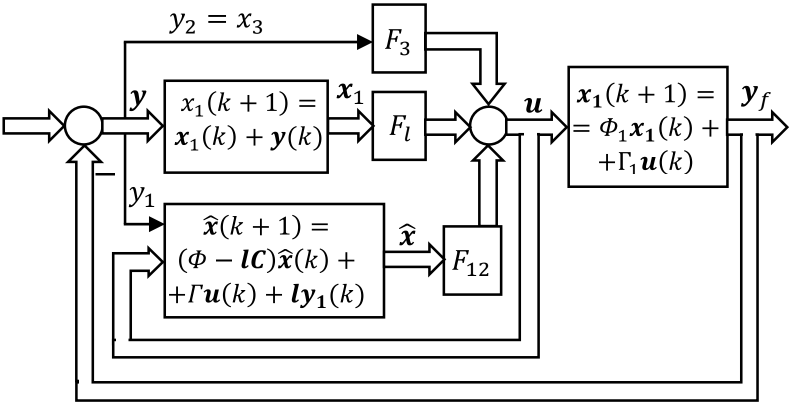

Fig. 9.6. Structura sistemului automat cu regulator și estimator

9.5 Proiectarea regulatorului în prezența perturbațiilor

Regulatorul bazat pe reacție după stare cu estimator prezintă interes teoretic, însă nu este foarte util practic. Acest dezavantaj este determinat de modul de tratare a acțiunii perturbațiilor, care s-au descris ca variații ale stării inițiale, care este un model idealizat.

Se consideră procesul supus acțiunii perturbației $p(t)$ descris ca mode continuu [4]:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + p(t), \tag{9.53}$$

$$y(t) = Cx(t).$$

Perturbația $p(t)$, care uzual are mai multă energie la frecvențe joase, se modelează în forma:

$$\frac{dw(t)}{dt} = A_1 w(t), p(t) = C_1 w(t),$$

unde matricea A_1 are valori proprii în origine sau pe axa imaginară sau în semiplanul drept.

Dacă se introduce vectorul compus $x_1(t) = [x(t), w(t)]^T$ și se discretizează sistemul:

$$\dot{x}_1(t) = \begin{bmatrix} A & C_1 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} x_1(t) + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \tag{9.54}$$

$$y(t) = [C \quad 0] x_1(t)$$

se obține echivalentul discret de forma:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ w_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \Phi_{xw} \\ 0 & \Phi_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \end{bmatrix} u_k, \tag{9.55}$$

$$y_k = [C \quad 0] \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix}.$$

Legea de comandă în acest caz este o combinație liniară a tuturor variabilelor de stare:

$$u_k = -F\hat{x}_k - F\widehat{w}_k, \tag{9.56}$$

unde $\hat{x}_k$ și $\widehat{w}_k$ sunt stările estimate cu ajutorul predictorului de stare:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{k+1} \\ \widehat{w}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \Phi_{xw} \\ 0 & \Phi_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_k \\ \widehat{w}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} L \\ L_w \end{bmatrix} (y_k - C\hat{x}_k). \tag{9.57}$$

În acest caz, starea predictorului este compusă din stările estimate ale procesului și ale generatorului de perturbații, iar comanda conține și o componentă în funcție de starea estimată $\widehat{w}_k$.

Sistemul închis este descris de modelul:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (\Phi - \Gamma F)x_k + (\Phi_{xw} - \Gamma F)w_k + \Gamma F e_k + \Gamma F_w e_k^w, \\ w_{k+1} &= \Phi_w w_k, \\ e_{k+1} &= (\Phi - LC)e_k + \Phi_{xw} e_k^w, \\ e_{k+1}^w &= \Phi_w e_k^w. \end{aligned} \tag{9.58}$$

Matricea F asigură ca starea x_k să tindă la zero cu o viteză dorită după apariția unei perturbații. O alegere corespunzătoare a matricei F_w reduce efectul perturbației p asupra sistemului prin acțiunea directă în funcție de perturbația estimată $\hat{w}_k$. Această acțiune directă în funcție de perturbație este efectivă dacă matricea $(\Phi_{xw} - \Gamma F) = 0$.

Amplificările predictorului L și L_w influențează viteza cu care erorile de estimare converg la zero. Structura sistemului cu reacție după stare și perturbație este dată în fig. 9.7.

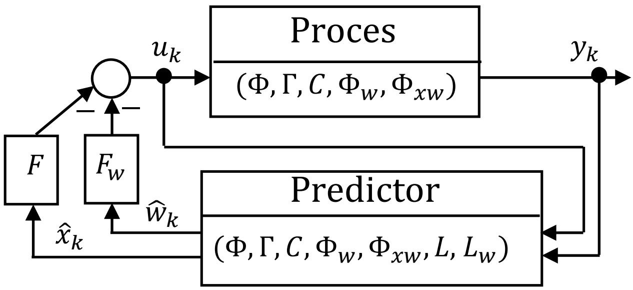

Fig. 9.7. Structura sistemului automat cu regulator și estimator

În cazul când la intrarea procesului se aplică o perturbație constantă, atunci $w_k = p_k$ și $\Phi_w = 1$, iar $\Phi_{xw} = \Gamma$ dacă această perturbație acționează la intrarea procesului monovariabil. În aceste condiții, rezultă din (9.58) că $F_w = 1$ și efectul perturbației de tip sarcină este rejectat.

Dacă nu există erori de măsurare, atunci regulatorul descris prin ecuațiile (9.56)-(9.57) iau forma:

$$\begin{aligned} u_k &= -\hat{F}x_k - F_w\,\hat{p}_k = -F\hat{x}_k - \hat{p}_k, \\ \hat{x}_{k+1} &= \Phi\hat{x} + \Gamma(\hat{p}_k + u_k) + L(y_k - C\hat{x}_k), \\ \hat{p}_{k+1} &= \hat{p}_k + L_w(y_k - C\hat{x}_k). \end{aligned} \tag{9.59}$$

Se constată că estimarea perturbației se realizează prin integrarea erorii dintre cele două ieșiri ale procesului și predictorului $\hat{e}_k = y_k - \hat{y}_k = y_k - C\hat{x}_k$.

Structura sistemului cu perturbație de tip sarcină rejectată prin reacția după stare se dă în fig. 9.8. Rezultă din fig. 9.8 că efectul perturbației p este anulat prin estimația $\hat{p}_k$ care se obține prin integrarea erorii $\hat{e}_k$. Astfel, a fost introdus un integrator în predictorul de perturbație și, în consecință, regulatorul are inclusă componenta integrală.

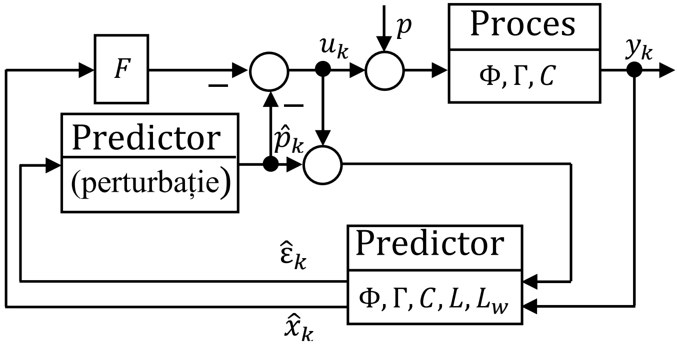

Fig. 9.8. Structura sistemului cu perturbație

Rescriind ecuațiile (9.59) sub forma:

$$u_k = -F\hat{x}_k - \hat{p}_k,$$

$$\hat{x}_{k+1} = (\Phi - \Gamma F)\hat{x} + L(y_k - C\hat{x}_k), \qquad (9.60)$$

$$\hat{p}_{k+1} = \hat{p}_k + L_w(y_k - C\hat{x}_k)$$

se evidențiază mai clar existența integratorului în structura regulatorului.

Starea estimată $\hat{x}_k$ este aceiași că în cazul în care nu există perturbația p_k.

Prin aplicarea transformatei z ecuațiilor (9.60) se obține:

$$u(z) = -F\hat{x}(z) - p(z),$$

$$[zI - \Phi + \Gamma F + LC]\hat{x}(z) = Ly(z),$$

$$\hat{p}(z) = (z-1)^{-1}L_w[y(z) - C\hat{x}(z)]$$

sau

$$\hat{x}(z) = [zI - \Phi + \Gamma F + LC]^{-1}Ly(z) = H_{yx}(z)y(z),$$

unde

$$H_{yx}(z) = \frac{\hat{x}(z)}{y(z)} = [zI - \Phi + \Gamma F + LC]^{-1}L. \qquad (9.61)$$

În rezultat se obține mărimea de comandă sub forma:

$$u(z) = -FH_{yx}(z)y(z) - \hat{p}(z) =$$

$$= -[FH_{yx}(z) + \frac{1}{z+1} L_w(I - CH_{yx}(z)]y(z). \qquad (9.62)$$

Această expresie arată că regulatorul conține componenta integrală. Acțiunea integrală este obținută prin estimarea perturbației constante care acționează la intrarea procesului.

9.6 Proiectarea regulatorului pentru urmărirea referinței

Unul dintre obiectivele sistemului de reglare automată este de a asigura urmărirea referinței. Astfel, se cere unui sistem ca stările și ieșirile sistemului să răspundă la modificările referinței într-un mod apriori specificat [4].

Cea mai simplă abordare a acestei probleme este de a include în legea de reglare o componentă proporțională cu referința sub forma:

$$u_k = -F\hat{x}_k + Nr_k, \qquad (9.63)$$

unde N este un scalar, în cazul sistemelor monovariabile, și o matrice, în cazul sistemelor multivariabile.

Pentru a analiza comportarea sistemului în prezența acestui regulator, se consideră sistemul închis descris prin modelul:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \Phi x_k + \Gamma u_k, \\ y_k &= c^T x_k, \\ \hat{x}_{k+1} &= \Phi \hat{x}_k + \Gamma u_k + L(y_k - c^T \hat{x}_k), \qquad (9.64) \\ u_k &= -F\hat{x}_k + Nr_k \end{aligned}$$

sau, dacă se introduce eroarea de estimare e_k:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (\Phi - \Gamma f^T)x_k + \Gamma f^T e_k + \Gamma N r_k, \\ e_k + 1 &= (\Phi - Lc^T)e_k, \qquad (9.65) \\ y_k &= c^T x_k. \end{aligned}$$

Se constată că eroarea de estimare nu este controlată prin r_k. Această observație sugerează includerea semnalului de referință, astfel încât eroarea de estimare să poată fi controlată.

Ecuația predictorului de stare în acest caz se descrie sub forma:

$$\hat{x}_{k+1} = (\Phi - \Gamma f^T - Lc^T)\hat{x}_k + Ly_k + Mr_k, \qquad (9.66)$$
$$u_k = Nr_k - f^T x_k.$$

Astfel, prin proiectarea regulatorului, se urmărește determinarea matricei M și a scalarului N, astfel încât să se asigure o anumită configurație a zerourilor funcției de transfer $H_0(z)$.

Funcția de transfer a sistemului automat, ținând seama de (9.65) se obține sub forma:

$$H_0(z) = c^T[zI - \Phi + \Gamma f^T]^{-1}\Gamma N = N\frac{B(z)}{A_0(z)}, \qquad (9.67)$$

unde $A_0(z)$ este ecuația caracteristică a sistemului cu reacție după stare.

Dacă se compară (9.67) cu funcția de transfer a procesului:

$$H_c(z) = c^T[zI - \Phi]^{-1}\Gamma = \frac{B(z)}{A(z)}, \qquad (9.68$$

rezultă că zerourile sistemului nu sunt modificate prin comanda ce include referința.

Polinomul $B(z)$ de la numărătorul ambelor funcții de transfer poate fi evidențiat prin aducerea ambelor sisteme în forma canonică controlabilă.

Pentru a asigura urmărirea referinței cu anularea erorii în regim staționar pentru referințe constante se introduce componenta integrală în legea de reglare, considerând la intrarea procesului o perturbație constantă p și legea de reglare se descrie sub forma:

$$u_k = -f^T\hat{x}_k - \hat{p}_k + Nr_k,$$
$$\hat{x}_{k+1} = \Phi\hat{x}_k + \Gamma(\hat{p}_k + u_k) + L(y_k - C\hat{x}_k), \qquad (9.69)$$
$$\hat{p}_{k+1} = \hat{p}_k + L_w(y_k - c^T\hat{x}_k).$$

Acest sistem de ecuații se poate scrie și sub forma:

$$u_k = -f^T\hat{x}_k - \hat{p}_k + Nr_k,$$
$$\hat{x}_{k+1} = (\Phi - \Gamma f^T)\hat{x}_k + \Gamma Nr_k + L(y_k - c^T\hat{x}_k), \qquad (9.70)$$
$$\hat{p}_{k+1} = \hat{p}_k + L_w(y_k - c^T\hat{x}_k).$$

Din comparația relațiilor (9.70) și (9.69) rezultă că urmărirea referinței se obține printr-o modificare a rezultatului obținut în p. 9.5.

Analizând ecuația generală a predictorului de stare (9.66), se constată că alegerea scalarului N și a matricei M poate asigura comanda în funcție de eroarea de reglare $\varepsilon_k = r_k - y_k$ sau eroarea de estimare să fie independentă de referință. Rezultă din (9.70) că matricea $M = \Gamma N$, iar în cazul când comanda se calculează în funcție de eroarea ε_k, atunci matricea $M = -L$.

Din ecuația erorii de estimare:

$$e_{k+1} = (\Phi - Lc^T)e_k + (\Gamma N - M)r_k \tag{9.71}$$

pentru ca aceasta să nu fie influențată de referință și rezultă $M = \Gamma N$.

Dacă în ecuația (9.66) se include eroarea de reglare ε_k, se obține starea estimată:

$$\hat{x}_{k+1} = (\Phi - \Gamma f^T - Lc^T)\hat{x}_k + L(y_k - r_k)$$

ceea ce permite a alege matricea $M = -L$ și $N = 0$ pentru ca u_k să fie calculată în funcție de eroarea de reglare ε_k.

Matricea M și scalarul impuse N trebuie alese astfel încât să se obțină flexibilitatea maximă în satisfacerea restricțiilor impuse de răspunsul dorit al sistemului de reglare. Această cerință se realizează printr-o alegere a matricei M și a scalarului N care asigură o alocare arbitrară a zerourilor funcției de transfer a sistemului închis $H_0(z)$.

9.7 Regulator cu două grade de libertate

Realizarea celor două obiective ale reglării *urmărirea referinței* și *rejecția perturbațiilor* este posibilă practic prin utilizarea unei structuri de regulator cu două grade de libertate. În fig. 9.9 se dă structura de principiu a unui sistem de reglare cu două grade de libertate [4].

Regulatorul $H_{R_y}(z)$ se proiectează astfel încât să se asigure insensibilitatea la perturbații, la zgomotul de măsură și la incertitudinile introduse prin modelare. Regulatorul $H_{R_r}(z)$ se proiectează pentru a obține performanțe impuse în raport modificarea referinței.

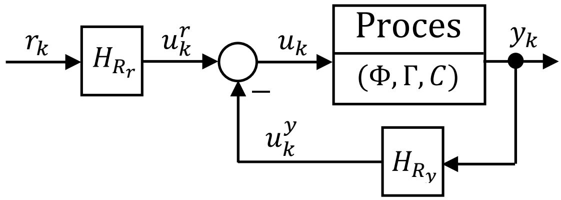

Fig. 9.9. Structura sistemului cu două grade de libertate

Regulatorul $H_{R_y}(z)$ se proiectează astfel încât să se asigure insensibilitatea la perturbații, la zgomotul de măsură și la incertitudinile introduse prin modelare. Regulatorul $H_{R_r}(z)$ se proiectează pentru a obține performanțe impuse în raport modificarea referinței.

Pentru a proiecta regulatorul cu funcția de transfer $H_{R_r}(z)$, admitem că performanțele de urmărire sunt specificate printr-un model de stare:

$$x_{k+1}^m = \Phi_m x_k^m + \Gamma r_k, \tag{9.72}$$
$$y_k^m = C_m x_k^m,$$

unde $x_k^m \in R^{n_m}$ reprezintă starea modelului de referință ce realizează o ieșire dorită (optimală) în raport cu referința r_k.

Legea de reglare în acest caz poate fi, în mod natural:

$$u_k = f^T(x_k^m - \hat{x}_k) + u_k^r, \tag{9.73}$$

unde x_k^m este starea dorită, iar u_k^r este semnalul de comandă ce asigură ieșirea dorită.

Termenul $u_k^y = f^T(x_k^m - \hat{x}_k)$ este semnalul de reacție, iar u_k^r este semnalul de acțiune directă (fig. 9.10), care se aplică în canalul deschis.

Semnalul u_k^r va produce variația dorită a stării procesului. Dacă starea estimată a procesului $\hat{x}_k$ egalează starea modelului x_k^m, semnalul de reacție $f^T(x_k^m - \hat{x}_k)$ este egal cu zero, iar dacă există diferența între $\hat{x}_k$ și x_k^m, reacția va genera acțiuni de corecție.

Pentru a genera semnalul de acțiune directă în funcție de referință, menționăm că dacă prin $H_c(z)$ s-a notat funcția de transfer a procesului, iar prin $H_m(z)$ f.d.t. a modelului de referință, semnalul de comandă directă în funcție de referință u_k^r, poate fi calculat cu ajutorul relației:

$$u_k^r = \frac{H_m(q^{-1})}{H_c(q^{-1})} r_k. \tag{9.74}$$

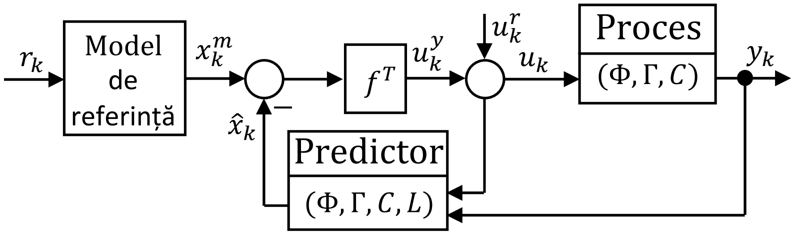

Fig. 9.10. Structura sistemului deschis cu predictor și model de referință

Pentru a ilustra această relație se impun câteva condiții:

- modelul $H_m(z)$ să fie stabil;

- excesul polilor modelului trebuie să nu fie mai mic decât excesul polilor procesului;

- zerourile instabile ale procesului trebuie să fie zerouri ale modelului $H_m(z)$.

În cazul proceselor monovariabile se obține:

$$u_k^r = K_m \frac{H_m(q)}{H_c(q)} r_k = K_m \left[1 + \frac{(a_1 - \alpha_1^m) q^{n-1} + \cdots + (a_n - \alpha_n^m)}{q^n + \alpha_1^m q^{n-1} + \cdots + \alpha_n^m} \right] r_k, \tag{9.75}$$

deoarece $H_c(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$ și $H_c(z) = K_m \frac{B(z)}{A_m(z)}$.

Semnalul u_k^r poate fi generat din stările modelului de referință, în cazul în care se construiește perechea (Φ_m, Γ_m) în forma canonică controlabilă:

$$\Phi_m = \begin{bmatrix} -\alpha_1^m & -\alpha_1^m & \cdots & -\alpha_{n-1}^m & -\alpha_n^m \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}; \Gamma_m = \begin{bmatrix} K_m \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{9.76}$$

Astfel, reieșind din (9.75) rezultă:

$$u_k^r = K_m r_k + f_r^T x_k^m, \tag{9.77}$$

unde

$$f_r^T = [a_1 - \alpha_1^m \vdots\ a_1 - \alpha_2^m \vdots \cdots \vdots a_n - \alpha_n^m]. \tag{9.78}$$

Prin transformări corespunzătoare se obțin diferite reprezentări ale legii de comandă după starea x_k^m.

Uneori pot fi introduse neliniarități în comanda directă în funcție de referință pentru a atenua efectul dur al acestuia. Având în vedere că această comandă urmărește creșterea vitezei de răspuns a sistemului, poate fi utilizat un model simplificat al procesului și micile deviații pot fi compensate prin reacție.

Prin combinarea soluțiilor pentru urmărirea referinței și rejecția perturbațiilor se obține un regulator performant, care se descrie în forma:

$$\begin{aligned}
u_k &= u_k^r + u_k^y,\\
u_k^r &= K_m(r_k + f_r^T x_k^m),\\
u_k^y &= f^T(x_k^m - \hat{x}_k) - f_w^T \widehat{w}_k,\\
\hat{x}_{k+1} &= \Phi\hat{x}_k + \Phi_{xw}\widehat{w}_k + \Gamma u_k + L(y_k - \hat{y}_k),\\
\hat{y}_k &= C\hat{x}_k,\\
\widehat{w}_{k+1} &= \Phi_w\widehat{w}_k + L_w(y_k - \hat{y}_k),\\
x_{k+1}^m &= \Phi_m x_k^m + \Gamma_m r_k.
\end{aligned} \tag{9.79}$$

Acest regulator asigură rejecția perturbației de tip sarcină, reducerea efectelor zgomotului de măsură și urmărirea referinței. Răspunsurile la perturbațiile de tip sarcină, la referințe și zgomotul de măsură sunt complet separate. Răspunsul la referință este determinat de modelul de referință. Răspunsul la perturbație de tip sarcină și la zgomotul de măsură este influențat de predictorul de stare și de reacția după stare ce poate fi ajustat prin intermediul matricelor f^T, f_w^T, L, și L_w.

Deoarece toate stările estimate sunt comparate cu comportările lor dorite asigură o reglare de precizie. În fig. 9.11 se dă structura completă a sistemului de reglare automată cu două grade de libertate cu reacție după stare și cu modelul de referință și generator de comenzi (RGC).

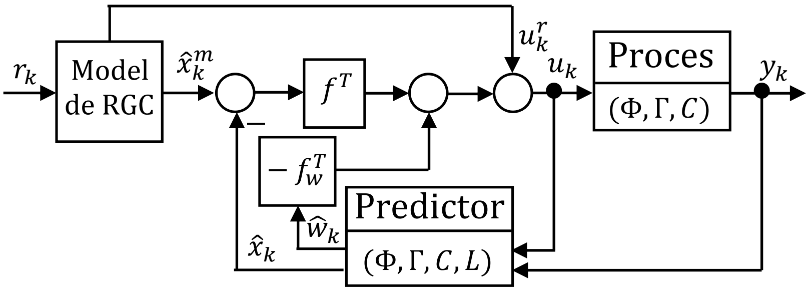

Fig. 9.11. Structura completă a sistemului automat cu două grade de libertate cu reacție după stare

Regulatorul descris de (9.79) poate fi reprezentat în diferite forme echivalente, deoarece sistemul este liniar și invariant în timp. În practică este util a folosi modele de referință neliniare, elementele de execuție și convertoarele pot fi neliniare și astfel pot fi introduse efecte neliniare, ca urmare a procesului de rotunjire în procesul de calcul.

Chestionar și probleme

1. Cum se obţine modelul matematic al unui proces industrial real?
2. Prezentați modele de procese în forma funcțiilor de transfer și numiți parametrii lor și explicați sensul fizic al acestora.
3. Ce reprezintă variabilele de stare ale obiectului de reglare și cum se obțin?
4. De ce este necesar de estimat variabilele de stare ale obiectului de reglare?
5. Cum se obține modelul discret al obiectului de reglare dacă este cunoscută funcția de transfer al acestuia în transformata Laplace?
6. Ce reprezintă procedura de estimare a variabilelor de stare ale obiectului?
7. Numiți etapele de bază a procedurii de proiectare a regulatorului cu estimator de stare.
8. Numiți etapele de bază a procedurii de proiectare a regulatorului pentru urmărirea referinței.
9. Care este procedura de proiectare a regulatorului dacă asupra sistemului acționează perturbații?
10. Cum explicați proiectarea regulatorului pentru urmărirea referinței?

10 IMPLEMENTAREA ALGORITMILOR NUMERICI

10.1 Implementarea unui algoritm recurent de ordinul doi

Algoritmul de reglare (regulatorul) ca orice sistem dinamic în formă generală RST se descrie cu modelul numeric intrare-ieșire și mărimea de conducere se calculează cu expresia recurentă din relația [4]:

$$R(q^{-1})u(k) = T(q^{-1})r(k) - S(q^{-1})y(k), \tag{10.1}$$

unde polinoamele $R(q^{-1})$, $T(q^{-1})$, $S(q^{-1})$ au semnificația cunoscută și dimensiuni determinate de complexitatea modelului discret al procesului condus și de cerințele de performanță. Parametrii regulatorului r_i, t_i și s_i sunt determinați în funcție de valorile parametrilor modelului procesului.

În cazul în care modelul de referință este liniar reprezentarea generală a modelului algoritmului de reglare prin variabilele de stare se descrie în forma:

$$x_{k+1} = Ax_k + By_k + Cr_k,$$
$$u_k = Fx_k + Gy_k + Dr_k, \tag{19.2}$$

unde x_k,y_k,r_k,u_k sunt starea, ieşirea, referința și comanda la momentul de eșantionare k, iar A, B, C, F, G și D – matricele de dimensiunile corespunzătoare.

Există transformări simple între reprezentările modelelor întrare-ieșire și intrare-stare-ieșire ale algoritmului de conducere. Realizările de stare dorite se obțin prin alegerea corespunzătoare a variabilelor de stare. Dacă calculele sunt făcute cu precizie, atunci aceste realizări sunt echivalente în raport cu modelul intrare-ieșire. Operațiile de cuantizare și rotunjire în reprezentarea numerelor întroduc neliniarități, care pot conduce la instabilitate și imprecizie în realizarea obiecivelor reglării. Se impune algoritmului de conducere să fie transformat într-o formă robustă pentru a fi implementat ca program de aplicație.

Cele mai folosite realizări ale programării algoritmilor de conducere sunt: realizarea directă, realizarea cascadă și realizarea paralelă [4, 5].

Pentru a exemplifica modul de realizare a programării unui algoritm numeric, se consideră algoritmul de tipul PID descris în forma:

$$H_R(z^{-1}) = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \frac{q_0+q_1z^{-1}+q_2z^{-2}}{1+p_1z^{-1}+p_2z^{-2}} = \frac{u(z^{-1})}{\varepsilon(z^{-1})}, \qquad (10.3)$$

Din expresia (10.3) se obţine mărimea de comandă în formă operaţională şi în timp discret:

$$u(z^{-1}) = -p_1z^{-1}u(z^{-1}) - p_2z^{-2}u(z^{-1}) + q_0\varepsilon(z^{-1}) +$$
$$+q_1z^{-1}\varepsilon(z^{-1}) + q_2z^{-2}\varepsilon(z^{-1}),$$
$$u(k) = -p_1u(k-1) - p_2u(k-2) + q_0\varepsilon(k) + q_1\varepsilon(k-1) +$$
$$+q_2\varepsilon(k-2). \qquad (10.4)$$

Implementarea algoritmului (10.4) se dă în fig. 10.1, care este cea mai simplă schema de realizare, dar care nu este o realizare sistemică minimală, însă este cauzal și, deci, se poate calcula comanda pe baza informațiilor disponibile la timpul dat.

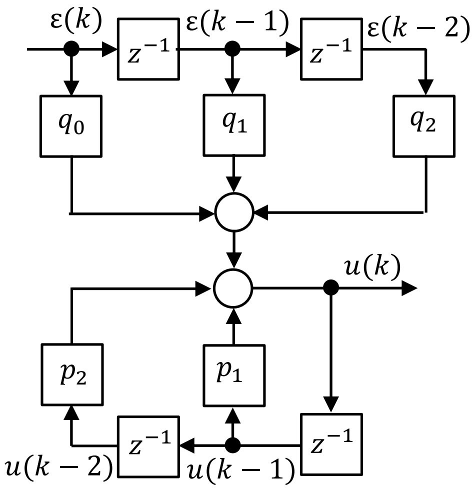

Fig. 10.1. Schema de realizare directă a algoritmului PID

Această schemă evidenţiază modul de calcul a comenzii pe baza informaţiilor disponibile, unde este necesar de efectuat 5 operaţii de înmulţire, 11 adrese de memorie pentru variabilele ε_k, ε_{k-1}, ε_{k-2}, u_k, u_{k-1}, u_{k-2} şi coeficienţii q_i, p_j.

Acest algoritm are flexibilitate redusă la implementare şi dificultăţi la evidenţierea diferitelor regimuri de funcţionare şi moduri de lucru.

În fig. 10.2 se prezintă schema de realizare a algoritmului PID numeric în formă canonică, în care se folosesc două elemente de întârziere, 5 elemente de multiplicare și două sumatoare.

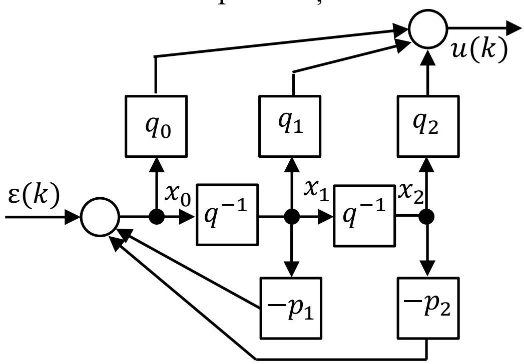

Fig. 10.2. Forma canonică de realizare a algoritmului recurent de ordinul doi

Relaţiile de calcul al variabilelor din structura algoritmului sunt:

$$u(k) = q_0x_0 + q_1x_1 + q_2x_2,$$

$$x_0 = \varepsilon(k) - p_1x_1 - p_2x_2,$$

$$x_1 = x_0q^{-1},\ x_2 = x_1q^{-1}, \qquad (10.5)$$

unde $q^{-1} = z^{-1}$ este operatorul de deplasare (întârziere).

Semnalele de intrare se transmit în calculator prin multiplexoare, iar ieșirile din calculator prin demultiplexoare.

10.2 Implementarea algoritmului recurent de ordinul n

Funcția de transfer a algoritmului numeric recurent de ordinul n se prezintă în forma:

$$H_R(z^{-1}) = \frac{u(z^{-1})}{\varepsilon(z^{-1})} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \frac{q_0+qz^{-1}+\cdots+q_nz^{-n}}{1+p_1z^{-1}+\cdots+p_nz^{-n}}. \qquad (10.6)$$

Ecuația operațională a regulatorului din (10.6) are forma:

$$u(z^{-1})(1+p_1z^{-1}+\cdots+p_nz^{-n}) =$$
$$= \varepsilon(z^{-1})(q_0+q_1z^{-1}+\cdots+q_nz^{-n}). \qquad (10.7)$$

În cazul când coeficientul $p_0 \neq 1$, se împart toţi coeficienţii expresiei (10.7) la p_0 şi se obţine relaţia de calcul a mărimii de comandă în forma:

$$u(z^{-1}) = \frac{1}{p_0}[-u(z^{-1})(1+p_1z^{-1}+\cdots+p_nz^{-n}) +$$
$$+\varepsilon(z^{-1})(q_0+q_1z^{-1}+\cdots+q_nz^{-n})]. \qquad (10.8)$$

În domeniul timpului mărimea de conducere din (10.8) se exprimă cu relația recurentă:

$$u(k) = -\frac{1}{p_0}\sum_{i=1}^{n} p_i u\,(k-i) + \frac{1}{p_0}\sum_{i=0}^{n} q_i \varepsilon\,(k-i). \qquad (10.9)$$

Mărimea de conducere discretă curentă $u(k)$ din (10.9) se calculează cu valorile curente și anterioare ale mărimii de conducere şi ale erorii sistemului şi programul se realizează pe calculator.

În fig. 10.3 este dată forma canonică observabilă de realizare a

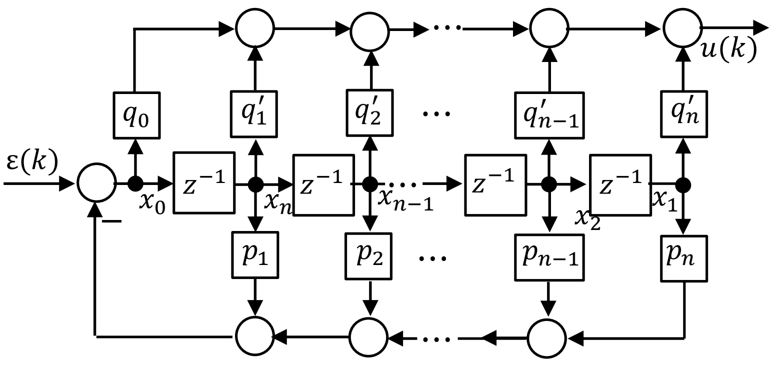

Fig. 10.3. Forma canonică observabilă de realizare a algoritmului recurent de ordinul n

algoritmului recurent de ordinul n (10.9), în care se folosesc un număr minim n de variabile de stare, n elemente de întărziere, $(2n+1)$ operații de înmulțire și mai multe sumatoare [4, 5].

Forma canonică de realizare a algoritmului de reglare numeric recurent de ordinul n se dă în fig. 10.4, în care se folosesc un număr minim de elemente de întărziere egal cu n și cu n variabile de stare.

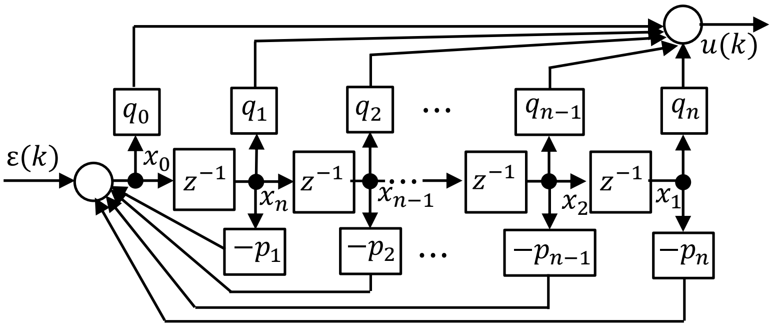

Fig. 10.4. Forma canonică de realizare a algoritmului recurent de ordinul n

10.3 Implementarea algoritmului structurat pe module

Pentru implementarea algoritmilor de reglare structuraţi pe module standard P, I şi PDF cu filtrare se pot realiza diferite regimuri de funcţionare şi moduri de lucru cu diverse structuri. În fig. 10.5 este dată o structură de realizare a algoritmului PID cu filtrare. În funcţie de poziţia comutatorului C_0 (poziţiile 1, 0, 2) se va fixa referinţa de la calculator (CALC) de către operator sau de la alt regulator în regim de funcţionare în cascadă (CASC) [4].

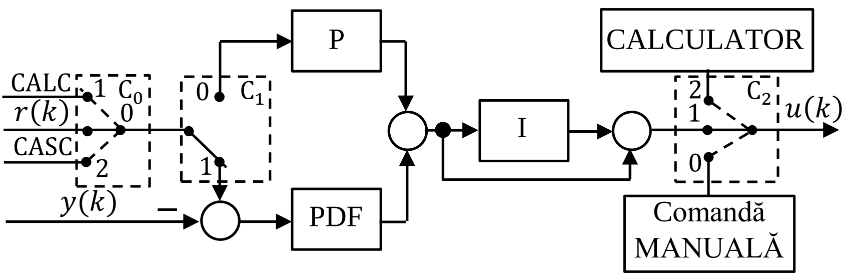

Fig. 10.5. Structura algoritmului PIDF cu evidenţierea regimurilor de funcţionare

Cu ajutorul comutatorului C_1 (poziţiile 0, 1) se poate utiliza un algoritm de reglare de structură variabilă şi cu două grade de libertate, unde mărimea măsurată $y(k)$ se prelucrează de un algoritm PID, iar referinţa se prelucrează după o lege PI, dacă poziţia comutatorului C_1 este pe 0, ori cu un singur grad de libertate dacă poziţia comutatorului C_1 este pe 1. Comutatorul C_2 se utilizează pentru comutarea regimului AUTOMAT – poziţia pe 1 la regimul MANUAL - poziţia pe 0 a comutatorului sau la modul de lucru CALCULATOR – poziţia pe 2.

10.4 Modele de comandă generală

Se consideră că la condiţii iniţiale nule procesul condus este descris cu f.d.t. de forma [1, 4, 5]:

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{y(s)}{x(s)}. \quad (10.10)$$

Ecuaţia diferenţială este:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 \dot{y} + a_0 y =$$
$$= b_m x^{(m)} + b_{m-1} s x^{(m-1)} + \cdots + b_1 \dot{x} + b_0 x. \quad (10.11)$$

Schema de simulare a sistemului (10.11) se dă în fig. 10.6.

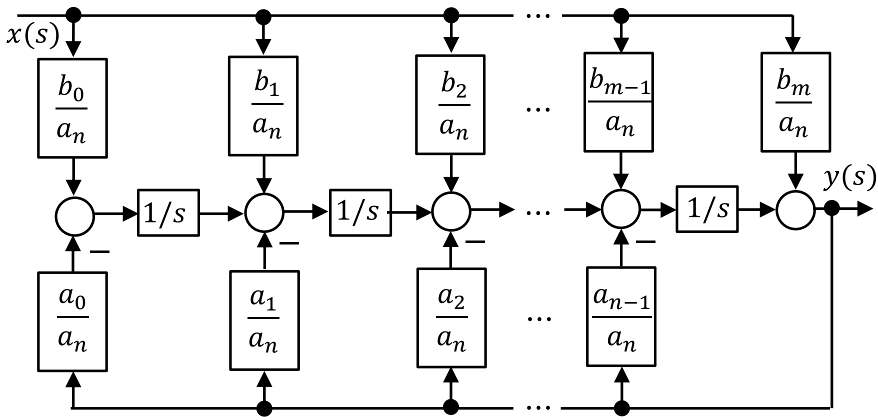

Fig. 10.6. Schema bloc pentru simularea sistemului descris de ecuaţia diferenţială

Pentru timpul discret expresia (10.11) se transformă în ecuaţie cu diferenţe finite de forma:

$$a_0 y(k) + a_1 y(k-1) + \cdots + a_n y(k-n) =$$
$$= b_0 x(k) x + b_1 x(k-1) + \cdots + b_m x(k-m), \qquad (10.12)$$

Pentru ecuația cu diferențe finite funcția de transfer a sistemului discret este:

$$H(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}} = \frac{y(z^{-1})}{x(z^{-1})}. \qquad (10.13)$$

Dacă se utilizează operatorul de întârziere q^{-1} care conduce la o scriere mai compactă a ecuaţiilor recurente (şi se ţine seama şi de prezentarea în z^{-1}), atunci (10.12) sau (10.13) au forma:

$$H(q^{-1}) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} = \frac{b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \cdots + b_m q^{-m}}{1 + a_1 q^{-1} + \cdots + a_n q^{-n}} q^{-d} = \frac{y(k+1)}{x(k+1)} \quad (10.14)$$

sau

$$y(k+1) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} q^{-d} u(k+1), \qquad (10.15)$$

unde $y(k+1)$ este valoarea ieşirii la pasul următor de eşantionare.

Dacă se foloseşte regulatorul de tip PID continuu cu ecuaţia diferenţială:

$$u(t) = u_0 + k_p \left(\varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(t) dt + \frac{T_d \dot{\varepsilon}(t)}{T_f \dot{u}(t) + u(t)} \right. \qquad (10.16)$$

şi în timp discret pentru o perioadă de eşantionare T, echivalentul discret al PID standard, implementat pe sistemele numerice, se obţine înlocuind acţiunea derivativă printr-o diferenţă şi integrala printr-o sumă discretă se obţine:

$$u(k) = u_0(k) + k_p \left(\varepsilon(k) + \frac{T}{T_i} \sum_{i=0}^{k} \varepsilon(i) + \frac{T_d}{T} (\varepsilon(k) - \varepsilon(k-1))\right). \qquad (10.17)$$

În relațiile (10.16) și (10.17) mărimea u_0 și $u_0(k)$ sunt valorile comenzii inițiale.

F.d.t. a regulatorului discret PID este:

$$H_{PID}(z^{-1}) = \frac{r_0+r_1z^{-1}+r_2z^{-2}}{(1-z^{-1})(1+s_1z^{-1})}. \tag{10.18}$$

Algoritmul PID este un caz particular al unei clase mai largi de algoritmi de reglare numiţi RST, fiindcă operează cu 3 sisteme de reglare exprimate polinomial conectate într-o anumită manieră.

Ecuaţia (10.17) se exprimă echivalent sub forma RS (lipsă T):

$$R(q^{-1})u(k) = S(q^{-1})\varepsilon(k) = S(q^{-1})\big(r(k) - y(k)\big) =$$
$$= S(q^{-1})r(k) - S(q^{-1})y(k), \tag{10.19}$$

unde $r(k)$ este referinţa care trebuie urmărită de ieşirea răspunsului.

Pentru comanda nominală, se poate propune o structură generală a unui sistem numeric de reglare automată de tip RST cu două grade de libertate (fig. 10.7), pentru a depăşi limitările algoritmului PID. Astfel, se păstrează polinoamele R, S pentru performanţele în reglare (compensarea perturbaţiilor) în buclă închisă şi se introduce un precompensator T care să asigure performanţe în urmărire (la modificarea referinţei).

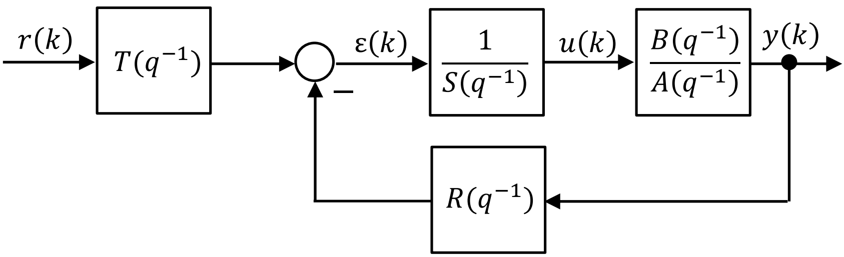

Fig. 10.7. Structura sistemului numeric de tip RST

În rezultat se obţine o extensie în forma canonică polinomială:

$$u(k) = -\sum_{i=0}^{n_R} r_i y(k-i) - \sum_{i=0}^{n_S} s_i u(k-i) + \sum_{i=0}^{n_T} t_i r(k-i),\ k \in N, \tag{10.20}$$

care se poate exprima echivalent în forma canonică polinomială:

$$u(k) = \frac{T(q^{-1})}{S(q^{-1})} r(k) - \frac{R(q^{-1})}{S(q^{-1})} y(k), \tag{10.21}$$

unde polinoamele se exprimă:

$$T(q^{-1}) = t_0 + t_1 z^{-1} + t_2 z^{-2} + \cdots + t_{n_T} q^{-n_T},$$
$$R(q^{-1}) = r_0 + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2} + \cdots + r_{n_R} q^{-n_R}, \qquad (10.22)$$
$$S(q^{-1}) = s_0 + s_1 z^{-1} + s_2 z^{-2} + \cdots + s_{n_S} q^{-n_S}.$$

Coeficienții t_i, r_j, s_n se determină în funcție de parametrii algoritmului în formă continuă k_r, T_i, T_d, α ($T_f = \alpha T_d$) și T.

Structura comenzii (10.20)-(10.21) evidenţiază un algoritm cu două grade de libertate sau forma canonică de reglare RST [4, 5].

O variantă de realizare a algoritmului (10.20) pentru implementare se dă în fig. 10.8.

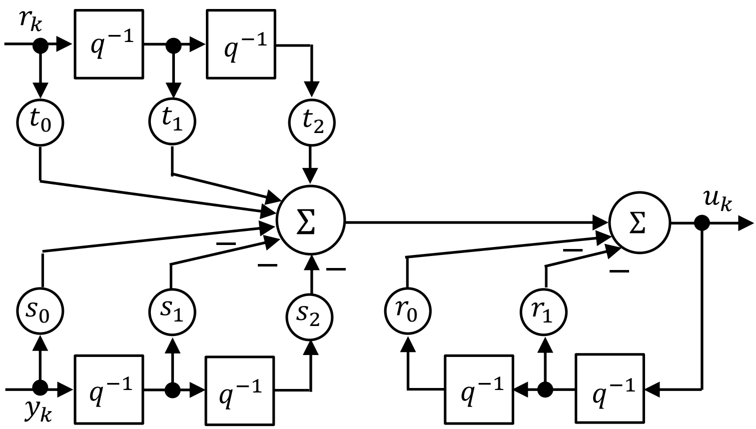

Fig. 10.8. Structura de simulare a algoritmului numeric de tip RST

10.5 Regulatorul PID de tip RST

Într-o configurare clasică de reglare, regulatorul PID continuu cu filtrare pe acţiunea derivativă, este definit prin f.d.t.:

$$H_{PID}(s) = k_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{\alpha T_d s + 1}\right), \qquad (10.23)$$

unde k_p este coeficientul de transfer, T_i – constanta ded timp de integrare, T_d – constanta de timp de derivare, N- constanta de filtraj, $\alpha = 1/N$ –

coeficient de ponderare.

Pentru procese descrise prin modele de ordinul unu şi doi fără şi cu timp mort (τ limitat inferior unei perioade de eşantionare), regulatorul PID numeric se obţine prin discretizarea algoritmului PID continuu, folosind relaţia de aproximare metoda dreptunghiului cu întârziere:

$$s = \frac{z-1}{Tz}, \tag{10.24}$$

unde T este perioada de eşantionare.

F.d.t. discretă este:

$$H_{PID}(z) = k_p\left(1 + \frac{\frac{T}{T_i}z}{z-1} + \frac{\frac{NT_d}{T_d+TN}(z-1)}{z-\frac{T_d}{T_d+TN}}\right), \tag{10.25}$$

iar prin operatorul de întârziere $q^{-1} = z^{-1}$ se obţine:

$$H_{PID}(q^{-1}) = k_p\left(1 + \frac{\frac{T}{T_i}}{1-q^{-1}} + \frac{\frac{NT_d}{T_d+TN}(1-q^{-1})}{1-\frac{T_d}{T_d+TN}q^{-1}}\right) = \frac{R_0(q^{-1})}{S_0(q^{-1})}, \tag{10.26}$$

unde

$$R_0(q^{-1}) = k_p(1-q^{-1})\left(1 - \frac{T_d}{T_d+TN}q^{-1}\right) +$$

$$+\frac{k_pT}{T_i}\left(1 - \frac{T_d}{T_d+TN}q^{-1}\right) + \frac{k_pNT_d}{T_d+TN}(1-q^{-1})^2, \tag{10.27}$$

$$S_0(q^{-1}) = (1-q^{-1})\left(1 - \frac{T_d}{T_d+TN}q^{-1}\right).$$

Este posibilă exprimarea algoritmului PID în forma canonică RST in polinoame de ordinul doi cu restricţia $T = R$, după cum urmează:

$$R(q^{-1}) = T(q^{-1}) = r_0 + r_1q^{-1} + r_2q^{-2} \equiv R_0(q^{-1}),$$

$$S(q^{-1}) = (1-q^{-1})(1+s_1q^{-1}) \equiv S_0(q^{-1}). \tag{10.28}$$

Parametrii regulatorului PID numeric (10.28) r_0, r_1, r_2, s_1 se determină la etapa de proiectare.

Structura sistemului numeric se prezintă în fig. 10.9, iar funcţia de transfer a sistemului cu regulator de tipul RST se descrie de relația:

$$H_{RST}(q^{-1}) = \frac{B(q^{-1})R(q^{-1})}{A(q^{-1})S(q^{-1})+B(q^{-1})R(q^{-1})}. \tag{10.29}$$

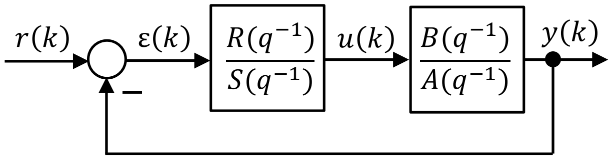

Fig. 10.9. Structura sistemului cu algoritm PID de tip RST

Performanţele sistemului automat numeric se impun prin polinomul caracteristic utilizând metoda alocării poli-zerouri:

$$P_d(q^{-1}) = A(q^{-1})S(q^{-1}) + B(q^{-1})R(q^{-1}). \tag{10.30}$$

În practică polinomul $P_d(q^{-1})$ se alege un polinom de ordinul doi cu coeficienţii cunoscuţi – respectiv rădăcini impuse de performanțele sistemului automat proiectat, sugerat de existenţa unei soluţii pentru ecuaţia polinomială (10.30), deci se obţine:

$$P_d(q^{-1}) = 1 + p_1 q^{-1} + p_2 q^{-2}. \tag{10.31}$$

Aceasta expresie reprezintă echivalentul discret al unui model continuu de ordinul doi în reprezentare standard.

Rezultă că pentru calculul parametrilor regulatorului PID trebuie rezolvată următoarea ecuaţie polinomială prin procedurile expuse:

$$A(q^{-1})S(q^{-1}) + B(q^{-1})R(q^{-1}) = A(q^{-1})(1-q^{-1})(1+s_1 q^{-1}) +$$

$$+B(q^{-1})(r_0 + r_1 q^{-1} + r_2 q^{-2}) \equiv P_d(q^{-1}). \tag{10.32}$$

În relațiile prezentate s-a utilizat operatorul de întârziere q^{-1} sau

z^{-1} pentru a evidenţia direct cauzalitatea algoritmului – comanda se calculează numai în funcție de informația prezentă și trecută.

Ca și în cazul modelelor continue, utilizarea unor modele de dimensiuni mai mari ca doi pentru descrierea proceselor necesită o analiză riguroasă a posibilității de stabilizare a sistemului de reglare cu algorirmul PID.

Cerințele de performanță impuse la urmărirea referinței și rejecția perturbațiilor sunt factori determinanți la alegerea perioadei de eșantionare T.

Cunoașterea a priori a performanțelor elementeleor de execuție și a traductoarelor, cât și clasa de perturbații ce acţionează asupra procesului, sunt cerințe primare de alegere corespunzătoare a perioadei de eșantionare T.

Chestionar și probleme

1. Este cunoscută funcția de transfer a regulatorului numeric:

$$H_R(z^{-1}) = \frac{q_0+q_1z^{-1}+q_2z^{-2}+q_3z^{-3}}{1+p_1z^{-1}+p_2z^{-2}+p_3z^{-3}} = \frac{u(z^{-1})}{\varepsilon(z^{-1})}.$$

Prezentați ecuația operațională a mărimii de comandă în transformata z^{-1} și în domeniul timpului discret.

2. Pentru algoritmul numeric de la p. 1 prezentați ecuația operașională a mărimii de comandă în forma operatorului de deplasare (întârziere).

3. Pentru algoritmul numeric de la p. 1 elaborați schema de simulare.

4. Este cunoscută funcţia de transfer $H_P(s)$ a obiectului de reglare:

$$H_P(s) = \frac{e^{-\tau s}}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}.$$

Utilizând un regulator numeric de ordinul doi, elaborași schema de simulare a sistemului automat cu obiectul dat.

5. Explicați structura regulatorului de tipul RST și funcțiile ce le realizează componentele R, S și T.

6. Pentru expresia (10.26) a regulatorului PID numeric exprimaţi mărimea de comandă în domeniul timpului discret.

7. Se dă funcția de transfer discretă a obiectului de reglare :

$$H_P(z) = \frac{b_0z-4}{a_0z^2-5z+7}.$$

Utilizând funcția de transfer a obiectului și funcția de transfer a regulatorului de ordinal doi, determinați polinomul caracteristic al sistemului închis.

BIBLIOGRAFIE

1. *Automatica*. Coord. I. DUMITRACHE. Bucureşti: Editura Academiei Române, 2009. V. 1. 961 p. ISBN 978-973-27-1883-4.

2. DYNNIKOV, A.I. *Tzifrovye sistemy upravlenia*. M.: MFTI, 2006. 196 s. ISBN 5-7417-0151-5.

3. DORF, R. K.; BISHOP, R. X. *Sovremennye sistemy upravlenia (Modern Control Systems).* Moskva: Laboratoria Bazovyh Znanii, 2004. 832 s. ISBN 5-93208-119-8.

4. DUMITRACHE, I. *Ingineria reglării automate.* Bucureşti: Ed. Politehnica Press, 2016. V. 1. 407 p. ISBN 978-606-515-686-9. V. 2. 395 p. ISBN 978-606-515-687-6.

5. DUMITRACHE, I. *Ingineria reglării automate.* Bucureşti: Ed. Politehnica Press, 2005. 725 p. ISBN 973-8449-72-3.

6. GAIDUK, A.P. *Teoria avtomaticheskogo upravlenia*. Uchebnik. M.: Vyssh. shkola, 2010. 415 s. ISBN 5-06-006055-3.

7. IZVOREANU, B. *Sisteme automate nelniiare, discrete și stocastice.* Manual. Chișinău: Tehnica-UTM, 2023. 360 p. ISBN 978-9975-45-977-8.

8. IZVOREANU, B. *Teoria sistemelor automate*. Manual. Chișinău: Tehnica-UTM, 2022. 349 p. ISBN 978-9975-45-853-5.

9. IZVOREANU, B. *Ingineria sistemelor automate. Ghid pentru proiectarea de curs.* Chișinău: Tehnica-UTM, 2021. 122 p. ISBN 978-9975-45-737-8.

10. IZVOREANU, B.; SECRIERU, A.; COJUHARI, Irina; FIODOROV, I.; MORARU, D.; POTLOG, M. Comparative Analysis of Controller Tuning Methods for Second-Order Time Delayed Object Model with Astatism. In: *Proceedings the 14th International Conference on Electromechanical and Energy Systems* (*SIELMEN*) -2023, Chișinău, 12-13 October 2023. Pp.1-5. **DOI:** 10.1109/SIELMEN59038.2023.10290837. ISBN 979-8-3503-1524-0.

11. IZVOREANU, B.; COJUHARI, Irina; FIODOROV, I.; MORARU, D.; SECRIERU, A. Tuning the PID Controller to the Model of Object with Inertia Second Order According to the Maximum Stability Degree Method with Iteration. *Annals of the University of Craiova.*

Electrical Engineering series, No. 43, Issue 1, 2019. Pp. 79-85. ISSN-4805.

12. IZVOREANU, B.; FIODOROV, I. The Synthesis of Linear Regulators for Aperiodic Objects with Time Delay According to the Maximal Stability Degree Method. In: *Preprints the Fourth IFAC Conference on System Structure and Control.* Bucureşti: Editura Tehnică, 1997. Pp. 449 - 454.

13. KIM, D. P. *Teoria avtomaticheskogo upravlenia*. T. 1. *Lineinye sistemy*. M.: FIZMATLIT, 2003. 288 s. ISBN 5-9221-0379-2.

14. KIM, D.P.; DIMITRIEVA, N.D. *Sbornik zadach po teorii avtomaticheskogo upravlenia. Lineinye sistemy*. M.: FIZMATLIT, 2007. 168 s. ISBN 978-5-9221-0873-7.

15. LAZĂR, C.; VRABIE, D.; CARARI, S. *Sisteme cu regulatoare PID.* București: MATRIX ROM, 2004. 225 p. ISBN 973-685-867-7.

16. LAZĂR, C.; PĂSTRĂVANU, O.; POLI, Elena; SCHONBERGER, F. *Conducerea asistată de calculator a proceselor tehnice. Proiectarea și implementarea algoritmilor de reglare numerică.* București: MATRIX ROM, 1996. 226 p. ISBN 973-97494-6-1.

17. *Metody klassicheskoi i sovremennoi teorii avtomaticheskogo upravlenia. T.* 3. *Sintez reguliatorov sistem avtomaticheskogo upravlenia.* Pod. red. K.A. PUPKOVA; N.D. EGUPOVA. M.: Izd-vo MGTU im. N. E. BAUMANA, 2004. 616 s. ISBN 5-7038-2191-6.

18. PREITL, Ş.; PREITL, Zsuzsa. *Introducere în automatică*. *Suport de curs*. Bucureşti: Conspress, 2013. 219 p. ISBN 978-973-100-266-8.

19. *Teoria avtomaticheskogo upravlenia.* Uchebnik dlea vuzov. Pod red. V.B. IAKOVLEVA. M.: Vyssh. shkola, 2005. 567 s. ISBN 5-06-004096-8.

20. VOICU, M. *Introducere în automatică*. Iaşi: Ed. Dosoftei, 1998. 237 p. 973-9135-60-9.

21. ZAGARII, G. I.; SHUBLADZE, A. M. *Sintez sistem upravlenia na osnove criteria maximalnoi stepeni ustoichivosti*. Moskva: Energoatomizdat, 1998. 198 s.

ANEXE

Anexa 1

Funcţii de timp continuu şi discret şi imaginea Laplace *s* și transformata *z*

Tabelul A1.1. Funcții originale și imaginea lor

Nr. cr.	Denumirea funcţiei	Original $f(t)$	Imaginea $H(s)$	Original $f(kT)$	Imaginea $H(z)$
1	Delta impuls	$\delta(t)$	1	$\delta(kT)$	$z^{-0} = 1$
2	Treaptă unitară	$1(t)$	$\frac{1}{s}$	$1(kT)$	$\frac{z}{z-1}$
3	Funcţie rampă	t	$\frac{1}{s^2}$	kT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
4	Funcţie pătratică	t^2	$\frac{2!}{s^3}$	$(kT)^2$	$\frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$
5	Funcţie polinomială	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\frac{1}{n-1}(kT)^{n-1}$	$\frac{1}{n-1}\frac{T^{n-1}z(z+1)}{(z-1)^n}$
6	Exponenți-ală	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$	$e^{\alpha kT}$	$\frac{z}{z+e^{\alpha T}}$
7	Exponenți-ală	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$e^{-\alpha kT}$	$\frac{z}{z-d}$, $d = e^{-\alpha T}$
8	Sinusoidă	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega kT$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2 - 2z\cos\omega T + 1}$
9	Cosinusoidă	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega\, kT$	$\frac{z^2 - z\cos\omega T}{z^2 - 2z\cos\omega T + 1}$
10	Produsul exponentei cu sinusoidă	$e^{-\alpha t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$	$e^{-\alpha kT}\sin\omega kT$	$\frac{z\, d\sin\omega T}{z^2 - 2zd\cos\omega T + d^2}$
11	Produsul exponentei cu cosinusoidă	$e^{-\alpha t}\cos\omega t$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$	$e^{-\alpha kT}\cos\omega kT$	$\frac{z\, d\cos\omega T}{z^2 - 2zd\cos\omega T + d^2}$

Anexa 2

Funcții de transfer ale elementelor dinamice în transformata Laplace *s* și în transformata *z*

Tabelul A2.1. Funcții de transfer în transformata *s* și transformata *z*

Nr. crt.	$H(s)$	$H(z)$
1	**2**	**3**
1	k	k
2	$\frac{k}{s}$	$\frac{kz}{z-1}$
3	$\frac{k}{s^2}$	$\frac{kTz}{(z-1)^2}$
4	$\frac{k}{T_0 s+1}$	$\frac{kT}{T_0}\frac{z}{z-e^{-T/T_0}}$
5	$\frac{k}{s(T_0 s+1)}$	$\frac{k\left(1-e^{-T/T_0}\right)z}{(z-1)(z-e^{-T/T_0})}$
6	$\frac{k}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$	$\frac{k\left(e^{-T/T_1}-e^{-T/T_2}\right)}{T_1-T_2}\frac{z}{(z-e^{-T/T_1})(z-e^{-T/T_2})}$
7	$\frac{k}{(T_0 s+1)^2}$	$\frac{kTe^{-T/T_0}}{T_0^2}\frac{z}{(z-e^{-T/T_0})^2}$
8	$\frac{k}{s^2(T_0 s+1)}$	$k[\frac{Tz}{(z-1)^2}-\frac{T_0\left(1-e^{-T/T_0}\right)z}{(z-1)(z-e^{-T/T_0})}]$
9	$\frac{k}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$	$k[\frac{z}{z-1}+\frac{T_1}{T_2-T_1}\frac{z}{z-e^{-T/T_1}}-\frac{T_2}{T_2-T_1}\frac{z}{z-e^{-T/T_2}}]$
10	$\frac{k}{s^2(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$	$k[\frac{Tz}{(z-1)^2}-\frac{(T_1+T_2)z}{z-1}-\frac{T_1^2}{T_1-T_2}\frac{z}{z-e^{-T/T_1}}+$ $+\frac{T_2^2}{T_2-T_1}\frac{z}{z-e^{-T/T_2}}]$
11	$\frac{k}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)(T_3 s+1)}$	$k[\frac{T_1}{(T_1-T_2)(T_1-T_3)}\frac{z}{z-e^{-T/T_1}}+$ $+\frac{T_2}{(T_2-T_1)(T_2-T_3)}\frac{z}{z-e^{-T/T_2}}+$

Anexa 2 (continuare)

1	2	3
		$+\frac{T_3}{(T_3-T_1)(T_3-T_2)}\frac{z}{z-e^{-T/T_3}}]$
12	$\frac{k}{s(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}$	$k[\frac{z}{z-1}-\frac{T_1^2}{(T_1-T_2)(T_1-T_3)}\frac{z}{z-e^{-T/T_1}}-$ $-\frac{T_2^2}{(T_2-T_1)(T_2-T_3)}\frac{z}{z-e^{-T/T_2}}-$ $-\frac{T_3^2}{(T_3-T_1)(T_3-T_2)}\frac{z}{z-e^{-T/T_3}}]$
13	$\frac{k}{s^2(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}$	$k[\frac{Tz}{(z-1)^2}-\frac{(T_1+T_2+T_3)z}{z-1}+$ $+\frac{T_1^3}{(T_1-T_2)(T_1-T_3)}\frac{z}{z-e^{-T/T_1}}+$ $+\frac{T_2^3}{(T_2-T_1)(T_2-T_3)}\frac{z}{z-e^{-T/T_2}}+$ $+\frac{T_3^3}{(T_3-T_1)(T_3-T_2)}\frac{z}{z-e^{-T/T_3}}]$
14	$\frac{k(T_0s+1)}{s}$	$\frac{k(T_0+1)(z-T_0/(T_0-1))}{z-1}$
15	$\frac{k(T_0s+1)}{s^2}$	$\frac{kT_0z(T_0+1)(z+(T/T_0)-1)}{(z-1)^2}$
16	$\frac{k(T_1s+1)}{T_2s+1}$	$\frac{k}{T_2}[T_1+(1-T_1/T_2)\frac{z}{z-e^{-T/T_2}}]$
17	$\frac{k(T_1s+1)}{s(T_2s+1)}$	$\frac{kT_1}{T_2}\frac{z(z+(T_2/T_1)(1-e^{-T/T_2})-1)}{(z-1)(z-e^{-T/T_2})}$
18	$\frac{k(T_3s+1)}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$	$\frac{k}{T_1-T_2}[\frac{(1-(T_3/T_1))z}{z-e^{-T/T_1}}+\frac{((T_3/T_2)-1)z}{z-e^{-T/T_2}}]$
19	$\frac{k(T_3s+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$	$k[\frac{z}{z-1}+\frac{(T_1-T_3)z}{(T_2-T_1)(z-e^{-T/T_1})}+$ $+\frac{(T_2-T_3)z}{(T_1-T_2)(z-e^{-T/T_2})}]$

1	**2**	**3**
20	$\dfrac{k(T_1s+1)}{s^2(T_2s+1)}$	$k[\dfrac{Tz}{(z-1)^2}-\dfrac{(T_1-T_2)(1-e^{-T/T_1})z}{(z-1)(z-e^{-T/T_1})}]$
21	$\dfrac{k(T_3s+1)}{s^2(T_1s+1)(T_2s+1)}$	$k[\dfrac{Tz}{(z-1)^2}+\dfrac{(T_3-T_1-T_2)z}{z-1}-$ $-\dfrac{(T_1-T_3)z}{((T_2/T_1)-1)(z-e^{-T/T_1})}-$ $-\dfrac{(T_2-T_3)z}{((T_1/T_2)-1)(z-e^{-T/T_2})}]$
22	$\dfrac{k}{T_1^2s^2+2\xi T_1s+1}$	$\dfrac{kze^{-\xi T/T_1}\sin(\frac{T}{T_1}\sqrt{1-\xi^2})}{T_1\sqrt{1-\xi^2}[z^2-2ze^{-\xi T/T_1}\cos\left(\frac{T}{T_1}\sqrt{1-\xi^2}\right)+e^{-2\xi T/T_1}]}$

Bartolomeu IZVOREANU

INGINERIA SISTEMELOR AUTOMATE

Suport de curs

Redactor:_____________

Bun de tipar Formatul
Hârtie ofset. Tipar RISO Tirajul 50 ex.
Coli de tipar Comanda

2004, UTM, Chișinău, bd. Ștefan cel Mare și Sfânt, 168
Editura ,,Tehnica-UTM”
2068 Chișinău, str. Studenților, 9/9