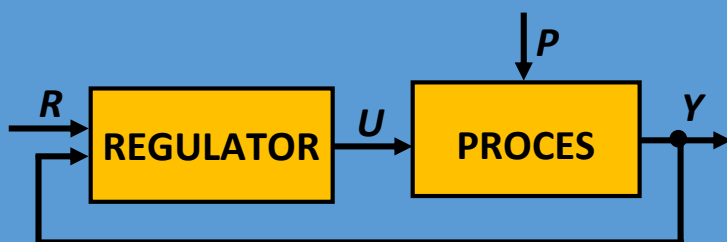


BARTOLOMEU IZVOREANU

**SISTEME
AUTOMATE
NELINIARE
DISCRETE ȘI
STOCASTICE**



Chișinău
2023

UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI

**FACULTATEA CALCULATOARE, INFORMATICĂ
ȘI MICROELECTRONICĂ**

**DEPARTAMENTUL INGINERIE SOFTWARE
ȘI AUTOMATICĂ**

Bartolomeu IZVOREANU

**SISTEME AUTOMATE NELINIARE
DISCRETE ȘI STOCASTICE**

MANUAL

**Chișinău
Editura „Tehnica-UTM”
2023**

CZU 681.5(075.8)

I-99

Manualul a fost discutat și aprobat pentru editare la Senatul Universității Tehnice a Moldovei, proces-verbal nr. 1 din 26.09.2023.

Manualul *Sisteme automate neliniare discrete și stocastice* este destinat studenților care studiază programul *Automatică și informatică*. În lucrare sunt expuse principiile și metodele teoriei sistemelor automate neliniare, discrete și stocastice cu expunerea modelelor matematice ale elementelor și sistemelor neliniare și discrete cu parametri concentrați ai transferului intrare–ieșire: ecuații diferențiale, ecuații cu diferențe finite, funcții temporale, funcții de transfer, funcții frecvențiale și modele intrare–stare–ieșire, analiza stabilității și performanțelor sistemului la acțiunea semnalelor deterministe; sisteme liniare și neliniare cu parametri concentrați supuse acțiunii semnalelor stocastice: modele de semnale stocastice, analiza transformării semnalelor stocastice de elemente liniare și neliniare, analiza dinamicii sistemelor automate liniare și neliniare la acțiunea semnalelor stocastice. Sunt date exemple de calcul, formulate întrebări și propuse probleme de rezolvat.

Manualul include 12 capitole, bibliografie și 3 anexe.

Autor: conf. univ., dr. șt. tehn. Bartolomeu IZVOREANU

Recenzenți: acad., conf. univ., dr. hab. Anatolii BALABANOV

prof. univ., dr. șt. fiz.-mat. Vasile MORARU

prof. univ., dr. ing. Gheorghe CĂPĂȚĂNĂ

DESCRIEREA CIP A CAMEREI NAȚIONALE A CĂRȚII DIN RM

Izvoreanu, Bartolomeu.

Sisteme automate neliniare discrete și stocastice: Manual / Bartolomeu Izvoreanu; Universitatea Tehnică a Moldovei, Facultatea Calculatoare, Informatică și Microelectronică, Departamentul Ingineria Software și Automatică.

- Chișinău: Tehnica-UTM, 2023. – 360, [1] p.: fig., tab.

Bibliogr.: p. 354-355 (21 tit.). - 50 ex.

ISBN 978-9975-45-977-8

© UTM, 2023

CUPRINS

INTRODUCERE.....	9
1 SISTEME AUTOMATE NELINIARE	12
1.1 Introducere.....	12
1.2 Particularitățile sistemelor automate neliniare	13
1.3 Tipuri de neliniarități.....	14
1.4 Scheme structurale ale sistemelor automate neliniare	18
1.5 Modele matematice ale sistemelor automate neliniare	21
1.6 Punct de echilibru al sistemului automat neliniar.....	27
Chestionar și probleme	31
2 METODA PLANULUI FAZELOR	32
2.1 Analiza sistemului neliniar prin metoda planului fazelor.....	32
2.2 Puncte singulare pentru sistemul liniar în planul fazelor	36
2.3 Sisteme neliniare cu neliniarități de tip releu	41
2.4 Portretul de fază în cazuri particulare de sisteme neliniare	45
2.5 Cicluri-limită în planul fazelor	46
2.6. Construirea traiectoriilor de fază ale sistemului automat	48
2.7 Sistemul automat neliniar cu regim alunecător	52
2.8 Sisteme automate neliniare cu structură variabilă	62
Chestionar și probleme	67
3 METODA FUNCȚIEI DE DESCRIERE	68
3.1 Introducere	68
3.2 Principiul metodei	68
3.3 Determinarea oscilațiilor întreținute ale sistemului cu o neliniaritate.....	77
3.3.1 <i>Cazul oscilațiilor simetrice</i>	78
3.3.2 <i>Cazul oscilațiilor nesimetrice</i>	78
3.4 Determinarea autooscilațiilor sistemului neliniar.....	80

3.4.1	<i>Generalități</i>	80
3.4.2	<i>Metoda planului Mihailov</i>	81
3.4.3	<i>Metoda planului Nyquist</i>	89
3.5	Oscilații forțate	93
3.6	Metoda liniarizării vibratorii	96
	Chestionar și probleme	101
4	STABILITATEA SISTEMELOR	
	AUTOMATE NELINIARE	102
4.1	Noțiuni de stabilitate a sistemului neliniar	102
4.2	Metoda directă Liapunov	105
4.3	Metoda ecuației matriceale Liapunov	108
4.4	Forme pătratice	111
4.5	Stabilitatea absolută a sistemelor automate neliniare	113
4.6	Problema lui Lurie	115
4.7	Criteriul V.M. Popov de stabilitate absolută	121
4.8	Criteriul Popov în cazul părții liniare neutră sau instabilă.....	125
4.9	Criteriul cercului de stabilitate absolută	128
4.10	Stabilitatea absolută a răspunsului sistemului neliniar	129
4.11	Performanțele sistemului automat neliniar	132
4.11.1	<i>Formularea problemei</i>	132
4.11.2	<i>Performanțele sistemului automat neliniar</i>	133
	Chestionar și probleme	135
5	SISTEME AUTOMATE DISCRETE	136
5.1	Introducere	136
5.2	Discretizarea și modulația semnalelor	136
5.3	Schema funcțională și structurală a sistemului automat discret	140
5.4	Modele matematice ale sistemelor automate discrete	142
5.4.1	<i>Funcții discrete și ecuații cu diferențe finite</i> ...	142
5.4.2	<i>Modelul matematic al elementului</i>	

<i>ideal de discretizare</i>	149
5.4.3 <i>Funcția frecvențială a elementului</i>	
<i>ideal de discretizare</i>	152
5.4.4 <i>Modelul matematic al elementului de reținere.</i>	152
5.5 Transformarea z discretă	157
5.5.1 <i>Proprietățile de bază ale transformatei</i>	
<i>z directe</i>	158
5.5.2 <i>Proprietățile transformatei z inverse</i>	163
5.6 Ecuțiile și funcțiile de transfer ale	
sistemului deschis cu eșantionare	166
5.7 Scheme structurale și funcțiile de transfer	
ale sistemului închis cu eșantionare	174
5.8 Transformata z de la conexiunile de elemente	
discrete și continue	179
5.9 Funcții frecvențiale ale sistemului	
automat cu eșantionare	186
5.10 Modele intrare-stare-ieșire ale sistemelor	
automate cu eșantionare	190
Chestionar și probleme	197
6 STABILITATEA SISTEMELOR	
AUTOMATE CU EȘANTIONARE	199
6.1 Conceptul de stabilitate	199
6.2 Criterii de stabilitate	203
6.2.1 <i>Criteriul de stabilitate Shur-Cohn</i>	203
6.2.2 <i>Criteriul de stabilitate Hurwitz</i>	204
6.3 Criterii frecvențiale de apreciere a	
stabilității sistemului cu eșantionare.....	207
6.3.1 <i>Criteriul de stabilitate Mihailov</i>	207
6.3.2 <i>Criteriul de stabilitate Nyquist</i>	209
6.4 Influența perioadei de eșantionare asupra	
stabilității sistemului	210
Chestionar și probleme	212
7 PERFORMANȚELE SISTEMELOR AUTOMATE	
CU EȘANTIONARE	213
7.1 Ecuția răspunsului sistemului cu eșantionare	213

7.2	Aprecierea erorii regimului staționar	223
7.3	Coefficienții erorii sistemului în regim staționar	226
7.4	Construirea răspunsului indicial al sistemului cu eșantionare.....	229
7.5	Aprecierea performanțelor răspunsului indicial al sistemului cu eșantionare.....	237
7.6	Elemente de corecție în sisteme discrete.....	238
	Chestionar și probleme.....	239
8	SISTEME AUTOMATE NUMERICE	241
8.1	Schema funcțională și structurală a sistemului numeric	241
8.2	Modelul matematic al sistemului numeric	243
	Chestionar și probleme	247
9	SEMNALE STOCASTICE ÎN SISTEME AUTOMATE	248
9.1	Introducere	248
9.2	Procese stocastice și caracteristicile lor	249
9.3	Procese stocastice staționale	257
9.4	Procese stocastice ergodice	259
9.5	Proprietățile funcției de corelație	264
9.6	Densitatea spectrală și legătura funcțională cu funcția de corelație	267
9.7	Modele de semnale stocastice și caracteristicile lor	272
	Chestionar și probleme	277
10	ANALIZA SISTEMELOR AUTOMATE LINIARE LA ACȚIUNEA SEMNALELOR STOCASTICE	279
10.1	Introducere	279
10.2	Transformarea semnalului stocastic de elementul liniar	279
10.3	Obiecte de conducere la acțiunea semnalelor stocastice.....	287
10.4	Sistemul automat liniar închis la acțiunea semnalelor stocastice	290
10.5	Metode de calcul al dispersiei	

semnalului stocastic	293
10.5.1 <i>Metode analitice de calcul a dispersiei</i>	
<i>semnalului stocastic</i>	293
10.5.2 <i>Metode grafo-analitice</i>	298
10.6 Utilizarea semnalului zgomot alb ideal	
ca model al acțiunilor externe.....	299
10.7 Calculul dispersiei erorii sistemului	
de ordin arbitrar	304
10.7.1 <i>Calculul preciziei transformării semnalelor</i>	
<i>stocastice staționare în regim staționar</i>	304
10.7.2 <i>Calculul dispersiei erorii</i>	
<i>în sistem de ordinul unu</i>	306
10.7.3 <i>Calculul dispersiei erorii în sistem</i>	
<i>de ordinul doi</i>	308
10.7.4 <i>Calculul dispersiei erorii în sistem</i>	
<i>de ordinul trei</i>	313
Chestionar și probleme	316
11 SINTEZA SISTEMELOR AUTOMATE LINIARE	
LA ACȚIUNEA SEMNALELOR STOCASTICE ...	317
11.1 Formularea problemei	317
11.2 Sinteza sistemului automat optimal	
cu structură fixă	320
11.3 Sinteza sistemului automat optimal	
cu structură arbitrară	324
11.4 Sinteza sistemului optimal în spațiul	
stărilor (filtrul Kalman-Busy).....	331
Chestionar și probleme.....	336
12 SISTEME NELINIARE LA ACȚIUNEA	
SEMNALELOR STOCASTICE	337
12.1 Transformarea semnalului stocastic	
de elementul neliniar	337
12.2 Liniarizarea statistică a elementului neliniar	340
12.3 Analiza sistemelor neliniare prin	
metoda liniarizării statistice	346
Chestionar și probleme	353

BIBLIOGRAFIE	354
ANEXE	356
Anexa 1. Tipuri de neliniarități	356
Anexa 2. Funcții de transfer ale elementelor dinamice în transformata Laplace s și transformata z ..	358
Anexa 3. Funcții de transfer ale elementelor dinamice în transformata Laplace s și transformata z ...	359

INTRODUCERE

În structura unui sistem automat real există diverse elemente funcționale de diversă natură fizică și prin descrierea funcționării acestora se obțin relații neliniare [1, 4, 9, 12, 13, 17, 18].

Istoric, evoluția automatizării a început cu dezvoltarea Teoriei sistemelor automate – sisteme liniare în timp continuu cu parametri constanți la acțiunea semnalelor deterministe, pentru care s-au elaborat metode eficiente de analiză și sinteză bazate pe teoria ecuațiilor diferențiale liniare, transformata Laplace și metode frecvențiale reprezentate ca modele matematice intrare–ieșire. Modelele liniare se obțin prin proceduri de aproximare a caracteristicilor de funcționare a elementelor și sistemului integral și aceste modele se soluționează.

În anii '70 ai secolului al XX-lea s-au dezvoltat intens metodele moderne de analiză și sinteză a sistemelor automate liniare în baza formalismului modelelor matematice intrare–stare–ieșire (spațiul stărilor), care au condiționat o nouă viziune a evoluției sistemelor de conducere și eficientizarea funcționării acestora.

Însă nu pentru toate elementele funcționale reale ale sistemului automat neliniar se pot obține aproximări cu modele liniare și atunci aceste elemente se descriu prin relații neliniare (ecuații diferențiale neliniare, caracteristici statice neliniare etc.). Soluționarea ecuațiilor diferențiale neliniare de ordin mai mare decât doi este dificilă și atunci fiecare tip de ecuație neliniară se studiază separat. În multe cazuri, relațiile neliniare ale elementelor nu pot fi reprezentate ca modele matematice și aceste relații se dau în formă grafică (caracteristici statice releice, histerezis etc.).

Deoarece principiul superpoziției nu este aplicabil sistemelor neliniare, rezultă că nici determinarea componentelor liberă și permanentă nu are sens, deoarece semnalul nu se descompune în componente care pot fi analizate separat, dar se analizează integral.

Din aceste considerente, modelele matematice ale sistemelor neliniare nu pot fi generalizate, iar modelul sistemului neliniar se analizează ca model particular, în funcție de neliniaritățile componente ale sistemului automat.

Astfel, soluționarea modelelor matematice neliniare devine o

problemă dificilă, însă realizarea practică a sistemului poate fi mai simplă, având unele avantaje.

Problema de analiză a sistemului neliniar constă în construirea modelului matematic al sistemului și studiarea lui pentru a determina dependența proprietăților modelului de variația valorilor parametrilor și posibila alegere a unui regim favorabil de funcționare a sistemului.

În problema de sinteză a sistemului neliniar, pornind de la cerințele de funcționare a sistemului, se determină structura, componența și valorile parametrilor elementelor sistemului.

Pentru analiza și sinteza calitativă a regimurilor de funcționare a sistemelor automate neliniare s-au dezvoltat mai multe clase de metode (spațiul fazelor, metoda Leapunov, metoda funcției de descriere, criteriul de stabilitate absolută, metoda liniarizării vibratorii etc.), care permit a construi sisteme eficiente pentru automatizarea diverselor procese industriale și tehnologice.

Sistemele menționate sunt sisteme continue (în timp continuu) sau analogice, când la intrările și ieșirile elementelor, semnalele lor pot apărea în orice moment de timp. Dar de aici nu rezultă că aceste clase de sisteme sunt cele mai eficiente din punct de vedere tehnico-economic.

În practică se realizează și sisteme discrete, în care semnalele elementelor pot fi discretizate în nivel și timp [1, 4, 9, 12, 13, 17].

Sistemele discrete și numerice se deosebesc de sistemele continue prin faptul că în unul sau mai multe elemente funcționale ale sistemului automat, semnalele la intrare și/sau la ieșire reprezintă o succesiune de impulsuri sau un cod în momentele discrete de timp, deplasate la intervale de timp (de exemplu egale).

În literatura de specialitate se utilizează frecvent termenii *sistem cu eșantionare*, *sistem discret*, *sistem cu timp discret* și *sisteme numerice*.

Corect este considerat termenul *sistem cu eșantionare*, când unul dintre parametrii informaționali ai impulsului (amplitudinea, durata, faza) se modulează (se modifică) în timp. Termenul *sisteme numerice* se referă la sisteme, în care semnalul discret în formă de cod este generat de un calculator sau de elemente numerice. În cazul când

în structura sistemului există elemente cu eșantionare, cât și elemente numerice, sistemul se numește *sistem discret*.

Modelele matematice ale sistemelor cu eșantionare și numerice se descriu prin ecuații cu diferențe finite, care sunt un analog al ecuației diferențiale pentru sistemul liniar continuu. Soluționarea ecuațiilor cu diferențe este dificilă și aceasta se transformă în ecuații recurente, care se soluționează simplu, dar cu recurență pentru intervalul de timp al răspunsul sistemului.

S-au dezvoltat metode de analiză și sinteză ale sistemelor cu eșantionare și numerice. În practică, sistemele discrete se construiesc în baza unor elemente funcționale simple, care reduc costurile și ridică fiabilitatea sistemului.

Clasele de sisteme liniare, neliniare și discrete se analizează la acțiunea semnalelor externe bine determinate. Această formulare a problemei corespunde informației complexe despre sistemul studiat.

Însă, în practică, asupra sistemului automat acționează semnale interioare și exterioare a căror evoluție nu este cunoscută cu certitudine, care deteriorează regimul de funcționare a sistemului. Pentru depășirea acestor dificultăți se aplică teoria probabilităților privind descrierea fenomenelor probabiliste (ca procese stocastice) care acționează asupra sistemului și aceste acțiuni se consideră funcții probabiliste sau stocastice [9, 12, 17-19].

Dacă procesele stocastice sunt staționare, atunci ansamblul de realizări ale procesului stocastic se substituie cu o realizare a procesului în domeniul timpului în baza ipotezei ergodice, ceea ce simplifică soluționarea problemelor de analiză și sinteză a sistemului automat.

Un proces stocastic se caracterizează prin funcția de distribuție și densitatea distribuției, care sunt larg utilizate la studierea sistemelor neliniare.

Pe parcurs s-au elaborat metode de analiză și sinteză a sistemelor automate liniare continue, neliniare, cu eșantionare și neliniare-discrete la acțiunea semnalelor stocastice în domeniul timpului – funcțiile de corelație – și în domeniul frecvență – funcțiile spectrale [9, 12, 17-19]. Pentru analiza și sinteza sistemelor automate neliniare s-a elaborat metoda liniarizării statistice.

1 SISTEME AUTOMATE NELINIARE

1.1 Introducere

Sistemele automate reale sunt sisteme automate neliniare, deoarece un element sau mai multe elemente componente ale sistemului se descriu prin modele matematice intrare–ieșire (descriere externă) neliniare (organe de reglare cu limitări ale semnalelor, elemente de acționare cu caracteristică de saturație, elemente cu caracteristică de tip releu, elemente cu caracteristică cu histerezis (mecanic, termic, electric sau magnetic) etc.), inclusiv procesele industriale care se automatizează sunt neliniare [1, 4, 9, 12, 13, 15, 17, 18]. În calitate de procese industriale, ca obiecte de reglare servesc diferite tipuri de instalații din diverse ramuri ale industriei în care evoluează procesele cu reglarea temperaturii, presiunii, debitului, nivelului, vitezei liniare, rotațiile unui motor etc.

Un sistem automat este neliniar dacă conține unul sau mai multe elemente funcționale neliniare. Un sistem automat liniar trebuie acceptat ca un caz particular la care se ajunge prin diverse idealizări și aproximări ale fenomenelor reale după care funcționează elementele sistemului.

Rezultatele obținute în baza modelelor matematice pentru sistemul liniarizat (idealizări și aproximații ale fenomenelor reale) sunt acceptabile ca modele ce corespund cerințelor practice.

Există însă numeroase situații, când obținerea unui model liniar duce la aproximații inacceptabile și atunci sistemul (fenomenul) trebuie studiat ca sistem (fenomen) neliniar.

Astfel, se obține o clasă nouă de sisteme automate neliniare (SAN) care va fi studiată.

Sistemele automate neliniare realizate în practică pot avea structură mai simplă sau mai complexă pentru efectuarea unei conduceri optimale a obiectului de reglare.

Se consideră că sistemele automate neliniare satisfac ipoteza de separabilitate, care presupune că sistemul poate fi divizat în subsisteme liniare și neliniare conectate adecvat între ele. Subsistemele liniare se

descriu cu ajutorul transformatei Laplace (funcție de transfer) sau ecuațiilor de stare, iar elementele funcționale neliniare se caracterizează prin diferite tipuri de neliniarități ca funcții intrare–ieșire.

În general, neliniaritățile se pot clasifica în neliniarități statice și neliniarități dinamice sau, în termeni ce ilustrează mai bine diferența dintre acestea, neliniarități fără memorie și neliniarități cu memorie.

Pentru simplificarea studiului sistemului automat, proprietățile dinamice ale neliniarităților se atașează elementelor liniare și, în continuare, neliniaritatea se acceptă ca neliniaritate statică. În cazul neliniarităților statice, comportamentul acestora la un anumit moment nu este influențat de comportamentul până la momentul respectiv și sunt reprezentate ca funcție intrare–ieșire, numită caracteristică statică a elementului neliniar, care modelează regimurile de funcționare a elementelor reale: saturație, zonă de insensibilitate, histerezis etc.

1.2 Particularitățile sistemelor automate neliniare

Sistemele automate neliniare sunt caracterizate de următoarele particularități [1, 4, 9, 12, 13, 17, 21].

1. În sistemul automat neliniar, un regim oscilant neamortizat este un regim normal de funcționare în comparație cu sistemul automat liniar în care astfel de regimuri nu pot exista, dar se deosebesc de sistemul liniar prin faptul că parametrii sistemului neliniar nu depind de semnalul de intrare (acest semnal poate fi și nul).

2. Stabilitatea sistemului, ca stare de echilibru, se analizează în baza soluției ecuației diferențiale (componenta liberă) $y_l(t)$. Pentru sistemul liniar se studiază stabilitatea numai în vecinătatea regimului staționar - *stabilitatea în mic*, iar pentru sistemul neliniar se studiază stabilitatea regimului de funcționare pentru tot domeniul de variație al variabilelor - *stabilitatea completă sau globală (absolută)*.

Se studiază trei tipuri de stabilitate a sistemului neliniar:

- 1) stabilitatea în mic (abateri inițiale mici);
- 2) stabilitatea în mare (abateri inițiale mari) este stabilitatea care nu depinde de condițiile inițiale;
- 3) stabilitatea globală (oricare abateri inițiale) – este stabilitatea

absolută care nu depinde de tipul concret de neliniaritate și de condițiile inițiale.

În figura 1.1 se dau două tipuri de procese tranzitorii ale sistemului neliniar cu condițiile inițiale y_{01} și y_{02} : în figura 1.1, a curba 1 reprezintă sistemul instabil în mic, iar curba 2 – sistemul este stabil în mare; în figura 1.1, b curba 1 reprezintă sistemul neliniar stabil în mic, iar curba 2 – sistemul este instabil în mare.

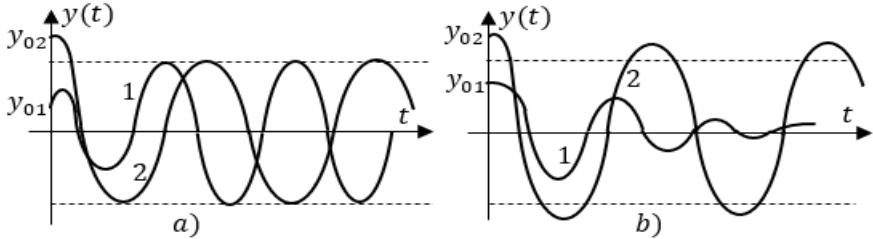


Fig. 1.1. Tipuri de stabilitate în sistemele automate neliniare

3. Pentru sistemul liniar este valabil principiul superpoziției care simplifică procedura de studiere a dinamicii sistemului automat. În sistemul neliniar, principiul superpoziției nu mai este valabil și rezultă că procedurile de studiere a evoluției sistemului devin o procedură particulară care va depinde de particularitățile sistemului (tipul de neliniaritate, numărul de neliniarități, dependența condițiilor de stabilitate de mărimea semnalelor exogene). În aceste cazuri, sistemul neliniar este stabil la unele valori ale semnalelor și devine instabil la alte valori ale semnalelor exterioare.

Condițiile de stabilitate, forma răspunsului și indicii de performanță ai sistemului neliniar depind de mărimea și forma semnalelor exogene.

1.3 Tipuri de neliniarități

Fenomenele neliniare sunt proprii multor sisteme, procese din diverse domenii ale realității fizico-tehnice, dar există și cazuri în care asemenea fenomene neliniare se introduc în intenționat în sistemele și procesele tehnice.

Neliniaritățile descriu evoluția elementelor funcționale neliniare

(EN) și se clasifică după următoarele criterii:

1. Neliniaritățile proprii elementelor neliniare și se numesc *neliniarități intrinseci* și se clasifică astfel:

- *neliniarități perturbatoare*, care au influență nedorită asupra proceselor cum ar fi: jocurile în transmisii mecanice cu roți dințate, cuplajele de orice tip etc.;

- *neliniarități funcționale*, care asigură funcționarea unor procese: jocul mecanic dimensionat și condus corespunzător - se utilizează în funcționarea ceasornicelor mecanice, fenomenele gravitaționale - se folosesc în sistemele giroscopice cu corecție gravitațională, oscilatoare neliniare (pendule) etc.

2. După efectul neliniarităților asupra evoluției sistemelor neliniare, acestea se împart în două categorii:

- *neliniarități esențiale* se introduc în mod intenționat pentru realizarea unor relații intrare-ieșire ce nu se pot obține folosind sistemele liniare;

- *neliniarități neesențiale (accidentale)*, care nu sunt introduse în mod intenționat și au caracter natural și, în general, sunt nedorite. Aceste tipuri de neliniarități permit obținerea unor modele aproximative (liniarizate) cu un grad restrâns de valabilitate în jurul punctului static de funcționare pentru care se face liniarizarea.

3. Neliniaritățile descrise de funcții continue și derivabile de un număr necesar de ori se numesc *analitice*. Neliniaritățile care nu satisfac aceste condiții se numesc *neanalitice*.

4. Neliniaritățile pot fi *simetrice* și *asimetrice*. Neliniaritățile simetrice se descriu prin funcții impare $u = f(\varepsilon) = -f(-\varepsilon)$ simetrice în raport cu originea sistemului de coordonate ε, u .

5. Există neliniarități *statice* și *dinamice*. Neliniaritățile statice definesc instantaneu relația intrare-ieșire $u = f(\varepsilon)$ în regim staționar al elementului funcțional sau sistemului și sunt reprezentate prin intermediul *caracteristicilor statice (funcție)*, care pot fi staționare și nestaționare.

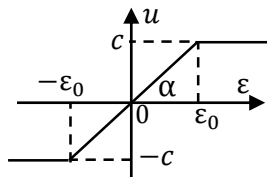
În neliniaritățile dinamice parametrii sunt funcții de timp.

În cadrul structurilor uzuale de sisteme neliniare se utilizează neliniarități statice de tipul saturație, zonă de insensibilitate, histerezis,

caracteristici de tip releu etc.

În continuare, dăm cele mai larg utilizate neliniarități la descrierea evoluției elementelor funcționale neliniare reprezentate prin caracteristici statice $u = f(\varepsilon)$ și funcțiile analitice [1, 4, 9, 13, 17, 18].

1. Zona de saturație (fig. 1.2) reprezintă limitarea astfel:

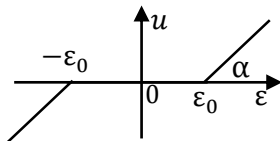


$$u = \begin{cases} k\varepsilon, & |\varepsilon| \leq \varepsilon_0, \\ c \operatorname{sign} \varepsilon, & |\varepsilon| \geq \varepsilon_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

unde $k = \operatorname{tg} \alpha$

Fig. 1.2. Zona de saturație

2. Zona de insensibilitate (fig. 1.3):

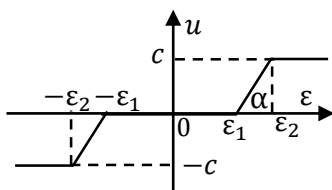


$$u = \begin{cases} k\varepsilon, & |\varepsilon| \leq \varepsilon_0, \\ c \operatorname{sign} \varepsilon, & |\varepsilon| \geq \varepsilon_0, \end{cases} \quad (1.2)$$

unde $k = \operatorname{tg} \alpha$.

Fig. 1.3. Zona de insensibilitate

3. Zona de insensibilitate și saturație (fig. 1.4):

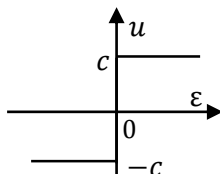


$$u = \begin{cases} 0, & |\varepsilon| \leq \varepsilon_1, \\ k(\varepsilon - \varepsilon_1), & \varepsilon \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2), \\ k(\varepsilon + \varepsilon_1), & \varepsilon \in (-\varepsilon_1, -\varepsilon_2), \\ c \operatorname{sign} \varepsilon, & |\varepsilon| > \varepsilon_2, \end{cases} \quad (1.3)$$

unde $k = \operatorname{tg} \alpha$.

Fig. 1.4. Zona de insensibilitate și saturație

4. Releu ideal (bipozițional) (fig. 1.5):



$$u = c \operatorname{sign} \varepsilon = \begin{cases} c, & \varepsilon > 0, \\ \text{nedefinit}, & \varepsilon = 0, \\ -c, & \varepsilon < 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Fig. 1.5. Releu ideal (bipozițional)

5. Releu cu zonă de insensibilitate (tripozițional) (fig. 1.6):

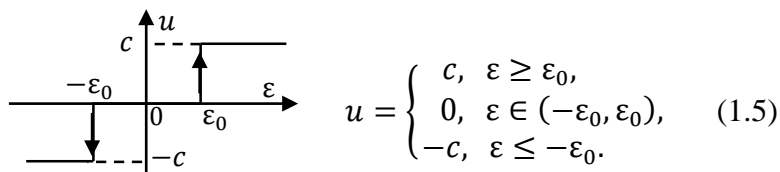


Fig. 1.6. Releu cu zonă de insensibilitate (tripozițional)

6. Releu cu zonă de insensibilitate și histerezis (fig. 1.7):

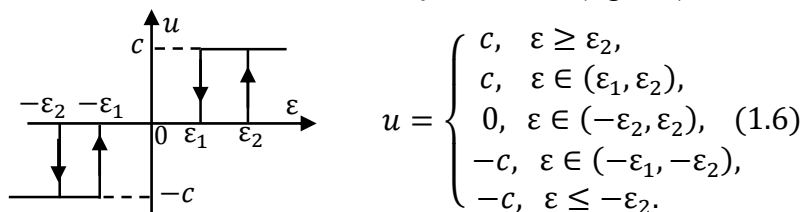


Fig. 1.7. Releu cu zonă de insensibilitate și histerezis

7. Releu cu histerezis activ (fig. 1.8):

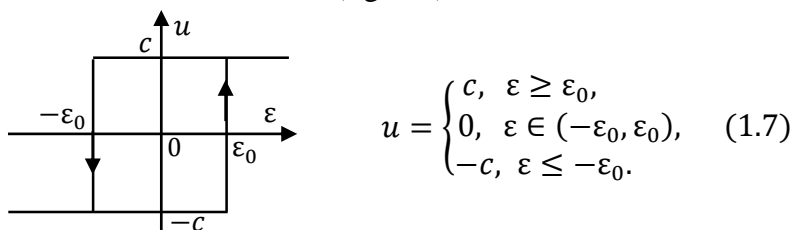


Fig. 1.8. Releu cu histerezis activ

8. Neliniaritate de tip joc sau luft (joc în angrenaje) (fig. 1.9):

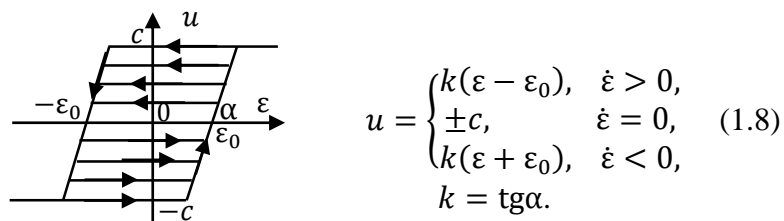


Fig. 1.9. Neliniaritate de tip joc (luft)

În caracteristicile statice de mai sus sunt utilizate însemnările:

$u = f(\varepsilon)$ este mărimea de ieșire a neliniarității, k – coeficientul de transfer, c – valoarea constantă a mărimii de ieșire, ε – mărimea de intrare a neliniarității, ε_0 – valoarea constantă a mărimii de intrare, ε_1 – valoarea de revenire, ε_2 – valoarea de acționare, histerezisul h releului se determină prin diferența dintre semnalele $\varepsilon_1, \varepsilon_2$:

$$h = \varepsilon_2 - \varepsilon_1.$$

Caracteristicile statice menționate pun în evidență fie o polaritate directă, care reprezintă funcția intrare–ieșire în cadranele I și III, sau o polaritate inversă cu reprezentarea funcției intrare–ieșire în cadranele II și IV.

Separarea caracteristicilor statice neliniare de cele dinamice liniare evidențiază faptul că starea de referință completează descrierea părților liniare, iar caracteristicile neliniare sunt funcții pe mulțimea intrărilor. Această separare este posibilă dacă operatorii funcției determină în mod univoc mărimile de ieșire, când se dau mărimile de intrare și o stare de referință inițială, finală etc. Există atât neliniarități statice univoce (fig. 1.2-1.6), cât și neliniarități neunivoce (fig. 1.7-1.9).

Neliniaritățile pot fi analitice și neanalitice. Neliniaritățile analitice se descriu prin funcții continue și continue derivabile în raport cu argumentele (semnalele de intrare), iar cele neanalitice sunt neliniarități continue sau discontinue nederivabile în raport cu argumentele lor.

Neliniaritățile pot fi conectate în trei moduri: în serie, în paralel și în reacție. În rezultatul aplicării comutărilor respective a neliniarităților se obține neliniaritatea echivalentă $u = f(\varepsilon)$. Caracteristica echivalentă cel mai simplu se obține dacă neliniaritățile sunt date în formă grafică.

1.4 Scheme structurale ale sistemelor automate neliniare

La analiza și sinteza sistemului neliniar se utilizează structuri de scheme tipice în care se evidențiază elementele neliniare reprezentate prin caracteristici statice și partea liniară a sistemului care înglobează toate elementele liniare componente ale sistemului.

Se utilizează următoarele tipuri de structuri ale sistemului automat neliniar:

1. Structura clasică a sistemului de reglare automată (fig. 1.10), când elementul neliniar EN și partea liniară PL sunt plasate în canalul direct, iar reacția este unitară.

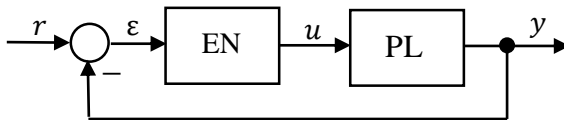


Fig. 1.10. Structura standard a sistemului automat neliniar cu elementul neliniar în canalul direct

2. Structura sistemului (fig. 1.11) când partea liniară PL (obiect de reglare liniar) este plasată în canalul direct, iar partea neliniară EN (regulatorul) este plasată pe calea de reacție.

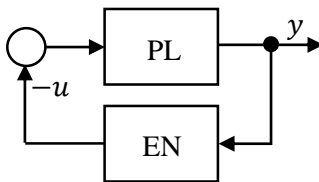


Fig. 1.11. Structura sistemului automat neliniar cu elementul neliniar în reacție

3. Structura generală a sistemului neliniar dată în figura 1.12 când elementul neliniar este un regulator neliniar și partea liniară (prezintă obiectul de reglare) sunt plasate în canalul direct.

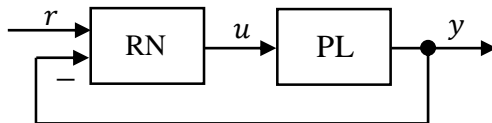


Fig. 1.12. Structura sistemului automat neliniar

4. Structură sistemului automat neliniar (fig. 1.13), în care se evidențiază neliniaritatea N_1 introdusă de elementul de execuție (EE) și

poziționerul cu neliniaritatea N_2 . În structura sistemului, în canalul direct este conectat regulatorul R și partea liniară formată din două elemente cu funcțiile de transfer $H_1(s)$ și $H_2(s)$. În sistem există două tipuri de reacții: reacția în elementul de execuție (reacția locală) și reacția sistemului.

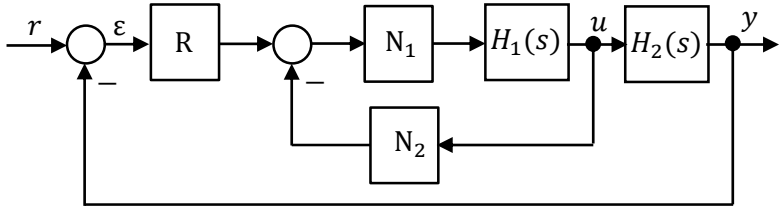


Fig. 1.13. Structura sistemului automat neliniar cu două neliniarități

5. Structură de sistem neliniar cu reacție dată în figura 1.14 cu regulator neliniar RN în canalul direct și în reacție cu element de corecție liniar cu f.d.t. $H_c(s)$, elementul de execuție cu f.d.t. $H_{EE}(s)$ și obiectul de reglare cu f.d.t. $H_0(s)$ conectate în canalul direct. Comanda furnizată de acest regulator are forma unor impulsuri modulate în durată.

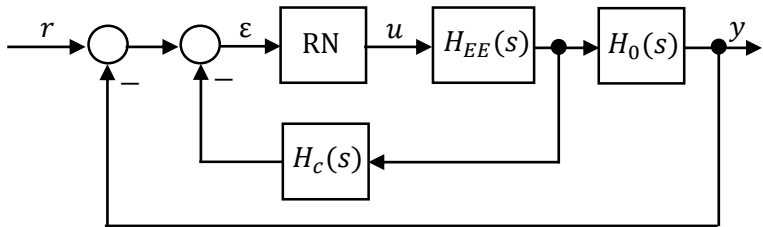


Fig. 1.14. Structura sistemului automat neliniar cu element de corecție

Analogiile dintre noțiunile de răspuns ale sistemului neliniar la semnal în frecvență și de funcție de descriere permit tratarea sistemului neliniar similar sistemelor automate liniare. Pentru o schemă-bloc structurală a unui sistem neliniar se efectuează operațiile de separare a elementelor neliniare și a părții liniare. Pentru elementele liniare ale sistemului neliniar se pot aplica regulile de transformare a schemelor-bloc structurale cunoscute de la sistemele liniare *cu condiția ca*

mărimile de intrare ale elementelor neliniare să rămână neschimbate [4, 9, 12, 13, 17].

Această condiție se explică prin aceea că funcția de descriere a EN depinde de amplitudinea mărimii de intrare a elementului.

Pentru un sistem automat neliniar cu o singură neliniaritate, după transformările efectuate pentru partea liniară, forma cea mai simplă este schema-bloc structurală tipică dată în figura 1.15.

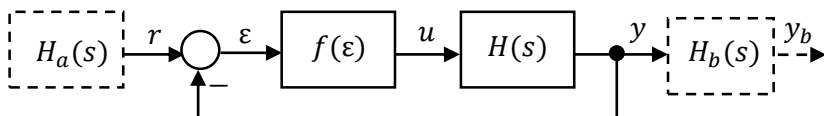


Fig. 1.15. Schema-bloc structurală standard a sistemului automat neliniar

În rezultat, s-a obținut o structură tipică cu element neliniar și partea liniară cu funcția de transfer echivalentă $H(s)$ și reacție negativă. În partea stângă și dreaptă de această structură există blocurile cu linii întrerupte descrise de f.d.t. $H_a(s)$ și $H_b(s)$, care se obțin în urma transformării părții liniare a sistemului și în calcule nu se utilizează.

În structura aceasta se preferă ca reacția negativă să fie unitară și, în raport cu sistemul liniar, nu are un echivalent mai simplu.

În cazul unui sistem neliniar cu două sau mai multe elemente neliniare, reducerea la forma tipică indicată nu este posibilă datorită condițiilor menținerii neschimbate a mărimilor de intrare ale elementelor neliniare.

1.5 Modele matematice ale sistemelor automate neliniare

Structurile de sisteme neliniare cu neliniarități și caracteristici statice grupate și părți componente liniarizate interconectate sunt cel mai larg utilizate în practica realizării sistemelor automate (automatizarea diferitor procese). Pentru descrierea dinamicii sistemului neliniar se utilizează metode generale ale ecuațiilor diferențiale neliniare de forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}, t), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, t \geq t_0, \quad (1.9)$$

$$\mathbf{y} = g(\mathbf{x}, t), \quad (1.10)$$

unde mulțimea mărimilor de intrare-ieșire și cea a variabililor de stare aparțin unor spații topologice multidimensionale reale (euclidiene):

$$\mathbf{u} \in U \subset R^m, \mathbf{y} \in Y \subset R^l, \mathbf{x} \in X \subset R^n, \mathbf{p} \in P \subset R^r,$$

unde $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ este vectorul mărimilor de intrare m -dimensional, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_l)$ – vectorul mărimilor de ieșire l -dimensional, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – vectorul variabilelor de stare n -dimensional, $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_r)$ – vectorul perturbațiilor r -dimensional, U, Y, X, P sunt mulțimi din spațiile respective R^m, R^l, R^n, R^r , funcțiile f și g sunt funcții neliniare de argumentele lor.

Spațiul R^n la care se mai adaugă o coordonată suplimentară timpul t devine spațiul R^{n+1} și se numește spațiul de fază.

Starea unui sistem la timpul t_0 este reprezentată de cea mai mică mulțime de date, în mod normal o mulțime de numere (mărimi) $(x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)) = \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, din care se poate determina univoc pentru orice timp $t \geq t_0$ (viitor) evoluția sistemului automat, presupunând că toate intrările care influențează sistemul pentru timpul $t \geq t_0$ ca și ecuațiile de funcționare ale sistemului sunt cunoscute. În acest mod, starea unui sistem, definită complet la un moment dat t prin variabilele de stare \mathbf{x} , se poate considera ca o informație minimă asupra evoluției sale anterioare și o reuniune de condiții inițiale pentru caracterizarea evoluției sale ulterioare [1, 4, 9, 13, 17].

În modelul matematic general asociat sistemului neliniar ecuația (1.9) reprezintă ecuația de stare, iar ecuația (1.10) este ecuația de ieșire (de legătură).

Funcțiile f și g pot fi funcții neliniare.

Pornind de la ecuațiile (1.9)-(1.10), se definește noțiunea de sistem dinamic neted prin tripletul de mărimi (u, f, g) cu proprietățile următoare:

- a) u sunt funcții continue (eventual pe porțiuni);
- b) f este funcție continuă și global lipschitziană în raport cu \mathbf{x} și $\mathbf{x} \neq 0$, iar $\mathbf{x}f(\mathbf{x}) > 0$;

c) g este funcție continuă.

Condițiile a), b) asigură existența globală a soluției ecuației (1.9) în raport cu orice intrare \mathbf{u} și inițializare $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$.

Soluția ecuației de stare (1.9) în acest caz este:

$$\mathbf{x}(t) = \varphi(t, t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}), \quad (1.11)$$

unde $\varphi(t, t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{u})$ se numește *trajectorie de stare* care trece la momentul t_0 prin \mathbf{x}_0 .

Dacă sistemul (1.9)-(1.10) nu depinde de timp și perturbația $\mathbf{p} = \mathbf{0}$, atunci este invariant în timp și se reprezintă în forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad t \geq 0, \quad (1.12)$$

$$\mathbf{y} = g(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}). \quad (1.13)$$

Dacă funcțiile $f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ și $g(\mathbf{x})$ pot fi liniarizate în jurul unui punct static de funcționare, atunci se obține modelul liniar invariant de forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (1.14)$$

$$\mathbf{y} = g(\mathbf{x}) = \mathbf{C}\mathbf{x}. \quad (1.15)$$

Dacă variabilele depind de timp, atunci sistemul (1.14)-(1.15) se reprezintă în forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (1.16)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t).$$

În expresiile (1.14)-(1.16) se utilizează notațiile: \mathbf{A} este matricea coeficienților interni de dimensiunea $n \times n$, \mathbf{B} – matricea de comandă de dimensiunea $n \times m$, \mathbf{C} – matricea de ieșire de dimensiunea $l \times m$.

Matricele \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} se calculează prin relațiile:

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0)}, \quad \mathbf{B} = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0)}, \quad \mathbf{C} = \left. \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0)}. \quad (1.17)$$

Funcțiile neliniare f și g au fost liniarizate în jurul punctului de liniarizare $(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0)$ cu $f(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) = 0$ și $g(\mathbf{x}^0) = 0$. Matricele \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} depind de punctul de liniarizare $(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0)$.

Dacă se consideră diferite regimuri de funcționare a sistemului neliniar, atunci rezultă diferite seturi $(\mathbf{A}^i, \mathbf{B}^i, \mathbf{C}^i)$ care reprezintă diferite modele ale sistemului.

O asemenea aproximare a modelelor neliniare evidențiază un anumit grad de incertitudine structurală în descrierea obiectelor reale neliniare prin aproximații liniare.

Descrierea intrare-ieșire a sistemului neliniar evidențiază atât o caracteristică statică neliniară, cât și o caracteristică dinamică neliniară.

Dacă se definește un sistem prin operatorii f și g în forma:

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{y}) = 0, \quad (1.18)$$

$$\mathbf{y} = g(\mathbf{u}), \quad (1.19)$$

unde acești operatori introduc operații de derivare, integrare sau alte operații similare, atunci acest sistem este neliniar dinamic și are o evoluție proprie în timp. În acest caz, fiecărei valori de intrare stabilizată îi corespunde o valoare stabilizată la ieșire și caracteristica statică a elementului studiat sau a sistemului se determină de totalitatea acestor puncte (u_i, y_i) .

Forma generală a modelelor matematice a unui sistem neliniar multivariabil ce definește asemenea structurii (fig. 1.16, *a*) și are forma:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}^T \mathbf{x}, \\ \mathbf{u} &= \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}), \end{aligned} \quad (1.20)$$

unde $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$ este un vector de intrare transpus m -dimensional al intrărilor neliniare, dacă se aproximează că numărul de unități neliniare este egal cu numărul m al ieșirilor părții neliniare, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – vectorul variabilelor de stare n -dimensional, \mathbf{A} – matricea coeficienților constanți ai părții liniare de dimensiunea $n \times n$, \mathbf{B} – matrice cu coeficienții constanți de dimensiunea $n \times m$, \mathbf{C} – matrice cu coeficienții constanți de dimensiunea $n \times m$ și \mathbf{C}^T – matrice

transpusă.

Ecuția a doua din (1.20) este ecuația de legătură dintre partea liniară și partea neliniară. Rezultă că sistemul constă din m neliniarități cu o intrare și o ieșire. Ecuția $\mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})$ ce descrie partea neliniară cu funcția vectorială neliniară $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})$ dată se descompune în m ecuații scalare $u_i = \varphi_i(y_i)$, $i = \overline{1, m}$, iar $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})$ este o matrice diagonală de dimensiunea $m \times m$.

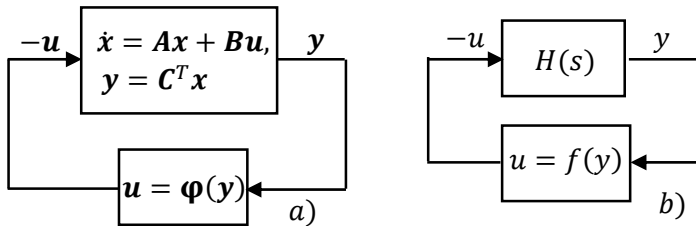


Fig. 1.16. Modele de sisteme neliniare

Pentru sistemele neliniare monovariabile (fig. 1.16, b) cu modelul părții liniare în variabile de stare sistemul (1.20) ia forma:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \\ y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t), \\ u &= f(y), \end{aligned} \tag{1.21}$$

unde mărimile u și y sunt mărimi scalare, iar $f(y)$ este o funcție scalară, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – vectorul variabilelor de stare n -dimensional, \mathbf{A} – matricea de dimensiunea $n \times n$, \mathbf{b} – vectorul coloană de comandă de dimensiunea $1 \times n$, \mathbf{c} – vectorul coloană de ieșire de dimensiunea $n \times 1$, iar \mathbf{c}^T – vectorul \mathbf{c} transpus de dimensiunea $1 \times n$.

Dacă sistemul neliniar se descrie prin metoda intrare–ieșire (fig. 1.17) și modelul matematic al părții liniare se descrie prin funcția de transfer $H(s)$, atunci se obține:

$$y = -H(s)u, \tag{1.22}$$

$$u = f(y),$$

iar pentru sistemul din figura 1.17 eroarea $\varepsilon = r - y$, și dacă $r = 0$, atunci $\varepsilon = -y$.

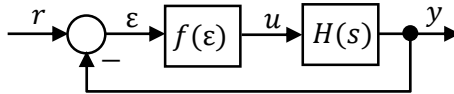


Fig. 1.17. Structura sistemului automat neliniar

Pentru descrierea sistemelor automate liniare se utilizează ecuațiile diferențiale liniare, care au o soluție generală [3, 5, 8, 10, 17].

Pentru descrierea sistemelor automate neliniare se utilizează ecuațiile diferențiale neliniare pentru care o soluție generală nu există, dar soluțiile se obțin pentru cazuri particulare în funcție de tipurile sau clasa de neliniarități. Acest impediment evidențiază dificultățile, care apar la analiza și sinteza sistemului neliniar.

S-au elaborat mai multe metode de studiere a dinamicii sistemului neliniar. Menționăm metodele care sunt utilizate mai frecvent pentru analiza și sinteza sistemului automat neliniar [1, 4, 9, 12, 13, 17].

1. Metode de liniarizare a caracteristicilor statice neliniare.
2. Metode bazate pe rezolvarea ecuațiilor diferențiale neliniare (analitice, grafice, grafo-analitice, numerice).
3. Metode bazate pe analiza calitativă a ecuațiilor diferențiale neliniare.
4. Metoda planului fazelor.
5. Metoda funcției de descriere (liniarizării armonice).
6. Metode bazate pe serii Volterra.
7. Metoda liniarizării statistice.

Analiza și sinteza sistemelor automate neliniare se efectuează prin utilizarea diferitor metode aplicabile unor clase diferite de sisteme. Multe metode se bazează pe idei și concepte din teoria sistemelor automate liniare, dar aceste metode au un scop comun de analiză a stabilității și sinteza unor sisteme automate neliniare stabile.

Propunem în continuare metodele de analiză a sistemelor neliniare: metoda planului fazelor, metoda funcției de descriere (în planul Mihailov și planul Nyquist), metoda Liapunov și criteriul V. M. Popov de stabilitate absolută a sistemului neliniar.

1.6 Punct de echilibru al sistemului automat neliniar

Funcționarea unui sistem neliniar și studierea evoluției acestuia satisfac următoarele ipoteze pentru partea liniară cu funcția de transfer [1, 9, 12, 13, 17, 21]:

$$H(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{B(s)}{A(s)}. \quad (1.23)$$

1. Partea liniară are o caracteristică atenuare-frecvență de tipul filtru trece-jos cu o pantă cel mult egală cu -40 dB/decadă în zona pulsației de tăiere.

2. Partea liniară are cel mult un pol pe axa imaginară în origine ($p = 0$), iar restul polilor toți sunt alocați în $\text{Rep} < 0$.

3. Polinoamele $B(s)$ și $A(s)$ sunt relativ prime între ele.

4. Funcția de transfer $H(s)$ poate să conțină și un element cu timp mort.

Având în vedere că elementul neliniar poate avea o caracteristică statică complexă, sistemul neliniar poate avea mai multe puncte de echilibru. Din aceste considerente, noțiunea de stabilitate a sistemului neliniar se transformă în noțiune de *puncte de echilibru* ale sistemului.

După analogia sistemului continuu liniar, regimul de funcționare uzual al unui sistem automat neliniar este regimul staționar ca utilizare practică.

Pornind de la schema structurală tipică a sistemului neliniar din figura 1.17, regimul staționar este posibil dacă variabilele din sistem vor avea valori constante: referința $r = r_0 = \text{const}$, mărimea de comandă $u = u_0 = \text{const}$, eroarea $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{const}$ și mărimea de ieșire $y = y_0 = \text{const}$. În acest caz, cvadruplul $(r_0, u_0, \varepsilon_0, y_0)$ determină un punct de funcționare al sistemului neliniar descris de sistemul de ecuații:

$$\begin{aligned}
 y_0 &= H(p)u_0, \\
 u_0 &= f(\varepsilon_0), \\
 \varepsilon_0 &= r_0 - y_0,
 \end{aligned}
 \tag{1.24}$$

unde $p = \frac{d}{dt} = s$ este operatorul de derivare care substituie variabila s în f.d.t. $H(s)$.

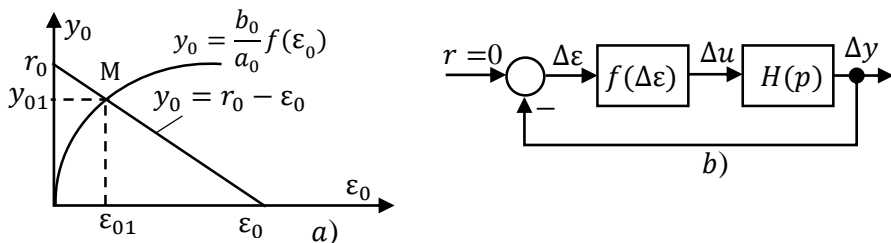


Fig. 1.18. Punctul de echilibru *a*) și structura sistemului nelinier în punctul de echilibru *b*)

Deoarece f.d.t. este definită de raportul polinoamelor:

$$H(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} \Big|_{p=0} = \frac{b_0}{a_0} = k \tag{1.25}$$

rezultă că în punctul M de funcționare al sistemului acțiunea derivatelor dispare (este nulă), deci, au loc egalitățile:

$$\begin{aligned}
 p^n y_0 &= p^{n-1} y_0 = \dots = p y_0 = 0, \\
 p^n u_0 &= p^{n-1} u_0 = \dots = p u_0 = 0
 \end{aligned}
 \tag{1.26}$$

și atunci se constată că cvadruplul $(r_0, u_0, \varepsilon_0, y_0)$ definește un punct de echilibru al sistemului nelinier ca un regim staționar.

Din expresiile (1.24)-(1.26) se obține:

$$\begin{aligned}
 y_0 &= r_0 - \varepsilon_0 = \frac{b_0}{a_0} f(\varepsilon_0), \\
 y_0 &= r_0 - \varepsilon_0.
 \end{aligned}
 \tag{1.27}$$

Pentru expresiile (1.27) în figura 1.18, *a* se dau reprezentările

grafice unde este dat punctul de echilibru cu coordonatele $M(\varepsilon_{01}, y_{01})$.

Dacă există mici abateri $\Delta\varepsilon, \Delta u, \Delta y$ ale mărimilor ε, u, y , de la regimul staționar, atunci, conform sistemului (1.24), se obține sistemul:

$$\begin{aligned} y_0 + \Delta y &= H(p)(u_0 + \Delta u), \\ u_0 + \Delta u &= f(\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon), \\ \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon &= r_0 - (y_0 + \Delta y). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Din sistemul de ecuații (1.28) se scade sistemul (1.24) și se obține sistemul în abateri:

$$\begin{aligned} \Delta y &= H(p)\Delta u, \\ \Delta u &= \Delta f(\Delta\varepsilon), \\ \Delta\varepsilon &= -\Delta y, \end{aligned} \quad (1.29)$$

unde s-a utilizat notația:

$$\Delta f(\Delta\varepsilon) = f(\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon) - f(\varepsilon_0) = f(\Delta\varepsilon).$$

Sistemului de ecuații (1.29) îi corespunde schema structurală a sistemului nelinier din figura 1.18, *b*, care reprezintă *schema-bloc structurală standard* asociată punctului de echilibru $M(r_0, u_0, \varepsilon_0, y_0)$ și pentru o valoare fixă a semnalului ε_0 rezultă că abaterile sunt nule $\Delta y = 0, \Delta u = 0, \Delta\varepsilon = 0$ și aceasta este unica stare de echilibru a sistemului automat nelinier.

Este posibil ca sistemul de ecuații (1.29) să admită și soluții periodice (oscilații întreținute) în vecinătatea punctului de echilibru cu coordonatele $\Delta y = 0, \Delta u = 0, \Delta\varepsilon = 0$.

Exemplul 1.1 [6]. Se consideră schema structurală a sistemului automat nelinier dată în figura 1.19, *a* cu elementele funcționale descrise de funcțiile de transfer:

$$H_1(s) = \frac{k_1}{T_1s+1}, H_2(s) = \frac{k_2}{T_2s+1}, H_3(s) = \frac{k_3}{T_3s+1}, H_4(s) = k_4s, H_5(s) = k_5,$$

iar $f(\varepsilon)$ reprezintă caracteristica statică a elementului nelinier.

Procedura de transformare a schemei structurale a sistemului nelinier se efectuează pe etape.

În prima etapă se deplasează f.d.t. $H_1(s)$ la stânga peste sumatorul S_1 și totodată se introduce și în canalul reacției sistemului. Ca rezultat, reacția sistemului

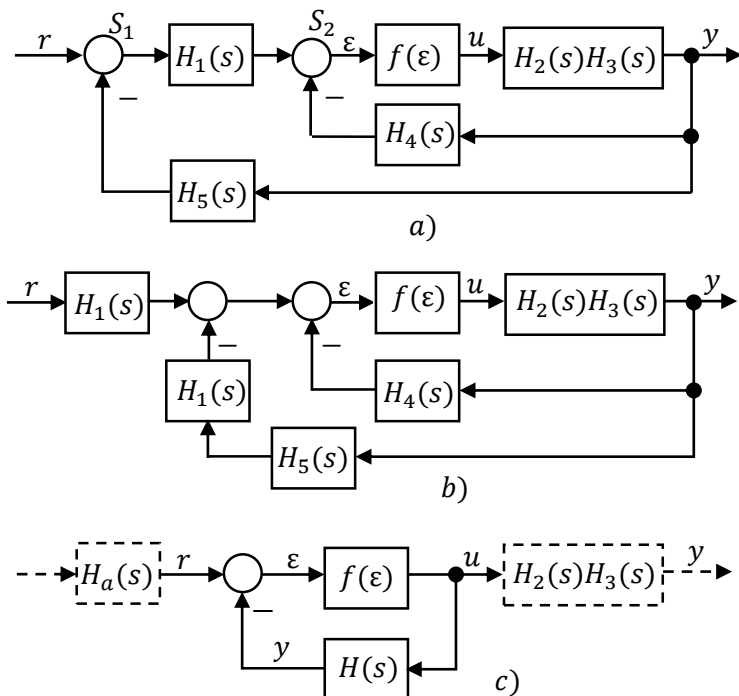


Fig. 1.19. Scheme structurale ale sistemului neliniar:
a) inițială, *b)* transformată, *c)* echivalentă

este o conexiune paralelă a produsului f.d.t. $H_1(s)H_5(s)$ cu f.d.t. $H_4(s)$ din reacția locală (fig.1.19, *b*) și funcția de transfer a reacției echivalente se reprezintă în forma:

$$H'(s) = H_1(s)H_5(s) + H_4(s) = \frac{k_1 k_5}{T_1 s + 1} + k_4 s = \frac{k_4 T_1 s^2 + k_4 s + k_1 k_5}{T_1 s + 1}$$

În etapa a doua se deplasează produsul $H_2(s)H_3(s)$ la dreapta peste nod și se introduce și în canalul de reacție al sistemului (fig. 1.19, *c*), se obține schema structurală tipică a sistemului automat neliniar.

În acest mod, partea liniară se descrie prin funcția de transfer echivalentă și după unele transformări se obține expresia ca raportul a două polinoame:

$$\begin{aligned} H(s) &= H'(s)H_2(s)H_3(s) = [H_1(s)H_5(s) + H_4(s)]H_2(s)H_3(s) = \\ &= \frac{k_2 k_3}{(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)} \left(\frac{k_1 k_5}{T_1 s + 1} + k_4 s \right) = \frac{k_2 k_3 k_4 T_1 s^2 + k_2 k_3 k_4 s + k_1 k_2 k_3 k_5}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)} = \\ &= \frac{c_2 s^2 + c_1 s + c_0}{d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0} = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{B(s)}{A(s)}, \end{aligned}$$

în care coeficienții $c_0, c_1, c_2, d_0, d_1, d_2, d_3$ sunt funcții de coeficienții de transfer și de constantele de timp inițiale ale elementelor sistemului:

$$c_0 = k_1 k_2 k_3 k_5, c_1 = k_2 k_3 k_4, c_2 = k_2 k_3 k_4 T_1,$$

$$d_0 = 1, d_1 = T_1 + T_2 + T_3, d_2 = T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3, d_3 = T_1 T_2 T_3.$$

În expresia lui $H(s)$ se impune condiția ca coeficientul $d_3 = 1$ și atunci toți coeficienții f.d.t. se împart la d_3 , obținând forma finală a f.d.t. exprimată ca raportul polinoamelor $B(s)$ și $A(s)$ cu coeficienții:

$$b_2 = c_2/d_3, b_1 = c_1/d_3, b_0 = c_0/d_3,$$

$$a_3 = 1, a_2 = d_2/d_3, a_1 = d_1/d_3, a_0 = d_0/d_3. \blacksquare$$

Chestionar și probleme

1. Numiți proprietățile de bază ale sistemelor neliniare.
2. Dați exemple de elemente funcționale neliniare.
3. Numiți tipurile de bază de caracteristici statice neliniare.
4. Dați exemple de caracteristici unilaterale statice neliniare.
5. Dați exemple de caracteristici neunivoce statice neliniare.
6. Ce reprezintă clasificarea caracteristicilor statice releice?
7. Prezentați o caracteristică statică de tip releu cu zonă de insensibilitate și histerezis și explicați modul de funcționare.
8. Ce reprezintă schema-bloc funcțională a sistemului neliniar? Dați exemplu.
9. Dați un exemplu de sistem automat neliniar și reprezentați schema-bloc funcțională.
10. Ce reprezintă schema-bloc funcțională standard a sistemului neliniar?
11. Explicați punctul de echilibru al sistemului automat neliniar.
12. Se consideră partea liniară a structurii sistemului din exemplul 1.1 cu elementele $H_1(s)$, $H_2(s)$ sunt elemente cu inerție de ordinul unu, $H_3(s)$ – element integrator, $H_4(s)$ – element ideal derivator, $H_5(s)$ – element ideal. Determinați funcția de transfer a părții liniare.
13. Pentru partea liniară a structurii sistemului neliniar din exemplul 1.1 cu elementele $H_1(s)$, $H_2(s)$ sunt elemente cu inerție de ordinul unu, $H_3(s)$ – element integrator, $H_4(s)$ – element real derivator, $H_5(s)$ – element ideal. Determinați funcția de transfer a părții liniare.
14. Pornind de la partea liniară a structurii sistemului din exemplul 1.1 cu elementele $H_1(s)$, $H_2(s)$ sunt elemente cu inerție de ordinul unu, $H_3(s)$ – element integrator, $H_4(s)$ – element ideal, $H_5(s)$ – element ideal, determinați funcția de transfer a părții liniare.

2 METODA PLANULUI FAZELOR

2.1 Analiza sistemului neliniar prin metoda planului fazelor

Metoda spațiului fazelor a fost introdusă de Poincare pentru studierea sistemelor mecanice cu unul sau mai multe grade de libertate și de Gibbs la studiul echilibrului chimic. În principiu, această metodă se asociază mișcării sistemului considerat un punct care se mișcă simultan cu sistemul într-un spațiu raportat la un sistem de coordonate, alcătuit din variabilele care determină poziția momentană a sistemului și derivatele acestor variabile, denumit *spațiul fazelor* [1, 4, 9, 12, 14, 17].

Această metodă este una precisă cu reprezentare grafică care se aplică cu precădere sistemelor automate de ordinul doi, invariante, descrise prin variabilele de fază. Există și extinderi la sisteme descrise prin variabilele de stare sau variabile de fază de ordin superior, dar din cauza dificultăților care apar în procedurile de calcul, sunt mai rar utilizate. Avantajul metodei constă în faptul că reprezintă o imagine foarte clară a tuturor posibilităților de mișcare care apar la un sistem dinamic [1, 4, 9, 12, 14, 17].

Deoarece starea unui sistem fizic, descris de o ecuație diferențială de ordinul n , este complet determinată de variabila de stare aleasă x și cele $(n - 1)$, derivate ale acesteia $\dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{n-1}$ și reprezintă variabilele de fază, care sunt coordonatele spațiului stărilor $x_1 = x, x_2 = \dot{x}, x_3 = \ddot{x}, \dots, x_n = x^{n-1}$. Pentru sistemele cu un singur grad de libertate, spațiul fazelor devine planul fazelor, cu coordonatele x_1 și x_2 – respectiv variabila de ieșire a sistemului $y = x_1$, caracterizând funcționarea sistemului automat în regim dinamic și $x_2 = dx_1(t)/dt = \dot{x}_1$ – prima ei derivată în raport cu timpul.

De exemplu, în cazul unui sistem de reglare automată cu parametrul de reglare a mărimii de ieșire y se aleg variabilele de fază: răspunsul sistemului $y = x_1$ și viteza de variație a răspunsului sistemului $dy(t)/dt = dx_1(t)/dt = x_2$. În planul fazelor (x_1, x_2) , oricărui punct $M(x_1, x_2)$ cu coordonatele x_1, x_2 îi corespunde o singură stare a sistemului reprezentat. Pentru timpul variabil t , punctul

$M(x_1, x_2)$ se deplasează pe o curbă numită *traiectorie de fază* (fig. 2.1) și această curbă poate fi gradată în valori de timp $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$, permițând evaluări calitative ale comportării sistemului automat reprezentat.

Caracterul mișcării punctului curent pe traiectorie nu depinde de momentul inițial ca proprietate de sistem dinamic.

Familia de traiectorii de fază determinată de variația condițiilor inițiale $x_1(0), x_2(0)$, se numește *portret de fază* al sistemului automat.

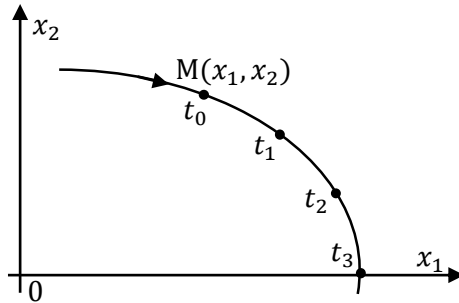


Fig. 2.1. Traiectorie de fază

Desigur, analiza dinamicii sistemului cu ajutorul planului fazelor este limitată la sisteme de ordinul unu sau doi, deoarece derivatele de ordin superior nu pot fi reprezentate grafic, iar un sistem automat de ordin superior nu poate fi complet definit numai prin variabila de stare și prima ei derivată. Având în vedere că, în general, sistemele automate neliniare din multiple aplicații industriale pot fi approximate prin sisteme de ordinul doi, metoda își găsește o anumită aplicabilitate și la studierea acestora.

Se consideră un sistem automat neliniar de ordinul doi descris prin ecuația:

$$\ddot{y} - f(\dot{y}, y)\dot{y} = 0, \quad (2.1)$$

unde y poate fi mărimea de ieșire a sistemului sau eroarea sistemului ε , iar u – mărimea de intrare ($u = 0$), funcția f se consideră funcție neliniară analitică (olomorfă).

Variabila y din (2.1) este mărimea de ieșire a sistemului. Se

introduc variabilele de stare:

$$y = x_1,$$

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y} = \frac{dx_1}{dt} = \dot{x}_1 = x_2, \quad (2.2)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y} = \frac{d^2x_1}{dt^2} = \dot{x}_2.$$

Se consideră că ecuația (2.1) admite o singură soluție pentru fiecare pereche de condiții inițiale $x_1(0)$, $x_2(0)$, care se reprezintă printr-o traiectorie de fază unică în planul fazelor (x_1, x_2) .

Expresia (2.1) cu variabile de stare (2.2) are forma:

$$\frac{dx_1}{dt} = \dot{x}_1 = x_2, \quad (2.3)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \dot{x}_2 = f(x_1, x_2)x_2.$$

Împărțind ecuația a doua la prima din (2.3), se obține ecuația diferențială în forma:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f(x_1, x_2)x_2}{x_2} = f(x_1, x_2), \quad (2.4)$$

din care s-a eliminat timpul și care descrie traiectoria de fază a sistemului automat.

Reprezentarea geometrică a soluției ecuației (2.4) se numește *curbă integrală* sau *traiectorie de fază*. Deoarece derivatele \dot{x}_1 și \dot{x}_2 sunt determinate de ecuațiile (2.3), orice punct nesingular în planul fazelor reprezentat prin (x_1, x_2) pe curba integrală se mișcă cu o viteză definită de-a lungul curbei integrale și acest punct, care prezintă starea sistemului, descrie o traiectorie de mișcare sau o traiectorie de fază. La valoarea $x_2 = 0$ și $f(x_1, x_2) = 0$ nu există mișcare, deoarece derivatele \dot{x}_1 și \dot{x}_2 devin egale cu zero în aceste puncte și se numesc *puncte singulare*.

Soluția ecuației de stare la $x_1 = 0$ și $x_2 = 0$, denumită *stare de echilibru*, reprezintă soluția trivială a ecuației (2.4). În aceste ecuații, variabilele x_1 și x_2 sunt selectate astfel, încât să exprime deviația de la o oarecare stare de echilibru, care pentru $x_1 = 0$ și $x_2 = 0$ este denumită *starea de echilibru la zero*. Originea coordonatelor în planul fazelor (x_1, x_2) este întotdeauna un punct singular. Pe axa absciselor în jurul punctului de origine poate să existe *segmentul de repaus*.

Existența mai multor puncte singulare pe partea interioară a curbei integrale determină o divizare (bifurcație) a acesteia în mai multe traiectorii de fază.

Din expresiile (2.3)–(2.4) se obțin un șir de particularități ale planului fazelor cum ar fi:

1. Dacă funcția $f(x_1, x_2)x_2$ este analitică, atunci soluția x_2 este unică în raport cu timpul t în planul (x_1, x_2) și este dictată de condițiile inițiale $x_1(0)$, $x_2(0)$ și de mărimea de intrare $u(t)$. Unicitatea soluțiilor (cu excepția punctelor singulare) în raport cu timpul t indică o traiectorie de fază pentru condițiile inițiale date. Printr-un punct al planului fazelor trece o singură traiectorie de fază. Dacă funcția f nu este analitică, atunci printr-un punct al planului trec mai multe traiectorii de fază. Asemenea puncte se numesc puncte *singulare* sau *critice* ce caracterizează comportarea unui sistem automat liniar sau neliniar.

2. În cazul când $dx_1/dt = \dot{x}_1 = x_2 > 0$, mărimea lui x_1 crește și se constată că în partea superioară a planului fazelor pentru timpul t în creștere punctul caracteristic se mișcă pe traiectoria de fază de la stânga la dreapta, iar în partea inferioară a planului mișcarea se efectuează de la dreapta la stânga, deoarece $dx_1/dt = \dot{x}_1 = x_2 < 0$ și mărimea lui x_1 se micșorează.

3. În punctele $x_2 = 0$ și $f(x_1, x_2) \neq 0$, dar nu în punctele singulare ale axei absciselor, traiectoriile de fază intersectează axa absciselor sub un unghi drept de sus în jos în semiplanul din dreapta și de jos în sus în semiplanul din stânga.

4. În planul fazelor există puncte de echilibru când $x_2 = 0$, $f(x_1, x_2) = 0$ sau puncte singulare pe axa absciselor care sunt stabile sau instabile.

Dacă traiectoriile de fază converg către punctele de echilibru, atunci aceste puncte sunt stabile, și invers, dacă toate traiectoriile de fază pornesc din punctele de echilibru, atunci aceste puncte sunt instabile.

După traiectoriile de fază se poate caracteriza cum va evolua procesul tranzitoriu în sistem. Pentru traiectoria de fază $x_2 = f(x_1)$ fără calcule se poate construi calitativ curba procesului tranzitoriu $x_1(t)$ (fig. 2.2, a), și invers, după curba procesului tranzitoriu $x_1(t)$ se poate de construit calitativ portretul de fază curba $x_2 = f(x_1)$ (fig. 2.2, b). Pe curbe sunt indicate punctele caracteristice A, B, C, D, E.

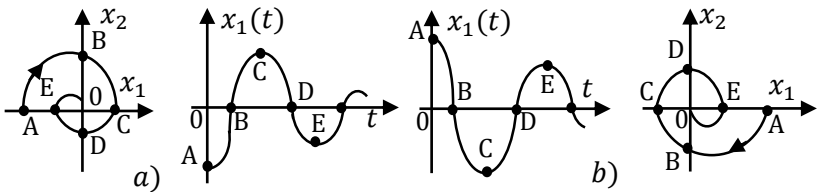


Fig. 2.2. Traiectoria de fază și procesul tranzitoriu al unui sistem automat

2.2 Puncte singulare pentru sistemul liniar în planul fazelor

Se consideră un sistem automat liniar descris de sistemul de ecuații diferențiale:

$$\dot{x} = Ax, \quad (2.5)$$

pentru care originea este punctul de echilibru unic dacă $\det A \neq 0$ și rezultă că originea (zero) nu este valoarea proprie a matricei A .

De exemplu, sistemul (2.5) este un sistem de ordinul doi cu parametrii a_1, a_2 cunoscuți:

$$\ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_2 x(t) = 0 \quad (2.6)$$

și ecuația operațională a acesteia este:

$$p^2 + a_1 p + a_2 = 0, \quad (2.7)$$

care are rădăcinile de forma:

$$p_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}.$$

Se consideră rădăcinile (valorile proprii) ale sistemului (2.7) p_1 , p_2 și $p_1 \neq p_2$, $p_1 \neq 0$, $p_2 \neq 0$, obținând soluția ecuației diferențiale (2.6-2.7) în forma:

$$x(t) = c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t}, \quad (2.8)$$

unde c_1 și c_2 sunt constantele condițiilor inițiale ale sistemului.

În acest caz particular există mai multe situații posibile de trasare a traiectoriei de fază, care depind de proprietățile interne a_1 , a_2 ale sistemului exprimate prin rădăcinile ecuației p_1 , p_2 .

În planul fazelor, traiectoriile de fază se prezintă ca o mulțime (familie) de curbe la variația condițiilor inițiale ale variabilelor de stare x_{10} , x_{20} .

1. *Punct de echilibru.* Valorile proprii (rădăcinile) ale sistemului sunt reale diferite și au același semn, atunci traiectoriile de fază din jurul punctelor de echilibru sunt radiale și acestea se numesc *noduri*, care reprezintă echilibrul stabil sau instabil.

1. Dacă rădăcinile sunt reale negative $p_1 = -\alpha_1$ și $p_2 = -\alpha_2$ (element cu inerție de ordinul doi stabil), atunci traiectoriile de fază formează *nodul asimptotic stabil* (procese tranzitorii aperiodice stabile) și planul rădăcinilor, traiectoriile de fază și procesele tranzitorii sunt date în figura 2.3, *a*, *b*, *c* cu traiectoriile de fază 1-5 și procesele tranzitorii 1-5 cu punctele caracteristice B_1, B_3, B_4, B_6 și C_3, C_4 .

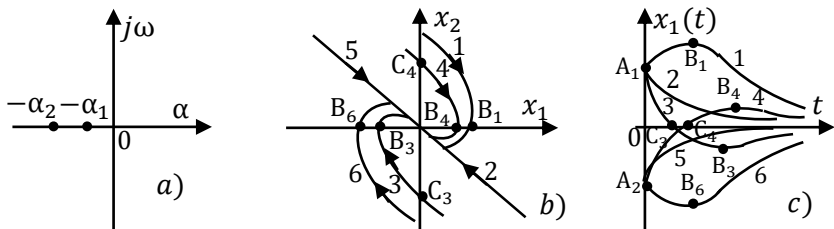


Fig. 2.3. Planul rădăcinilor, traiectoriile de fază și răspunsul tranzitoriu în vecinătatea unui nod asimptotic stabil

1.2. Dacă rădăcinile sunt reale pozitive $p_1 = \alpha_1$ și $p_2 = \alpha_2$

(element cu inerție de ordinul doi instabil), atunci traiectoriile de fază formează *nodul asimptotic instabil* (procese tranzitorii aperiodice instabile) și planul rădăcinilor, traiectoriile de fază și procesele tranzitorii sunt date în figura 2.4, a, b, c.

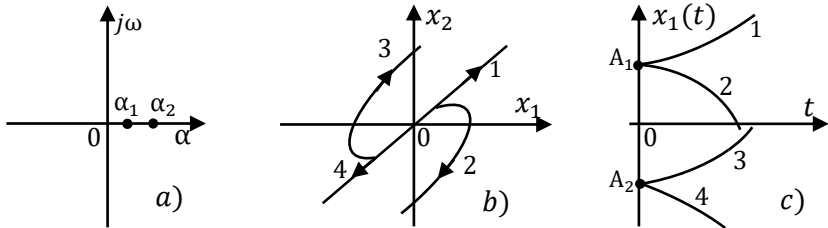


Fig. 2.4. Planul rădăcinilor, traiectoriile de fază și răspunsul tranzitoriu în vecinătatea unui nod asimptotic instabil

2. Dacă rădăcinile (valorile proprii) sistemului sunt complex conjugate, atunci traiectoriile de fază din jurul punctelor de echilibru au formă de spirale și acestea se numesc *focare* (fig. 2.5).

2.1. Dacă parametrul $a_1 < 0$ și rădăcinile ecuației sunt complex conjugate $p_1 = -\alpha + j\omega$, $p_2 = -\alpha - j\omega$ (element și proces tranzitoriu oscilant amortizat, $0 < \xi < 1$), atunci traiectoriile de fază formează *focarul stabil* și traiectoriile de fază și procesele tranzitorii se reprezintă în figura 2.5, a, b.

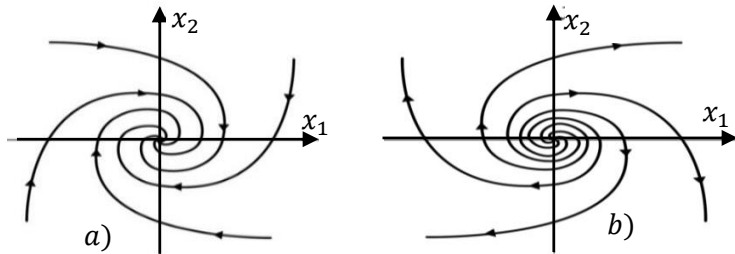


Fig. 2.5. Vecinătatea unui focar stabil a) și instabil b)

2.2. Dacă $a_1 > 0$ și rădăcinile sunt complex conjugate $p_1 = \alpha +$

$+j\omega$, $p_2 = \alpha - j\omega$ (element și proces tranzitoriu oscilant instabil, când $-1 < \xi < 0$), atunci traiectoriile de fază formează *focarul instabil* și traiectoriile de fază și procesele tranzitorii se dau în figura 2.5, *b*.

3. Dacă rădăcinile sunt reale și au semne contrarii $p_1 = \pm\alpha_1$, $p_2 = \mp\alpha_2$ (element și proces tranzitoriu instabil, $\xi = 0$), traiectoriile de fază (proprii sistemelor liniare instabile) sunt curbe deschise de tip hiperbole și asimptote cu un singur punct de echilibru numit *șa* și traiectoriile de fază 1, 2 sunt date în figura 2.6, *a*. Traiectoriile de fază 2 reprezintă separatoare.

Separatoarele divizează (separă) portretul de fază în domenii care pot fi stabile sau instabile.

4. Dacă $\alpha_1 = 0$, iar rădăcinile sunt imaginare $p_1 = j\omega$, $p_2 = -j\omega$, atunci traiectoriile de fază au forma unor elipse, care formează punctul de echilibru *centru* și traiectoriile de fază în formă de elipse și sunt reprezentate în figura 2.6, *b*.

În cazul sistemului automat liniar conservator, traiectoriile de fază au forma unor elipse (fig. 2.6, *b*), ce corespund oscilațiilor neamortizate. Aceste oscilații neamortizate nu sunt autooscilații, fiindcă amplitudinea lor este funcție de condițiile inițiale și nu sunt asimptotic stabile. Originea, în cazul dat, este un punct singular care nu aparține nici uneia dintre traiectoriile de fază, numit *centru (turbion)*, asociat cu echilibrul *neutru*, care este stabil după Liapunov.

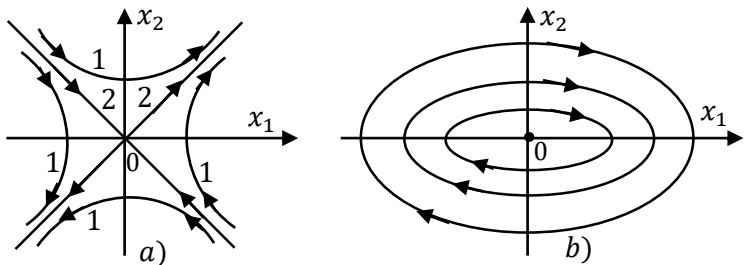


Fig. 2.6. Vecinătatea unui punct de echilibru *șa* *a*) și ciclul-limită centru (elipsă) *b*)

Există sisteme automate neliniare care pot avea diferit de centru puncte singulare prin care trec două traiectorii de fază separate ce se numesc separatoare.

Pentru sistemul automat neliniar este necesar a cunoaște nu numai punctele singulare, dar și proprietățile lor. După traiectoriile de fază ale sistemului se stabilesc punctele singulare și traiectoriile de fază și se determină stabilitatea sistemului neliniar în mare și în mic.

La reprezentarea sistemului în planul fazelor pot să apară una sau mai multe traiectorii de fază închise, numite *cicluri-limită*, de-a lungul cărora mișcarea are caracter periodic (fig. 2.7, a, b).

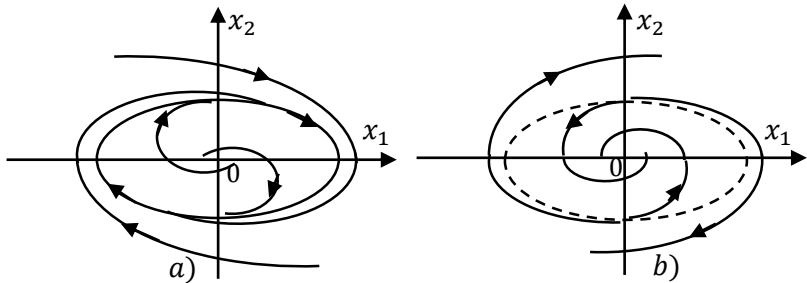


Fig. 2.7. Vecinătatea unui ciclu-limită stabil a) și instabil b)

În cazul sistemelor neliniare, datorită particularităților acestora în comparație cu cele liniare, la reprezentarea funcționării lor în planul fazelor apar o serie de curbe speciale.

De exemplu, regimurilor cu oscilații întreținute specifice sistemelor automate neliniare le corespund în planul fazelor tot elipse, reprezentând ciclurile-limită stabile sau instabile. Pentru un sistem automat neliniar în regim cu oscilații întreținute stabile, ciclul-limită corespunzător este stabil (fig. 2.7, a), iar pentru un răspuns ce caracterizează un sistem neliniar stabil în mic și instabil în mare, pentru care oscilațiile întreținute sunt instabile, ciclul-limită este instabil (fig. 2.7, b). În funcție de comportarea sistemului neliniar, în planul fazelor pot exista și curbe deschise, de genul celor care au fost prezentate, însă asociate cu ciclurile-limită.

Tot în cazul sistemelor neliniare se mai întâlnesc și alte curbe speciale în planul fazelor. De exemplu, pentru abateri mici de la regimul staționar în sistem pot apărea oscilații întreținute, care depind de condițiile inițiale, iar pentru abateri mari regimul sistemului este aperiodic instabil. În acest caz, în planul fazelor se obțin traiectorii de

fază sub formă de elipse și hiperbole, delimitate de prezența unor puncte singulare tip ζa .

2.3 Sisteme neliniare cu neliniarități de tip releu

Analiza traiectoriilor de fază a sistemului neliniar cu releu permite a evidenția influența diverșilor factori-proprietăți (zona de insensibilitate, histerezis etc.) asupra stabilității și convergenței proceselor [1, 4, 9, 12, 17].

Considerăm o structură de sistem neliniar reprezentată în figura 2.8, *a* cu partea liniară formată din obiectul de reglare cu inerție de ordinul unu cu ecuația în operatori:

$$(Tp + 1)y = -ku \quad (2.9)$$

și ecuația care descrie regulatorul (partea neliniară):

$$pu = f(y), \quad (2.10)$$

unde $u = f(\varepsilon) = f(y)$ este caracteristica statică neliniară (fig. 2.8, *b*).

În sistem automat referința $r = 0$, iar eroarea $\varepsilon = -y = -x_1$, $u = f(\varepsilon) = f(y) = f(x_1)$.

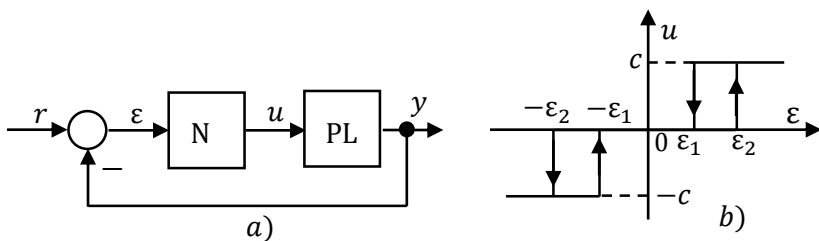


Fig. 2.8. Structura sistemului automat cu releu

Descrierea sistemului se obține din ecuațiile (2.9)-(2.10):

$$(Tp + 1)y = -\frac{k}{p}f(y),$$

$$Tp^2y + py = -kf(y),$$

$$T \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = -kf(y). \quad (2.11)$$

Introducând variabilele de stare în expresia (2.11), se obține:

$$\begin{aligned} y &= x_1, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{dx_2}{dt} \end{aligned}$$

și, după unele transformări în ecuația diferențială (2.11), se obține sistemul ecuațiilor de stare:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{x_2}{T} - \frac{k}{T} f(x_1). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Din sistemul (2.12) se obține ecuația traiectoriei de fază:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{1}{T} - \frac{k}{T} \frac{f(x_1)}{x_2}. \quad (2.13)$$

Funcția neliniară $u = f(y) = f(x_1)$ se descrie pentru $x_2 > 0$:

$$f(x_1) = \begin{cases} -c & \text{pentru } x_1 < -\varepsilon_1, \\ 0 & \text{pentru } -\varepsilon_1 < x_1 < \varepsilon_2, \\ +c & \text{pentru } x_1 > \varepsilon_2 \end{cases} \quad (2.14)$$

și pentru cazul $x_2 < 0$:

$$f(x_1) = \begin{cases} +c & \text{pentru } x_1 > \varepsilon_1, \\ 0 & \text{pentru } -\varepsilon_2 < x_1 < \varepsilon_1, \\ -c & \text{pentru } x_1 < -\varepsilon_2. \end{cases} \quad (2.15)$$

Din analiza relațiilor (2.14) și (2.15) rezultă că în planul fazelor funcția $u = f(x_1)$ are trei valori și planul se separă în trei domenii:

În domeniul I funcția are valoarea $f(x_1) = -c$.

În domeniul II funcția are valoarea $f(x_1) = 0$.

În domeniul III funcția are valoarea $f(x_1) = c$.

În planul fazelor aceste domenii se separă prin linii de comutare. Planul fazelor este compus din trei *foi* (coli). Pe fiecare coală traiectoriile de fază au forma lor și la liniile de comutare aceste coli se unesc – traiectoriile de fază se unesc de pe o coală și de pe alta. Astfel, apar puncte singulare unde traiectoriile se unesc.

Sistemul (2.13) pentru caracteristica statică (fig. 2.9, a) se reprezintă în planul fazelor prin traiectoriile de fază pentru domeniile I, II, III (fig. 2.9, b).

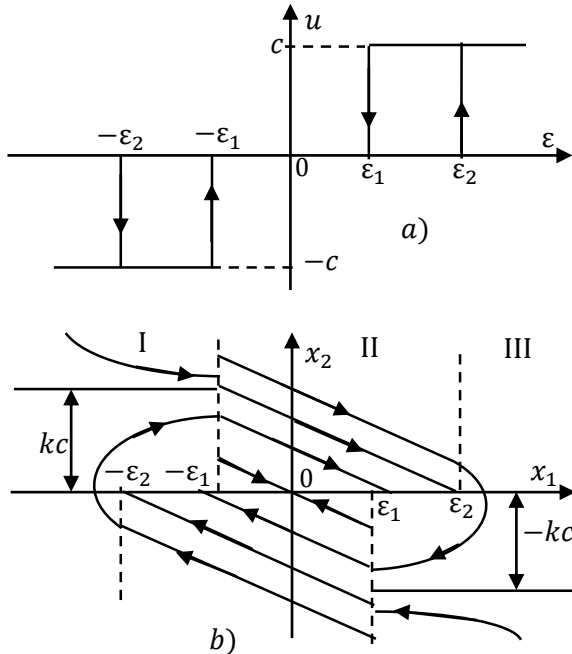


Fig. 2.9. Portretul de fază al sistemului cu releu cu histerzis

Pentru domeniul I, funcția $f(x_1) = -c$ traiectoria de fază este:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{1}{T} + \frac{k c}{T x_2} = -\frac{x_2 - kc}{T x_2}. \quad (2.16)$$

Ecuția (2.16) ia forma:

$$T x_2 \frac{dx_2}{dx_1} = -(x_2 - kc),$$

$$dx_1 = -T \frac{x_2 dx_2}{x_2 - kc}.$$

Pentru integrare, ultima expresie ia forma:

$$x_1 = -T \int \frac{x_2 dx_2}{x_2 - kc} - T \int dx_2 + C_1.$$

După integrare se obține soluția traiectoriei de fază care se descrie prin expresia:

$$x_1 = -kcT \ln|x_2 - kc| - Tx_2 + C_1. \quad (2.17)$$

Traietoriile de fază au forma unor elipse cu ramurile orientate spre stânga și au asimptota $x_2 = kc$ la care tind când $x_1 \rightarrow \infty$.

Pentru domeniul II, funcția $f(x_1) = 0$ traiectoria de fază este:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{1}{T}. \quad (2.18)$$

Soluția traiectoriei de fază se dă prin expresia:

$$x_2 = -\frac{x_1}{T} + C_2. \quad (2.19)$$

Traietoriile de fază reprezintă linii drepte care formează un unghi negativ cu axa absciselor.

Pentru domeniul III, funcția $f(x_1) = +c$ traiectoria de fază este:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{1}{T} - \frac{k}{T} \frac{c}{x_2}. \quad (2.20)$$

Soluția traiectoriei de fază se descrie prin expresia:

$$x_1 = kc T \ln|x_2 + kc| - Tx_2 + C_3. \quad (2.21)$$

Traietoriile de fază au forma unor elipse cu ramurile orientate spre dreapta și au asimptota $x_2 = -kc$ la care tind când x_1 se micșorează.

Pe axa absciselor x_1 se evidențiază *segmental de repaus* $[-\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_1]$, iar $x_2 = 0$.

Constantele C_1, C_2, C_3 sunt constantele de integrare, care se determină de condițiile inițiale ale variabilelor de stare. Pentru a determina familia de traiectorii de fază este necesar a cunoaște condițiile inițiale ale

variabilelor de stare $x_1(t_0) = x_{10}$, și $x_2(t_0) = x_{20}$.

2.4 Portretul de fază în cazuri particulare de sisteme neliniare

Se analizează sistemul neliniar pentru două tipuri de caracteristici ale releului cu zonă de insensibilitate și cu histerezis. În primul caz, caracteristica neliniară de tipul releeu cu zonă de insensibilitate și saturație se dă în figura 2.10, *a* unde segmentul $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_0$ și liniile de comutație reprezintă două drepte paralele axei ordonate și care intersectează axa absciselor la distanța $\pm\varepsilon_0$.

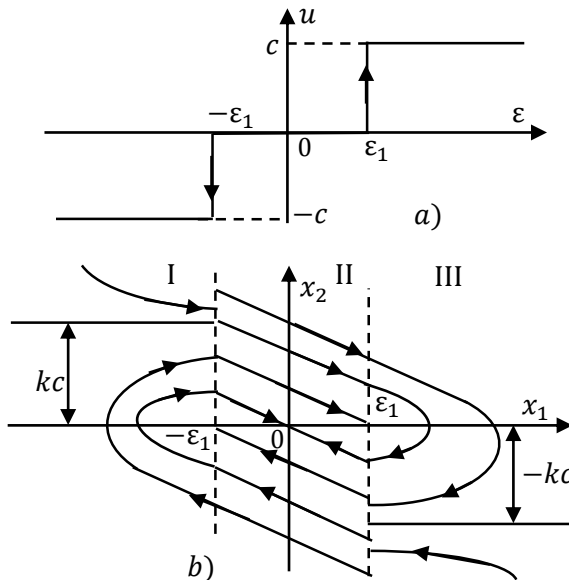


Fig. 2.10. Portretul de fază al sistemului cu releeu cu zonă de insensibilitate

Descrierea traiectoriilor de fază se dau de relațiile (2.17), (2.19), (2.21). Planul fazelor se reprezintă în figura 2.10, *b*. Pe axa absciselor este reprezentat segmentul de repaus $[-\varepsilon_0 \cdots +\varepsilon_0]$.

În cazul al doilea, caracteristica neliniară este de tipul histerezis din figura 2.11, *a* în care nu este zona de insensibilitate și în planul

fazelor domeniul II nu există și se descrie prin următoarele relații.

Pentru cazul când $x_2 > 0$ funcția are valorile:

$$f(x_1) = \begin{cases} -c & \text{pentru } x_1 < \varepsilon_0, \\ +c & \text{pentru } x_1 > \varepsilon_0. \end{cases} \quad (2.22)$$

Pentru cazul când $x_2 < 0$ funcția are valorile:

$$f(x_1) = \begin{cases} +c & \text{pentru } x_1 > -\varepsilon_0, \\ -c & \text{pentru } x_1 < -\varepsilon_0. \end{cases} \quad (2.23)$$

Relațiile (2.22)-(2.23) determină liniile de comutare ale traiectoriilor de fază.

Portretul de fază se dă în figura 2.11, b). Trajectoriile de fază din stânga se descriu prin ecuația (2.17), iar din dreapta prin ecuația (2.21) și reprezintă curbe de tip elipse. Pe axa absciselor este reprezentat segmentul de repaus $[-\varepsilon_0 \cdots +\varepsilon_0]$.

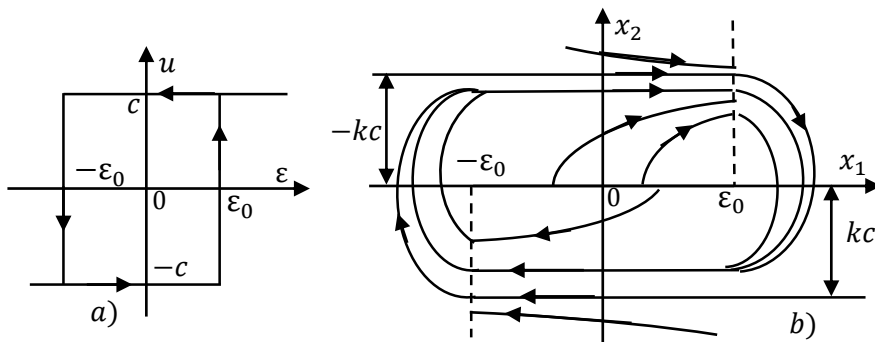


Fig. 2.11. Portretul de fază al sistemului cu releu cu histerezis activ

În sistemul automat nelinier se stabilizează oscilații neamortizate și traiectoria de fază este închisă, reprezentând ciclul-limită. Trajectoriile de fază din afara ciclului-limită și din interiorul lui sunt convergente la ciclul-limită.

2.5 Cicluri-limită în planul fazelor

Cicluri-limită reprezintă traiectorii (curbe) închise în planul fazelor, către care tind asimptotic dintr-o vecinătate determinată toate

trajectoriile atât din interior, cât și din exterior dacă ciclurile-limită sunt *stabile* (fig. 2.12, a) și, invers, cicluri-limită *instabile* (fig. 2.12, b) de la care diverg trajectoriile, atât spre interior cât și spre exterior, care sunt trajectoriile perturbate de la aceste cicluri-limită.

Sistemul automat la care punctul de echilibru $x_1 = x_2 = 0$ este instabil, iar ciclul-limită este unic și este stabil, se numește *instabil în*

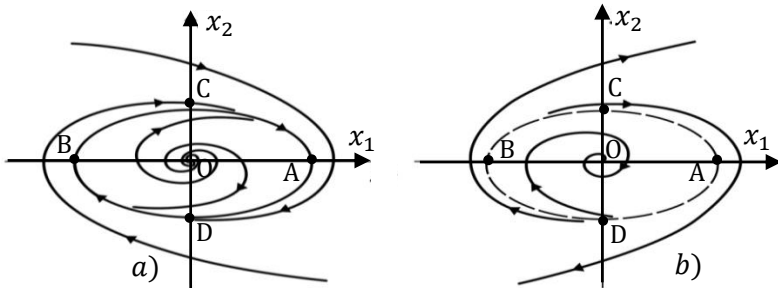


Fig. 2.12. Vecinătatea unui ciclu-limită stabil a) și instabil b)

mic și stabil în mare.

Dacă traiectoria se îndepărtează de ciclul-limită spre exterior, atunci sistemul este *instabil în mare*. Aceste modele simple din plan denotă că și ciclurile-limită au rolul de separatoare.

Existența sau absența ciclurilor-limită în tabloul calitativ de mișcare a sistemului depinde de tipul neliniarităților și de parametrii părții liniare. Pentru neliniaritățile date și cu modificarea parametrilor părții liniare punctele de echilibru instabile pot deveni stabile, și invers.

Valorile parametrilor pentru care are loc o asemenea inversare a stării sistemului se numesc *valori-limită* sau *bifurcație* și formează curbe sau suprafețe de bifurcație în spațiul acestor parametri [1, 4, 9, 17].

Metoda planului fazelor permite o analiză calitativă a evoluției sistemului dinamic liniar sau neliniar cu evidențierea unor puncte de echilibru stabile sau instabile, cicluri-limită stabile sau instabile.

Dacă în sistem apar excitații, atunci trajectoriile de fază rezultate tind către ciclurile-limită stabile, și invers, trajectoriile de fază rezultate din vecinătatea ciclurilor-limită tind spre origine sau se îndepărtează de ciclurile-limită.

Ciclul-limită are parametrii amplitudinea A care se determină de segmentele OA sau OB de pe axa absciselor și parametrul pulsația ω care se determină prin raportul segmentelor OC/OA sau OD/OB .

Traietoriile de fază gradate în timp permit determinarea unor indici cantitativi pentru evaluarea calității răspunsului sistemului neliniar.

2.6 Construirea traiectoriilor de fază ale sistemului automat

Se cunosc mai multe metode care permit să se determine exact sau aproximative traiectoriile de mișcare în planul variabilelor de stare. Aceste metode pot fi extinse și la sistemele de ordin superior pentru construirea traiectoriilor de fază în spațiul n -dimensional.

Cel mai larg utilizate metode sunt [1, 4, 9, 14, 16-18, 20]:

1. Metoda Lienard.
2. Metoda triunghiurilor.
3. Metoda cercurilor.
4. Metoda izoclinelor.

În continuare este descrisă metoda izoclinelor care se bazează pe trasarea unor drepte sau curbe, numite izocline, ce formează o rețea plană formată din punctele de pantă sau înclinare dată, constantă, a traiectoriilor de fază. Prin unirea punctelor cu aceeași pantă se obțin curbele izocline. Din intersecția acestor curbe cu linii continue, conform pantei fiecăreia în punctele de intersecție, se obțin traiectoriile de mișcare.

Se consideră ecuația de mișcare dată de variabilele de stare:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2)\end{aligned}\tag{2.24}$$

sau prin traiectoria de fază:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} = F(x_1, x_2) = k = \text{const},\tag{2.25}$$

unde constanta k exprimă valoarea tangentei unghiului în raport cu axa absciselor și aceste valori variază în intervalul $(-\infty \dots + \infty)$.

Din expresia (2.25) rezultă:

$$f_2(x_1, x_2) = k f_1(x_1, x_2). \quad (2.26)$$

Construcția izoclinelor cu panta dată se simplifică dacă se obțin ecuații explicite în raport cu variabilele de stare x_1 sau x_2 [1,4,9,17,18]:

$$x_1 = g_1(x_2, k) \text{ sau } x_2 = g_2(x_1, k). \quad (2.27)$$

Deoarece scările m_1 și m_2 pe axele x_1 și x_2 pot fi diferite, este necesar ca în expresia lui k exprimată prin tangenta unghiului de înclinare α a fi introdus raportul scărilor în forma:

$$k = \frac{m_2}{m_1} \operatorname{tg} \alpha \text{ și } \alpha = \operatorname{arctg} \frac{m_2}{m_1} k.$$

Modificând valoarea lui $k = 0$, $k = \pm 1, \dots$, $k = \pm \infty$ în intervalul $(-\infty \dots + \infty)$, din relația (2.25) se obține o rețea de izocline trasate în planul fazelor, care permite determinarea traiectoriilor de fază pentru oricare condiții inițiale date x_{10}, x_{20} .

Izoclinele tangențelor orizontale și celor verticale la valorile lui $\alpha = 0$ și $\alpha = \pi/2$ au respectiv valoarea lui $k_1 = 0$ și $k_2 = \pm \infty$. Însă, în general, această regulă nu este valabilă.

Se consideră construită rețeaua de izocline pentru valorile lui $k = 0$, $k = \pm 1, \dots$, $k = \pm \infty$ (fig. 2.13) și atunci traiectoriile de fază pentru diverse valori ale condițiilor inițiale x_{10}, x_{20} se construiesc grafic în modul dat în figura 2.13 (sunt numerotate izoclinele 1, 2, 3, ...).

Se consideră punctul $M_0(-x_{10}, x_{20})$ pe izoclina 2. Din acest punct se trasează două drepte: prima dreaptă M_0L_1 se duce paralelă la panta izoclinei 2, iar a doua dreaptă M_0L_2 – paralelă la panta izoclinei 3. Pentru segmentul obținut pe izoclina 2 se găsește centrul acestuia în punctul M_1 . Din acest punct M_1 se repetă procedura ca pentru punctul M_0 și prin iterații se obțin punctele M_2, M_3, \dots .

Punctele obținute M_0, M_1, M_2, \dots se unesc prin segmente de linii și, în rezultat, se obține o linie frântă care reprezintă traiectoria de fază. Se modifică condițiile inițiale, se repetă procedura de construire a traiectoriilor de fază descrisă mai sus și, astfel, se obține un ansamblu de traiectorii de fază pentru sistemul automat analizat. După modelul de fază construit se stabilesc particularitățile sistemului: sistemul este

stabil sau instabil, există autooscilații sau nu și se determină parametrii autooscilațiilor.

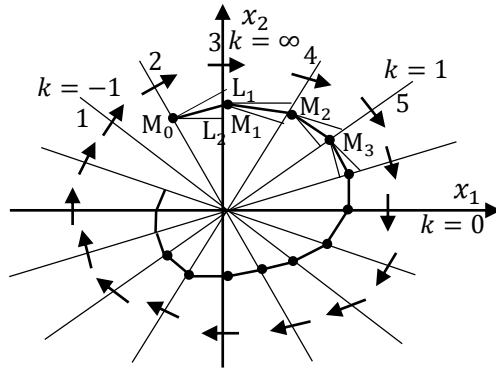


Fig. 2.13. Construirea traiectoriilor de fază ale sistemului automat liniar

Exemplul 2.1. Se consideră structura sistemului automat liniar, care se descrie prin ecuația diferențială de ordinul doi de forma:

$$d_2 \ddot{y}(t) + d_1 \dot{y}(t) + d_0 y(t) = c_1 \dot{u} + c_0 u.$$

Se cere să se determine ecuațiile de stare și traiectoria de fază ale sistemului automat.

Soluționare. În cazul când coeficientul $d_2 \neq 1$, atunci toți coeficienții ecuației diferențiale se împart la d_2 și se obține ecuația diferențială în forma:

$$\ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_1 \dot{u} + b_0 u,$$

în care $a_1 = d_1/d_2$, $a_0 = d_0/d_2$, $b_1 = c_1/d_2$, $b_0 = c_0/d_2$.

Pentru a obține ecuațiile de stare ale sistemului automat din ecuația diferențială, se parcurg etapele în modul următor:

1. Prima variabilă de stare este mărimea de ieșire:

$$x_1 = y.$$

2. A doua variabilă de stare se alege în forma:

$$x_2 = \dot{x}_1 + \alpha u,$$

unde coeficientul α este necunoscut și are rolul de a neutraliza acțiunea mărimii derivatei \dot{u} din ecuația diferențială, care se va calcula în continuare.

3. Prima ecuație de stare a sistemului se determină din expresia din p. 2 în forma:

$$\dot{x}_1 = x_2 - \alpha u.$$

4. Se calculează derivata a doua a ultimei expresii:

$$\ddot{y} = \dot{x}_1 = \dot{x}_2 - \alpha \dot{u}.$$

5. În ecuația diferențială derivatele mărimii de ieșire se substituie cu variabilele de stare și ia forma:

$$(\dot{x}_2 - \alpha \dot{u}) + a_1(x_2 - \alpha u) + a_0 x_1 = b_1 \dot{u} + b_0 u.$$

6. Din ultima ecuație, după unele transformări, se determină a doua ecuație de stare în forma:

$$\dot{x}_2 = -a_0 x_1 - a_1 x_2 + \dot{u}(b_1 + \alpha) + u(b_0 + \alpha a_1).$$

7. În ecuația variabilei de stare se impune condiția ca acțiunea componentei derivatei \dot{u} să se anuleze și se obține:

$$b_1 + \alpha = 0 \text{ sau } \alpha = -b_1.$$

8. Sistemul ecuațiilor de stare se reprezintă în forma:

$$\dot{x}_1 = x_2 + b_1 u,$$

$$\dot{x}_2 = -a_0 x_1 - a_1 x_2 + (b_0 - b_1 a_1) u,$$

$$y = x_1,$$

unde y este mărimea de ieșire.

9. Se dă sistemul de ecuații de stare în formă vector-matriceală:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 - b_1 a_1 \end{bmatrix} u,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

sau în forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u,$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x},$$

unde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 - b_1 a_1 \end{bmatrix}, \mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

10. Se obține traiectoria de fază, prin divizarea ecuației a doua la prima din sistemul ecuațiilor de stare, în forma:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-a_0x_1 - a_1x_2 + (b_0 - b_1a_1)u}{x_2 + b_1u}$$

Exemplul 2.2. În cazul când partea liniară a sistemului conține un element integrator și elemente cu inerție, atunci ecuația diferențială a sistemului neliniar are forma:

$$\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) = b_1\dot{u}(t) + b_0u(t).$$

Efectuând calculele conform procedurii expuse în exemplul 2.1, din ecuația diferențială se obține sistemul ecuațiilor de stare ale sistemului în forma:

$$\dot{x}_1 = x_2 + b_1u,$$

$$\dot{x}_2 = -a_1x_2 + (b_0 - b_1a_1)u.$$

Pentru sistemul de ecuații de stare forma vector-matriceală este:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{vmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 \\ b_0 - b_1a_1 \end{vmatrix} u,$$

$$y = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$$

sau în forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{bu},$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x},$$

unde

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a_1 \end{vmatrix}, \mathbf{b} = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_0 - b_1a_1 \end{vmatrix}, \mathbf{c}^T = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Prin divizarea ecuației a doua la prima din sistemul ecuațiilor de stare se determină ecuația traiectoriei de fază în forma:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-a_1x_2 + (b_0 - b_1a_1)u}{x_2 + b_1u}. \blacksquare$$

2.7 Sistemul automat neliniar cu regim alunecător

Se consideră structura unui sistem automat neliniar (fig. 2.14) cu reacție unitară, alcătuită din elementul neliniar N de tip releu ideal cu caracteristica statică (fig. 2.16, a) și cu partea liniară alcătuită din două integratoare înseriate cu funcția de transfer $H(s) = k/s^2$, $r(t) = 1(t)$ este semnalul de intrare treaptă unitară, $y(t)$ – semnalul de ieșire,

eroarea $\varepsilon(t) = r(t) - y(t)$, $u(t)$ – mărimea de comandă.

Se substituie releul ideal cu un amplificator linear cu coeficientul de amplificare k_1 și caracteristica statică se descrie $u = f(\varepsilon) = k_1\varepsilon$.

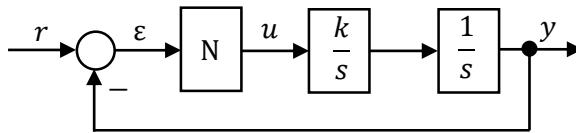


Fig. 2.14. Sistem automat nelinier cu releul ideal

Sistemul linear închis se descrie prin funcția de transfer $H_0(s)$:

$$H_0(s) = \frac{k_1 k}{s^2 + k_1 k} = \frac{y(s)}{r(s)}. \quad (2.28)$$

Din (2.28) se obține ecuația operațională și utilizând operatorul de derivare $p = s$ se determină ecuația diferențială în forma:

$$p^2 y + k_1 k y = k_1 k r,$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + k_1 k y(t) = k_1 k r(t). \quad (2.29)$$

În condiția $r = 0$, componenta liberă a răspunsului sistemului la modificarea condițiilor inițiale se descrie prin ecuația diferențială de forma:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -k_1 k y(t) \quad (2.30)$$

și reprezintă un proces neamortizat (oscilații armonice întreținute).

Se introduc variabilele de stare $x_1 = y$ și din (2.30) se obține sistemul ecuațiilor de stare:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -k_1 k x_1 + k_1 k r, \end{aligned} \quad (2.31)$$

din care se obține traiectoria de fază:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{k_1 k x_1}{x_2} + k_1 k r. \quad (2.32)$$

În condiția $r = 0$, expresia (2.32) are forma:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{k_1 k x_1}{x_2}. \quad (2.33)$$

După divizarea variabilelor de stare și integrarea relației (2.33) se obține ecuația de forma:

$$x_2^2 + k_1 k x_1^2 - C^2 = 0, \quad (2.34)$$

unde C este constanta de integrare funcție de condițiile inițiale.

Expresia (2.34) descrie curba de ordinul doi de tip elipsă și reprezintă traiectoria de fază închisă de tipul ciclu-limită (fig. 2.15).

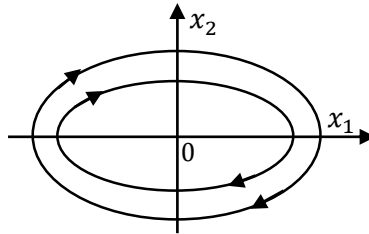


Fig. 2.15. Traiectoriile de fază ale sistemului liniar

Modificând condițiile inițiale C , care se realizează pe elementele integratoare, sistemul închis este un sistem conservator cu portretul de fază în forma unor familii de elipse concentrice (fig. 2.15), care reprezintă cicluri-limită, iar procesul tranzitoriu va fi un proces oscilant neamortizat.

Se consideră neliniaritatea un releu ideal (fig. 2.16, a) care se descrie prin expresia:

$$u = f(\varepsilon) = f(y) = f(x_1) = c \operatorname{sign} \varepsilon = \pm c, \quad (2.35)$$

unde c este amplitudinea releului.

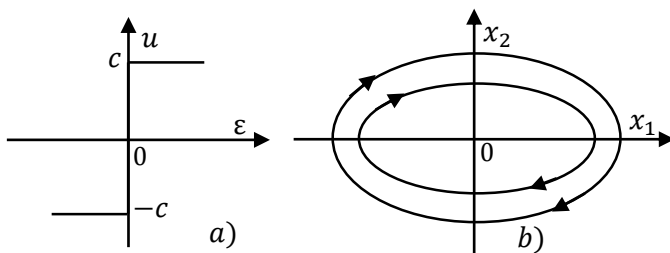


Fig. 2.16. Caracteristica statică *a)* și traiectoriile de fază *b)* ale sistemului nelinier cu releu ideal

Sistemul ecuațiilor de stare ale sistemului nelinier prin variabilele de stare cu $y = x_1$ are forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= kf(\varepsilon) = kcsign(\varepsilon) = \pm kc.\end{aligned}\quad (2.36)$$

Ecuția traiectoriei de fază a sistemului nelinier din (2.36) este:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \pm \frac{kc}{x_2}.\quad (2.37)$$

După integrarea expresiei (2.37) se obține soluția ecuației care reprezintă traiectoria de fază a unei curbe închise, formată din două segmente de parabole ce se unesc pe linia de comutare, care coincide cu axa ordonatelor (fig. 2.16, *b*). Traiectoriile de fază sunt curbe de tip elipse și se descriu prin ecuația:

$$x_2^2/2 \pm ckx_1 = C,\quad (2.38)$$

unde C reprezintă condițiile inițiale ale variabilelor de stare.

În expresia (2.38), semnul "+" corespunde semiplanului din dreapta, iar semnul "-" celui din stânga.

Introducerea zonei de insensibilitate în caracteristica statică a releului ideal (fig. 2.17, *a*) conduce la apariția unui interval de repaos $[-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ pe axa absciselor, format de liniile de comutație verticale care trec prin punctele $-\varepsilon_0$ și ε_0 , în limitele cărui trajectoriile de fază sunt linii paralele axei absciselor, iar în stânga și preapta de liniile de comutare segmentele trajectoriilor de fază au forma de parabole.

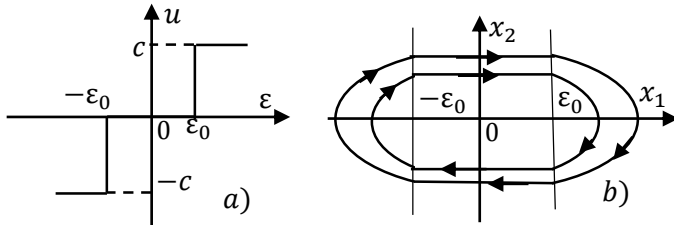


Fig. 2.17. Caracteristica statică *a*) și traiectoriile de fază *b*) ale sistemului cu releu cu zonă de insensibilitate

Dacă se introduce în structura sistemului un releu cu histerezis pozitiv (fig. 2.18, *a*), atunci traiectoriile de fază nu sunt convergente (fig. 2.18, *b*), și invers, dacă se introduce în structura sistemului un releu cu histerezis negativ (fig. 2.19, *a*), atunci traiectoriile de fază sunt convergente (fig. 2.19, *b*).

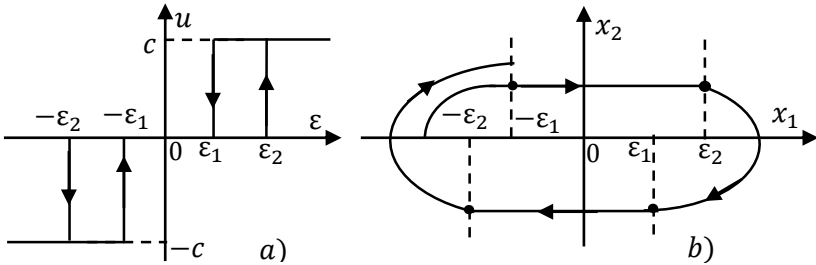


Fig. 2.18. Caracteristica statică *a*) și traiectoria de fază *b*) ale sistemului cu releu cu histerezis pozitiv

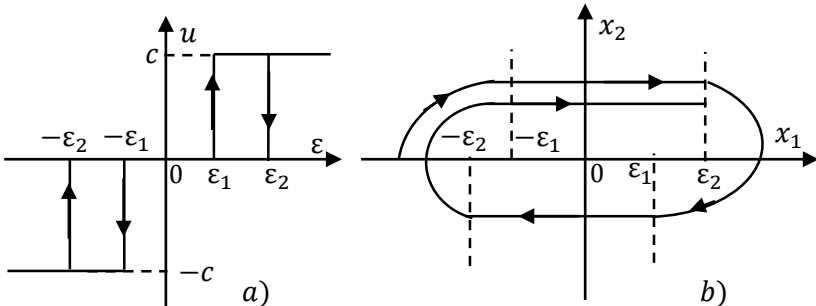


Fig. 2.19. Caracteristica statică *a*) și traiectoria de fază *b*) ale sistemului cu releu cu histerezis negativ

Un sistem automat nelinier poate fi stabilizat dacă se introduce o reacție după viteză cu un coeficient de transfer $\alpha > 0$ (reacție suplimentară după derivata mărimii de ieșire).

În schema sistemului reprezentată în figura 2.20 derivata este egală cu coordonata $x_2 = dx_1/dt$ după care și se efectuează reacția suplimentară.

În acest caz, eroarea sistemului se descrie astfel:

$$\varepsilon = -x_1 - \alpha x_2 = -x_1 - \alpha s x_1 = -x_1 - \alpha \dot{x}_1. \quad (2.39)$$

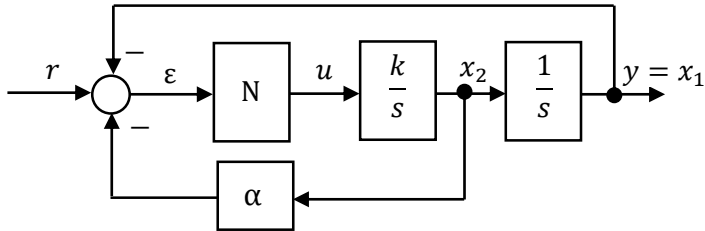


Fig. 2.20. Structura sistemului nelinier cu releu și reacție după viteză

Pentru sistemul nelinier cu releul ideal se obține sistemul ecuațiilor de stare:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -kcsign(\varepsilon) = -kcsign(x_1 + \alpha x_2). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Ecuția diferențială a traiectoriei de fază este:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{kcsign(x_1 + \alpha x_2)}{x_2}. \quad (2.41)$$

În acest caz, traiectoriile de fază se descriu prin parabole:

$$x_2^2/2 + ckx_1 = C_1, \quad \varepsilon = x_1 + \alpha dx_1/dt > 0 \quad (2.42)$$

cu ramurile orientate de la origine spre stânga în semiplanul superior și parabole:

$$x_2^2/2 - ckx_1 = C_2, \quad \varepsilon = x_1 + \alpha dx_1/dt < 0, \quad (2.43)$$

cu ramurile orientate de la origine spre dreapta în semiplanul inferior.

În cazul dat, linia de comutație MN în planul fazelor (fig. 2.21) nu va mai coincide cu axa ordonatelor x_2 și nici nu este paralelă acesteia, dar se descrie printr-o ecuație diferențială de ordinul unu dată de expresia:

$$\varepsilon = -(x_1 + \alpha dx_1/dt) = -(x_1 + \alpha x_2) = 0. \quad (2.44)$$

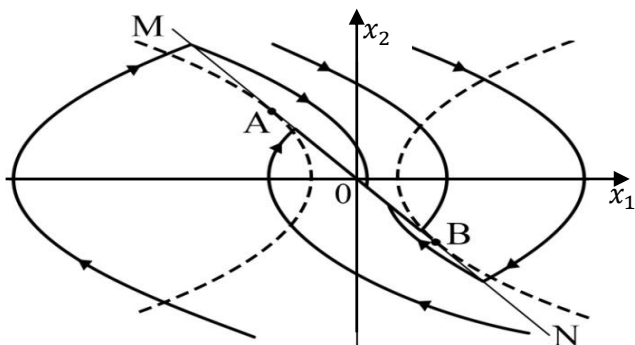


Fig. 2.21. Portretul de fază al sistemului nelinier cu regim alunecător

Din (2.44) se determină descrierea liniei de comutare:

$$x_2 = -\frac{1}{\alpha} x_1. \quad (2.45)$$

Linia de comutare (2.45) este o dreaptă ce trece prin origine, fiind înclinată spre axa absciselor sub un unghi egal cu $\arctg(-1/\alpha)$ și situată în cadranele II și IV. Înclinarea acestei linii de comutare indică faptul că la o distanță considerabilă de origine, procesele în sistemul nelinier cu releu ideal devin atenuate.

Se consideră două parabole (linii punctate) la care linia de comutare MN va fi tangență în punctele A și B. Pe linia de comutare pot fi evidențiate trei porțiuni caracteristice, limitate de punctele de tangență A și B ale liniei de comutare MN cu parabolele trasate cu linii întrerupte. În afara segmentului AB, orice traiectorie de fază dintr-o parte a liniei de comutare are prelungire și de cealaltă parte a liniei de comutare. În

interiorul segmentului AB, traiectoriile de fază se apropie de linia de comutare din ambele părți, întâlnindu-se pe ea. Nimerind pe segmentul AB, punctul reprezentativ nu poate ieși de pe acesta, dar nici nu poate rămâne pe acesta, fiindcă viteza mișcării punctului nu este egală cu zero.

Viteza mișcării punctului reprezentativ de-a lungul segmentului AB nu este determinată de ecuațiile (2.44)-(2.45), însă studiile speciale ale acestui fenomen arată că ea este limitată și variază după mărime în jurul valorii ordonatei punctului reprezentativ. Punctul reprezentativ va aluneca în lungul segmentului spre origine care este punct de echilibru de tipul *nod* stabil. Segmentul AB se numește *linie de alunecare*, iar regimul obținut al sistemului se numește *regim alunecător* în sistemul automat.

Regimul alunecător se explică pe segmentul AO în modul următor (fig. 2.22). Când mișcarea pe traiectoria 1 intersectează linia AO, mișcarea continuă pe traiectoria 2 care inversează mișcarea în direcția opusă, apoi procesul continuă pe curba 3 cu inversarea mișcării și a.ș.m.d. În modul acesta, punctul reprezentativ de mișcare se apropie de origine, având oscilații de frecvență înaltă, iar amplitudinea este mică. Toate comutațiile sunt efectuate de releul ideal.

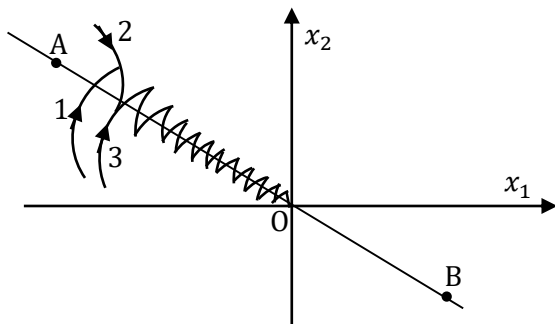


Fig. 2.22. Regimul alunecător în sistemul nelinier

Ecuția mișcării în lungul liniei de alunecare este:

$$\alpha x_2 + x_1 = \frac{\alpha dx_1}{dt} + x_1 = \alpha \dot{x}_1 + x_1 = 0. \quad (2.46)$$

După cum reiese din ecuația (2.46), mișcarea punctului absolut

nu depinde de parametrii părții liniare sau a parametrilor neliniarității, dar depinde numai de parametrii reacțiilor și este determinată de gradul de înclinare a liniei de comutare. Acest important fenomen se folosește la construirea sistemelor automate cu structură variabilă [1, 9].

Mișcarea precisă pe linia de alunecare este posibilă numai în cazul comutației momentane a releului. În realitate, din cauza inerției apare un număr mare de comutații care urmează una după alta și duc la apariția vibrațiilor de o frecvență înaltă în jurul liniei de comutare.

În relele electromecanice un astfel de regim duce la arderea contactelor. De aceea, când acest regim a fost descoperit, se considera dăunător și se căutau căi pentru a fi evitat. Odată cu apariția relelor fără contact (rele electronice) aceste regimuri au început să fie create artificial cu scopul de a asigura performanțele dorite în sistemele cu parametri instabili [1, 17].

Linia de comutare nu este o traiectorie de fază, deși ea poate fi făcută să coincidă cu o traiectorie de fază. În acest caz, procesul în sistem se prezintă din două etape: apropierea de linia de comutare de-a lungul unor traiectorii cu condițiile inițiale respective, apoi mișcarea spre poziția de echilibru de-a lungul liniei de comutare (fig.2.23).

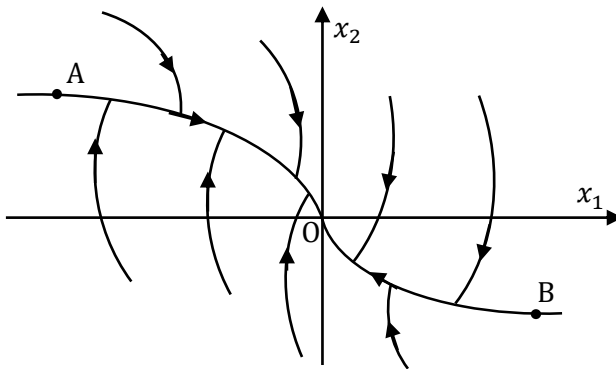


Fig. 2.23. Linia de comutare este traiectorie de fază a sistemului nelinier

Mișcarea de-a lungul liniei de comutare este exact determinată de ecuațiile diferențiale. Un asemenea proces este optimal în viteză pentru ecuațiile:

$$x_2^2/2 \pm kcx_1 = C, \quad (2.47)$$

dacă o restricție este impusă asupra derivatei a doua:

$$\left| \frac{dx_2}{dt} \right| \leq kc. \quad (2.48)$$

Pentru sistemul cu releu ideal ecuația pentru legea de comutare este:

$$\varepsilon = x_1 + \alpha x_2 |x_2| = 0, \quad (2.49)$$

unde $\alpha = 1/kc$.

Expresia (2.49) cu valoarea lui $\alpha = 1/kc$ are forma:

$$\begin{aligned} \varepsilon kc &= -x_2^2/2 + kcx_1 = 0, \text{ pentru } x_2 < 0, \\ \varepsilon kc &= x_2^2/2 + kcx_1 = 0, \text{ pentru } x_2 > 0. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Astfel, se constată că ecuația liniei de comutare a regimului alunecător este identică cu ecuația traiectoriei de fază (fig. 2.23).

Soluția ecuației diferențiale (2.46) ce caracterizează mișcarea este:

$$x(t) = x_0 e^{-t/\alpha} \quad (2.51)$$

și procesul decurge pe exponențe.

Determinarea valorilor punctelor A și B pe segmentul MN se efectuează în modul următor. În aceste puncte, tangentele la parabole coincid cu liniile de comutare. Această condiție este exprimată prin relația:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{1}{\alpha} = -\frac{kc}{x_2}. \quad (2.52)$$

Pentru punctul A din (2.52) se obține valoarea lui x_{2A} :

$$-\frac{kc}{x_{2A}} = -\frac{1}{\alpha}, \quad x_{2A} = kc\alpha. \quad (2.53)$$

Pentru punctul B din (2.52) se obține valoarea lui x_{2B} :

$$\frac{kc}{x_{2B}} = -\frac{1}{\alpha}, \quad x_{2B} = -kc\alpha. \quad (2.54)$$

Rezultă că segmentul AB este cu atât mai mare, cu cât este mai mare coeficientul de transfer al sistemului deschis kc .

2.8 Sisteme automate neliniare cu structură variabilă

Realizarea unor performanțe impuse în cadrul unor structuri de sisteme automate neliniare necesită utilizarea unor algoritmi de reglare neliniară pentru diverse regimuri de funcționare a procesului condus. Aceasta se poate realiza prin introducerea în mod intenționat în structura sistemului a unor blocuri funcționale liniare sau neliniare, în funcție de starea procesului și de regimul lui de funcționare [1, 4, 9, 18].

Sistemul cu structură variabilă este sistemul la care legăturile dintre blocurile funcționale se modifică după o anumită lege prescrisă în funcție de starea sistemului.

Schema generală a unui sistem cu structura variabilă este dată în figura 2.24.

Rezultă că în sistem se introduce algoritmul de reglare cel mai eficient pentru un regim de funcționare a procesului, iar structura sistemului se modifică în timpul funcționării pe baza informațiilor acumulate despre procesul condus.

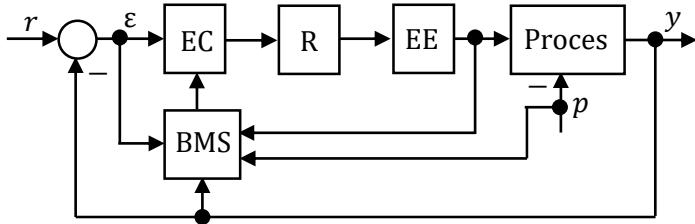


Fig. 2.24. Schema-bloc funcțională a sistemului automat neliniar cu structură variabilă

Prin combinarea mai multor blocuri funcționale BMS se pot obține performanțele cerute sistemului, schimbarea structurii sistemului făcându-se în concordanță cu cerințele de performanță impuse sistemului.

Într-un sistem cu structură variabilă pot fi reunite mai multe proprietăți utile, corespunzătoare fiecăreia din mulțimea de structuri, dar se pot obține și alte noi proprietăți calitativ superioare care nu sunt proprii nici uneia dintre structurile separate.

Se consideră structura sistemului automat cu structură variabilă

reprezentată în figura 2.25.

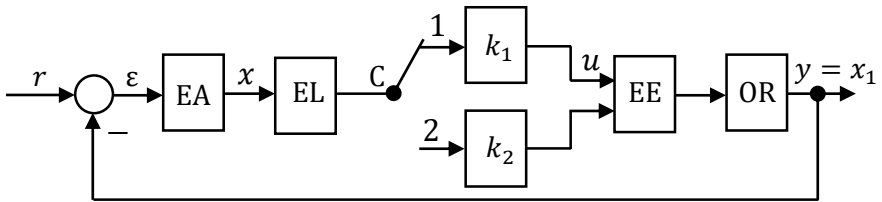


Fig. 2.25. Structura sistemului neliniar cu structură variabilă

În sistem se utilizează elementele funcționale: elementul de amplificare EA, elementul logic EL, comutatorul C, elementele cu coeficienții de transfer k_1 și k_2 , elementul de execuție EE și obiectul de reglare OR. Se consideră elementele EA, EE ideale, iar obiectul de reglare prezintă astatism de gradul doi și sistemul deschis se descrie astfel:

$$H_d(s) = \frac{k}{s^2}, \quad (2.55)$$

unde k este coeficientul de transfer al sistemului deschis.

Dinamica sistemului automat la comutarea comutatorului C la elementul k_1 se descrie prin ecuația diferențială:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + kk_1x(t) = 0, \quad (2.56)$$

iar la comutarea comutatorului C la elementul k_2 se obține ecuația diferențială:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + kk_2x(t) = 0. \quad (2.57)$$

Se introduc variabilele de stare x_1 și x_2 și se determină legea de comutare: elementul k_1 se va comuta în condiția când $x_1x_2 > 0$, iar elementul k_2 se va comuta în condiția când $x_1x_2 < 0$. În aceste condiții, ecuația diferențială (2.56) se prezintă la comutarea elementului k_1 :

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + kk_1x(t) = 0, \text{ pentru } x_1x_2 > 0 \quad (2.58)$$

portretul de fază se reprezintă în figura 2.26, a.

Ecuția diferențială (2.57) se prezintă la comutarea elementului k_2 :

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + k k_2 x(t) = 0 \text{ pentru } x_1 x_2 < 0 \quad (2.59)$$

portretul de fază se reprezintă în figura 2.24, b.

Sistemul neliniar descris de ecuațiile diferențiale (2.58)-(2.59) este instabil și are un regim oscilant neamortizat, iar traiectoriile de fază sunt cicluri-limită de tip centru.

Se alege o comutare a elementelor 1 și 2 în modul următor: în cadranul I se construiește traiectoria de fază din figura 2.26, a, când $x_1 x_2 > 0$, iar în cadranul IV se construiește traiectoria de fază din figura 2.24, b,

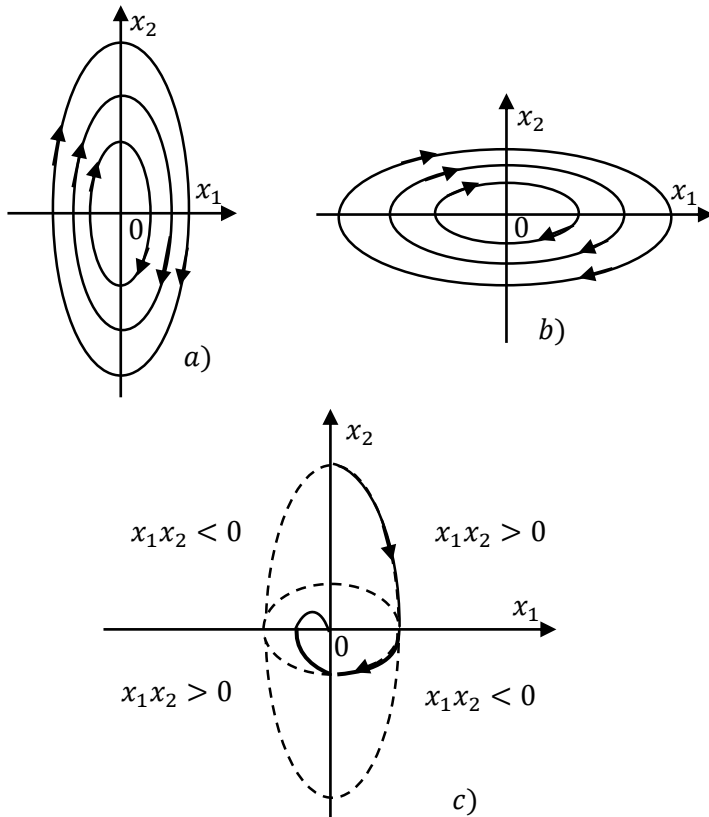


Fig. 2.26. Traiectoriile de fază ale sistemului neliniar cu structură variabilă

când $x_1 x_2 < 0$ și în cadranul III se construiește traiectoria de fază din figura 2.26, a cu $x_1 x_2 > 0$ etc. și, în rezultat, se obține traiectoria de fază a sistemului automat care este dată în figura 2.26, c.

Analizând traiectoria de fază obținută a sistemului rezultă că procesul este convergent și sistemul a devenit stabil datorită comutării structurii la momentele de timp respective, iar procesul tranzitoriu este aperiodic.

În structura sistemului din figura 2.25 se poate obține un regim alunecător dacă se consideră coeficientul $k_1 > 0$, iar coeficientul $k_2 < 0$.

Elementul logic va forma semnalul după relația:

$$z = x_2 + cx_1. \quad (2.60)$$

Comutarea în sistem se va efectua pentru cazurile:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + k k_1 x(t) = 0, \text{ pentru } z x_1 > 0, \quad (2.61)$$

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + k k_1 x(t) = 0, \text{ pentru } z x_1 < 0. \quad (2.62)$$

Pentru acest caz, linia de comutare (linia undulată în figura 2.27) se descrie:

$$x_2 = -cx_1. \quad (2.63)$$

Conform relației (2.55), în domeniile unde $z x_1 > 0$ - în semiplanul superior și în semiplanul inferior, traiectoriile de fază vor fi elipse, iar în domeniile unde $z x_1 < 0$ traiectoriile de fază vor fi hiperbole (fig. 2.27).

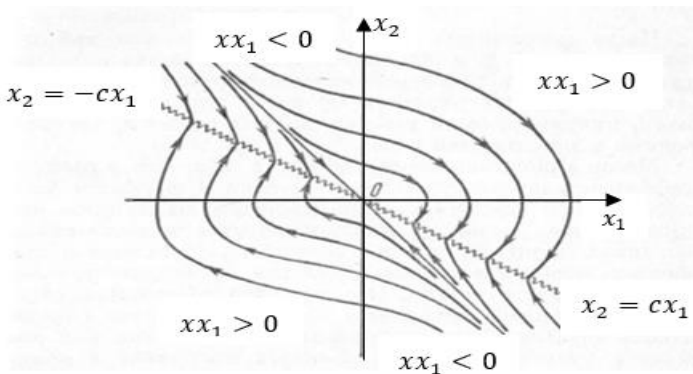


Fig. 2.27. Portretul de mișcare și regimul alunecător al sistemului neliniar

Toate traiectoriile de fază atât din partea superioară, cât și din partea inferioară converg către linia de comutare în orice condiții inițiale, care reprezintă integral linia de alunecare descrisă de ecuația (2.46) ca ecuație diferențială:

$$\dot{x}_1 + cx_1 = 0$$

cu soluția:

$$x_1(t) = x_0(t)e^{-ct},$$

unde timpul $t = 0$ și $x_0(t)$ se determină în momentul când punctul reprezentativ al traiectoriei de fază atinge linia de alunecare din figura 2.27.

Se menționează că forma regimului alunecător depinde de parametrul c al elementului logic și nu depinde de coeficienții k și k_1 sau k_2 ai părții liniare a sistemului. Această proprietate fundamentală a regimului alunecător se utilizează pentru construirea sistemelor cu structură variabilă [1, 4, 9, 18].

Exemplul 2.3. Se consideră o structură practică de reglare automată cu structură variabilă reprezentată în figura 2.28. Partea liniară este alcătuită din elementul integrator cu constanta de timp de integrare T_i înseriat cu elementul cu inerție de ordinul unu cu parametrii coeficientul de transfer k și constanta de timp T . Partea neliniară conține blocul logic BL cu elementul de amplificare cu coeficientul k_a și blocul logic descris prin funcția $\varphi(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, \dot{y})$, care generează prin funcția sa următoarea lege de reglare:

$$u = k_a \varepsilon + \varphi(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, \dot{y}) \dot{y}.$$

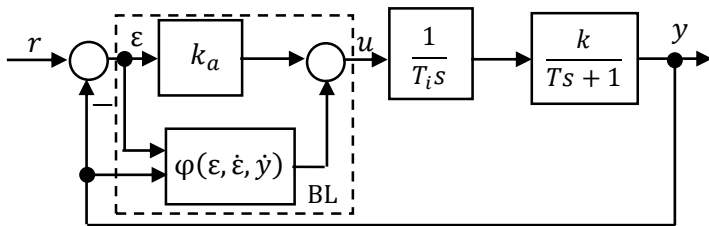


Fig. 2.28. Schema sistemului de reglare automată cu structură variabilă

Principala caracteristică a acestor sisteme este obținerea caracterului procesului tranzitoriu dorit, la modificarea arbitrară a parametrilor în limite determinate, pe baza regimului alunecător ca o

consecință a comutațiilor în timp.

Chestionar și probleme

1. Ce reprezintă metoda planului fazelor?
2. În ce sistem de coordonate se construiește traiectoria de fază pentru sistemul de ordinul doi?
3. Cum se determină mișcarea de-a lungul traiectoriei de fază?
4. Ce reprezintă ciclurile-limită și care sunt parametrii acestora?
5. Cum se determină parametrii autooscilațiilor după traiectoriile de fază?
6. Care puncte cardinale ale traiectoriei de fază determină regimul staționar al sistemului automat?
7. Explicați cum se modifică traiectoriile de fază, variind condițiile inițiale.
8. Ce reprezintă regimul alunecător al sistemului neliniar?
9. Cum se obține regimul alunecător din structura sistemului neliniar din figura 2.14?
10. Care parametri ai sistemului neliniar influențează mișcarea regimul alunecător?
11. Ce reprezintă linia de comutare în sistemul neliniar cu elementul releu ideal?
12. Cum se modifică traiectoriile de fază ale sistemului neliniar cu releu cu zonă de insensibilitate?
13. Prezentați traiectoriile de fază pentru sistemul neliniar cu releu cu histerezis activ.
14. Cum se obține sistemul neliniar cu structură variabilă?
15. Ce reprezintă traiectoria de fază a sistemului neliniar cu structură variabilă?

3 METODA FUNCȚIEI DE DESCRIERE

3.1 Introducere

Metoda funcției de descriere sau metoda liniarizării armonice reprezintă analiza transferului intrare-ieșire a neliniarităților și se utilizează la liniarizarea neliniarităților în domeniul frecvențelor, aplicată unei clase largi de neliniarități și, în special, neliniarităților discontinue, pentru care liniarizarea bazată pe metoda dezvoltării în serii Taylor este inoperantă. Metoda funcției de descriere este utilă pentru sistemul automat neliniar care funcționează în regim cu oscilații întreținute (autooscilații) și permite determinarea prin proceduri relativ simple a parametrilor autooscilațiilor amplitudinea A și pulsația ω [1, 4, 12-18, 21].

Pentru neliniaritățile continue și sistemele neliniare cu mai multe neliniarități crește considerabil dificultatea calculului.

Pentru sistemele automate neliniare stabile, în care nu există autooscilații, metoda nu este eficientă, fiindcă oferă minim de informații asupra calității sistemului.

3.2 Principiul metodei

Se consideră o structură a sistemului neliniar din figura 3.1, în cadrul căruia neliniaritățile sunt reprezentate cu neliniaritatea echivalentă N , iar partea liniară se descrie de f.d.t. $H(s)$ care este stabilă sau cu astatism.

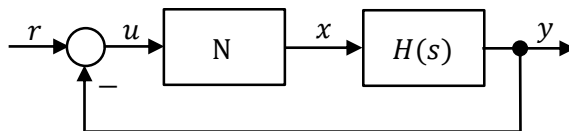


Fig. 3.1. Structura sistemului automat neliniar

Se admite că partea liniară a sistemului are o comportare de filtru trece-jos cu o pantă cel mult egală cu -40 dB/decadă în zona pulsației de tăiere, deci, permite trecerea numai a armonicii fundamentale a

semnalului periodic $x(t)$ aplicat la intrarea acesteia și se exprimă prin relația locului de transfer [1, 4, 9, 12-18, 20, 21]:

$$|H(j\omega)| \gg |H(jk\omega)|, k = 2, 3, \dots, \quad (3.1)$$

unde k este numărul armonicii.

În condițiile când semnalul x se obține ca soluție periodică din dezvoltarea în serie Fourier a răspunsului părții neliniare la un semnal sinusoidal u aplicat la intrarea neliniarității, descrierea sistemului neliniar se prezintă astfel:

$$y = -H(s)x, \quad (3.2)$$

$$x = f(u)$$

sau în domeniul frecvență:

$$\tilde{y} = -H(j\omega)\tilde{x},$$

unde \tilde{y} și \tilde{x} variază după o lege sinusoidală.

Pentru a constata apariția autooscilațiilor în sistemul neliniar (fig. 3.2), se consideră că la intrarea neliniarității N cu caracteristică statică se aplică semnalul armonic $u(t) = A\sin\omega t$, iar semnalul la ieșire $x(t) = f(u(t))$ conține spectrul de armonici x_1, x_2, x_3, \dots .

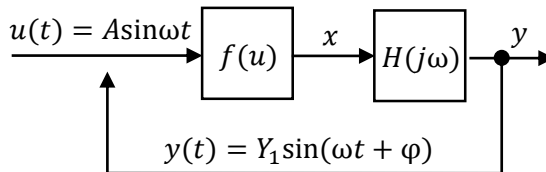


Fig. 3.2. Structura sistemului automat liniarizat

Rezultă că semnalul de ieșire $x(t)$ din neliniaritate va fi o funcție periodică, care poate fi dezvoltată în serie Fourier. Datorită comportării părții liniare $H(j\omega)$ ca filtru trece-jos, vor fi reținute din dezvoltarea în serie Fourier a funcției $x(t)$ numai componenta constantă și termenii care conțin prima armonică și se obține relația:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{B_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos k\omega t = \\
 &= \frac{B_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (B_k \sin k\omega t + C_k \cos k\omega t). \tag{3.3}
 \end{aligned}$$

Dacă neliniaritatea $x = f(u)$ este simetrică $f(u) = -f(-u)$, atunci coeficientul $B_0 = 0$ din seria (3.3) și, în baza metodei liniarizării armonice, se neglijează toate armonicele cu $k \geq 2$ de frecvență superioară din dezvoltarea în serie Fourier (au efect neglijabil în cadrul sistemului), aproximând ieșirea elementului neliniar numai cu prima armonică sau numită și *armonică fundamentală* descrisă prin relația:

$$x(t) \approx B_1 \sin \omega t + C_1 \cos \omega t. \tag{3.4}$$

Coeficienții seriei Fourier din (3.3) se calculează prin relațiile cunoscute [1, 4, 9, 11, 13, 15, 17, 21]:

$$\begin{aligned}
 B_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin \omega t) d(\omega t), \\
 B_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin \omega t) \sin k\omega t d(\omega t), \\
 C_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin \omega t) \cos k\omega t d(\omega t).
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Pentru a defini funcția de descriere, se exprimă valorile sinusului și cosinusului ca funcții ale valorii instantanee a semnalului de intrare $u(t) = A \sin \omega t$ și în rezultat se obține:

$$\sin \omega t = u/A, \quad \cos \omega t = pu/(A\omega), \tag{3.6}$$

unde $p = d/dt$ este operatorul de derivare.

În expresia (3.4) se substituie sinusul și cosinusul cu valorile lor din (3.6) și se obține:

$$x = \frac{B_1}{A} u + \frac{C_1}{A} \frac{pu}{\omega} = u \left(\frac{B_1}{A} + \frac{C_1}{A} \frac{p}{\omega} \right). \tag{3.7}$$

Funcția de descriere a elementului nelinier se determină ca raportul mărimii de ieșire către mărimea de intrare și din (3.7) se obține:

$$\frac{x}{u} = N(A, p, \omega) = \frac{B_1}{A} + \frac{C_1 p}{A\omega}. \quad (3.8)$$

Dacă în relația (3.8) se introduc notațiile:

$$b(A) = B_1/A, \quad g(A) = C_1/A, \quad (3.9)$$

atunci aceasta ia forma:

$$N(A, p, \omega) = b(A) + g(A)p/\omega, \quad (3.10)$$

unde $b(A)$ și $g(A)$ sunt coeficienții liniarizării armonice ai elementului nelinier care au forma:

$$b = b(A) = \frac{B_1}{A} = \frac{1}{A\pi} \int_0^{2\pi} f(A\sin\omega t) \sin\omega t d(\omega t), \quad (3.11)$$

$$g = g(A) = \frac{C_1}{A} = \frac{1}{A\pi} \int_0^{2\pi} f(A\sin\omega t) \cos\omega t d(\omega t).$$

Expresia (3.4) cu însemnările (3.11) se reprezintă astfel:

$$x(t) = A(b\sin\omega t + g\cos\omega t). \quad (3.12)$$

Pentru stabilirea unui formalism asemănător cu cel utilizat la metoda frecvențială în cazul sistemelor liniare, funcțiile trigonometrice se înlocuiesc prin funcții complexe, unde variabilele reale \tilde{y} , \tilde{u} , \tilde{x} sunt înlocuite prin valorile complexe cu aceiași parametri: amplitudine, frecvență și fază.

Expresia complexă a semnalului de intrare se dă astfel:

$$\tilde{u}(t) = A\sin\omega t = Ae^{j\omega t}. \quad (3.13)$$

Expresia complexă pentru (3.12) are forma:

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t) &= A(b\sin\omega t + g\cos\omega t) = (b + jg)Ae^{j\omega t} = \\ &= (b + jg)\tilde{u}(t).\end{aligned}\quad (3.14)$$

Se introduce noțiunea de coeficient de transfer armonic sau funcție de descriere a elementului neliniar ca raportul amplitudinii mărimii de ieșire la cea de intrare a neliniarității și din (3.14) se obține:

$$N(A) = \frac{\tilde{x}}{\tilde{u}} = b(A) + jg(A) = \sqrt{b^2 + g^2} e^{j\varphi_n} = N_n e^{j\varphi_n}, \quad (3.15)$$

unde $b(A)$ este partea reală a funcției complexe, $g(A)$ – partea imaginară a funcției complexe, $N_n = \sqrt{b^2 + g^2}$ este modulul ca raportul amplitudinilor semnalelor de ieșire x și de intrare u , iar $\varphi_n = \arctg g/b$ este defazajul semnalului de ieșire x în raport cu semnalul de intrare u .

Expresia (3.7) în domeniul timpului când neliniaritatea depinde de mărimea de intrare și de derivata acesteia se reprezintă astfel:

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{B_1}{A} A\sin\omega t + \frac{C_1}{A\omega} \frac{d}{dt}(A\sin\omega t) = \\ &= bu(t) + \frac{g}{\omega} \frac{du(t)}{dt} = (b(A, \omega) + \frac{g(A, \omega)}{\omega} p)u,\end{aligned}\quad (3.16)$$

unde $b(A, \omega) = B_1(A, \omega)/A$ și $g(A, \omega) = C_1(A, \omega)/A$.

Dacă neliniaritatea depinde numai de mărimea de intrare $u(t)$ și nu depinde și de derivata ei, atunci coeficienții liniarizării armonice sunt funcții numai de amplitudinea A .

La elementele cu caracteristici univalente (univoce) fazele variabilelor de intrare și ieșire coincid (defazajul este zero) și componenta cosinusului dispăre, iar coeficientul $g = 0$ și funcția de descriere a elementului neliniar se reprezintă cu partea reală $N(A) = b(A)$.

Pentru neliniarități liniare pe porțiuni coeficienții b și g se calculează relativ simplu. Pentru neliniarități de curbura aproximată polinomial, coeficienții conțin funcții de tipul Γ , iar în cazul aproximării

hiperbolice sau armonice, coeficienții b și g conțin funcții Bessel de speța I-a [1, 9, 13, 17, 18].

Se menționează că funcția de descriere $N(A)$ din (3.15) atât partea reală, cât și partea imaginară depind de amplitudinea semnalului sinusoidal de intrare. Partea imaginară a funcției de descriere există numai pentru neliniarități de tip histerezis (neliniarități neunivoce).

Cunoașterea funcției de descriere pentru un sistem neliniar permite analiza performanțelor sistemului prin metode cunoscute din analiza sistemelor liniare.

Se consideră partea liniară a sistemului automat neliniar descrisă în operatorul p în forma:

$$H(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{P(p)}{Q(p)} \quad (3.17)$$

și, deoarece sistemul este închis cu reacție, rezultă că $u = -y$ (semnalul de intrare $r = 0$) și din (3.17) se obține forma operațională a părții liniare:

$$Q(p)y(p) = P(p)x(p) \quad (3.18)$$

sau cu substituția $u = -y$ în forma:

$$-Q(p)u(p) = P(p)x(p). \quad (3.19)$$

În expresia (3.19) se substituie valoarea lui $x(p)$ din (3.16) și se obține:

$$\begin{aligned} Q(p)u(p) + P(p)[b(A, \omega) + \frac{g(A, \omega)}{\omega}p]u(p) = \\ = \{Q(p) + P(p)[b(A, \omega) + \frac{g(A, \omega)}{\omega}p]\}u(p) = 0, \end{aligned} \quad (3.20)$$

care reprezintă ecuația diferențială pentru sistemul liniarizat armonic cu condiția că parametrii primei armonici A și ω sunt constanți.

Din (3.20) se obține ecuația caracteristică a sistemului liniarizat:

$$L(A, p) = Q(p) + P(p)[b(A, \omega) + \frac{g(A, \omega)}{\omega} p] = 0 \quad (3.21)$$

sau ecuația caracteristică în forma generală:

$$L(A, p) = 1 + N(A) \frac{P(p)}{Q(p)} = 1 + N(A)H(p) = 1 + H_d(A, p) = 0, \quad (3.22)$$

unde $H_d(A, p) = N(A)H(p)$ reprezintă funcția de transfer a sistemului deschis.

În domeniul frecvență, utilizând substituția $p = j\omega$, ecuația (3.22) se reprezintă astfel:

$$\begin{aligned} L(A, j\omega) &= 1 + N(A)H(j\omega) = \\ &= Q(j\omega) + P(j\omega)[b(A, \omega) + jg(A, \omega)] = 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Din ecuația caracteristică sistemului liniarizat (3.23) se pot determina parametrii primei armonici amplitudinea A și pulsația ω .

Funcția de descriere se scrie în mod similar ca locul de transfer în domeniul frecvențelor, cu observația că atât partea reală, cât și partea imaginară depind de amplitudinea semnalului sinusoidal de la intrare.

Pentru un element neliniar de tip releu cu zonă de insensibilitate și histerezis se calculează funcția de descriere într-o manieră similară când la intrarea acestuia se aplică semnalul $u(t) = A \sin \omega t$. Astfel, pentru caracteristica statică a neliniarității din figura 3.3, a mărimea de ieșire a elementului neliniar se dă în figura 3.3, b și se calculează prin relația (3.4), iar funcția de descriere se definește prin expresia (3.15).

În funcție de zona de insensibilitate și de mărimea histerezisului, se calculează mărimile de conectare $\pm u_a$ și de deconectare $\pm u_b$ a releului la timpul de conectare t_a și de deconectare t_b din condițiile:

$$u_a = A \sin \omega t_a \text{ sau } \sin \omega t_a = u_a / A, \quad (3.24)$$

$$u_b = A \sin(\pi / \omega - t_b) \text{ sau } \sin(\pi - \omega t_b) = u_b / A.$$

Funcția de descriere a neliniarității se determină prin relația:

$$b(A) = B_1/A = \frac{2}{\pi A} \int_{t_a}^{t_b} c \sin \omega t d(\omega t) = \frac{2c}{\pi A} (\cos \omega t_a - \cos \omega t_b). \quad (3.25)$$

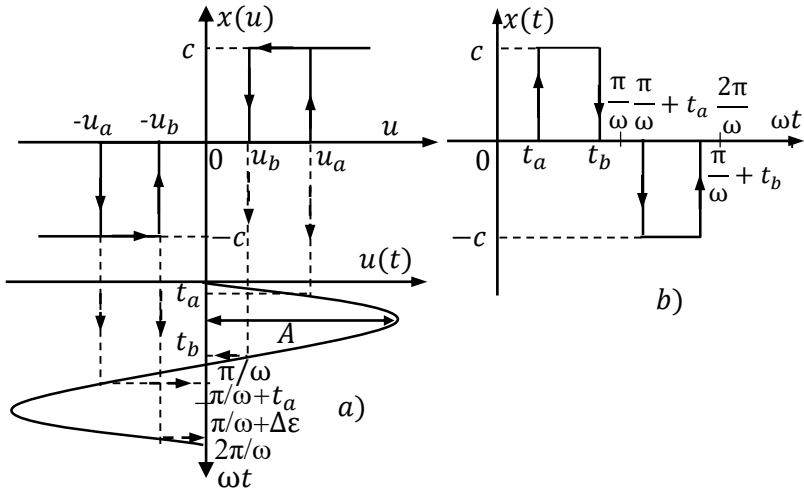


Fig. 3.3. Neliniaritate de tip releu cu zonă de insensibilitate și histererezis și transformarea semnalului

În mod similar se obține și partea imaginară a funcției de descriere:

$$g(A) = C_1/A = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} x(A \sin \omega t) \cos \omega t d(\omega t) = \\ = (2\pi/A) \int_{t_a}^{t_b} c \cos \omega t d(\omega t) \quad (3.26)$$

sau după calcularea integralei și înlocuirea valorilor corespunzătoare pentru funcțiile $\sin \omega t_a$ și $\sin \omega t_b$ se obține:

$$g(A) = -\frac{2c}{\pi A^2} (u_a - u_b). \quad (3.27)$$

Substituind relația (3.15) cu relațiile (3.26) și (3.27), se obține funcția de descriere a elementului nelinier cu zonă de insensibilitate și histererezis cu caracteristica statică reprezentată în figura 3.3, a:

$$N(A) = \frac{2c}{\pi A} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{u_a}{A}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{u_b}{A}\right)^2} \right] - j \frac{2c}{\pi} \frac{u_a - u_b}{A^2}. \quad (3.28)$$

Pentru un *releu ideal* cu caracteristica univocă funcția de descriere conține numai partea reală și din (3.28), înlocuind $u_a - u_b = 0$, se obține:

$$N(A) = \frac{2c}{\pi A} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{u_a}{A}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{u_b}{A}\right)^2} \right] = \frac{4c}{\pi A}. \quad (3.29)$$

Pentru un *releu cu zonă de insensibilitate și saturație* se obține funcția de descriere dată numai de partea reală și din (3.29) în condiția $u_a = u_b$ rezultă expresia funcției de descriere:

$$N(A) = \frac{4c}{\pi A} \left[\sqrt{1 - (u_a/A)^2} \right]. \quad (3.30)$$

Așadar, funcția de descriere este definită în raport cu amplitudinea A a mărimii de intrare u_a și parametrii caracteristici ai neliniarității, fiind preferată în unele aplicații o formă normalizată a funcției de descriere. În aceste cazuri, se alege careva mărimi de bază și coeficienții liniarizării armonice se raportează la aceste mărimi.

Se consideră caracteristica statică de tip releu cu zonă de insensibilitate și histerezis: pentru normalizarea coeficienților liniarizării armonice se aplică operația de divizare la mărimea zonei de insensibilitate u_a și se obține: $b_n(A) = b(A)/u_a$, $g_n(A) = g(A)/u_a$.

Pentru caracteristici statice univoce de tip releu prima armonică se determină prin relația:

$$y_1 = A_1 \sin \omega t = \frac{A_1}{A} u = k u,$$

care este o caracteristică proporțională cu tangenta unghiului $k = A_1/A$.

În cazul caracteristicilor neunivoce de tip releu, prima armonică se calculează prin relația:

$$y_1 = \frac{A_1}{A} u + \frac{B_1}{A\omega} \frac{du}{dt}.$$

Exemplul 3.1. Se consideră caracteristica statică $y = f(x)$ de tip releu cu zonă

de insensibilitate și saturație reprezentată în figura 3.4.

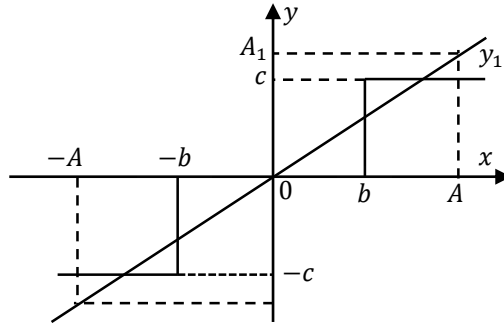


Fig. 3.4. Liniarizarea caracteristicii statice de tip releu cu zonă de insensibilitate și saturație

Pentru semnalul de intrare dat se calculează valoarea sinusului și cosinusului:

$$u(t) = A \sin \omega t, \quad \sin \omega t = \frac{u}{A},$$

$$\frac{du}{dt} = A \omega \cos \omega t, \quad \cos \omega t = \frac{du/dt}{A \omega},$$

iar pentru mărimea de ieșire se determină valoarea primei armonici:

$$y_1 = A_1 \sin \omega t = \frac{A_1}{A} u = k u,$$

care reprezintă caracteristica statică liniarizată a neliniarității ca o dreaptă dată în figura 3.4 cu tangenta unghiului în raport cu axa absciselor egală:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1}{A} = k.$$

Locul de transfer al neliniarității se descrie prin relația (3.31) și se obține:

$$N(A) = \frac{y_1}{u} = b(A) = \frac{A_1}{A} = \frac{4c}{\pi A} \left(\sqrt{1 - (b/A)^2} \right) = \frac{4c}{\pi A^2} \sqrt{A^2 - b^2}. \blacksquare$$

3.3 Determinarea oscilațiilor întreținute ale sistemului cu o neliniaritate

Caracteristicile statice ale neliniarităților pot fi simetrice și nesimetrice. Se vor analiza ambele cazuri de determinare a oscilațiilor posibile în sistemul liniarizat [4, 9, 12-18, 21].

3.3.1 Cazul oscilațiilor simetrice

Se consideră că sistemul neliniar funcționează cu oscilații întreținute și rezultă că ecuația caracteristică a sistemului liniarizat armonic va avea cel puțin o pereche de rădăcini imaginare conjugate și ecuația caracteristică (3.23) în domeniul frecvență în rezultatul transformărilor se reprezintă prin partea reală și partea imaginară:

$$\begin{aligned} L(A, j\omega) &= 1 + N(A)H(j\omega) = \\ &= Q(j\omega) + P(j\omega)[b(A, \omega) + jg(A, \omega)] = \\ &= X(A, \omega) + jY(A, \omega) = 0. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Deoarece ecuația caracteristică (3.31) este egală cu zero, rezultă că și partea reală și partea imaginară, de asemenea, vor fi egale cu zero și se obține:

$$\begin{aligned} X(A, \omega) &= 0, \\ Y(A, \omega) &= 0, \end{aligned} \quad (3.32)$$

care reprezintă sistemul din două ecuații algebrice cu două necunoscute – parametrii oscilațiilor întreținute amplitudinea A și pulsația ω a sistemului liniarizat.

Rezolvarea acestui sistem de ecuații algebrice conduce la determinarea parametrilor oscilațiilor întreținute A și ω . Dacă nu se găsesc soluții reale și pozitive pentru parametrii autooscilațiilor A și ω , rezultă ipoteza admisă inițial că sistemul neliniar admite autooscilații și nu este valabilă.

Rezolvarea analitică a sistemului (3.32) este, în general, dificilă, deoarece în sistemul de ecuații există termeni transcendenți. Pentru a depăși aceste dificultăți se aplică metode grafice.

3.3.2 Cazul oscilațiilor nesimetrice

Oscilațiile întreținute nesimetrice pot să apară când caracteristica statică a elementului neliniar este nesimetrică sau mărimea de referință $r(t)$ în sistemul neliniar este lent variabilă.

În aceste cazuri, semnalele de intrare $u(t)$ și ieșire $x(t)$ din neliniaritate au o componentă continuă \hat{u} și respectiv \hat{x} și componenta alternativă $\tilde{u}(t)$. Semnalul de intrare în neliniaritate se reprezintă prin componenta continuă \hat{u} și alternativă (sinusoidală) $\tilde{u}(t)$ prin relația:

$$u(t) = \hat{u} + \tilde{u}(t) = \hat{u} + A \sin \omega t \quad (3.33)$$

și semnalul de ieșire din neliniaritate:

$$x(t) = f(u, pu) = \hat{x} + \left[b(A, \omega, \hat{u}) + \frac{g(A, \omega, \hat{u})}{\omega} p \right] \tilde{u}(t), \quad (3.34)$$

unde componenta constantă x° se descrie prin relația:

$$\hat{x} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u) du. \quad (3.35)$$

Pentru sistemul neliniar închis semnalul erorii se determină prin relația:

$$u(t) = r(t) - y(t) = r(t) - \frac{P(p)}{Q(p)} x(t). \quad (3.36)$$

După unele transformări în (3.36) și utilizând expresia (3.34) se obține:

$$Q(p)u(t) + P(p)\left[\hat{x} + \left(b(A, \omega, \hat{u}) + \frac{g(A, \omega, \hat{u})}{\omega} p\right)\tilde{u}(t)\right] = Q(p)r(t). \quad (3.37)$$

Pentru sistemul liniarizat se separă componenta continuă și alternativă. În componenta continuă se include și referința ca mărime constantă $r(t) = \text{const}$ sau lent variabilă.

Operatorii polinomiali de derivare aplicați componentelor continue devin egali cu zero $P(0) = Q(0) = 0$ și expresia (3.37) se transformă astfel:

$$Q(0)\hat{u} + P(0)\hat{x}(A, \omega) = Q(0)r(t), \quad (3.38)$$

$$Q(p)\tilde{u}(t) + P(p)\left[\left(b(A, \omega, \hat{u}) + \frac{g(A, \omega, \hat{u})}{\omega} p\right)\tilde{u}(t)\right] = 0. \quad (3.39)$$

Dacă există autooscilații în sistem, atunci ecuația caracteristică (3.39) admite soluția $p = j\omega$ și se obține partea reală și imaginară egale cu zero:

$$X(A, \omega, \hat{u}) = 0, \tag{3.40}$$

$$Y(A, \omega, \hat{u}) = 0.$$

Ecuația (3.38) și sistemul (3.40) formează un sistem din trei ecuații algebrice:

$$\begin{aligned} X(A, \omega, \hat{u}) &= 0, \\ Y(A, \omega, \hat{u}) &= 0, \end{aligned} \tag{3.41}$$

$$Q(0)\hat{u} + P(0)\hat{x}(A, \omega) = Q(0)r(t),$$

din care se determină necunoscutele A, ω, \hat{u} , reprezentând parametrii oscilațiilor întreținute a sistemului liniarizat.

3.4 Determinarea autooscilațiilor sistemului neliniar

3.4.1 Generalități

Metoda liniarizării armonice, fiind o metodă aproximativă, va conduce la obținerea performanțelor sistemelor neliniare cu un grad de precizie limitat. Cu cât partea liniară a sistemului are o comportare mai bună de filtru-trece jos, cu atât rezultatele obținute sunt mai aproape de valorile lor reale.

Liniarizarea armonică se realizează în jurul unei soluții bine determinate, pentru care aproximarea liniară este optimă conform unui criteriu minimal dat (media integrală pătratică pe un interval de timp dat, de exemplu, perioada oscilațiilor întreținute).

Dacă într-un sistem automat neliniar din figura 3.1 partea liniară este descrisă prin funcția de transfer ca raportul a două polinoame prime.

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}, \tag{3.42}$$

iar partea neliniară este descrisă prin funcția de descriere $N(A)$, atunci

funcția de transfer a sistemului automat neliniar închis se definește în domeniul frecvențelor în forma:

$$H_0(A, j\omega) = \frac{N(A)H(j\omega)}{1+N(A)H(j\omega)} = \frac{B(A, j\omega)}{L(A, j\omega)}. \quad (3.43)$$

Condiția pentru apariția oscilațiilor întreținute în sistemul (3.43) este obținută din ecuația caracteristică în forma standard în domeniul frecvență a sistemului și se numește *ecuația bilanțului armonic*:

$$L(A, j\omega) = Q(j\omega) + P(j\omega)[b(A, \omega) + jg(A, \omega)] = 0. \quad (3.44)$$

Dacă în sistemul automat neliniar în formă standard există oscilații întreținute și acestea se aproximează la nivelul fundamentalei, atunci amplitudinea A și pulsația ω satisfac ecuația bilanțului armonic (3.44), care sunt constante.

În aceste cazuri, expresia liniarizată poate fi analizată prin metode cunoscute din teoria sistemelor liniare.

Prezența autooscilațiilor în sistemul liniarizat denotă condiția că sistemul este la limită de stabilitate. Pentru studierea oscilațiilor întreținute se vor utiliza criteriile de stabilitate Mihailov și Nyquist [4, 9, 13, 15, 17].

Există două metode de determinare a oscilațiilor întreținute în sistemul liniarizat.

1. Metoda planului Mihailov (metoda algebrică).
2. Metoda planului Nyquist (metoda Goldfarb).

3.4.2 Metoda planului Mihailov

Studierea autooscilațiilor sistemului liniarizat în planul Mihailov reprezintă o procedură mai simplă, care se reduce la următoarele etape.

Se determină ecuația caracteristică a sistemului liniarizat de forma (3.44):

$$L(A, j\omega) = Q(j\omega) + P(j\omega)[b(A, \omega) + jg(A, \omega)] = 0,$$

care poate fi tratată ca locul de transfer Mihailov pentru sistemul dat.

Expresia (3.44) este egală cu zero numai în cazul când partea reală și cea imaginară în același timp vor fi egale cu zero sau curba Mihailov trece prin origine. Prin urmare, expresia (3.44) se divizează într-un sistem din două ecuații algebrice alcătuite din partea reală și imaginară cu necunoscutele A și ω :

$$\begin{aligned} X(A, \omega) &= \operatorname{Re}L(A, j\omega) = 0, \\ Y(A, \omega) &= \operatorname{Im}L(A, j\omega) = 0. \end{aligned} \quad (3.45)$$

În rezultatul soluției sistemului de ecuații (3.45) se determină parametrii oscilațiilor întreținute – amplitudinea A_0 și pulsația ω_0 . Soluția poate fi obținută în formă grafică și analitică.

Se reprezintă soluția de determinare a oscilațiilor întreținute *în formă grafică*. Pentru ilustrare grafică se analizează planul Mihailov. Se consideră o vecinătate a originii planului $X(A, \omega), Y(A, \omega)$ parametrizată după frecvență $\omega = \omega_0, \omega_{1,2} = \omega_0 \pm \Delta\omega, \omega_{3,4} = \omega_{1,2} \pm \Delta\omega, \dots$ și după amplitudine $A = A_0, A_{1,2} = A_0 \pm \Delta A, A_{3,4} = A_{1,2} \pm \Delta A, \dots$ prezentate în figura 3.5 cu raportul frecvențelor fixate $\omega_4 < \omega_2 < \omega_0 < \omega_1 < \omega_3$ și amplitudinilor fixate $A_4 < A_2 < A_0 < A_1 < A_3$. În acest caz, ecuația caracteristică determină o rețea de curbe izoamplitudine și izofrecvență.

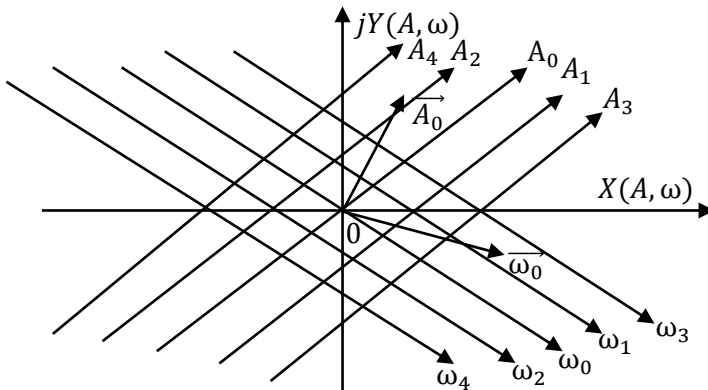


Fig. 3.5. Rețea de curbe izoamplitudine și izofrecvență

În acest caz, ecuația caracteristică a sistemului determină o rețea de curbe izoamplitudine și izofrecvență.

Dacă în sistemul automat există autooscilații, atunci curbele A_0 și ω_0 trec prin origine. Dacă originea planului este situată la stânga și amplitudinea $A = A_1 > A_0$, atunci amplitudinea scade până la A_0 și se constată o *stabilitate locală*. În cazul când $A = A_2 < A_0$, amplitudinea crește până la A_0 și se obține o *instabilitate locală*. Amplitudinea stabilizată A_0 , ca punct de convergență din ambele părți, este stabilă. Prin inversarea rapoartelor din rapoartele lui A_0, A_1, A_2 se obține o amplitudine ”stabilizată” A_0 instabilă.

Ecuția caracteristică are rădăcinile imaginare $p_{1,2} = \pm j\omega$. În planul $X(A, \omega), Y(A, \omega)$ se poate localiza domeniul sau domeniile în care ecuația caracteristică admite rădăcini imaginare și, deci, în sistem sunt posibile soluții periodice. În afara acestor domenii, ecuația caracteristică admite numai rădăcini reale și complex-conjugate cu partea reală nenulă.

Rezultă că analitic granițele acestor domenii se obțin din anularea părții reale a fiecărei perechi de rădăcini complex-conjugate.

Astfel, calea grafică devine dificilă.

Metoda analitică a stabilității soluțiilor armonice simetrice. În cazul când $A = A_0$ și $\omega = \omega_0$ ecuația caracteristică este egală cu zero. În acest punct, curbele izoamplitudine A_0 și izofrecvențe ω_0 admit vectorii plani tangenți \vec{A}_0 și $\vec{\omega}_0$ de componente:

$$\begin{aligned}\vec{A}_0 &= \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)_0 + j\left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)_0, \\ \vec{\omega}_0 &= \left(\frac{\partial X}{\partial A}\right)_0 + j\left(\frac{\partial Y}{\partial A}\right)_0.\end{aligned}\tag{3.46}$$

Definiție. Condiția necesară și suficientă de stabilitate a soluției periodice (A_0, ω_0) este ca produsul componentelor celor doi vectori să verifice inegalitatea:

$$\left(\frac{\partial X(A, \omega)}{\partial A}\right)_{A_0} \left(\frac{\partial Y(A, \omega)}{\partial \omega}\right)_{\omega_0} - \left(\frac{\partial X(A, \omega)}{\partial \omega}\right)_{\omega_0} \left(\frac{\partial Y(A, \omega)}{\partial A}\right)_{A_0} > 0.\tag{3.47}$$

Această condiție corespunde cazului când locul de transfer Mihailov înconjoară originea planului.

Pentru stabilitatea autooscilațiilor trebuie să fie satisfăcută condiția:

$$\Delta\omega > 0 \text{ când } \Delta A > 0 \text{ și } \Delta\omega < 0 \text{ când } \Delta A < 0.$$

Stabilitatea soluțiilor periodice din (3.45) pot fi determinate în ipoteza că funcțiile $X(A, \omega)$ și $Y(A, \omega)$ sunt derivabile în raport cu parametrii A_0 și ω_0 din inegalitatea (3.47):

$$S_0 = \left(\frac{\partial X(A, \omega)}{\partial A} \right)_{A_0} \left(\frac{\partial Y(A, \omega)}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} - \left(\frac{\partial X(A, \omega)}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} \left(\frac{\partial Y(A, \omega)}{\partial A} \right)_{A_0}.$$

Oscilația întreținută caracterizată prin perechea (A_0, ω_0) , care este soluția ecuațiilor (3.44), este limita stabilă dacă $S_0 > 0$, limită instabilă dacă $S_0 < 0$ și limită semistabilă dacă $S_0 = 0$.

În cazul când ecuația caracteristică are soluții periodice, hodograful Mihailov trece prin origine (fig. 3.6, curba 1).

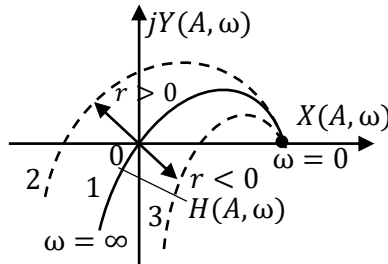


Fig. 3.6. Locul de transfer în planul Mihailov

Dacă se modifică amplitudinea $A = A_0 + \Delta A$, atunci se modifică și coeficienții ecuației caracteristice și se modifică și modulul r hodografului 1, care se va deplasa din origine (fig. 3.6, curba 2 când $r > 0$ sau curba 3 când $r < 0$). Din teoria sistemelor liniare se constată că dacă hodograful 1 prezintă curba 2 când $\Delta A > 0$, atunci oscilațiile se amortizează și sistemul este stabil conform condițiilor criteriului Mihailov, iar dacă hodograful 1 tinde către curba 3 când $\Delta A < 0$, atunci oscilațiile se destabilizează și sistemul este instabil.

Dacă ecuația caracteristică nu are rădăcini reale pozitive A_0 și ω_0 , atunci autooscilațiile nu sunt posibile în sistemul liniarizat.

Dacă $N(A)$ și $H(j\omega)$ sunt expresii complexe, atunci este dificil a găsi prin metode analitice soluțiile ecuațiilor (3.44). În aceste cazuri, se utilizează metodele grafice [4, 9, 12-18, 21].

Din analiza stabilității oscilațiilor întreținute în sistem cu utilizarea acestui criteriu rezultă că oscilațiile cu amplitudine mai mică sunt instabile și oscilațiile cu amplitudine mai mare sunt instabile.

Exemplul 3.2. Se consideră sistemul automat nelinier reprezentat din partea liniară cu funcția de transfer de forma:

$$H(s) = \frac{c_2 s^2 + c_1 s + c_0}{d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0}$$

și neliniaritatea ce este un releu cu zonă de insensibilitate și saturație (fig. 3.4) descris prin locul de transfer numai cu partea reală de forma:

$$N(A) = b(A) = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

Datele numerice: $c_2 = 5$, $c_1 = 2.5$, $c_0 = 10$, $d_3 = 120$, $d_2 = 79$, $d_1 = 16$, $d_0 = 1$, $b = 0.2$, $c = 14$.

Se cere: 1) utilizând metoda planului Mihailov, să se verifice posibilitatea existenței oscilațiilor întreținute în sistem și să se determine parametrii oscilațiilor; 2) să se verifice stabilitatea oscilațiilor întreținute în sistem.

Soluționare

1. Se dă ecuația caracteristică a sistemului nelinier în domeniul pulsație, utilizând substituția $s = j\omega$ și se obține:

$$\begin{aligned} L(A, j\omega) &= 1 + b(A) \frac{c_2(j\omega)^2 + c_1 j\omega + c_0}{d_3(j\omega)^3 + d_2(j\omega)^2 + d_1 j\omega + d_0} = \\ &= d_3(j\omega)^3 + d_2(j\omega)^2 + d_1 j\omega + d_0 + b(A)c_2(j\omega)^2 + \\ &+ j b(A)c_1\omega + b(A)c_0 = -j d_3\omega^3 - d_2\omega^2 + j d_1\omega + d_0 - \\ &\quad - b(A)c_2\omega^2 + j b(A)c_1\omega + b(A)c_0 = \\ &= (-d_2\omega^2 + d_0 - b(A)c_2\omega^2 + b(A)c_0) + \\ &+ j(-d_3\omega^3 + d_1\omega + b(A)c_1\omega) = X(A, \omega) + jY(A, \omega) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

unde părțile reală și imaginară au forma:

$$\begin{aligned} X(A, \omega) &= -d_2\omega^2 + d_0 - b(A)c_2\omega^2 + b(A)c_0 = \\ &= -\omega^2(d_2 + b(A)c_2) + d_0 + b(A)c_0 = 0; \\ Y(A, \omega) &= -d_3\omega^3 + d_1\omega + b(A)c_1\omega = \end{aligned} \quad (2)$$

$$= -d_3\omega^3 + \omega(d_1 + b(A)c_1) = -d_3\omega^2 + d_1 + b(A)c_1 = 0. \quad (3)$$

Din (2) și (3) se exprimă ω^2 :

$$\omega^2 = \frac{d_0 + b(A)c_0}{d_2 + b(A)c_2}, \quad (4)$$

$$\omega^2 = \frac{d_1 + b(A)c_1}{d_3}. \quad (5)$$

Expresiile (4) și (5) se egalează și, după unele transformări, se obține o ecuație algebrică de gradul doi cu necunoscuta coeficientul $b(A)$:

$$\frac{d_0 + b(A)c_0}{d_2 + b(A)c_2} = \frac{d_1 + b(A)c_1}{d_3},$$

$$d_3(d_0 + b(A)c_0) = (d_2 + b(A)c_2)(d_1 + b(A)c_1),$$

$$d_3d_0 + d_3b(A)c_0 = d_2d_1 + d_2b(A)c_1 + b(A)c_2d_1 + b^2(A)c_2c_1,$$

$$\begin{aligned} b^2(A)c_2c_1 + b(A)(d_2c_1 + d_1c_2 - d_3c_0) + d_2d_1 - d_3d_0 = \\ = a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

unde s-a notat: $x = b(A)$, $a_0 = c_2c_1 = 5 \cdot 2.5 = 12.5$, $a_1 = d_2c_1 + d_1c_2 - d_3c_0 = 79 \cdot 2.5 + 16 \cdot 5 - 120 \cdot 10 = -994.5$, $a_2 = d_2d_1 - d_3d_0 = 79 \cdot 16 - 120 \cdot 1 = 1144$.

Ecuația pătratică (6) se reprezintă în forma:

$$a_0x^2 + a_1x + a_2 = 12.5x^2 - 994.5x + 1144 = x^2 - 79.56x + 91.52 = 0,$$

care se soluționează și se obțin rădăcinile:

$$x_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0} = \frac{79.56 \pm \sqrt{79.56^2 - 4 \cdot 1 \cdot 91.52}}{2} = \frac{79.56 \pm 86.51}{2},$$

$$x_1 = b_1(A) = 78.3726, \quad x_2 = b_2(A) = 1.1474.$$

Pentru ambele rădăcini se determină ecuațiile algebrice în raport cu amplitudinea A .

Pentru prima rădăcină se dă ecuația:

$$x_1 = b_1(A) = \frac{4c}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} = \frac{4c}{\pi A^2} \sqrt{A^2 - b^2} = 78.3726,$$

$$\sqrt{A^2 - b^2} = 78.3726 \frac{\pi}{4c} A^2 = 78.3726 \frac{3.14}{4 \cdot 14} A^2 = 4.3945A^2,$$

$$19.3116A^4 - A^2 + b^2 = 19.3116A^4 - A^2 + 0.04 = 0,$$

$$19.3116z^2 - z + 0.04 = 0,$$

în care s-a notat $z = A^2$ și s-a obținut o ecuație pătratică, și soluționând-o se obțin

rădăcinile complexe:

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 19.3116 \cdot 0.04}}{2 \cdot 19.3116} = 0.0259 \pm j0.0374.$$

Rezultă că pentru rădăcina $x_1 = 78.3726$ oscilații întreținute nu există. Pentru a doua rădăcină se dă ecuația:

$$x_2 = b_2(A) = \frac{4c}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} = 1.1474,$$

$$\sqrt{A^2 - b^2} = 1.1474 \frac{\pi}{4c} A^2 = 1.1474 \frac{3.14}{4 \cdot 14} A^2 = 0.0643A^2,$$

$$0.00413A^4 - A^2 + b^2 = 0.00413A^4 - A^2 + 0.04,$$

$$0.00413z^2 - z + 0.04 = 0,$$

în care s-a notat $z = A^2$ și s-a obținut o ecuație pătratică și, soluționând-o, se obțin rădăcinile reale:

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 0.00413 \cdot 0.04}}{2 \cdot 0.00413} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 0.000661}}{0.00826} = \frac{1 \pm 0.9996}{0.00826},$$

$$z_1 = 242.0823, z_2 = 0.0484,$$

$$A_1 = \sqrt{242.0823} = 15.559, A_2 = \sqrt{0.0484} = 0.22.$$

Rezultă că pentru rădăcina $x_2 = b_2(A) = 1.474$ există două cicluri de oscilații întreținute cu amplitudinile $A_1 = 15.559$ și $A_2 = 0.22$.

Cunoscând valorile amplitudinilor A_1 și A_2 se calculează valorile pulsației ω_1 și ω_2 prin expresiile:

$$\omega_1^2 = \frac{d_0 + b(A)c_0}{d_2 + b(A)c_2} \Big|_{b(A)=A_1} = \frac{d_0 + A_1 c_0}{d_2 + A_1 c_2} = \frac{1 + 15.559 \cdot 10}{79 + 15.559 \cdot 5} = 0.9987,$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_1^2} = \sqrt{0.9987} = 0.9993 \text{ s}^{-1},$$

$$\omega_2^2 = \frac{d_0 + b(A)c_0}{d_2 + b(A)c_2} \Big|_{b(A)=A_2} = \frac{d_0 + A_2 c_0}{d_2 + A_2 c_2} = \frac{1 + 0.22 \cdot 10}{79 + 0.22 \cdot 5} = 0.03995,$$

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_2^2} = \sqrt{0.03995} = 0.1999 \text{ s}^{-1}.$$

În sistemul automat nelinier există două cicluri de oscilații întreținute cu parametrii amplitudinea și pulsația pentru ciclul unu $(A_1, \omega_1) = (15.559, 0.9993)$ și pentru ciclul doi $(A_2, \omega_2) = (0.22, 0.1999)$.

2. Pentru verificarea stabilității oscilațiilor se utilizează inegalitatea [4, 8, 11, 16, 17, 21]:

$$S_0 = \left(\frac{\partial X(A, \omega)}{\partial A} \right)_{A_0} \left(\frac{\partial Y(A, \omega)}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} - \left(\frac{\partial X(A, \omega)}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} \left(\frac{\partial Y(A, \omega)}{\partial A} \right)_{A_0} > 0. \quad (7)$$

Se determină derivatele parțiale ale sistemului de ecuații (2)-(3) și se calculează cu datele numerice pentru primul ciclu de oscilații periodice cu parametrii: $A_1 = 15.559$, $\omega_1 = 0.9993$ și se obține:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial X(A,\omega)}{\partial A} &= \frac{\partial}{\partial A} (-\omega^2 d_2 + \omega^2 b(A)c_2 + d_0 + b(A)c_0) = \\
 &= \frac{\partial}{\partial A} (-\omega^2 d_2 + d_0 + b(A)(\omega^2 c_2 + c_0)) = \frac{\partial b(A)}{\partial A} (\omega^2 c_2 + c_0) = \\
 &= (\omega^2 c_2 + c_0) \frac{\partial}{\partial A} \left(\frac{4c}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} \right) = (\omega^2 c_2 + c_0) \frac{4c}{\pi} \frac{\partial}{\partial A} \left(\frac{(A^2 - b^2)^{1/2}}{A^2} \right) = \\
 &= (\omega^2 c_2 + c_0) \frac{4c}{\pi} \left(\frac{2(A^2 - b^2) - A^2}{A^3 \sqrt{A^2 - b^2}} \right) = \\
 &= (0.9987 \cdot 5 + 10) \frac{4 \cdot 14}{3.14} \left(\frac{2(15.559^2 - 0.2^2) - 15.559^2}{15.559^3 \sqrt{15.559^2 - 0.2^2}} \right) = 1.1045; \\
 \frac{\partial X(A,\omega)}{\partial \omega} &= \frac{\partial}{\partial \omega} (-\omega^2 (d_2 + b(A)c_2) + d_0 + b(A)c_0) = \\
 &= -2\omega (d_2 + c_2 b(A)) = -2 \cdot 0.9993 (79 + 5 \cdot 1.1474) = -169.3554; \\
 \frac{\partial Y(A,\omega)}{\partial A} &= \frac{\partial}{\partial A} (-d_3 \omega^2 + d_1 + b(A)c_1) = c_1 \frac{\partial b(A)}{\partial A} = \\
 &= c_1 \frac{\partial}{\partial A} \left(\frac{4c}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} \right) = c_1 \frac{4c}{\pi} \left(\frac{2(A^2 - b^2) - A^2}{A^3 \sqrt{A^2 - b^2}} \right) = \\
 &= 2.5 \frac{4 \cdot 14}{3.14} \left(\frac{2(15.559^2 - 0.2^2) - 15.559^2}{15.559^3 \sqrt{15.559^2 - 0.2^2}} \right) = 0.1817; \\
 \frac{\partial Y(A,\omega)}{\partial \omega} &= \frac{\partial}{\partial \omega} (-d_3 \omega^2 + d_1 + b(A)c_1) = \\
 &= -2d_3 \omega = -2 \cdot 120 \cdot 0.9993 = -239.832.
 \end{aligned}$$

Se verifică inegalitatea (7):

$$\begin{aligned}
 S_0 &= \frac{\partial X(A,\omega)}{\partial A} \frac{\partial Y(A,\omega)}{\partial \omega} - \frac{\partial X(A,\omega)}{\partial \omega} \frac{\partial Y(A,\omega)}{\partial A} = \\
 &= 1.1045(-239.832) - (-169.3554)0.1817 = -234.1225.
 \end{aligned}$$

La valorile numerice ale parametrilor oscilațiilor ciclului unu cu amplitudinea $A_1 = 15.559$ și pulsația $\omega_1 = 0.9993$ s-a calculat indicele $S_0 = -234.1225$ și oscilațiile întreținute în sistem sunt instabile.

Similar s-au efectuat calculele pentru verificarea stabilității și pentru al doilea ciclu de oscilații periodice cu amplitudinea $A_2 = 0.22$ și pulsația $\omega_2 = 0.1999$, s-a determinat indicele $S_0 = 233654.343$ și oscilațiile întreținute în sistem sunt stabile. ■

3.4.3 Metoda planului Nyquist

Dacă partea liniară cu f.d.t. $H(s)$ este de ordin ridicat sau conține timp mort, atunci determinarea soluțiilor analitice este dificilă sau, în general, nu se poate obține. În aceste cazuri, autooscilațiile pot fi studiate în planul Nyquist (metoda grafo-analitică sau metoda Goldfarb) [4, 9, 13-18, 21].

Condiția de existență a autooscilațiilor în sistemul liniarizat este ecuația caracteristică a sistemului liniarizat în domeniul frecvență (3.23):

$$1 + N(A)H(j\omega) = 0$$

sau

$$N(A)H(j\omega) = -1. \quad (3.48)$$

Relația (3.48) exprimă condiția existenței oscilațiilor întreținute în sistemul neliniar, ce corespunde condițiilor de existență a autooscilațiilor în sistemul liniar conform criteriului Nyquist, care se reprezintă prin egalitățile:

$$|N(A)||H(j\omega)| = 1, \quad (3.49)$$

$$\arg N(A) + \arg H(j\omega) = \pm\pi. \quad (3.50)$$

Egalitatea (3.49) se numește bilanțul amplitudinilor, iar (3.50) – bilanțul fazelor [4, 9, 13-18, 21].

În aceste condiții, în sistemul neliniar se excită oscilații periodice, care se numesc oscilații întreținute sau autooscilații și sistemul este un generator de oscilații.

Din (3.49) se obține relația dintre *locul de transfer* al părții liniare $H(j\omega)$ și *locul de descriere* $N(A)$ al elementului neliniar în forma:

$$H(j\omega) = -\frac{1}{N(A)} = -G_N(A), \quad (3.51)$$

în care $G_N(A)$ se numește *locul de descriere invers negativ* sau *hodograful* invers al elementului neliniar.

Reprezentarea grafică a locului de transfer $H(j\omega)$ și a locului invers negativ $G_N(A)$ în planul complex (fig. 3.7) permite determinarea parametrilor oscilațiilor întreținute A_0, ω_0 și verificarea stabilității autooscilațiilor sistemului neliniar, descris prin modelul sistemului liniarizat, obținut prin metoda liniarizării armonice pentru cazurile

locului invers negativ $G_N(A)$ reprezentat prin curbele 1, 2, 3.

Existența oscilațiilor în sistem se observă numai când aceste două curbe se intersectează, ca în cazul curbei 3 a lui $G_N(A)$ și $H(j\omega)$ (fig. 3.7). Punctele de intersecție ale celor două locuri de transfer reprezintă sistemul la limită de stabilitate, când în sistem există oscilații întreținute.

În figura 3.7, curba 3 $G_N(A)$ cu punctele 1 și 2 de intersecție cu locul de transfer $H(j\omega)$ determină existența autooscilațiilor în sistem cu amplitudinea și frecvența corespunzătoare: parametrii în punctul 1 (A_1, ω_1) și în punctul 2 (A_2, ω_2). Din analiza autooscilațiilor existente în punctele 1 și 2 rezultă că punctul 1 corespunde unor autooscilații instabile, iar punctul 2 corespunde unor autooscilații stabile. În punctul 1 oscilațiile ce apar ca urmare a intersecției celor două locuri de transfer vor avea o amplitudine mai mare odată cu creșterea amplitudinii A a semnalului sinusoidal. Prin creșterea amplitudinii A a semnalului se intră în zona de instabilitate a sistemului automat neliniar.

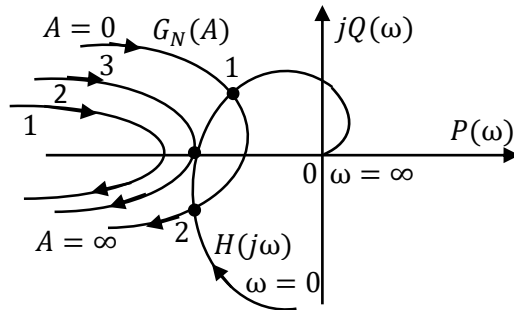


Fig. 3.7. Locurile de transfer ale sistemului neliniar în planul complex

În figura 3.7, curba 3 $G_N(A)$ cu punctele 1 și 2 de intersecție cu locul de transfer $H(j\omega)$ determină existența autooscilațiilor în sistem cu amplitudinea și frecvența corespunzătoare: parametrii în punctul 1 (A_1, ω_1) și în punctul 2 (A_2, ω_2). Din analiza autooscilațiilor existente în punctele 1 și 2 rezultă că punctul 1 corespunde unor autooscilații instabile, iar punctul 2 corespunde unor autooscilații stabile. În punctul 1 oscilațiile ce apar ca urmare a intersecției celor două locuri de transfer, vor avea o amplitudine mai mare odată cu creșterea amplitudinii A

semnalului sinusoidal. Prin creșterea amplitudinii A semnalului se intră în zona de instabilitate a sistemului automat neliniar.

Pentru determinarea stabilității autooscilațiilor existente în sistemul liniarizat se aplică următoarea condiție.

Prin deplasarea de-a lungul hodografului $G_N(A)$ în direcția creșterii amplitudinii A , pentru partea liniară stabilă, soluția periodică va deveni instabilă la intrarea în intersecția curbelor $G_N(A)$ și $H(j\omega)$ în punctul 1 și soluția periodică va deveni stabilă la ieșirea din intersecția acestor curbe în punctul 2.

Amplitudinea autooscilațiilor stabile $A_0 = A_2$ se determină de pe curba $G_N(A)$, iar frecvența $\omega_0 = \omega_2$ se determină de pe locul de transfer $H(j\omega)$ în punctul 2 de intersecție a celor două curbe.

Condiția necesară și suficientă ca un sistem automat neliniar să fie stabil este ca locul de transfer invers negativ $G_N(A)$ să nu intersecteze locul de transfer al părții liniare $H(j\omega)$ al sistemului (curba 1), impunându-se a fi plasat în stânga acestuia, când este parcurs de la frecvențe joase înspre frecvențe înalte.

Cazul curbei 2 a lui $G_N(A)$ este tangentă la locul de transfer $H(j\omega)$ și nu există informații pentru a determina autooscilațiile în sistemul neliniar.

Acest criteriu frecvențial simplificat de verificare a stabilității autooscilațiilor posibile în sistemul neliniar este necesar și suficient.

Exemplul 3.3. Se dă caracteristica statică $y = f(x)$ de tip releu cu zonă de insensibilitate și saturație reprezentată în figura 3.4 cu parametrii – zona de insensibilitate $b = 0.25$, amplitudinea $c = 10$ și locul de transfer $N(A)$ din exemplu 3.2 și tabelului A1.1. Anexa 1 conține numai coeficientul real de liniarizare armonică dat prin relația:

$$N(A) = b(A) = \frac{4c}{\pi A^2} \sqrt{A^2 - b^2} = \frac{4 \cdot 10}{3.14 A^2} \sqrt{A^2 - 0.25^2} = \frac{12.739}{A^2} \sqrt{A^2 - 0.25^2}.$$

Partea liniară se consideră o conexiune serie a elementului integrator și a două elemente cu inerție de ordinul unu descrisă prin funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{k}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} = \frac{k}{a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s},$$

în care parametrii au valorile numerice $k = 0.3$, $T_1 = 2$ s, $T_2 = 5$ s și coeficienții $a_0 = T_1 T_2 = 2 \cdot 5 = 10$ s², $a_1 = T_1 + T_2 = 2 + 5 = 7$ s, $a_2 = 1$.

Se cere să se studieze existența posibilelor autooscilații, determinarea parametrilor acestora și stabilitatea lor în planul Nyquist.

Soluționare. 1. În funcția de transfer al părții liniare, se utilizează substituția $s = j\omega$

și se obține locul de transfer:

$$H(j\omega) = \frac{k}{a_0(j\omega)^3 + a_1(j\omega)^2 + a_2j\omega} = \frac{k}{-a_1\omega^2 + j(a_2\omega - a_0\omega^3)} \frac{-a_1\omega^2 - j(a_2\omega - a_0\omega^3)}{-a_1\omega^2 - j(a_2\omega - a_0\omega^3)} =$$

$$= -\frac{ka_1\omega^2}{a_1^2\omega^4 + (a_2\omega - a_0\omega^3)^2} - j\frac{a_2\omega - a_0\omega^3}{a_1^2\omega^4 + (a_2\omega - a_0\omega^3)^2} = P(\omega) - jQ(\omega),$$

unde $P(\omega) = \frac{ka_1\omega^2}{a_1^2\omega^4 + (a_2\omega - a_0\omega^3)^2}$, $Q(\omega) = \frac{a_2\omega - a_0\omega^3}{a_1^2\omega^4 + (a_2\omega - a_0\omega^3)^2}$.

2. Se variază $\omega = 0 \dots \infty$, se calculează funcțiile $P(\omega)$ și $Q(\omega)$ și rezultatele se includ în tabelul 3.1, după care se construiește locul de transfer dat în figura 3.8.

3. Se consideră locul de transfer invers negativ:

$$-G_N(A) = -\frac{1}{N(A)} = -\frac{1}{b(A)} = -\frac{\pi A^2}{4c\sqrt{A^2 - b^2}} = \frac{3.14A^2}{4 \cdot 10\sqrt{A^2 - 0.25^2}} - \frac{0.0785A^2}{\sqrt{A^2 - 0.0625}}$$

Se variază amplitudinea $A = 0 \dots \infty$, se calculează valorile lui $G_N(A)$ și se includ în tabelul 3.1, după care se construiește locul de transfer $G_N(A)$ reprezentat în figura 3.8.

Tabelul 3.1. Datele numerice ale locurilor de transfer

Funcția	Frecvența ω		
$P(\omega)$	0	0.3162	∞
	0	-0.2128	0
$Q(\omega)$	$-\infty$	0	0
$G_N(A)$	Amplitudinea A		
	0	-0.042	∞

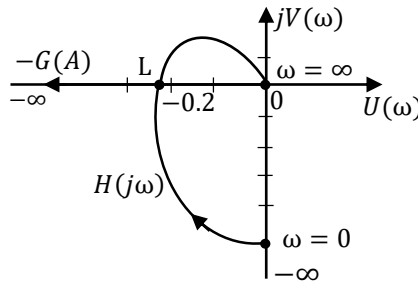


Fig. 3.8. Locurile de transfer $H(j\omega)$ și $G(A)$ al sistemului neliniar la ex. 3.3

Locurile de transfer $H(j\omega)$ și $G(A)$ se intersectează în punctul L și, rezultă, că în sistem sunt posibile autooscilații.

Se determină ecuația caracteristică a sistemului liniarizat:

$$L(s) = 1 + N(A)H(s) = 1 + b(A) \frac{k}{a_0s^3 + a_1s^2 + a_2s} =$$

$$= a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + kb(A) = 0.$$

În ecuația caracteristică se utilizează substituția $s = j\omega$ și se prezintă în domeniul pulsației:

$$H(j\omega) = -ja_0\omega^3 - a_1\omega^2 + ja_2\omega + kb(A) = X(A, \omega) + jY(A, \omega) = 0,$$

$$X(A, \omega) = -a_1\omega^2 + kb(A) = 0, Y(A, \omega) = a_2\omega - a_0\omega^3 = 0.$$

Se determină valoarea lui ω^2 din expresia lui $Y(A, \omega)$:

$$a_2\omega - a_0\omega^3 = 0, \omega_1 = 0, \omega_2^2 = \frac{a_2}{a_0} = \frac{1}{10} = 0.1, \omega_2 = 0.3162.$$

În expresia $X(A, \omega) = 0$ se substituie valoarea lui $\omega_2^2 = 0.1$ și valorile coeficienților, și după transformare se obține ecuația algebrică pe necunoscuta A de forma:

$$A^4 - 29.8053A^2 + 1.8628 = 0.$$

Ecuația algebrică se soluționează și se obțin valorile amplitudinii $A_1 = 5.4537$ și $A_2 = 0.1752$. Se alege amplitudinea $A_1 = 5.4537 > b = 0.25$ (zona de insensibilitate).

Astfel, în structura sistemului nelinier există autooscilații cu parametri $(A_1, \omega_2) = (5.4537, 0.3162)$.

Observație. Pentru cazul din ex. 3.3, când sistemul nelinier deschis este la limita de stabilitate (ecuația caracteristică are rădăcini pe axa imaginară) cu creșterea amplitudinii A , locul de transfer $H_d(j\omega) = b(A)H(j\omega)$ al sistemului deschis, conform criteriului Nyquist, nu înconjoară punctul critic $(-1, j0)$ și sistemul închis este stabil, și invers, cu reducerea amplitudinii locul de transfer al sistemului deschis înconjoară punctul critic $(-1, j0)$ și sistemul închis este instabil.

Aceste condiții se realizează când coeficientul liniarizării armonice $b(A)$ este o funcție în descreștere în condiția când amplitudinea are valoarea amplitudinii autooscilațiilor $A = A^*$ și are loc inegalitatea:

$$\frac{db(A)}{dA} \Big|_{A=A^*} = \frac{d}{dA} \left(\frac{k4c}{\pi} \sqrt{A^2 - b^2} \right) = \frac{k4c}{\pi} \frac{2b^2 - A^2}{A^3 \sqrt{A^2 - b^2}} < 0. \quad (*)$$

Se verifică condiția (*) pentru valorile amplitudinilor din ex. 3.3 $A_1 = 5.4537$ și $A_2 = 0.1752$ și se obțin valorile derivatelor: $\frac{db(A_1)}{dA} < 0$, $\frac{db(A_2)}{dA} > 0$, ceea ce corespunde calculelor efectuate corect.

3.5 Oscilații forțate

Se consideră sistemul nelinier (fig. 3.9), structura căruia este alcătuit din elementul nelinier descris de funcția $u = f(\varepsilon)$ și două elemente liniare cu funcțiile de transfer $H_1(s)$ și $H_2(s)$, supus acțiunii a

semnalului de referință $r(t)$ și perturbația $p(t) = B\sin\omega^*t$.

Descrierea acestui sistem se aduce la forma operațională:

$$Q(p)\varepsilon + P(p)f(\varepsilon) = Q(p)r - S(p)p, \quad (3.52)$$

unde $Q(p)$, $P(p)$ și $S(p)$ sunt polinoame de ordinul respectiv.

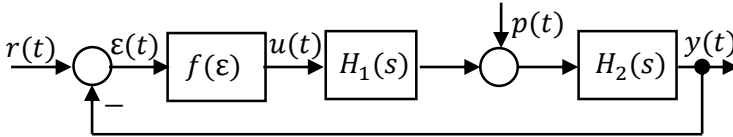


Fig. 3.9. Structura sistemului nelinier cu două semnale

Semnalul de referință $r(t)$ se modifică lent cu perioada $T = 2\pi/\omega^*$ în raport cu perturbația. Se consideră că în sistem se excită oscilații cu pulsația egală cu pulsația perturbației. În acest caz semnalul la ieșirea neliniarității se descrie:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon^*, \quad \varepsilon^* = A\sin(\omega^*t + \varphi), \quad (3.53)$$

unde ε_0 este valoarea constantă a erorii, ε^* - valoarea alternativă, A și φ sunt amplitudinea și faza oscilațiilor care este necesar de calculat.

Funcția neliniară $f(\varepsilon)$ după liniarizare are forma:

$$f(\varepsilon_0 + A\sin(\omega^*t + \varphi)) = B_0 + (b(A, \varepsilon_0) + q(A, \varepsilon_0)\frac{p}{\omega^*})\varepsilon^*, \quad (3.54)$$

unde B_0 , $b(A, \varepsilon_0)$, $q(A, \varepsilon_0)$ sunt coeficienții liniarizării armonice.

Se substituie expresiile (3.52)-(3.54) în (3.52) și se obține:

$$\begin{aligned} [Q(p) + P(p)(b(A, \varepsilon_0) + q(A, \varepsilon_0)\frac{p}{\omega^*})]\varepsilon^* + Q(p)\varepsilon_0 + P(p)u_0 &= \\ &= Q(p)r + P(p)u_0. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Expresia (3.55) se reprezintă prin componenta cu oscilații lente și componenta cu oscilații rapide:

$$Q(p)\varepsilon_0 + P(p)u_0 = Q(p)r, \quad (3.56)$$

$$\left[Q(p) + P(p)\left(b(A, \varepsilon_0) + q(A, \varepsilon_0)\frac{p}{\omega^*}\right) \right] \varepsilon^* = -S(p)p. \quad (3.57)$$

Luând în considerație

$$\varepsilon^* = A \sin(\omega^* t + \varphi) = \frac{A}{2j} (e^{j(\omega^* t + \varphi)} - e^{-j(\omega^* t + \varphi)}),$$

$$p e^{j(\omega^* t + \varphi)} = j \omega^* e^{j(\omega^* t + \varphi)}, p e^{-j(\omega^* t + \varphi)} = -j \omega^* e^{j(\omega^* t + \varphi)},$$

expresia (3.57) se aduce la forma:

$$\begin{aligned} & \frac{A}{2j} [(Q(j\omega^*) + P(j\omega^*)(b(A, \varepsilon_0) + jq(A, \varepsilon_0)))e^{j(\omega^* t + \varphi)} - \\ & - (Q(-j\omega^*) + P(-j\omega^*)(b(A, \varepsilon_0) - jq(A, \varepsilon_0)))e^{-j(\omega^* t + \varphi)}] = \\ & = -\frac{B}{2j} [S(j\omega^*)e^{j\omega^* t} - S(-j\omega^*)e^{-j\omega^* t}]. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Egalitatea (3.58) se realizează, dacă termenii de pe lângă $e^{j\omega^* t}$ și $e^{-j\omega^* t}$ din partea stângă și dreaptă sunt egali:

$$A(Q(j\omega^*) + P(j\omega^*)(b(A, \varepsilon_0) + jq(A, \varepsilon_0)))e^{j\varphi} = -BS(j\omega^*), \quad (3.59)$$

$$A(Q(-j\omega^*) + P(-j\omega^*)(b(A, \varepsilon_0) - jq(A, \varepsilon_0)))e^{-j\varphi} = -BS(-j\omega^*).$$

Aceste două ecuații sunt echivalente. Pentru a analiza răspunsul forțat cu oscilații, este necesar de a analiza ecuația (3.56) împreună cu (3.59).

Exemplul 3.4. Se consideră structura sistemului neliniar (fig. 3.9), în care neliniaritatea este un relee ideal cu amplitudinea $c = \pi/2$, funcțiile de transfer sunt $H_1(s) = (0.01s + 1)/(0.8s + 1)s$, $H_2(s) = 1/(0.2s + 1)$, semnalele $r = 0$, $p = -B \sin 10t$.

Se cere să se determine limita de sensibilitate a amplitudinii semnalului perturbației.

Soluționare. În cazul dat polinoamele în domeniul pulsației sunt:

$$Q(j\omega) = -0.16j\omega^3 - \omega^2 + j\omega^*, P(j\omega) = 0.01j\omega^* + 1,$$

$$S(j\omega^*) = -(0.8\omega^2 + j\omega^*),$$

Coeficientul liniarizării armonice a releului ideal este $b(A) = 4c/(\pi/A) = 2/A$.

Relația (3.59) are forma:

$$\begin{aligned} & A(-0.16j\omega^*3 - \omega^2 + j\omega^* + (0.01j\omega^* + 1)(2/A)) = \\ & = B(-0.8\omega^2 + j\omega^*)e^{-j\varphi}. \end{aligned}$$

În ultima relație se substituie $\omega^* = 10$, $e^{-j\varphi} = \cos\varphi - j\sin\varphi$ și se determină partea reală și imaginară și se obține sistemul de ecuații algebrice:

$$100A + 2 + 80B\cos\varphi - 10B\sin\varphi = 0,$$

$$-150A + 0.2 + 10B\cos\varphi - 80B\sin\varphi = 0,$$

care se soluționează în raport cu cosinusul și sinusul și se obține:

$$\cos\varphi = \frac{A-0.024}{B}, \sin\varphi = \frac{-2A+0.055}{B}.$$

Expresiile cosinusului și sinusului se ridică la pătrat, se adună și se obține ecuația pătratică:

$$A^2 - 0.014A + 0.00012 - 0.2B = 0,$$

care are rădăcină pozitivă când $B \geq 0.0188$.

Rezultă limita de sensibilitate a amplitudinii semnalului perturbației $B = 0.0188$.■

3.6 Metoda liniarizării vibratorii

Din analiza sistemelor automate neliniare rezultă că prezența diferitor tipuri de neliniarități în structura sistemului pot reduce calitatea funcționării sistemului, iar în unele cazuri, sistemul poate să nu funcționeze. De exemplu, în sistemele de urmărire (poziționare) regimul autooscilațiilor conduce la apariția oscilațiilor obiectului de reglare și, ca rezultat, se deteriorează regimul lent de urmărire, care nu se admite din condițiile de exploatare [9, 12]. În practica realizării sistemelor neliniare se utilizează metode care să reducă efectul negativ al neliniarității asupra calității funcționării sistemului sau metode de stabilizare a autooscilațiilor în sistem cu parametrii determinați – amplitudinea și pulsația.

Aceste posibilități de ridicare a performanțelor sistemului neliniar pot fi realizate prin aplicarea elementelor de corecție atât la partea liniară, cât și la neliniaritate. Pentru modificarea caracteristicii statice a neliniarității se utilizează elemente de corecție neliniare cu caracteristici statice inverse conectate în serie, în paralel și în reacție în așa mod, încât caracteristica statică echivalentă să fie liniară [9, 12].

O metodă eficientă de reducere a influenței neliniarității asupra calității funcționării sistemului este suprapunerea unui semnal de intrare suplimentar de înaltă frecvență asupra semnalului de joasă pulsație de intrare în neliniaritate. Aceste tipuri de semnale de înaltă frecvență, impuse sistemului, se numesc *semnale vibratorii*, care reduc influența negativă a neliniarităților: luft, histerezis etc.

Liniarizarea vibratorie are efectul de liniarizare a neliniarității cu aplicarea semnalului de înaltă frecvență suprapus cu semnalul de

intrare în neliniaritate. Astfel de semnale pot fi semnale ale autooscilațiilor sistemului sau semnale externe produse de generatoare speciale. Pentru ca semnalele autooscilațiilor sistemului să fie de înaltă frecvență, se utilizează reacții locale aplicate neliniarității, formând o buclă în care apar autooscilații cu parametrii determinați.

Considerăm structura unui sistem nelinier (fig. 3.10, a) cu neliniaritatea de tip releu ideal (fig. 3.10, b).

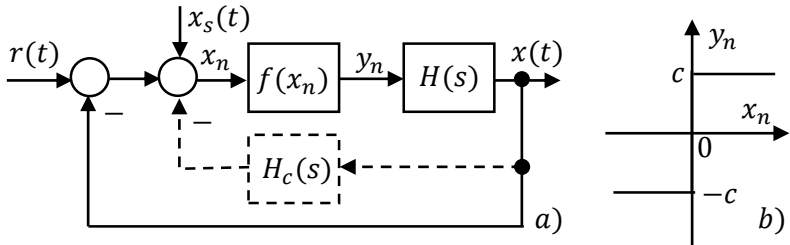


Fig. 3.10. Structura sistemului nelinier cu liniarizare vibratorie

La intrarea neliniarității se aplică semnalul de bază de joasă frecvență $r(t)$ și semnalul suplimentar de frecvență înaltă $x_s(t) = X_s \sin \omega_s t$ și se obține semnalul sumar $x_n(t)$:

$$x_n(t) = r(t) + x_s(t) = r(t) + X_s \sin \omega_s t. \quad (3.60)$$

Frecvența ω_s a semnalului suplimentar $x_s(t)$ se alege astfel, încât pe durata la câteva perioade a acesteia, semnalul $r(t)$ să fie practic constant, iar amplitudinea X_s a semnalului $x_s(t)$ să ia valoarea necesară pentru ca releul să funcționeze $X_s > |r(t)|$.

Pentru acest sistem este necesar ca partea liniară să fie filtru trece-joc și componenta $x_s(t)$ să fie filtrată:

$$|H(j\omega_s)| < |H(j\omega_t)|, \quad (3.61)$$

unde ω_t este frecvența de tăiere a părții liniare.

Semnalul de ieșire al neliniarității de asemenea reprezintă suma componentei de joasă frecvență $y_0(t)$, care este valoarea medie a semnalului $y_n(t)$ și a semnalului de înaltă frecvență $y_s(t)$:

$$y_n(t) = y_0(t) + y_s(t), \quad (3.62)$$

unde $y_0(t) = f_0(r(t))$, $y_s(t) = f_s(x_s(t))$ și funcțiile $f_0 \neq f_s \neq f$, fiindcă pentru neliniarități nu este valabil principiul superpoziției.

Semnalul $y_n(t)$ se prezintă în serie Fourier pe durata de o perioadă T a semnalului $x_s(t)$ și se aproximează funcțiile f_0 și f_s , având în vedere că $y_0(t) \approx \text{const}$ și se obține neliniaritatea:

$$y_n(t) = f(r, x_s(t)), \quad (3.63)$$

care se liniarizează:

$$y_n(t) \approx y_0 + b(X_s)x_s(t), \quad (3.64)$$

în care b este coeficientul de liniarizare armonică a neliniarității.

Componenta de joasă frecvență y_0 din (3.64) se determină prin relația:

$$y_0 = f_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(r, x_s(t)) dt \quad (3.65)$$

și este funcție de componenta r (lent variază) și de amplitudinea X_s a semnalului de frecvență înaltă de forma:

$$y_0 = F(r, X_s) = F(r). \quad (3.66)$$

Pentru releul ideal, expresia (3.66) se obține:

$$y_0 = \frac{2c}{\pi} \arcsin \frac{r}{X_s}, \quad (3.67)$$

în care se confirmă condiția ca semnalul r se procesează de elementul neliniar în funcție de amplitudinea semnalului suplimentar X_s .

Pentru neliniarități cu caracteristici statice univalente funcția $F(r)$ este monotonă, care poate fi liniarizată (fig. 3.11):

$$y_0 \approx k_n r, \quad (3.68)$$

în care $k_n = (\partial F_0 / \partial r)_{r=0}$ este coeficientul de transfer al neliniarității pentru semnalul de joasă frecvență.

Pentru releul ideal se obține:

$$k_n = \frac{2c}{\pi X_s}. \quad (3.69)$$

Efectul de liniarizare a neliniarității se evidențiază mai tare cu

cât amplitudinea semnalului X_s este mai mare, dar odată cu creșterea amplitudinii X_s se reduce coeficientul neliniarității k_n .

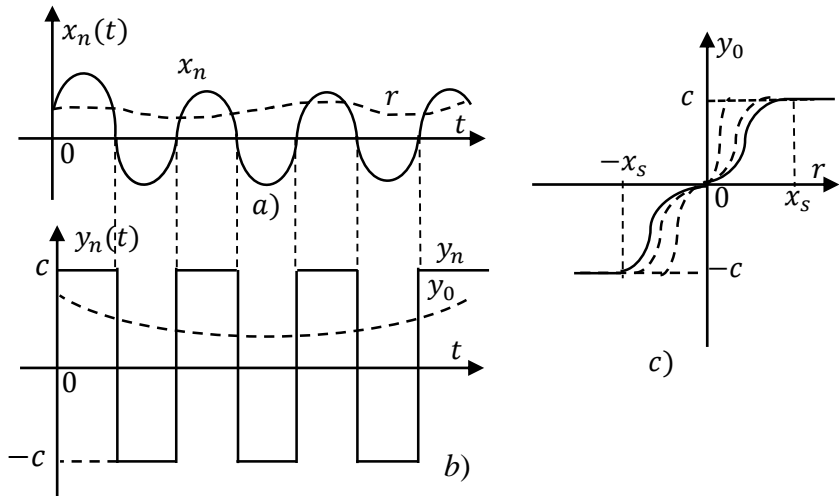


Fig. 3.11. Regimul de liniarizare vibratorie

În afară de efectul liniarizării cu aplicarea semnalului periodic exterior asupra sistemului neliniar, se pot compensa sau reduce autooscilațiile sistemului. În anumite condiții de alegere a pulsației ω_s și amplitudinii maxime X_s , regimul sistemului, la acțiunea semnalului suplimentar $x_s(t) = X_s \sin \omega_s t$, poate să treacă din regimul cu autooscilații cu pulsația ω_a în regim forțat cu pulsația ω_s . Acest efect poartă denumirea de *captare a pulsației*. Semnalul regimului forțat are amplitudinea mică și pulsația mai mare ca pulsația autooscilațiilor, iar compensarea autooscilațiilor sistemului neliniar conduc la ridicarea performanțelor sistemului automat.

Vibrațiile forțate de frecvență înaltă ale elementului neliniar pot fi excitate de semnalul unui generator de frecvență înaltă sau datorită proprietăților de autooscilații ale sistemului neliniar.

Pentru obținerea regimului de liniarizare vibratorie se pot utiliza semnale de înaltă frecvență produse de un generator special sau utilizarea proprietăților de autooscilații ale sistemului neliniar. În acest scop, pentru neliniaritate se construiește un contur suplimentar, în care

vor fi autooscilații cu înaltă frecvență, iar amplitudinea acestui semnal $X_s > r$. O variantă de regim de liniarizare vibratorie este regimul alunecător în sistemul nelinier [9, 12].

Exemplul 3.5. Se consideră structura sistemului nelinier (fig. 3.12), în care neliniaritatea este un relee ideal cu amplitudinea $c = \pi$, funcțiile de transfer au forma:

$$H_1(s) = k_1(0.1s + 1), H_2(s) = 1/(0.1s + 1),$$

$$H_3(s) = k_3(T_3s + 1), H_4(s) = 1/(s + 1).$$

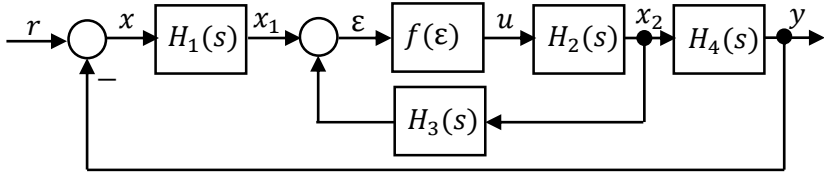


Fig. 3.12. Regimul de liniarizare vibratorie

Se cere să se determine parametri k_3 și T_3 astfel, ca la intrarea neliniarității amplitudinea autooscilațiilor $A = 4$ și elementul cu funcția de transfer $H_4(s)$ reduce valoarea amplitudinii de 100 ori.

Soluționare. Deoarece autooscilațiile sunt filtrate de elementul cu f.d.t. $H_4(s)$ (amplitudinea semnalului de ieșire este mai mică de 100 ori decât a semnalului de intrare), atunci se studiază autooscilațiile numai a conturului interior.

Funcția de transfer a părții liniare a conturului interior și coeficienții liniarizării armonice sunt:

$$H(s) = H_2(s)H_3(s) = \frac{k_3}{(0.1s^2 + s)(T_3s + 1)}, b(A) = \frac{4c}{\pi A}.$$

Condițiile de excitație a oscilațiilor se exprimă de relația:

$$-0.1T_3j\omega^3 - (0.1 + T_3)\omega^2 + j\omega + \frac{4k_3}{A} = 0,$$

sau în forma sistemului de ecuații algebrice:

$$-(0.1 + T_3)\omega^2 + \frac{4k_3}{A} = 0,$$

$$-0.1T_3j\omega^3 + j\omega = 0.$$

Se soluționează sistemul de ecuații și se obțin expresiile pentru parametrii autooscilațiilor:

$$A = \frac{4k_3T_3}{10T_3 + 1}, \omega^* = \sqrt{10/T_3}.$$

Deoarece elementul cu f.d.t. $H_4(s)$ reduce amplitudinea autooscilațiilor de 100 de ori, amplitudinea locului de transfer se descrie:

$$A_4(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 1}}$$

și la $\omega = \omega^*$ se obține:

$$A_4(\omega^*) = \frac{1}{\sqrt{1+10/T_3}} = 0.01, T_3 = 0.0001T_3 + 0.001, T_3 \approx 0.001.$$

În expresia amplitudinii se substituie valoarea lui $T_3 \approx 0.001$ și din condiția că amplitudinea la ieșirea neliniarității este egală cu 4 se obține:

$$A = \frac{4k_3T_3}{10T_3+1} = \frac{4k_3 \cdot 0.001}{1+0.01} = 4.$$

Din ultima expresie se calculează valoarea lui $k_3 = 1010$.

Se verifică dacă autooscilațiile sunt stabile:

$$\left. \frac{db(A)}{dA} \right|_{A=4} = -\frac{4}{A^2} = < -\frac{1}{4} < 0.$$

Rezultă că în sistem există autooscilații stabile.

Chestionar și probleme

1. Explicați principiul metodei funcției de descriere a neliniarității.
2. Ce reprezintă coeficienții liniarizării armonice pentru neliniarități univoce și neunivoce?
3. Care sunt cerințele pentru partea liniară ca în sistemului neliniar să existe oscilații periodice?
4. Prezențați și explicați ecuația caracteristică a sistemului neliniar.
5. Cum explicați noțiunea de oscilații întreținute în sistemul neliniar?
6. Care sunt parametrii oscilațiilor întreținute în sistemul neliniar?
7. Prin ce metode se studiază existența/absența autooscilațiilor în sistemul neliniar?
8. Explicați metoda de analiză a stabilității sistemului neliniar în planul Mihailov.
9. Prezențați procedura de analiză a stabilității sistemului neliniar în planul Nyquist.
10. Pentru structura sistemului neliniar alcătuit din releu ideal cu amplitudinea $c = 10$ și partea liniară cu elementul integrator cu constanta de timp $T_i = 5$ s înseriat cu două elemente cu inerție de ordinul unu cu parametrii $k_1 = 3$, $T_1 = 5$ s, $k_2 = 3$, $T_2 = 10$ s, determinați ecuația caracteristică în domeniul pulsație cu partea reală și imaginară.
11. În condițiile sistemului din p. 10, determinați posibilele autooscilații în sistemul neliniar și dacă există autooscilații, atunci calculați parametrii oscilațiilor întreținute – amplitudinea și pulsația lor.
12. Cum explicați răspunsul forțat al sistemului?
13. Explicați ce reprezintă metoda liniarizării vibratorii?

4 STABILITATEA SISTEMELOR AUTOMATE NELINIARE

4.1 Noțiuni de stabilitate a sistemului neliniar

Dinamica unui sistem automat se descrie prin variabilele de stare ce caracterizează transferurile și acumulările diferitor forme ale energiei din sistem și energia, sub diferitele sale forme, se caracterizează prin pătratul mărimilor de stare ca mărimi fizice ale sistemului [1, 4, 9, 12, 13, 17, 18, 20, 21].

Starea instabilă a unui sistem automat caracterizează pierderea echilibrului asupra acumulărilor și schimburilor de energie într-un sistem care este supus acțiunilor externe.

În sistemele automate liniare răspunsul sistemului $y(t)$ este soluția ecuației diferențiale ca suma a două componente ce caracterizează două regimuri separate: regimul liber (tranzitoriu) $y_l(t)$ și regimul forțat (staționar) $y_f(t)$.

Studierea stabilității sistemelor liniare se bazează pe utilizarea componentei libere care se obține în baza principiului superpoziției.

Pentru sistemele neliniare principiul superpoziției nu este aplicabil. Problema studierii stabilității sistemelor neliniare este mult mai dificilă. Pentru sistemele neliniare există mai multe noțiuni de stabilitate, în dependență de abaterile de la stările de echilibru și prezența semnalelor externe, care acționează asupra sistemului.

Sistemele automate după acțiunea semnalelor externe asupra lor se clasifică în două clase: sisteme autonome și sisteme neautonome.

În sistemele autonome sau invariante în timp acționează semnale externe, iar în sistemele neautonome este prezența semnalelor externe.

Pentru sistemele autonome neliniare sunt caracteristice două tipuri de procese: stare de echilibru și autooscilații. Pentru aceste procese se aplică noțiunile de stabilitate: stabilitatea stării de echilibru și stabilitatea autooscilațiilor.

Sistemele neautonome se caracterizează prin noțiunea de stabilitate a procesului tranzitoriu al sistemului neliniar sub acțiunea semnalelor externe.

Pentru simplificarea procedurilor de studiere a stabilității

sistemului neliniar cu utilizarea unor metode analogice sistemelor liniare s-a introdus noțiunea de mișcare neperturbată și mișcare perturbată a sistemului. Mișcarea neperturbată a sistemului poate fi o soluție particulară determinată de variația condițiilor inițiale și a semnalelor de intrare ale sistemului, cu un regim programat de funcționare a sistemului. Orice mișcare perturbată se obține la aplicarea unei perturbații de scurtă durată a timpului $t = 0$ asupra sistemului neliniar.

Starea de echilibru și regimul stabilizat al autooscilațiilor sistemului se pot prezenta ca și cazuri particulare de mișcare neperturbată a sistemului autonom neliniar.

Se consideră sistemul continuu mișcarea căruia se descrie în spațiul fazelor de un vector cu n variabile de stare: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Stabilitatea în sens Liapunov se tratează în modul următor. Fie un sistem descris de un sistem de ecuații diferențiale [4, 9, 12, 13, 17]:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{Y}(\mathbf{y}, t). \quad (4.1)$$

Se consideră o soluție $f(t)$ a sistemului (4.1) cu condițiile inițiale (t_0, f_0) . Soluția $y = f(t)$ se numește stabilă în sens Liapunov, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ se poate găsi o funcție $\eta = \eta(\varepsilon, t_0)$, astfel ca toate soluțiile perturbate $y(t)$, care la momentul inițial t_0 , satisfac condiția:

$$|y(t_0) - f(t_0)| < \eta \quad (4.2)$$

să satisfacă pentru orice $t > t_0$ condiția:

$$|y(t) - f(t)| < \varepsilon. \quad (4.3)$$

Pentru ca definiția să fie corectă trebuie respectate condițiile:

- 1) soluția $y = f(t)$ trebuie să fie definită pentru orice $t > t_0$;
- 2) toate soluțiile perturbate cu condiții inițiale suficient de apropiate de cele ale soluției $y = f(t)$ să fie prelungibile (să existe pe intervalul $[t_0, \infty)$ și să rămână tot timpul în apropierea soluției studiate.

Studiul stabilității se reduce la studiul stabilității *soluției banale* $y = 0$ în modul următor.

Se introduce ca noua funcție necunoscută (variabilă necunoscută):

$$x = y - f = \Delta, \text{ (sau } y = f + \Delta), \quad (4.4)$$

unde f este soluția neperturbată, deci $x = \Delta$ este perturbația.

Se obține sistemul de ecuații:

$$\dot{x} = Y(t, f + x) - Y(t, f) \quad (4.5)$$

sau în forma variabilelor necunoscute:

$$\dot{x} = X(x, t). \quad (4.6)$$

Soluția neperturbată acum este $x = 0$.

Definiția stabilității în cazul dat este:

Soluția banală se numește stabilă în sens Liapunov, dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ se poate găsi funcția $\eta = \eta(\varepsilon, t_0)$, astfel, dacă

$$|x(t_0)| < \eta \quad (4.7)$$

să se realizeze:

$$|x(t)| < \varepsilon \quad (4.8)$$

pentru orice $t > t_0$.

În general, numărul η depinde și de t_0 , deci $\eta = \eta(t_0)$.

Dacă η nu depinde de t_0 , deci $\eta = \eta(\varepsilon)$, atunci soluția banală se numește *uniform stabilă*.

Soluția banală se numește *asimptotic stabilă* dacă este stabilă și va exista $\eta = \eta(t_0)$ astfel încât:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = 0 \quad (4.9)$$

pentru $|\mathbf{x}(t_0)| < \eta$.

Dacă numărul $\eta \neq \eta(t_0)$, atunci soluția banală este *uniform asimptotic stabilă*.

Un sistem de ecuații diferențiale poate avea atât soluții stabile, cât și soluții instabile.

Dacă orice soluție perturbată a sistemului $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(t, \mathbf{x})$ este definită pe intervalul $[t_0, \infty)$ și are loc relația (4.9), atunci soluția banală se numește *global asimptotic stabilă*.

În acest caz, stabilitatea este proprietatea sistemului automat.

Definițiile prezentate mai sus pot fi aplicate pentru determinarea stabilității *stării de echilibru, oscilații întreținute și proceselor tranzitorii forțate* în sistemele neliniare.

Teoria Liapunov a introdus metode generale, foarte puternice, de studiu al stabilității sistemului automat. Acestea sunt metoda întâia și metoda a doua sau metoda directă Liapunov. Analiza stabilității sistemelor liniare se bazează de metoda întâia Liapunov [4, 9, 12, 13, 17].

4.2 Metoda directă Liapunov

Una dintre metode numită și *metoda a doua* a lui Liapunov este folosită frecvent în teoria sistemelor automate, care se bazează pe construcția unei funcții scalare numită *funcția Liapunov* cu anumite proprietăți.

Sistemul autonom neliniar (nu depinde de semnale externe și direct de timp) se descrie de sistemul de ecuații diferențiale prin variabilele de stare:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (4.10)$$

Starea de echilibru a sistemului se determină de sistemul de ecuații:

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.11)$$

Se consideră că sistemul (4.11) are unica soluție în origine: $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$.

Conform teoriei stabilității Liapunov, pentru studierea stabilității sistemului nelinier se introduce o funcție specială reprezentată în spațiul fazelor $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = V(\mathbf{x})$, care este numită funcția Liapunov cu următoarele proprietăți:

1. Funcția $V(\mathbf{x})$ și primele ei derivate parțiale sunt continue în vecinătatea unui domeniu deschis în jurul originii.

2. Funcția $V(\mathbf{x})$ este nulă în origine ($\mathbf{x} = 0, V(0) = 0$).

3. Funcția $V(\mathbf{x})$ se numește *pozitiv definită* dacă $V(0) = 0$ și $V(\mathbf{x}) > 0$ în tot domeniul, în afară de origine $\mathbf{x} = 0$.

O funcție $V(\mathbf{x})$, definită într-o vecinătate a punctului $\mathbf{x} = 0$, se numește *pozitiv definită*, dacă pentru $h > 0$ astfel, încât pentru $|\mathbf{x}| < h$, funcția $V(\mathbf{x})$ ia numai valori pozitive și se anulează numai în punctul $\mathbf{x} = 0$.

Exemplul 4.1. Exemple de funcții pozitiv definite pentru $n = 3$:

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, V(x) = 3x_1^2 + 2x_2^4 + x_3^6. \blacksquare$$

Funcția $V(\mathbf{x})$, care ia numai valori pozitive sau nule, anulându-se și în puncte $\mathbf{x} \neq 0$ se numește *pozitiv semidefinită* ($V(0) = 0, V(\mathbf{x}) \geq 0$).

Exemplul 4.2. Exemple de funcții pozitiv semidefinite pentru $n = 2$:

$$V(x) = (x_1 + x_2)^2, V(x) = 3x_1^2 + 6x_1x_2 + 3x_2^2. \blacksquare$$

Funcția $V(\mathbf{x})$ se numește *negativ definită* dacă $V(0) = 0$ și $V(\mathbf{x}) < 0$ ($W(\mathbf{x}) = -V(\mathbf{x}) < 0$, unde $V(\mathbf{x}) > 0$) în tot domeniul, în afară de origine $\mathbf{x} = 0$ și *negativ semidefinită* când $V(0) = 0, V(\mathbf{x}) \leq 0$ în tot domeniul.

Dacă funcția $V(\mathbf{x})$, fără a-și schimba semnul, se anulează și în alte puncte decât originea, atunci $V(\mathbf{x})$ se numește funcție *de semn constant*.

Funcțiile pozitiv și negativ definite sunt cazuri particulare de funcții de semn constant.

În metoda directă Liapunov se folosește și noțiunea de derivată în timp a funcției dV/dt în virtutea sistemului, adică se presupune că \mathbf{x} satisface sistemul diferențial considerat.

Se consideră sistemul (4.10) și funcția $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = V(\mathbf{x})$, determinarea derivatei de-a lungul traiectoriei de mișcare în raport cu timpul lui $V(\mathbf{x})$ în virtutea sistemului va fi:

$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{dV(\mathbf{x})}{dx_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{dV(\mathbf{x})}{dx_i} F_i(\mathbf{x}) = W((x_1, x_2, \dots, x_n)). \quad (4.12)$$

Definiție. Pentru ca sistemul studiat să fie stabil (soluția banală stabilă), este necesar a găsi o funcție $V(\mathbf{x})$, definită într-o vecinătate închisă a originii, pozitiv definită, cu derivata în virtutea sistemului negativ semidefinită sau identică nulă. Dacă derivata $dV(\mathbf{x})/dt$ este negativ definită, atunci stabilitatea sistemului este asimptotică.

Se dă mișcarea unui sistem în interiorul unui paraboloid cu vârful în originea sistemului de coordonate cu variabilele de stare x_1, x_2, x_3 dat în figura 4.1, care, pentru o vecinătate a originii și se construiesc o familie de spații închise de nivele egale cu valoarea $V(\mathbf{x})$, descrise prin ecuația:

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = C,$$

ce includ originea în interiorul lor cu condiția: $0 < |C_1| < |C_2| < |C_3|$.

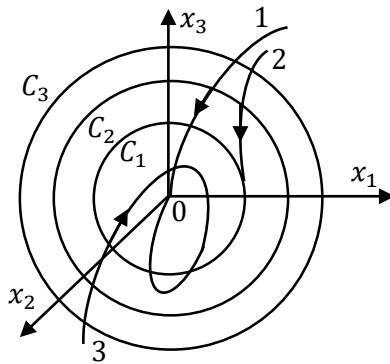


Fig. 4.1. Traiectoriile de fază ale sistemului neliniar

Mișcările sistemului sunt date de traiectoriile de fază 1, 2, 3.

Pentru traiectoria 1, derivata dV/dt este de semn definit și de semn invers cu $V(\mathbf{x})$ și rezultă că sistemul neliniar este asimptotic stabil.

Pentru traiectoria 2, derivata dV/dt este de semn constant și sistemul este stabil, însă nu este asimptotic stabil. Pot exista cazuri când traiectoriile de fază finisează în punctele spațiului stării când derivata $dV/dt = 0$ sau se conectează la spații închise $V = C_1$.

Trajectoria 3 reprezintă starea echilibrului asimptotic stabil și sistemul este asimptotic stabil, dar condițiile teoremei Liapunov nu se respectă (are valori mai mari ca C_1).

Din analiza cazului traiectoriei 3 rezultă următoarea concluzie.

Metoda a doua Liapunov satisface condițiile necesare de stabilitate, dar care nu sunt și suficiente [4, 9, 13, 17].

Metoda Liapunov nu are un algoritm unic de construire a unei funcții Liapunov $V(\mathbf{x})$. Pentru un sistem pot fi găsite mai multe funcții Liapunov $V(\mathbf{x})$.

Există mai multe metode de construire a funcției Liapunov $V(\mathbf{x})$:

- 1) metoda energetică;
- 2) metoda de separare a variabilelor;
- 3) metoda gradientului;
- 4) metoda ecuației matriciale Liapunov etc.

În continuare, expunem metoda ecuației matriciale Liapunov.

4.3 Metoda ecuației matriciale Liapunov

Se consideră un sistem dinamic liniar autonom de forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \quad (4.13)$$

Se presupune că pentru orice matrice \mathbf{Q} simetrică și pozitiv definită există o matrice \mathbf{P} simetrică și pozitiv definită, care este soluția ecuației matriciale Liapunov:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q}. \quad (4.14)$$

Dacă există o astfel de matrice \mathbf{P} , atunci starea de echilibru $\mathbf{x} = 0$ a sistemului este asimptotic stabilă.

Se construiește funcția Liapunov de formă pătratică:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}, \quad (4.15)$$

pentru care \mathbf{P} este o matrice simetrică pozitiv definită. Deci, funcția $V(\mathbf{x})$ este o funcție pătratică pozitiv definită. Derivata funcției $V(\mathbf{x})$ este:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{x}) &= \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x} = \\ &= \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}.\end{aligned}\quad (4.16)$$

Astfel, funcția $\dot{V}(\mathbf{x})$ este o funcție pătratică negativ definită și starea de echilibru $\mathbf{x} = 0$ a sistemului este asimptotic stabilă.

Etapele de aplicare a metodei Liapunov de analiză a stabilității sistemului sunt următoarele:

1. Se construiește ecuația matricială Liapunov și se determină elementele p_{ij} ale matricei \mathbf{P} .

2. Se verifică condițiile criteriului Sylvester și dacă aceste condiții sunt satisfăcute, atunci sistemul este asimptotic stabil (se garantează stabilitatea). În caz contrar, se reia procedura de construire a funcției Liapunov $V(\mathbf{x})$.

Exemplul 4.3. Se dă sistemul descris în variabilele de stare cu condițiile inițiale $x_{10} = x_{20} = 0$:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -ax_1 - bx_2.\end{aligned}$$

Se cere a construi funcția Liapunov $V(\mathbf{x})$ și a verifica condițiile de stabilitate ale sistemului.

Soluționare. Acest sistem linear în condițiile $a > 0$ și $b > 0$ este asimptotic stabil.

Se alege funcția Liapunov pozitiv definită de forma:

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 > 0.$$

Se determină derivata funcției $V(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} = 2x_1(x_2) + 2x_2(-ax_1 - bx_2) = \\ &= 2x_1x_2 - 2ax_1x_2 - 2bx_2^2 = -2x_2[(a-1)x_1 + bx_2].\end{aligned}$$

Derivata va fi negativ definită $\frac{dV}{dt} < 0$ dacă se respectă condițiile:

$$x_2 > 0, x_1 > -\frac{b}{a-1}x_2,$$

$$x_2 < 0, x_1 < -\frac{b}{a-1}x_2.$$

În toate celelalte cazuri derivata va fi pozitiv definită $\frac{dV}{dt} \geq 0$.

Dacă derivata $\frac{dV}{dt} < 0$ pentru $x_{10} \neq x_{20} \neq 0$ nu este tot timpul negativă, rezultă că condițiile de stabilitate după Liapunov nu sunt satisfăcute și sistemul automat nu este stabil. Aceasta se explică prin faptul că s-a ales nereușit funcția Liapunov. ■

Exemplul 4.4. Se consideră sistemul automat descris de funcția de transfer cu coeficientul de transfer k și constantele de timp a, b :

$$H(s) = \frac{k}{as^2+bs+1} = \frac{y(s)}{r(s)}.$$

Se dă ecuația diferențială a sistemului când semnalul de intrare $r = 0$:

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + y = 0.$$

Se introduc variabilele de stare $x_1 = y$, $\dot{x}_1 = \dot{y}$ și se obține sistemul de ecuații în condițiile inițiale nule $x_{10} = x_{20} = 0$:

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -bx_1 - ax_2$$

sau în formă vector-matricială:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

în care matricea este:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix}.$$

Se cere să se construiască funcția Liapunov $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P}\mathbf{x}$, utilizând metoda ecuației matriciale Liapunov și să se determine pentru acest sistem matricea \mathbf{P} din ecuația Liapunov, considerând că matricea \mathbf{Q} este unitară $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$.

Soluționare. Se alcătuiește ecuația matricială Liapunov (4.14):

$$\begin{bmatrix} 0 & -b \\ 1 & -a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se efectuează calculele ecuației matriciale:

$$\begin{bmatrix} -b(p_{11} + p_{12}) & -bp_{22} + p_{11} - ap_{12} \\ p_{11} - ap_{21} - bp_{22} & p_{12} - 2ap_{22} + p_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

din care se obține sistemul de ecuații algebrice:

$$\begin{aligned} -b(p_{11} + p_{12}) &= -1, \\ -bp_{22} + p_{11} - ap_{12} &= 0, \\ p_{11} - ap_{21} - bp_{22} &= 0, \\ p_{12} - 2ap_{22} + p_{21} &= -1. \end{aligned}$$

Acest sistem se soluționează și se obțin valorile coeficienților :

$$p_{11} = \frac{a^2+b^2+b}{2ab}, p_{12} = \frac{1}{2b}, p_{21} = \frac{1}{2b}, p_{22} = \frac{1+b}{2ab}.$$

Matricea \mathbf{P} este:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a^2+b^2+b}{2ab} & \frac{1}{2b} \\ \frac{1}{2b} & \frac{1+b}{2ab} \end{bmatrix}.$$

Matricea \mathbf{P} este simetrică și este pozitiv definită dacă determinanții calculați din această matrice sunt pozitivi:

$$\Delta_1 = \frac{a^2+b^2+b}{2ab} > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{a^2+b^2+b}{2ab} & \frac{1}{2b} \\ \frac{1}{2b} & \frac{1+b}{2ab} \end{vmatrix} = \frac{(a^2+b^2+b)(1+b)-a^2}{4a^2b^2} > 0.$$

Dacă determinanții Δ_1 , Δ_2 sunt pozitivi (criteriul Sylvester), atunci matricea \mathbf{P} este pozitiv definită și rezultă că funcția Liapunov $V(\mathbf{x})$ este pozitiv definită, iar starea de echilibru $\mathbf{x} = 0$ a sistemului este asimptotic stabilă. ■

4.4 Forme pătratice

În calitate de funcții de semn definit se utilizează forme pătratice care au forma:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &= V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j = \\ &= a_{11} x_1^2 + x_1 a_{12} x_2 + x_2 a_{21} x_1 + a_{22} x_2^2 = \end{aligned}$$

$$= V(\mathbf{x}) = [x_1, x_2] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Matricele \mathbf{A} de forme pătratică sunt simetrice, de unde rezultă $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = \overline{1, n}$, unde $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $a_{ij} = a_{ji}$, $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, în care coeficienții sunt reali, $\mathbf{x} \in R^n$ este vectorul variabililor (stărilor). Matricea \mathbf{A} este matricea reală, care întrunește proprietățile interne ale sistemului. Printr-o transformare simplă orice matrice nesimetrică se poate reduce la o matrice simetrică prin transformarea:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) = \mathbf{A}^T.$$

Această operație nu modifică funcția $V(\mathbf{x})$.

Condițiile necesare și suficiente ca o formă pătratică $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ să fie pozitiv definită sunt ca toți minorii principali (din stânga de sus) ai matricei \mathbf{A} să fie pozitivi (criteriul Sylvester):

$$a_{11} > 0; \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0; \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0; \dots;$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Condițiile necesare și suficiente ca o formă pătratică $V(\mathbf{x})$ să fie negativ definită – toți minorii principali (din stânga sus) ai matricei \mathbf{A} să altereze ca semn:

$$(-1)^m \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} > 0, m = 1, 2, \dots, n.$$

Formele pătratiche pozitiv (negativ) – semidefinite admit ca unul și numai unul din determinanți să se anuleze.

Forma pătratică la care matricea \mathbf{A} este diagonală se numește formă canonică. Dacă toate elementele diagonale ale matricei canonice \mathbf{A} sunt pozitive, atunci funcția $V(\mathbf{x})$ este pozitiv-definită, iar dacă un element este nul și toate celelalte își păstrează semnul, atunci funcția $V(\mathbf{x})$ este pozitivă, respectiv negativ-semidefinită. Elementele diagonale ale matricei canonice \mathbf{A} sunt valorile ei proprii, dacă matricea diagonală este matrice, care la matricele simetrice sunt reale. Dacă matricea \mathbf{A} nu este simetrică, atunci pot apărea valori proprii complex-conjugate, pentru care se pun în discuție părțile reale ale acestora.

Forma pătratică, la care matricea \mathbf{A} este matrice unitate $\mathbf{A} = \mathbf{I}$, atunci funcția $V(\mathbf{x})$ se numește formă pătratică normală. Orice formă pătratică $V(\mathbf{x})$ poate fi redusă prin transformări nesingulare la formele canonică și normală, conservând signatura. Prin aceasta, nedegenerarea, signatura definită pozitiv sau negativ, degenerarea și signatura nedefinită se recunosc imediat.

4.5 Stabilitatea absolută a sistemelor automate neliniare

Noțiunea de stabilitate absolută a sistemului automat neliniar se tratează pentru diferite clase de sisteme. Stabilitatea absolută este stabilitatea asimptotică a stării de echilibru globală a sistemului pentru neliniarități care aparțin unei clase determinate [4, 9, 13, 17]. Se consideră sistemul automat neliniar cu structura din figura 4.2, a , alcătuit din partea liniară cu f.d.t. $H(s)$ stabilă și elementul neliniar N cu caracteristica statică dată în figura 4.2, b , care aparține sectorului (k_1, k_2) și format de dreptele u_2 și u_1 .

Partea liniară se dă în forma funcției de transfer $H(s)$ sau a ecuațiilor de stare:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}.\end{aligned}\tag{4.17}$$

Partea neliniară se descrie prin relația:

$$v = f(y), f(0) = 0 \text{ și } u = -v.\tag{4.18}$$

Se introduc notațiile în abateri:

$$z = y - y_0, \quad (4.19)$$

$$u = v - v_0.$$

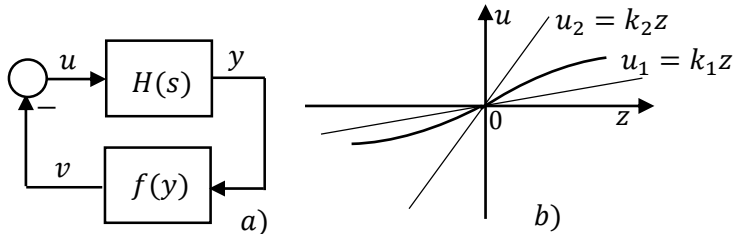


Fig. 4.2. Structura sistemului automat neliniar a) și neliniaritatea b)

Se consideră neliniaritatea liniarizată (aproximată) și se descrie ca funcție liniară:

$$u = kz. \quad (4.20)$$

Partea liniară (4.17) cu însemnările (4.19)-(4.20) va avea forma:

$$\dot{x} = Ax - bkz. \quad (4.21)$$

În cazul dat, constanta k reprezintă coeficientul de transfer al sistemului. Variațiile lui k pot fi date de limitele:

$$k_1 < k < k_2, \quad (4.22)$$

în care constanta k_1 poate lua și valoarea 0, iar constanta $k_2 \rightarrow \infty$.

În figura 4.2, b sunt trasate dreptele $u_1 = k_1z$ și $u_2 = k_2z$ cu unghiurile k_1 și k_2 .

Sistemul automat este stabil pentru orice caz pozitiv.

Problema se formulează astfel: dacă este dată o neliniaritate continuă univalentă, fiind cuprinsă în sectorul (k_1, k_2) din figura 4.2, b , este oare sistemul neliniar stabil?

În anul 1946, M.A. Aizerman a formulat problema stabilității absolute în modul următor [1, 9, 13, 17]: *un sistem automat neliniar format din partea liniară stabilă cu coeficientul de transfer unitar și partea neliniară cuprinsă în sectorul maximal (k_1, k_2) astfel, încât*

sistemul să fie *global asimptotic stabil*.

În forma expusă, partea neliniară nu este dată explicit, dar se referă la o clasă de neliniarități pentru care se cere verificarea stabilității sistemului.

Pentru definirea noțiunii de stabilitate absolută se utilizează notația $C_{(0,k)}$ mulțimea de funcții cu următoarele proprietăți:

- funcția $f \in C_{(0,k)}$ și este continuă, cel puțin pe porțiuni;
- funcția $f(0) = 0$;
- funcția satisface inegalitatea $0 \leq \frac{f(y)}{y} \leq k$, pentru $y \neq 0$, unde

valoarea lui k este o constantă pozitivă.

De asemenea, se introduc clasele de funcții $C_{(0,k)}$, $C_{(0,\infty)}$, $C_{(\varepsilon,k)}$ cu $\varepsilon > 0$ un număr pozitiv arbitrar de mic.

Sistemul considerat admite soluția banală $y = 0$ și se formulează următoarea definiție.

Definiție. Sistemul neliniar se numește *absolut stabil* dacă soluția banală este *global asimptotic stabilă* pentru orice neliniaritate din clasa $C_{(0,k)}$ (sau din clasele $C_{(0,\infty)}$, $C_{(\varepsilon,k)}$).

Stabilitatea absolută a sistemelor automate neliniare se studiază prin utilizarea a două metode importante:

- 1) metoda funcției Liapunov;
- 2) criteriul V.M. Popov de stabilitate absolută.

4.6 Problema lui Lurie

Metoda funcției Liapunov s-a dezvoltat, pornind de la așa numita *problema lui Lurie*, care se formulează astfel [4, 8, 11-17].

Se consideră sistemul neliniar cu structura din figura 4.3 descris de sistemul de ecuații:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + bf(z), \\ y &= f(z), \\ \dot{z} &= c^T x - rf(z),\end{aligned}\tag{4.23}$$

unde $f(z)$ este o funcție scalară, continuă și cu derivata continuă, verificând relațiile: $f(0) = 0$, $\frac{f(z)}{z} > 0$ pentru $z \neq 0$.

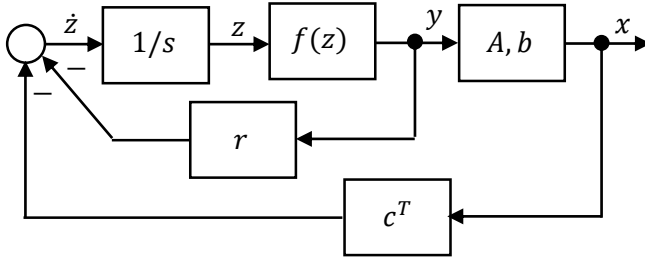


Fig. 4.3. Structura sistemului automat neliniar

Rezultă că $f(z)$ este o funcție din clasa $C_{(0,\infty)}$.

La cele expuse se mai consideră că există expresia:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \int_0^z f(h)dh = \infty, \quad (4.24)$$

care cu creșterea nemărginită a lui z funcția tinde la infinit.

Se consideră matricea $A \neq 0$ și este presupusă cu valori proprii în semiplanul stâng, iar $r > 0$ este o constantă pozitivă.

Se cere să se determine condițiile asupra parametrilor b , c^T și r din (4.23), astfel încât sistemul să fie absolut stabil, relativ la clasa de funcții $C_{(0,\infty)}$.

Se caută o funcție Lurie de forma:

$$V(x, z) = x^T P x + \int_0^z f(h)dh \quad (4.25)$$

numită forma Lurie-Postnikov [1, 4, 9, 12-17].

Matricea P din (4.25) se consideră soluția pozitiv definită a ecuației matriciale Liapunov:

$$A^T P + P A = -Q. \quad (4.26)$$

Matricea P din (4.26) este pătratică de dimensiunea $n \times n$, simetrică $P^T = P$ și care permite transformarea:

$$b^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} b = (b\mathbf{P})^T \mathbf{x} + (\mathbf{P}b)^T \mathbf{x} = 2(\mathbf{P}b)^T \mathbf{x}. \quad (4.27)$$

Matricea \mathbf{Q} este o matrice pătratică, pozitiv definită arbitrară (un caz particular este $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$). Matricea \mathbf{Q} este simetrică, deoarece:

$$\mathbf{Q}^T = -(\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A})^T = -(\mathbf{P}^T \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}^T) = -(\mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}) = \mathbf{Q}. \quad (4.28)$$

De asemenea, integrala din (4.25) este o funcție pozitiv definită de $(n + 1)$ coordonate \mathbf{x}, z .

Aceste condiții asigură că funcția V din (4.25) este pozitiv definită.

Calculând derivata lui V din (4.25) în virtutea sistemului și utilizând relațiile (4.27)-(4.28), se obține:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} + f(z) \dot{z} = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x} + \\ &+ f(z) (b^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} b) + f(z) c^T \mathbf{x} - r f^2(z) = \\ &= -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{P} b f(z) + \mathbf{x}^T c f(z) - r f^2(z) = \\ &= -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} - r f^2(z) + 2f(z) \left(\mathbf{P} b + \frac{1}{2} c \right)^T \mathbf{x} = \\ &= [\mathbf{x}^T \ f(z)] \begin{vmatrix} -\mathbf{Q} & \mathbf{P} b + \frac{1}{2} c \\ \mathbf{P} b + \frac{1}{2} c & -r \end{vmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ f(z) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Se constată că expresia (4.29) obținută este o formă pătratică.

Pentru stabilitatea sistemului este suficient ca această formă să fie negativ definită.

Este necesară asigurarea pozitivă a definirii matricei:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{Q} & -(\mathbf{P} b + \frac{1}{2} c) \\ -(\mathbf{P} b + \frac{1}{2} c)^T & r \end{vmatrix} > 0, \quad (4.30)$$

în care matricea \mathbf{Q} este pozitiv definită și primele inegalități ale criteriului Sylvester sunt satisfăcute, iar mărimea $r > 0$.

Aplicând condiții tip Sylvester pentru funcții pozitiv definite, este necesar și suficient să aibă loc inegalitatea:

$$r\mathbf{Q} > (\mathbf{P}b + \frac{1}{2}c)^T(\mathbf{P}b + \frac{1}{2}c). \quad (4.31)$$

Dacă se admite că matricea $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$, atunci inegalitatea (4.31) după transformare devine:

$$(2\mathbf{P}b + c)^T(2\mathbf{P}b + c) < 4r \quad (4.32)$$

sau rezultă:

$$|2\mathbf{P}b + c| < 2\sqrt{r}. \quad (4.33)$$

Inegalitatea (4.33) permite alegerea convenabilă a vectorului c și a parametrului r cu scopul de a asigura stabilitatea absolută a sistemului neliniar ca stabilitate asimptotică.

Se constată că neliniaritatea nu este în componența relației (4.33).

Alegând funcții Liapunov în forma Lurie-Postnikov, se pot rezolva multe probleme de stabilitate absolută pentru sisteme neliniare cu diverse neliniarități, care aparțin claselor indicate.

Exemplul 4.5. Se consideră sistemul neliniar (fig. 4.1, a) descris în forma:

$$H(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{k}{s^2 + a_1s + a_2}, \quad u = f(\varepsilon), \quad \varepsilon = -y,$$

unde k, a_1, a_2 sunt mărimi pozitive, iar pentru neliniaritate se respectă condițiile:

$$f(0) = 0, \quad \alpha \leq \frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon} \leq \beta, \quad 0 < \alpha < \beta < \infty.$$

Se cere să se analizeze stabilitatea absolută a sistemului neliniar, aplicând metoda directă Liapunov și alegând funcția Liapunov $V(\mathbf{x})$ în forma Lurie.

Soluționare. Pentru partea liniară se prezintă ecuația diferențială și se introduc variabilele de stare:

$$\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_2y(t) = ku(t),$$

$$x_1 = y, \quad \dot{x}_1 = x_2,$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -a_2x_1 - a_1x_2 - kf(x_1).\end{aligned}$$

Se construiește funcția Liapunov în forma:

$$V(x) = x_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + q \int_0^{x_1} f(x_1) dx_1,$$

unde b, c sunt constante arbitrare, $q > 0$ mărime arbitrară pozitivă.

Forma pătratică din funcția $V(x)$ va fi pozitiv definită dacă constantele b, c conform criteriului Sylvester trebuie să satisfacă condiția $c - b^2 > 0$.

Se determină derivata funcției Liapunov în virtutea ecuațiilor sistemului:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= 2(x_1 + bx_2)\dot{x}_1 + 2(bx_1 + cx_2)\dot{x}_2 + qf(x_1)\dot{x}_1 = \\ &= 2(x_1 + bx_2)x_2 - 2(bx_1 + cx_2)[a_2x_1 + a_1x_2 + kf(x_1)] + qf(x_1)x_2 = \\ &= 2(1 - ba_1 - ca_2)x_1x_2 - 2(ca_1 - b)x_2^2 - 2ba_2x_1^2 - \\ &\quad - 2bx_1kf(x_1) - 2ckx_2f(x_1) + qf(x_1)x_2.\end{aligned}$$

Dacă se admite că $1 - ba_1 - ca_2 = 0$ sau $c = (1 - ba_1)/a_2$ și $q = 2ck$, atunci derivata lui $\dot{V}(x)$ va avea forma:

$$\dot{V}(x) = -2(ca_1 - b)x_2^2 - 2ba_2x_1^2 - 2bkx_1f(x_1)$$

și va fi negativ definită dacă $b > 0$, $ca_1 - b > 0$ sau $0 < b < ca_1$ și se substituie c și se obține $0 < b < a_1/(x_1^2 + a_2)$.

Deoarece forma pătratică din funcția Liapunov este pozitiv definită, aceasta va crește nemărginit în condiția când $|x| \rightarrow \infty$ și starea de echilibru a sistemului este absolut stabilă. ■

Se consideră structura sistemului neliniar din figura 4.1, în care f.d.t. $H(s)$ a părții liniare este stabilă (toți polii sunt în semiplanul stâng) și cu coeficientul de transfer $k = 1$ (se consideră acest coeficient $k > 1$ este inclus în coeficientul neliniarității).

Problema se formulează astfel: să se determine sectorul maxim de stabilitate absolută (k_1, k_2) din cadranele I-III.

În formularea Aizerman se consideră o reacție liniară, ca un caz particular și sistemul neliniar se descrie astfel:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + bv, \\ y &= c^T x, \\ v &= -u,\end{aligned}\tag{4.34}$$

$$u = ky, \quad k > 0.$$

Valorile-limită pentru k se pot obține prin aplicarea criteriului Hurwitz, rezultând un sector în planul (y, u) numit sectorul Hurwitz. Sectorul Hurwitz coincide, pentru multe tipuri de f.d.t., cu *sectorul maxim de stabilitate absolută*.

Funcțiile de transfer pentru care este valabilă proprietatea de mai sus sunt: f.d.t. de ordinul doi, de ordinul trei cu cel mult un zero, de ordin oarecare cu toți polii reali și negativi și fără zerouri etc.

Aizerman a formulat la un moment dat ipoteza că sectorul maxim de stabilitate absolută coincide întotdeauna cu sectorul Hurwitz, dar, în general, această ipoteză s-a dovedit falsă.

Totuși, pentru funcțiile de transfer uzuale enumerate mai sus, ipoteza Aizerman este valabilă și acest fapt permite determinarea sectorului maxim de stabilitate absolută sau, dacă sectorul este dat, verificarea stabilității absolute, utilizând practic criteriul algebric Hurwitz.

Exemplul 4.6. Se consideră structura sistemului neliniar din figura 4.1 cu funcția de transfer a părții liniare:

$$H(s) = \frac{k_0}{(Ts+1)^3}, \quad k_0, T > 0.$$

Se cere: Să se determine sectorul maxim de stabilitate absolută k_{\max} a sistemului neliniar.

Soluționare. În acest caz, are loc ipoteza Aizerman. Transferând coeficientul k_0 al părții liniare în bloc neliniar, se obține ecuația caracteristică a sistemului liniarizat cu coeficientul de transfer din canalul direct $k = k_n k_0$ și aplicând criteriul Hurwitz se determină sectorul maxim de stabilitate absolută k_{\max} a sistemului:

$$A(s) = 1 + \frac{k}{(Ts+1)^3} = (Ts+1)^3 + k =$$

$$= T^3 s^3 + 3T^2 s^2 + 3Ts + 1 + k = a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0,$$

în care $a_0 = T^3$, $a_1 = 3T^2$, $a_2 = 3T$, $a_3 = 1 + k$ și se calculează determinantul:

$$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 = 3T^2 3T - T^3 (1 + k_n k_0) = 9 - 1 - k_n k_0 = 0.$$

Rezultă valoarea sectorului maximal de stabilitate absolută $k_{\max} = 8/k_0$. ■

Concluzii. Cu cât este mai mic coeficientul de transfer al părții liniare k_0 , cu atât este mai mare sectorul de stabilitate absolută k_{\max} .

4.7 Criteriul V.M. Popov de stabilitate absolută

Se consideră structura unei familii de sisteme automate neliniare (fig. 4.4), alcătuită din partea liniară cu funcția de transfer $H(s) = C(s)/D(s)$, având toți polii în semiplanul stâng ($Re p_i < 0$, stabilă asimptotic), strict proprie și cu coeficientul de transfer $k_l = 1$, iar neliniaritatea $u = f(y)$ reprezintă o familie care aparține clasei $C_{(0,k)}$ sau $C_{(0,\infty)}$.

Criteriul Popov de stabilitate absolută se formulează astfel: *sistemul neliniar închis este absolut stabil, dacă există un număr real $q > 0$ astfel, încât să aibă loc relația (condiție suficientă de inegalitate):*

$$Re[(1 + jq\omega)H(j\omega)] > -\frac{1}{k}, \text{ pentru } \omega \geq 0, \quad (4.35)$$

în care constanta $k < \infty$, iar $\lim_{\omega \rightarrow \infty} H(j\omega) = 0$.

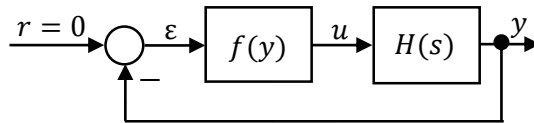


Fig. 4.4. Schema structurală a sistemului neliniar

Aceste condiții de stabilitate rezultă din operațiile cu valori mici ale neliniarității sau din robustețea sistemului analizat.

Criteriul Popov admite o remarcabilă interpretare grafică. Pornind de la locul de transfer al părții liniare:

$$H(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega), \quad (4.36)$$

relația (4.36) devine:

$$U(\omega) - q\omega V(\omega) > -\frac{1}{k}. \quad (4.37)$$

Se introduc notațiile:

$$\begin{aligned} x &= U(\omega), \\ y &= \omega V(\omega). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Relația (4.37) cu însemnările (4.38) devine:

$$x - qy > -\frac{1}{k}. \quad (4.39)$$

Relația (4.39) reprezintă ecuația dreptei:

$$x - qy + \frac{1}{k} = 0, \quad (4.40)$$

care este numită *dreapta Popov*.

În continuare, se introduce noțiunea *locul de transfer Popov* sau *hodograful modificat*, care reprezintă curba definită parametric și relația (4.36) devine:

$$H^*(j\omega) = U(\omega) + j\omega V(\omega) = U^*(\omega) + jV^*(\omega), \omega \in [0, \infty), \quad (4.41)$$

unde $U^*(\omega) = U(\omega)$, $V^*(\omega) = \omega V(\omega)$.

Se modifică ω de la $0 \cdots \infty$, se calculează partea reală $U^*(\omega)$ și partea imaginară $V^*(\omega)$ și în scară se construiește locul de transfer modificat $H^*(j\omega)$ al părții liniare a sistemului neliniar, care se dă în figura 4.5, iar $H(j\omega)$ este locul de transfer inițial al părții liniare.

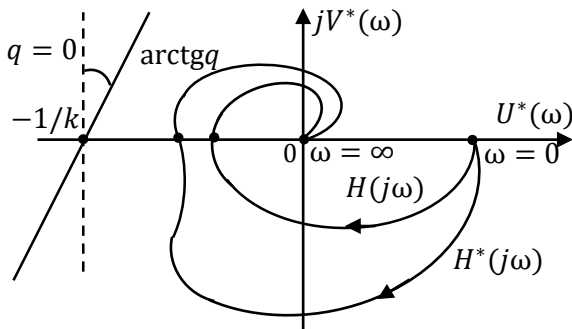


Fig. 4.5. Locurile de transfer inițial $H(j\omega)$ și modificat $H^*(j\omega)$

Se determină valoarea coeficientului de transfer al sistemului

deschis $k = k_n k_l$, unde k_n este coeficientul caracteristicii neliniare, iar k_l coeficientului de transfer al părții liniare.

Se determină punctul cu coordonatele $(-1/k, j0)$ și se indică pe semiaxa negativă.

Prin punctul cu coordonatele $(-1/k, j0)$ se trasează dreapta Popov la un unghi cu panta egală cu $1/q$.

Criteriul Popov se formulează astfel:

Definiție. La variația lui ω de la $0 \cdots \infty$ sistemul neliniar este absolut stabil, dacă hodograful modificat $H^*(j\omega)$ este complet situat în semiplanul definit de dreapta Popov, în care se găsește originea.

Pentru ca sistemul neliniar să fie absolut stabil este necesar și suficient să existe un astfel de număr $q > 0$, încât să se poată duce o dreaptă la unghiul $\arctg q$ în raport cu dreapta $q = 0$ (verticală) prin punctul cu coordonatele $(-1/k, j0)$ care să lase hodograful modificat de aceeași parte a dreptei ca și originea.

Se constată că panta dreptei este arbitrară. Dacă nu există un astfel de $q > 0$, atunci criteriul Popov nu se aplică, deci, nu se poate afirma nimic despre stabilitatea absolută a sistemului neliniar.

În problema în care se cere sectorul maxim de stabilitate, se duce dreapta Popov astfel, încât intersecția cu axa absciselor să fie cât mai aproape de origine.

Concluzii. În general, criteriul Popov de stabilitate absolută este un criteriu de tip suficient și nu asigură sectorul maximal de stabilitate absolută a sistemului neliniar.

Exemplul 4.7. Partea liniară a sistemului neliniar se descrie prin funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{k}{(Ts+1)^3}, k, T > 0.$$

Se cere să se determine punctul de intersecție al locului de transfer modificat cu axa absciselor care va prezenta valoarea-limită a coeficientului de transfer al sistemului deschis.

Soluționare. Se determină expresia locului de transfer inițial $H(j\omega)$ și modificat $H^*(j\omega)$, aplicând substituția $s = j\omega$:

$$H(j\omega) = \frac{k(1-j\omega T)^3}{(1+\omega^2 T^2)^3} = \frac{k(1-\omega^2 T^2)}{(1+\omega^2 T^2)^3} + j \frac{k(\omega^3 T^3 - 3\omega T)}{(1+\omega^2 T^2)^3} = U(\omega) + jV(\omega),$$

$$H^*(j\omega) = \frac{k(1-\omega^2T^2)}{(1+\omega^2T^2)^3} + j\omega \frac{k(\omega^3T^3-3\omega T)}{(1+\omega^2T^2)^3} = U^*(\omega) + jV^*(\omega).$$

Se variază pulsația $\omega = 0 \cdots \infty$ și se construiește locul de transfer modificat $H^*(j\omega)$ (fig. 4.6).

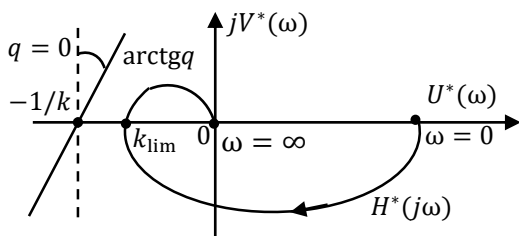


Fig. 4.6. Locul de transfer modificat $H^*(j\omega)$

La valoarea lui $\omega = 0$, locul de transfer inițial și modificat au valoarea:

$$H(j\omega)_{\omega=0} = H^*(j\omega)_{\omega=0} = k.$$

Intersecția locului de transfer modificat $H^*(j\omega)$ cu axa absciselor se obține pentru:

$$V^*(\omega) = \omega \frac{k(\omega^3T^3-3\omega T)}{(1+\omega^2T^2)^3} = 0 \text{ sau } \omega k(\omega^3T^3 - 3\omega T) = \omega^2T^2 - 3 = 0,$$

$$\omega^2 = \frac{3}{T^2}, \quad \omega = \frac{\sqrt{3}}{T}.$$

Se determină valoarea părții reale la valoarea pulsației $\omega = \frac{\sqrt{3}}{T}$:

$$U^*(\omega)_{\omega=\frac{\sqrt{3}}{T}} = \frac{k(1-\omega^2T^2)}{(1+\omega^2T^2)^3} = -\frac{2k}{4^3} = -0.03125k.$$

Punctul de intersecție al locului de transfer modificat $H^*(j\omega)$ al părții liniare are coordonatele $(-0.03125k, j0)$. Deci, valoarea-limită a coeficientului de transfer al sistemului deschis este $k_{\text{lim}} = 8/k$. ■

Exemplul 4.8. Partea liniară a sistemului nelinier (fig. 4.4) se descrie prin funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{0.5}{0.5s^2 + 1.5s + 1}.$$

Neliniaritatea aparține sectorului $f(y) \in (0; 10)$.

Se cere să se studieze stabilitatea absolută a sistemului nelinier, aplicând criteriul Popov.

Soluționare. În funcția de transfer a părții liniare se substituie $s = j\omega$ și se determină expresia locului de transfer inițial $H(j\omega)$ și modificat $H^*(j\omega)$:

$$H(j\omega) = \frac{0.5}{0.5(j\omega)^2 + 1.5j\omega + 1} = \frac{0.5(1-0.5\omega^2)}{(1-0.5\omega^2)^2 + 2.25\omega^2} - j \frac{1.5\omega}{(1-0.5\omega^2)^2 + 2.25\omega^2} = U(\omega) + jV(\omega),$$

$$H^*(j\omega) = \frac{0.5(1-0.5\omega^2)}{(1-0.5\omega^2)^2 + 2.25\omega^2} - j \frac{1.5\omega^2}{(1-0.5\omega^2)^2 + 2.25\omega^2} = U(\omega) + jV^*(\omega).$$

Se variază $\omega = 0 \dots \infty$ și se calculează expresiile $U(\omega)$, $V(\omega)$ și $V^*(\omega)$ și rezultatele sunt incluse în tabelul 4.1, iar locul de transfer modificat $H^*(j\omega)$ este dat în figura 4.7.

Tabelul 4.1. Calculul locului de transfer modificat al sistemului

Funcția	Frecvența ω					
	0	0.1	1	$\sqrt{2}$	5	∞
$U(\omega)$	0.5	0.51	0.1	0	-0.03	0
$V(\omega)$	0	-0.16	-0.6	-0.63	-0.04	0
$V^*(\omega)$	0	-0.016	-0.6	-0.67	-0.2	0

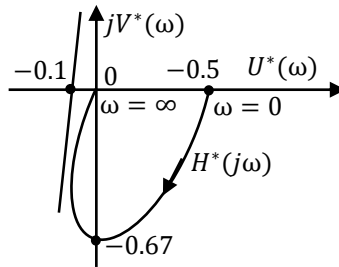


Fig. 4.7. Locul de transfer modificat $H^*(j\omega)$ la ex. 4.8

Funcția de transfer a părții liniare este de gradul doi și locul de transfer modificat este trasat în cadranele patru și trei.

Se determină punctul critic $(0.1, j0)$ și prin acesta se trasează dreapta Popov (fig. 4.7).

Se constată că sunt satisfăcute condițiile de stabilitate și rezultă că sistemul neliniar este absolut stabil. ■

4.8 Criteriul Popov în cazul părții liniare neutre sau instabile

În cazul când partea liniară este neutră (conține elemente integratoare) sau instabilă ($\text{Re } p_i \geq 0$), atunci criteriul Popov în forma expusă mai sus nu poate fi utilizat pentru studierea stabilității absolute

a sistemului neliniar [4, 9, 12-18]. În aceste cazuri, se aplică proceduri de transfigurare echivalentă a schemei-bloc structurale a sistemului neliniar (fig. 4.4) astfel, încât partea liniară să devină stabilă.

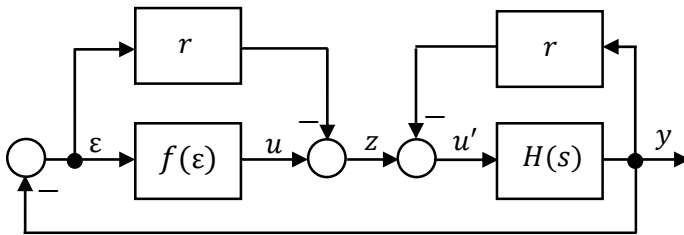


Fig. 4.8. Schema structurală transformată a sistemului neliniar

Această transformare se realizează prin introducerea în structura sistemului neliniar a două elemente dinamice ideale cu un coeficient de transfer $r > 0$ (valoare arbitrară) și cu semne diferite, aplicate la partea liniară în reacție negativă, iar la neliniaritate în conexiune paralelă cu semn negativ. Structura transformată a sistemului neliniar se reprezintă în figura 4.8.

Partea liniară stabilizată are funcția de transfer echivalentă:

$$H_e(s) = \frac{H(s)}{1+H(s)r} = \frac{C_e(s)}{D_e(s)}. \quad (4.42)$$

Partea neliniară echivalentă ca și conexiune paralelă a neliniarității cu elementul ideal cu semn negativ se descrie astfel:

$$f_e(\varepsilon) = f(\varepsilon) - r\varepsilon, \quad \varepsilon = -y. \quad (4.43)$$

Semnalul la intrarea părții liniare se descrie astfel:

$$u' = z - ry = u + ry - ry = f(\varepsilon) + ry - ry = f(\varepsilon), \quad (4.44)$$

deci, este același semnal ca în structura inițială.

În acest caz, neliniaritatea nu mai aparține sectorului $(0, k)$, dar aparține sectorului $(r, k + r)$.

În continuare, pentru acest sistem modificat se aplica criteriul Popov în formularea data mai sus.

Concluzii. Pentru criteriul Popov și metoda directă Liapunov s-

a stabilită o legătură între acestea. S-a demonstrat că dacă pentru un sistem neliniar este valabil criteriul Popov, atunci pentru acest sistem există funcția V în forma Lurie-Postnikov care va avea în tot spațiul stărilor derivata în virtutea sistemului dV/dt negativă cu semn constant.

Se constată că la studierea stabilității absolute a sistemului neliniar cu o neliniaritate se preferă utilizarea criteriului Popov datorită simplității lui în formă frecvențială.

Criteriul Popov de stabilitate absolută se utilizează la analiza stabilității absolute a stării de echilibru a sistemului neliniar atât cu caracteristici univalente, cât și caracteristici cu histerezis, joc etc.

Dacă locul de transfer modificat $H^*(j\omega)$ are formă regulată, atunci criteriul Popov coincide cu criteriul Nyquist în condiția că neliniaritatea se aproximează ca o dreaptă $u = k\varepsilon$.

Astfel de sisteme neliniare se numesc sisteme absolut stabile în unghiul Hurwitz, în sensul că acest unghi este format dintre dreapta $u = k_l\varepsilon$, unde k_l este coeficientul de transfer limită al sistemului liniar și axa absciselor (în cazul general $u = r_l\varepsilon$, unde r_l este limita de jos).

Dacă locul de transfer modificat $H^*(j\omega)$ al părții liniare are o formă complexă, atunci criteriul Popov este mai sever decât criteriul Nyquist. Din figura 4.9 rezultă că după criteriul Nyquist valoarea $1/k_{l1}$ este mai mică decât valoarea $1/k_{l2}$ după dreapta Popov, deci, rezultă că $k_{l1} > k_{l2}$.

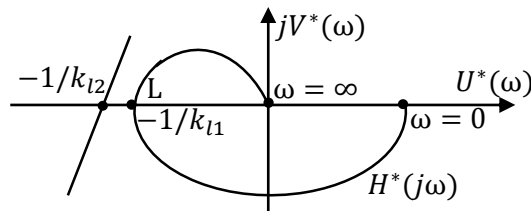


Fig. 4.9. Locul de transfer modificat

În cazul când locul de transfer modificat $H^*(j\omega)$ al sistemului neliniar are forma alurii $H(j\omega)$ (o formă regulată cu punctul L), atunci valoarea coeficientului-limită k_{lim} , calculat după metoda Popov, coincide cu valoarea coeficientului k_{cr} determinat după criteriul

Nyquist, când neliniaritatea $f(y)$ este aproximată cu dreapta kz (4.20). În aceste cazuri, stabilitatea absolută a sistemului se studiază, utilizând criteriul Nyquist.

4.9 Criteriul cercului de stabilitate absolută

Se consideră structura sistemului din figura 4.4 alcătuită din neliniaritate, iar partea liniară cu funcția de transfer $H(\omega)$ are o formă complexă (fig. 4.5). Sistemului neliniar i se impun următoarele condiții:

1) neliniaritatea aparține sectorului:

$$f(y) \in (k_1, k_2), k_1, k_2 \in (-\infty, \infty), k_1 < k_2;$$

2) sistemul liniar obținut din sistemul neliniar, în condiția de aproximare a neliniarității $f(y)$ cu caracteristica liniară kz (4.20), este asimptotic stabilă pentru toți $k_1 < k < k_2$.

Dacă sunt satisfăcute condițiile 1) și 2) și inegalitatea:

$$1 + (k_1 + k_2)\text{Re}H(j\omega) + k_1 k_2(\text{Im}H(j\omega) + \text{Re}^2(j\omega)) \geq 0, \quad (4.45)$$

atunci sistemul neliniar este absolut stabil [4, 21].

În formă grafică inegalitatea (4.45), când sunt satisfăcute condițiile 1) și 2), pentru stabilitatea absolută a sistemului neliniar este necesar ca locul de transfer Nyquist al părții liniare (fig. 4.10) să nu intersecteze cercul hașurat cu centrul la distanța:

$$l = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right). \quad (4.46)$$

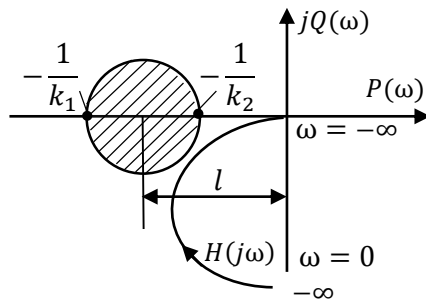


Fig. 4.10. Locul de transfer al sistemului

Exemplul 4.9. Se consideră structura sistemului nelinier (fig. 4.4), alcătuită din neliniaritate care aparține sectorului $f(y) \in (0.3; 8)$ și partea liniară instabilă descrisă de funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{k_l}{(T_1s-1)(T_2s+1)}.$$

Se cere să se stabilească condițiile necesare de stabilitate absolută a sistemului automat nelinier.

Soluționare. Se stabilizează partea liniară, introducând elementul dinamic ideal cu coeficientul de transfer r în canalul de reacție (fig. 4.8) și același element se conectează în paralel la elementul nelinier cu semnul minus (fig. 4.8).

Se determină funcția de transfer echivalentă a părții liniare stabilizată:

$$H_e(s) = \frac{H(s)}{1+rH(s)} = \frac{k_l}{(T_1s-1)(T_2s+1)+rk_l} = \frac{k_l}{T_1T_2s^2+s(T_1-T_2)-1+rk_l}$$

și neliniaritatea echivalentă:

$$f_e(y) = f(y) - ru,$$

care aparține sectorului $f_e(y) \in (0.3 - r; 8 - r)$.

Conform condițiilor necesare de stabilitate absolută a sistemului nelinier, funcția de transfer echivalentă a părții liniare trebuie să fie stabilă. Pentru stabilitatea acesteia este necesar ca coeficienții ecuației caracteristice să fie pozitivi: $T_1 - T_2 > 0$, $-1 + rk_l > 0$.

Pentru utilizarea criteriului Popov se consideră $r = 0.3$ și se determină sectorul modificat căruia îi aparține neliniaritatea:

$$f_e(y) \in (0.3 - r; 8 - r) = f_e(y) \in (0.3 - 0.3 - r; 8 - 0.3) = f_e(y) \in (0; 7.7).$$

Se determină coeficientul de transfer al părții liniare:

$$-1 + rk_l > 0 \text{ sau } k_l > 0.33.$$

Funcția de transfer a părții liniare este de gradul doi și în condițiile $T_1 > T_2$, $0.33 < k_l < k_{\max}$ (k_{\max} este o valoare) locul de transfer modificat este situat în cadranele patru și trei (fig. 4.10). În aceste condiții, prin punctul critic $(-1/7.7, j0)$ se trasează dreapta Popov și, astfel, condițiile criteriului Popov sunt satisfăcute. Rezultă că în condițiile $T_1 > T_2$, $0.33 < k_l < k_{\max}$, sistemul nelinier este absolut stabil. ■

4.10 Stabilitatea absolută a răspunsului sistemului nelinier

Stabilitatea absolută a punctului de echilibru al sistemului nu este suficientă întotdeauna pentru funcționarea normală a sistemului nelinier la acțiunea semnalelor de referință și perturbație.

Rezultă că în sistemul neliniar, în care există puncte de echilibru stabile, este necesar a menține și stabilitatea absolută a răspunsului în sistemul supus acțiunilor semnalelor externe.

Pentru structura standard a sistemului neliniar cu partea liniară instabilă (fig. 4.8) la acțiunea semnalelor exogene limitate în amplitudine este suficientă condiția de stabilitate absolută a răspunsului sistemului în forma [4, 9, 13, 18]:

$$\operatorname{Re} \frac{H(j\omega)}{1+rH(j\omega)} + \frac{1}{k-r} > 0, \quad (4.47)$$

în care $H(j\omega)$ este funcția de transfer a părții liniare instabile, $r > 0$ – coeficientul de transfer al unui element ideal cu mărimea arbitrară mică pozitivă, care se conectează în reacția negativă la partea liniară pentru stabilizarea acesteia, $k = k_n k_l$ – coeficientul de transfer al sistemului neliniar deschis. La condiția (4.47) se adaugă condiția derivatei neliniarității care să se găsească în domeniul:

$$r + p \leq \frac{du(x)}{dx} \leq k + p, \quad (4.48)$$

în care $p > 0$ este o mărime mică arbitrară, mică pozitivă.

În cazul părții liniare stabile, condiția (4.47) este valabilă, dar mărimea r este ca cea din (4.48). Dacă $r = 0$, atunci din (4.45) rezultă:

$$\operatorname{Re} H(j\omega) + \frac{1}{k} > 0 \text{ sau } k \operatorname{Re} H(j\omega) + 1 > 0. \quad (4.49)$$

În expresia (4.46) se introduce notația $k/r = A$ și se obține:

$$\operatorname{Re} \frac{kH(j\omega)}{A+kH(j\omega)} + \frac{1}{A-1} > 0, \quad (4.50)$$

în care:

$$kH(j\omega) = kP(\omega) + jkQ(\omega). \quad (4.51)$$

În planul se prezintă $kP(\omega) - kQ(\omega)$, locul geometric al punctelor, schimbând semnul inegalității în egalitate în (4.50) și se obțin ecuațiile curbelor de tip circumferințe de forma:

$$\left[kP(\omega) + \frac{1}{2}(A + 1) \right]^2 + kQ(\omega)^2 = \frac{1}{4}(A - 1)^2. \quad (4.52)$$

Aceste circumferințe intersectează punctul critic $(-1, j0)$ și au raza $R = (A - 1)/2$, care sunt situate la stânga de dreapta $kP(\omega) = -1$ (fig. 4.11). Fiecărei circumferințe îi corespunde un punct cu $A = \frac{k}{r} \geq 1$, iar al doilea punct al circumferinței este situat pe semiaxa reală negativă $(-A, j0)$.

Inegalitatea (4.50) se realizează când locul de transfer modificat al părții liniare $kH(j\omega)$ nu va intersecta familia de circumferințe, deci, răspunsul sistemului va fi stabil.

Dacă coeficientul de transfer $k = \infty$ sau $r = 0$, atunci $A = \infty$ și circumferința se transformă în dreaptă verticală, care trece prin punctul $(-1, j0)$. Dacă răspunsul este absolut stabil pentru $A = \infty$, atunci condiția este valabilă pentru orice A . Când $A = 1$, circumferința se transformă în punctul $(-1, j0)$ și condițiile suficiente de stabilitate absolută a răspunsului sistemului nelinier se transformă în condiții necesare și suficiente pentru stabilitatea sistemului linear la $k = r$.

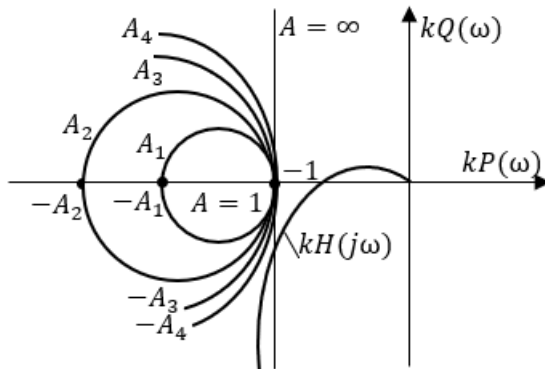


Fig. 4.11. Locul geometric al rețelei de circumferințe

Rezultă că dacă răspunsul sistemului este absolut stabil, atunci este absolut stabil și punctul de echilibru al sistemului neliniar. Această proprietate a sistemului neliniar este identică cu proprietatea de stabilitate a sistemului liniar.

Pentru valorile lui A la trasarea circumferințelor se impune condiția: $1 < A_1 < A_2 < A_3 < A_4 < \infty$.

Condițiile de stabilitate ale răspunsului sistemului neliniar sunt mai riguroase decât condițiile de stabilitate ale stării de echilibru a procesului: acestea impun condiții de limitare a derivatei neliniarității și corespund condițiilor de stabilitate absolută Popov la $q = 0$, care prezintă linia verticală – dreapta Popov ($A = \infty$) din figura 4.11.

4.11 Performanțele sistemului automat neliniar

4.11.1 Formularea problemei

Problema de analiză a sistemelor automate neliniare constă în determinarea performanțelor, ce caracterizează calitatea regimului de funcționare a sistemului neliniar. Pentru aceasta este necesar a soluționa ecuația diferențială neliniară, care descrie dinamica sistemului neliniar și prezentat răspunsul tranzitoriu al sistemului la acțiunea semnalelor externe și la modificarea condițiilor inițiale. Pentru sistemul neliniar, când semnalele externe sunt nule, dar apare mișcarea în sistem datorită abaterilor condițiilor inițiale, acesta este răspunsul tranzitoriu care prezintă *componenta liberă* (după analogie cu sistemele liniare). Dacă asupra sistemului neliniar acționează semnale externe, atunci răspunsul tranzitoriu se numește *componentă forțată*, care determină regimul de funcționare în regim de echilibru (regim staționar).

Deoarece în sistemele neliniare nu poate fi aplicat principiul superpoziției, răspunsul tranzitoriu în sistem nu poate fi prezentat prin suma componentelor libere și forțate.

În sistemele neliniare pot fi obținute performanțe mai ridicate în comparație cu sistemele liniare și procese optime după rapiditate.

Calitatea proceselor în sistemele neliniare se modifică cu variația semnalelor externe și perioada autooscilațiilor nu este

constantă, dar se modifică ca funcție de variația erorii sistemului.

Pentru soluționarea problemelor de analiză, în sistemele neliniare se utilizează metode numerice de rezolvare a sistemelor de ecuații diferențiale, care descriu dinamica sistemului.

Determinarea stărilor de echilibru al sistemului neliniar și stabilitatea lor, prin metodele expuse, nu sunt suficiente pentru garantarea funcționării normale a sistemului la acțiunea semnalelor externe.

4.11.2 Performanțele sistemului automat neliniar

Unui sistem neliniar i se aplică aceleași performanțe de bază ca și unui sistem liniar cu deosebirea că aceste mărimi depind de valorile semnalelor externe: eroarea staționară ε , timpul de reglare t_r , eroarea dinamică sau suprareglarea σ , numărul de oscilații sau numărul de abateri de la regimul staționar λ etc.

Pentru determinarea performanțelor sistemelor neliniare pot fi utilizate metode directe și indirecte.

În etapa actuală, pentru determinarea performanțelor sistemului neliniar se utilizează metode directe – simularea pe calculator a sistemului neliniar cu structura și modelele matematice cunoscute ale elementelor sistemului cu aplicarea diverselor pachete de programe și ridicarea răspunsului sistemului la semnalele aplicate la intrările sistemului și determinarea performanțelor.

Dintre metodele indirecte pot fi utilizate: metoda funcțiilor Liapunov, criteriul Popov de stabilitate absolută, gradul de stabilitate η etc.

În sistemele neliniare, pentru care starea de echilibru s-a analizat cu aplicarea metodei funcției Liapunov sau criteriului Popov de stabilitate absolută, se poate determina gradul de stabilitate absolută a răspunsului sistemului. Această posibilitate constă în analiza condițiilor necesare, pentru care micșorarea variațiilor răspunsului perturbat la modificarea condițiilor inițiale și a răspunsului este mai rapidă decât procesul etalon $M_0 e^{-\eta_0 t}$, unde M_0 este constanta care depinde de valoarea mărimii inițiale a excitației, iar η_0 – gradul de stabilitate.

Astfel, gradul de stabilitate η_0 determină timpul de reglare a sistemului, care nu va fi mai mare decât trei constante de timp ale exponentei $e^{-\eta_0 t}$:

$$t_r \leq \frac{3}{\eta_0}, \quad (4.53)$$

iar pentru răspunsul sistemului este valabilă condiția:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \eta e^{\eta_0 t} = 0. \quad (4.54)$$

Pentru stabilitatea absolută a răspunsului sistemului neliniar este suficient să fie satisfăcută inegalitatea:

$$Re(1 + jq\omega)H(j\omega - \eta_0) + \frac{1}{k} > 0, \quad (4.55)$$

care se verifică prin aplicarea condiției:

$$Re \frac{H(j\omega - \eta_0)}{1 + rH(j\omega - \eta_0)} + \frac{1}{k - r} > 0. \quad (4.56)$$

Pentru relațiile (4.55) și (4.56) se modifică pulsația $\omega = 0 \dots \infty$ și se calculează locul de transfer modificat al părții liniare cu valoarea gradului de stabilitate impus sistemului:

$$H^*(j\omega - \eta_0) = P(\omega - \eta_0) + j\omega Q(\omega - \eta_0). \quad (4.57)$$

După datele calculate se construiește locul de transfer modificat $H^*(j\omega - \eta_0)$ și prin punctul critic $(-1/k, j0)$ se trasează dreapta Popov cu unghiul $1/q$ astfel, încât locul de transfer să fie situat la dreapta.

Se utilizează și alte metode de determinare a performanțelor sistemului neliniar [16, 18].

Dacă în sistemul automat neliniar se instalează autooscilații, atunci performanțele sistemului se determină după regimul oscilațiilor pentru care se determină amplitudinea pozitivă A_1 , amplitudinea negativă A_2 , pulsația $\omega = 2\pi/T$, unde T este perioada oscilațiilor și

timpul de stabilizare a autooscilațiilor $t_r = t_{st}$.

Chestionar și probleme

1. Cum explicați noțiunea de stabilitate absolută a sistemului neliniar?
2. Care sunt metodele de studiere a stabilității absolute a sistemului neliniar?
3. Care cerințe se impun caracteristicilor statice ale neliniarităților la analiza stabilității absolute a sistemului neliniar?
4. Explicați metoda Liapunov de analiză a stabilității sistemului neliniar.
5. Ce reprezintă problema Lurie de construire a funcției Liapunov?
6. Explicați reprezentarea geometrică a criteriului Popov de stabilitate absolută.
7. Care sunt etapele de verificare a stabilității absolute după criteriul Popov a sistemului neliniar, alcătuit din releul ideal cu amplitudinea c și partea liniară descrisă de funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{k}{a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}.$$

8. Utilizați datele din p. 6 și prezentați relațiile de calcul al coeficientului de transfer limită a sistemului neliniar conform criteriului Hurwitz.
9. Explicați cum se analizează stabilitatea absolută a sistemului neliniar dacă în componența părții liniare există un element integrator.
10. Partea liniară a sistemului neliniar se descrie prin funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{0.1}{(0.1s+1)^3}.$$

Verificați dacă sistemul neliniar va fi absolut stabil în unghiul $[0.1; 10]$.

11. Partea liniară a sistemului neliniar se descrie prin funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{0.1}{s(0.1s+1)^2}.$$

Verificați dacă sistemul neliniar va fi absolut stabil în unghiul $[0.1; 10]$.

12. Ce semnifică noțiunea de stabilitate absolută a răspunsului sistemului automat neliniar?

5 SISTEME AUTOMATE DISCRETE

5.1 Introducere

Odată cu dezvoltarea vertiginoasă a tehnicii de calcul și aplicarea acesteia în automatica industrială, sunt utilizate pe larg sistemele discrete cu conducere automată. Așadar, se evidențiază două tipuri de sisteme automate discrete (SAD) din două motive [1, 4, 11-14, 17, 18]:

1. Sisteme cu eșantionare inerentă, când instalația tehnologică sau alte elemente ale sistemului sunt discrete după natura fizică și informația în aceste sisteme există numai în momentele discrete de timp. Exemple de sisteme automate discrete de această categorie sunt sistemele de radiolocație cu diverse obiecte (de detectare și conducere (urmărire), transmiterea la distanță a unor semnale, care sunt prelucrate prin eșantionare și modulare pentru asigurarea calității transmisiei etc.). Există mai multe fenomene fizice și biologice, procese sociale și economice a căror dinamică adecvat poate fi descrisă numai prin modele discrete.

2. Sisteme în care informația există în timp continuu, dar intenționat (special) se discretizează (se eșantionează) pentru obținerea unor noi proprietăți în comparație cu sistemele continue. Aceste proprietăți pot fi: realizare simplă, fiabilitate ridicată, ridicarea preciziei, dimensiuni reduse și costuri mici. Dezvoltarea vertiginoasă a tehnicii de calcul și utilizarea pe scară largă a microprocesoarelor în sistemele de conducere automată incită și mai mult interesul pentru sistemele automate discrete.

5.2 Discretizarea și modulația semnalelor

Sistemul automat discret este alcătuit din unul sau mai multe elemente discrete, la ieșirea cărora semnalul este prezentat în timp discret ca o succesiune de impulsuri și elemente continue liniare și/sau neliniare semnalele cărora sunt în timp continuu. Elementul discret este elementul la intrarea căruia se aplică semnalul continuu, iar la ieșirea

lui se obține semnalul discret. Procedura de transformare a semnalului continuu $x(t)$ în semnal discret se numește *cuantizare* sau *discretizare*. Se evidențiază trei tipuri de discretizare.

1. Discretizarea (cuantizarea) în nivel (amplitudine) care transformă semnalul continuu în forma de semnal continuu-discret cu cuanta $h = \Delta x = x_{i+1} - x_i$.

2. Discretizarea în timp, care se numește *eșantionare*, transformă semnalul continuu de la intrare $x(t)$ într-o succesiune de impulsuri (tren de impulsuri).

3. Discretizarea în nivel și timp transformă semnalul continuu de la intrare în cuante apropiate valorilor semnalului continuu în momentele discrete de timp, prioritate se dă momentelor de timp.

Cuantizarea în nivel este o operație neliniară asupra funcției discretizate, iar eșantionarea este o funcție liniară asupra funcției discretizate.

Sistemul automat discret care conține elemente de cuantizare în nivel se descrie ca un sistem neliniar de tip releu.

Sistemul automat discret care conține elemente de eșantionare în timp se prezintă ca sistem liniar.

Sistemul automat discret care conține elemente de cuantizare în nivel și discretizare în timp se numește sistem automat numeric (SAN).

Sistemul automat discret de tipul releu și numeric este un sistem automat neliniar.

Vom studia numai sisteme liniare cu eșantionare pentru care axa timpului se discretizează și $t = kT$, unde $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ este șirul de numere reale, iar $T = \Delta t = t_{i+1} - t_i$ este perioada de eșantionare (de repetare).

Operația de eșantionare transformă semnalul continuu $x(t)$ într-o succesiune de impulsuri $x(kT)$, la care amplitudinea (fig. 5.1, *a*), durata (fig. 5.1, *b*) sau perioada de eșantionare (fig. 5.1, *c*) este funcție de amplitudinea semnalului de intrare continuu la momentele de eșantionare. Această transformare a semnalului de către eșantionator se tratează ca proces de modulație a succesiunii de impulsuri conform legii de modificare a semnalului de intrare, iar eșantionatorul – ca modulator de impulsuri. Astfel, se modulează parametrii impulsului: amplitudinea

x_i , durata impulsului τ_i și perioada de eșantionare T sau frecvența de eșantionare $\omega_e = 2\pi/T$.

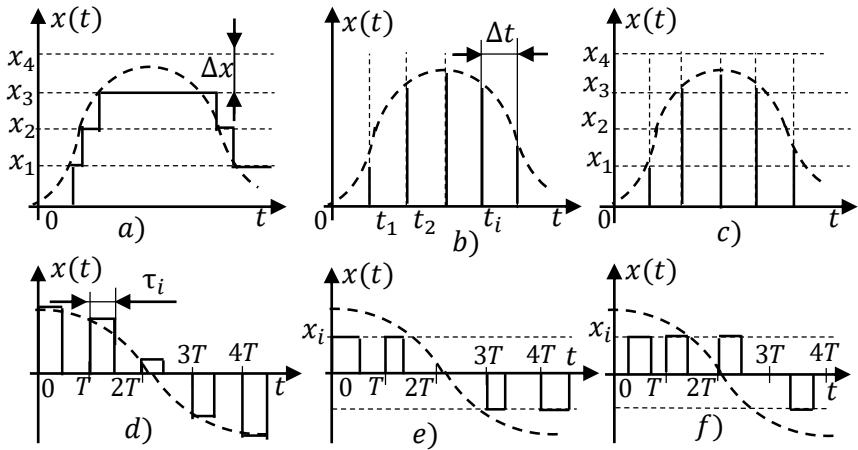


Fig. 5.1. Tipuri de cuantizări ale semnalului și tipuri de modulații ale impulsurilor

Se utilizează următoarele tipuri de modulații ale succesiunii de impulsuri.

1. Modulația în amplitudine x_i (fig. 5.1, d), care reprezintă amplitudinea impulsului egală cu amplitudinea semnalului de intrare la momentul de eșantionare, iar durata și perioada impulsului sunt constante:

$$x_i = x(t), \tau_i = \text{const}, T = \text{const.}$$

2. Modulația în durată τ_i (fig. 5.1, e), care reprezintă durata impulsului proporțională cu amplitudinea semnalului de intrare la momentul de eșantionare, iar amplitudinea și perioada impulsului sunt constante:

$$\tau_i = x(t), x_i = \text{const}, T = \text{const.}$$

3. Modulația în frecvență ω_e (fig. 5.1, f), care reprezintă frecvență impulsului proporțională cu amplitudinea semnalului de intrare la momentul de eșantionare, iar amplitudinea și durata impulsului sunt constante:

$$\omega_e = x(t), x_i = \text{const}, T = \text{const}.$$

Modulația în amplitudine este de două tipuri: de *ordinul zero*, când amplitudinea impulsului de la momentul de eșantionare rămâne constantă pe durata impulsului, și *de ordinul unu*, când amplitudinea impulsului de la momentul de eșantionare se modifică pe durata impulsului odată cu modificarea semnalului continuu.

La valori mari ale cuantei de discretizare în nivel sistemul discret este un sistem neliniar, iar la valori mici ale cuantei de discretizare în nivel sistemul discret poate fi descris ca un sistem liniar cu eșantionare cu modulație în amplitudine.

Caracteristica statică a elementului de discretizare este funcția parametrului modulat în raport cu semnalul de intrare.

În figura 5.2 se reprezintă caracteristicile statice ale procesului de modulație în amplitudine A (fig. 5.2, a) și a modulației în durată τ_i (fig. 5.2, b) [17].

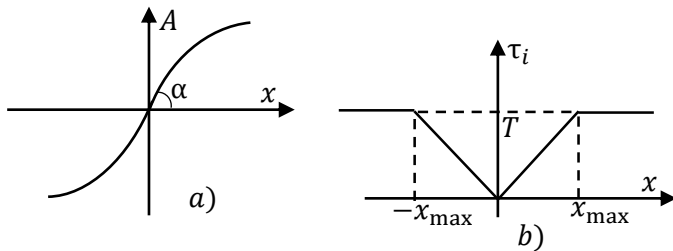


Fig. 5.2. Caracteristici statice ale modulației în amplitudine a) și durată b)

Caracteristica statică a modulației în amplitudine pentru valori mici ale lui x se aproximează prin relația tangentei:

$$\text{tg}\alpha = \frac{A}{x} = k_i,$$

unde k_i este coeficientul de transfer al elementului de eșantionare.

Coeficientul de transfer a modulației în durată pentru valorile semnalului de intrare x_{\max} și $-x_{\max}$ se aproximează cu raportul:

$$k_{id} = \frac{\tau_i}{x} = \frac{\gamma T}{x},$$

unde k_{id} este coeficientul de transfer al elementului de eşantionare, τ_i – durata impulsului, $\gamma = \tau_i/T$ – durata relativă a impulsului și T – perioada de eşantionare.

Sistemele automate numerice au o largă utilizare la automatizarea diferitor procese industriale în comparație cu sistemele continue, datorită următoarelor priorități:

1. Elementul discret sau calculatorul ca element discret (regulatorul) poate fi folosit la conducerea concomitentă a mai multor procese (obiecte), unde acesta se conectează ciclic cu perioada de eşantionare la fiecare obiect pentru a-l conduce.

2. Elementele discrete și calculatorul, ca și componente ale sistemului automat numeric, au o precizie mai ridicată la prelucrarea semnalelor, dimensiuni mai mici, mase mai mici și costuri reduse, au fiabilitate și protecție mai ridicate la semnalele de tip zgomot. Pe calculator pot fi realizați algoritmi sofisticăți de conducere a proceselor industriale.

5.3 Schema funcțională și structurală a sistemului automat discret

Construirea schemei funcționale pentru un sistem automat cu eşantionare se reduce la următoarea etapă: în structura sistemului automat continuu se stabilește locul de conectare a eşantionatorului, care discretizează semnalul respectiv în timp.

Schema funcțională tipică a sistemului automat cu eşantionare se reprezintă în figura 5.3, *a*, în care elementele funcționale E_1 , E_r și E sunt eşantionatoare, care discretizează semnalele în timp, EE – elementul de execuție, OR – obiectul de reglare, Tr – traductorul.

Asupra sistemului cu eşantionare cu perioada T acționează semnalul de referință $r(t)$ și perturbația $p(t)$. Semnificația semnalelor în structura sistemului discret: semnalele referință $r^*(t)$, eroarea $\varepsilon^*(t)$ și reacția $y_r^*(t)$ sunt semnale eşantionate, iar semnalele eroarea $\varepsilon(t)$, comanda $u(t)$ și mărimea de ieșire $y(t)$ sunt semnale continue.

Elementul de execuție EE , obiectul de reglare OR și traductorul Tr în conexiune serie formează partea fixată (PF), care se descriu ca

modele matematice cu funcții de transfer.

Această structură se poate generaliza pentru multe cazuri de conectare a eșantionatorului. Eșantionatoarele E_1 și E_r care se regăsesc în elementul de referință și în reacție se substituie cu un singur eșantionator E (fig. 5.3, *b*), ce se plasează în canalul direct după comparator, iar elementul de reținere ER cu funcția de transfer $H_{ER}(s)$ este înseriat cu partea fixată PF cu funcția de transfer $H_{PF}(s)$ și formează partea continuă a sistemului cu eșantionare.

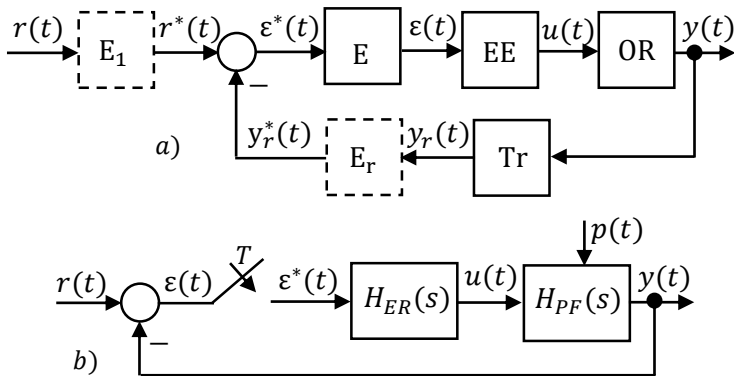


Fig. 5.3. Schema-bloc funcțională *a*) și structurală *b*) a sistemului cu eșantionare

Astfel, structura sistemului (fig. 5.3, *b*) se dă din partea discretă, care reprezintă elementul de eșantionare E (elementul cheie) înseriat cu elementul de reținere ER și partea fixată PF . Eșantionatorul E transformă semnalul continuu al erorii $\varepsilon(t)$ în semnal eșantionat la erorii $\varepsilon^*(t)$ cu perioada T . Elementul de reținere ER transformă semnalul eșantionat $\varepsilon^*(t)$ în semnal continuu al comenzii $u(t)$.

Coeficientul de transfer al eșantionatorului se atribuie părții continue și coeficientul de transfer al elementului ER este egal cu unu.

Partea discretă a eșantionatorului E funcționează în domeniul timpului discret, iar partea continuă funcționează în domeniul timpului continuu.

Astfel, aceste tipuri de sisteme automate se numesc și sisteme hibride.

5.4 Modele matematice ale sistemelor automate discrete

5.4.1 Funcții discrete și ecuații cu diferențe finite

O funcție continuă de timp $x(t)$ se reprezintă ca o funcție discretă (eșantionată) în timp $x(kT)$ (fig. 5.4, a) [1, 4, 8, 11-14, 17, 20]:

$$x(kT) = x(t) \text{ la } t = kT, k = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (5.1)$$

$$x(kT) = 0 \text{ dacă } kT < T < (k + 1)T. \quad (5.2)$$

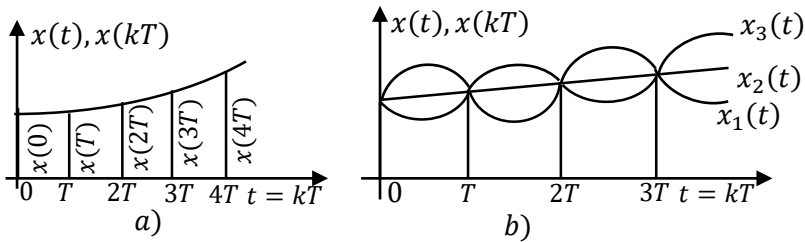


Fig. 5.4. Eșantionarea funcției

Funcția eșantionată reprezintă descrierea numai la momentele de eșantionare, iar între momentele de eșantionare funcția este egală cu zero.

Dacă perioada de eșantionare este cunoscută, atunci după funcția dată $x(t)$, funcția discretă $x(kT)$ se determină univoc. După funcția eșantionată cunoscută $x(kT)$ nu se poate restabili funcția continuă inițială $x(t)$. Rezultă că pentru o funcție discretă $x(kT)$ există diverse funcții continue $x_i(t)$: $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ (fig. 5.4, b).

Pentru determinarea evoluției funcției discrete $x(kT)$, între momentele de eșantionare se introduce timpul $\Delta t = \sigma T$ care variază de la $0 \dots T$. În aceste cazuri, funcția $x(t)$ se reprezintă ca funcție deplasată:

$$x(kT, \sigma T) = x(t), t = kT + \sigma T, k = 0, 1, 2, \dots, 0 < \sigma \leq T. \quad (5.3)$$

Modificând σT de la 0 până la T , se obține un set de funcții discrete $x(kT, \sigma T)$, care determină funcția $x(t)$ pentru $t > 0$ (fig. 5.5).

În unele cazuri, este mai compact a prezenta funcția nu în timpul

absolut, dar se utilizează timpul relativ $\bar{t} = t/T$ și atunci expresiile (5.1) și (5.3) au forma:

$$x(T) = x(\bar{t}) = x(k) \text{ la } \bar{t} = k, k = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (5.4)$$

$$x(k, \sigma) = x(\bar{t}) \text{ la } t = k + \sigma, k = 0, 1, 2, \dots, 0 < \sigma \leq 1. \quad (5.5)$$

Funcțiile eșantionate își modifică valorile ordonate numai la momentele de eșantionare. Viteza de modificare a funcției eșantionate

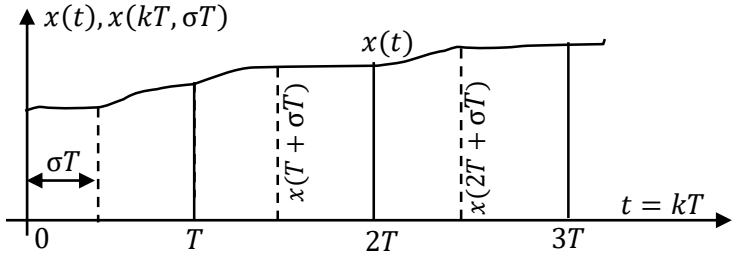


Fig. 5.5. Eșantionarea funcției și funcția deplasată

se determină prin diferența finită. Ecuațiile cu diferențe finite sunt analogul ecuației diferențiale pentru semnalele continue. În acest sens, se utilizează operatorul de diferență directă Δ și inversă ∇ (fig. 5.6). Diferența directă de ordinul unu ia forma:

$$\Delta x(k) = x(k + 1) - x(k), \quad (5.6)$$

iar diferența inversă de ordinul unu va fi:

$$\nabla x(k) = x(k) - x(k - 1). \quad (5.7)$$

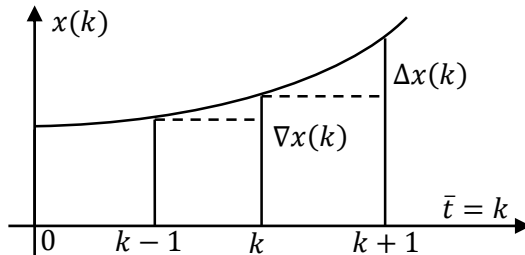


Fig. 5.6. Eșantionarea funcției și diferența directă și inversă

Se utilizează și noțiunea de operator q de deplasare. Din (5.6) se exprimă operatorul Δ în raport cu operatorul de deplasare astfel:

$$\Delta = q - 1, \quad (5.8)$$

unde „1” este privit ca un operator de deplasare cu zero pași.

Operatorul de deplasare înainte cu un pas (avans cu un pas):

$$g = qx = \begin{cases} q(k) = x(k + 1), k \geq 0, \\ q(k) = 0, k < 0. \end{cases} \quad (5.9)$$

Operatorul de deplasare înapoi sau invers cu un pas (de întârziere cu un pas):

$$g = q^{-1}x = \begin{cases} g(k) = 0, \\ g(k) = x(k - 1), k \geq 1. \end{cases} \quad (5.10)$$

Aplicarea repetată a operatorilor direct Δ sau invers ∇ , definește operații de diferență de ordin superior.

Diferența directă de ordin superior:

$$\begin{aligned} \Delta^2 x(k) &= \Delta(\Delta x(k)) = (x(k + 2) - x(k + 1)) - \\ &- (x(k + 1) - x(k)) = x(k + 2) - 2x(k + 1) + x(k), \end{aligned} \quad (5.11)$$

.....

$$\Delta^n x(k) = \Delta(\Delta^{n-1} x(k)) = \Delta^{n-1} x(k + 1) - \Delta^{n-1} x(k).$$

Pentru diferența inversă de ordin superior se obține:

$$\begin{aligned} \nabla^2 x(k) &= \Delta(\Delta x(k)) = (x(k + 2) - x(k + 1)) - \\ &- (x(k + 1) - x(k)) = x(k + 2) - 2x(k + 1) + x(k), \end{aligned} \quad (5.12)$$

.....

$$\nabla^n x(k) = \nabla(\nabla^{n-1} x(k)) = \nabla^{n-1} x(k) - \nabla^{n-1} x(k - 1).$$

Pentru calculul diferențelor finite directe prin șirul de valori ale intrării $x(k)$ se utilizează relația:

$$\Delta^n x(k) = \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i x(k+n-i), \quad (5.13)$$

unde C_n^i este numărul de combinații din n elemente câte i elemente.

Pentru calculul diferențelor finite inverse prin șirul de valori ale intrării $x(k)$ se utilizează relația:

$$\nabla^n x(k) = \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i x(k-i). \quad (5.14)$$

În relațiile (5.13)-(5.14), coeficienții binomiali C_n^i prezintă numărul de combinații din n elemente câte i elemente și se dau prin relația [17]:

$$C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}.$$

Relația dintre diferența directă și cea inversă este:

$$\nabla^n x(k) = \Delta^n x(k-n). \quad (5.15)$$

Analogul discret al integralei de la funcția continuă de la 0 la t pentru funcția discretă este suma finită, dar nu completă:

$$\int_0^t x(t) dt \approx x_{\Sigma}(k) = \sum_{i=0}^{k-1} x(i) = \sum_{r=1}^k x(k-r), \quad (5.16)$$

iar suma completă se determină prin relația:

$$x_0(k) = x_{\Sigma}(k) + x(k) = \sum_{i=0}^k x(i) = \sum_{r=0}^k x(k-r). \quad (5.16')$$

Diferența dintre relațiile (5.16) și (5.16') se reduce la valoarea funcției $x(k)$ la momentul de timp $t = kT$, care se conține în rezultatul final.

Pentru valori date ale lui k , valoarea x_{Σ} se calculează după valorile lui $x(i)$. Dar determinarea expresiei generale x_{Σ} ca funcție de i în formă concretă se obține numai pentru funcții simple $x(k)$ [4, 13, 17, 18].

Din expresia (5.13) rezultă proprietățile sumei finite:

$$\sum_{i=0}^{k-1} x(i) = \sum_{i=k-1}^0 x(i); \quad \sum_{i=0}^{k-1} x(i) = \sum_{i=1}^k x(k-i). \quad (5.17)$$

Operațiile de calcul ale diferențelor finite și ale sumelor finite sunt operații liniare și pentru acestea este valabil principiul superpoziției.

La studierea sistemelor continue se utilizează ecuația diferențială care stabilește legătura dintre funcția continuă $x(t)$ și derivatele ei $d^n x(t)/dt^n$. În mod similar, relațiile dintre funcția discretă $x(k)$ și diferențele ei $\Delta^n x(k)$ sau $\nabla^n x(k)$ se determină prin *ecuația cu diferențe finite* sau *ecuația recurentă (recursivă)*. Dacă această relație este liniară, atunci și ecuația cu diferențe este liniară.

Ecuația liniară cu diferențe finite cu coeficienții constanți se dă în forma [1, 4, 8, 11, 14, 17, 20]:

$$\begin{aligned} c_n \Delta^n x(k) + c_{n-1} \Delta^{n-1} x(k) + \dots + c_1 \Delta x(k) + c_0 x(k) = \\ = d_m \Delta^m u(k) + d_{m-1} \Delta^{m-1} u(k) + \dots + d_1 \Delta u(k) + d_0 u(k), \end{aligned} \quad (5.18)$$

unde $u(k)$ este o funcție discretă cunoscută (intrarea), iar $x(k)$ este funcția (ieșirea) discretă calculată, care prezintă soluția ecuației cu diferențe finite. Utilizând expresia (5.13) pentru ecuația (5.18), ultima va avea forma:

$$\begin{aligned} a_n x(k+n) + a_{n-1} x(k+n-1) + \dots + a_1 x(k+1) + a_0 x(k) = \\ = b_m u(k+m) + b_{m-1} u(k+m-1) + \dots + b_1 u(k+1) + b_0 u(k), \end{aligned} \quad (5.19)$$

care este o ecuație recursivă și permite calcularea valorii lui $x(k)$ la momentele de timp $k \geq 0$ după valorile precedente cunoscute ale lui $u(k)$, $u(k-1)$, $u(k-2)$, ..., $u(m-1)$ și k valori precedente cunoscute ale lui $x(k-1)$, $x(k-2)$, ..., $x(k-n)$, care întrunesc condițiile inițiale.

Dacă în ecuația (5.18) și (5.19) $u(k) = 0$, atunci aceste ecuații

sunt omogene. Ecuatiile recurente se prezintă pentru diferențe directe și inverse. Coeficienții a_i se determină după coeficienții c_i , iar coeficienții b_i se determină după coeficienții d_i din ecuațiile (5.18) și (5.19) prin relațiile:

$$\begin{aligned} a_i &= \sum_{i=0}^l (-1)^{l-i} c_i C_{n-i}^{l-i}, \\ b_i &= \sum_{i=0}^l (-1)^{l-i} d_i C_{m-i}^{l-i}, \end{aligned} \tag{5.20}$$

unde C_{n-i}^{l-i} este numărul de combinații din $(n - i)$ elemente câte $(l - i)$ cu $l = 0, 1, \dots, n$ pentru coeficienții a_i și pentru coeficienții b_i C_{n-i}^{l-i} este numărul de combinații din $(n - i)$ elemente câte $(l - i)$ cu $l = 0, 1, \dots, m$.

Coeficienții binomiali C_{n-i}^{l-i} se calculează prin relația [8, 17]:

$$C_{n-i}^{l-i} = \frac{(n-i)!}{(l-i)!(n-l)!}.$$

Ecuatia (5.19) este o ecuație recursivă de ordinul n . Ordinul ecuației recursive (5.19), în caz general, nu coincide cu ordinul diferenței superioare din ecuație. Coincidența are loc numai în cazul când $a_0 \neq 0$ și $a_n \neq 0$.

Metodele clasice de soluționare a ecuațiilor cu diferențe finite au analogie cu metodele clasice de soluționare a ecuațiilor diferențiale liniare. Se utilizează și metode operaționale de soluționare a ecuațiilor cu diferențe finite bazate pe transformarea funcțiilor eșantionate în imaginea lor [16, 19].

Ecuatia (5.19) poate fi dată prin operatorul q de deplasare cu avans:

$$\begin{aligned} (a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} + \dots + a_1 q + a_0)x(k) &= \\ = (b_m q^m + b_{m-1} q^{m-1} + \dots + b_1 q + b_0)u(k). \end{aligned} \tag{5.21}$$

Pentru (5.21) este valabil principiul cauzalității, care exprimă realitatea că efectul nu poate precede cauza:

$$m \leq n. \quad (5.22)$$

Ecuția (5.21) se dă prin operatorul de deplasare cu avans în formă concisă:

$$A(q)x(k) = B(q)u(k), \quad (5.23)$$

unde s-au notat polinoamele $A(q)$, $B(q)$ în operatorul de deplasare q :

$$A(q) = a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} + \dots + a_1 q + a_0,$$

$$B(q) = b_m q^m + b_{m-1} q^{m-1} + \dots + b_1 q + b_0.$$

Rezolvarea ecuației cu diferențe (5.23) permite a determina șirul $x(k)$, atunci când este cunoscut șirul $u(k)$ și condițiile inițiale pentru care soluția este unică.

Dacă șirul $u(k)$ fiind presupus cunoscut:

$$f(k) = B(q)u(k), \quad (5.24)$$

atunci este suficient a fi examinate ecuațiile cu diferență finită de forma:

$$A(q)x(k) = (a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} + \dots + a_1 q + a_0)x(k) = f(k)$$

sau în domeniul timpului cu eșantionare:

$$a_n x(k+n) + a_{n-1} x(k+n-1) + \dots + a_1 x(k+1) + a_0 x(k) = f(k). \quad (5.25)$$

Din ecuația (5.25) rezultă relația recursivă de calcul a soluției:

$$x(k+n) = \frac{1}{a_n} [(-a_{n-1} x(k+n-1) - \dots - a_1 x(k+1)) - a_0 x(k) + f(k)] \quad (5.26)$$

și se calculează toate valorile succesive ale lui $x(k)$ pentru $k = 0, 1, \dots$, dacă se cunosc $f(k)$ și $x(k-1)$, $x(k-2), \dots, x(n-1)$, care asigură unicitatea soluției, reprezentând condițiile inițiale.

Astfel, soluția generală a ecuației (5.25) se prezintă ca suma

componentelor în forma:

$$x(k) = x_l(k) + x_f(k), \quad (5.27)$$

unde $x_l(k)$ este componenta liberă a șirului-soluție, iar $x_f(k)$ este componenta forțată.

5.4.2. Modelul matematic al elementului ideal de discretizare

Pentru o prezentare mai simplă a sistemului discret cu modulație în amplitudine, se recomandă ca elementul real de discretizare să se prezinte ca element echivalent în conexiune serie a elementului ideal de discretizare (EID) (fig. 5.7, a) cu elementul de formare sau de reținere (ER) a impulsurilor $x(kT)$ cu funcția de transfer $H_{ER}(s)$ (fig. 5.7, b).

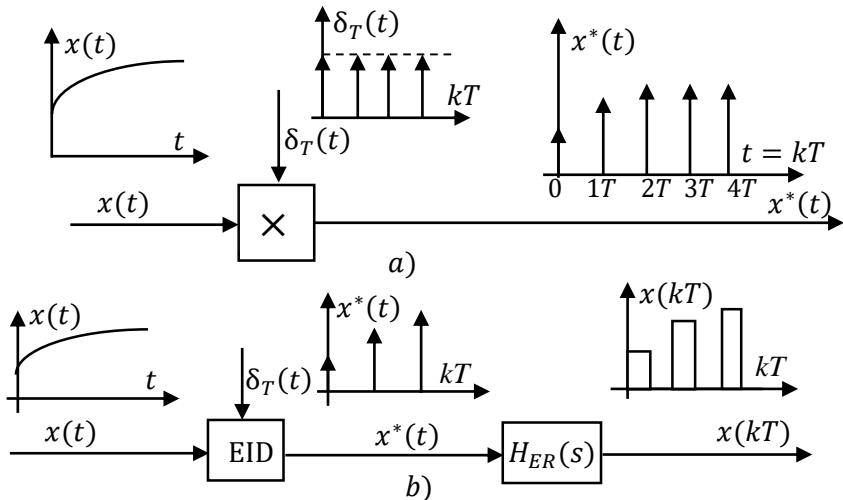


Fig. 5.7. Schema structurală a elementului real de eșantionare

Elementul ideal transformă semnalul continuu $x(t)$ într-o succesiune de impulsuri de tip $\delta(t)$ (impulsuri Dirac) cu perioada de eșantionare T , aria cărora este egală cu amplitudinea semnalului de intrare la momentul de eșantionare [1, 4, 8, 10-14, 17, 20].

Eșantionatorul ideal de discretizare se prezintă ca un modulator

sau ca multiplicator de semnale cu modulație a impulsurilor în amplitudine (fig. 5.7, a). Modulatorul multiplică semnalul continuu $x(t)$ supus discretizării cu succesiunea de impulsuri $\delta(t)$ și amplitudinea egală cu un produs de un generator de impulsuri:

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT), \quad (5.28)$$

care este o succesiune de impulsuri unitari deplasați și care există numai la momentele de eșantionare $t = kT$, iar în intervalul dintre momentele de eșantionare amplitudinea este egală cu zero.

Semnalul discretizat $x^*(t)$ se descrie prin relația:

$$x^*(t) = x(t)\delta_T(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_T(t). \quad (5.29)$$

Pentru procesele reale, semnalul $x(t) \equiv 0$ când $t < 0$ și expresia (5.29) are forma pentru $x(t)|_{t=kT} = x(kT)$ a elementului ideal de eșantionare:

$$x^*(t) = x(t)\delta_T(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\delta(t - kT), \quad (5.30)$$

care descrie funcționarea elementului ideal de eșantionare în domeniul timpului.

Se determină transformata Laplace discretă L_D de la $x^*(t)$ sau $x(kT)$ din (5.30):

$$X^*(s) = L\{x^*(t)\} = L_D\{x(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)L\{\delta(t - kT)\}. \quad (5.31)$$

Având în vedere că transformata Laplace de la delta funcție:

$$L\{\delta(t - kT)\} = \int_0^{\infty} \delta(t - kT)e^{-st} dt = e^{-skT}, \quad (5.32)$$

atunci din (5.31) se obține imaginea semnalului discretizat:

$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-skT}, \quad (5.33)$$

care este analogul discret al transformatei Laplace directe a funcției

$x(t)$:

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt. \quad (5.34)$$

În expresia (5.34), imaginea este reprezentată prin integrală, iar în expresia (5.33) – prin sumă. Proprietățile transformatei Laplace discrete L_D pot fi găsite în literatura de specialitate [1, 4, 8, 10-14, 17, 20].

Sucesiunea de impulsuri δ_T poate fi reprezentată prin seria complexă Fourier:

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_e t}, \quad (5.35)$$

unde $\omega_e = 2\pi/T$ este frecvența de eșantionare, c_k – coeficienții Fourier, care se calculează prin relația:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta_T(t) e^{-jk\omega_e t} dt = \frac{1}{T}. \quad (5.36)$$

În acest mod, se obține a doua ecuație care descrie elementul ideal de discretizare (5.30) în domeniului timpului prin relația:

$$x^*(t) = x(t) \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_e t} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t) e^{jk\omega_e t}. \quad (5.37)$$

Transformata Laplace discretă de la expresia (5.37) este:

$$X^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} L\{x(t) e^{jk\omega_e t}\} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(s + jk\omega_e), \quad (5.38)$$

care stabilește legătura transformatei Laplace a semnalului continuu $x(t)$ cu semnalul discret $x(kT)$ și este valabilă pentru $x(t) \equiv \equiv 0$, când $t \leq 0$.

Dacă semnalul $x(t) \neq 0$, atunci pentru calculul transformatei Laplace discretă de la expresia (5.37) se utilizează relația:

$$X^*(s) = \frac{x(0)}{2} + \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(s + jk\omega_e). \quad (5.39)$$

Expresia (5.33) conține componenta e^{-skT} care este o expresie transcendentă și $X^*(s)$, iar funcțiile de transfer discrete respective sunt funcții transcendente pe argumentul s și calculele devin dificile.

5.4.3 Funcția frecvențială a elementului ideal de discretizare

Utilizând transformata Laplace discretă L_D (5.38)-(5.39), se pot calcula simplu caracteristicile frecvențiale sau cele spectrale ale elementului ideal de discretizare. Substituind $s = j\omega$ în expresia (5.38), se stabilește legătura dintre spectrele semnalelor de intrare și ieșire ale elementului ideal de discretizare, presupunând că toți polii lui $X^*(s)$ se află în stânga $Res < 0$ planului complex s [4, 8, 12, 13, 17]:

$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega + k\omega_e)). \quad (5.40)$$

Expresia (5.40) reprezintă spectrul ieșirii elementului ideal de discretizare ca suma spectrului semnalului de intrare deplasat pe axa absciselor la mărimea $k\omega_e$. Rezultă că transformata Laplace discretă a semnalului de ieșire a elementului ideal este o funcție periodică de s cu frecvența ω_e :

$$X^*(s) = X^*(s \pm jk\omega_e), \quad (5.41)$$

unde $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ este șirul numerelor reale.

Funcția (5.41) în domeniul frecvență, de asemenea, este o funcție periodică cu frecvența ω_e :

$$X^*(j\omega) = X^*(j(\omega \pm k\omega_e)). \quad (5.42)$$

5.4.4 Modelul matematic al elementului de reținere

Elementul de reținere sau demodulatorul formează din succesiunea de impulsuri ideale $x^*(t)$, produse de eșantionator cu perioada de eșantionare T , o succesiune de impulsuri reale amplitudinea cărora este egală sau proporțională valorilor instantanee ale semnalului

de intrare la momentele de eșantionare (fig. 5.8, a). Structura de realizare a elementului de reținere se reprezintă în figura 5.8, b.

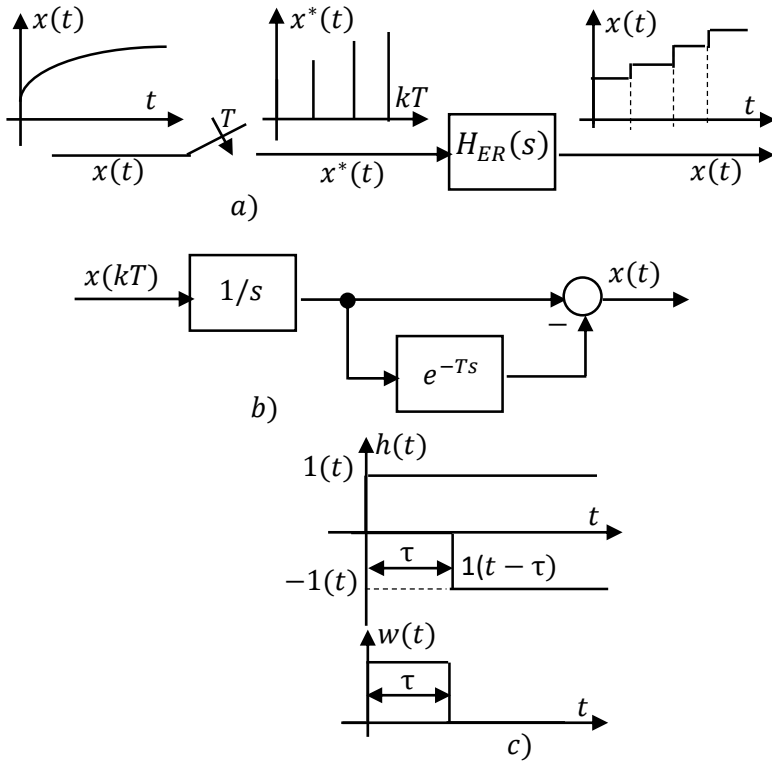


Fig. 5.8. Modelul matematic al elementului de reținere

În practică, elementul de reținere ER formează o succesiune de impulsuri de formă dreptunghiulară ca cea mai simplă figură geometrică și amplitudinea egală cu amplitudinea semnalului la momentul de eșantionare și care rămâne constantă pe durata impulsului $\tau = \gamma/T$, unde γ este durata relativă ($0 \leq \gamma \leq 1$) a impulsului (fig. 5.8, c).

Răspunsul elementului de reținere la impulsul unitar $\delta(t) = 1$ este funcția pondere $w(t)$ a acestui element descris cu funcția de transfer:

$$H_{ER}(s) = \int_0^{\infty} w(t)e^{-st} dt. \quad (5.43)$$

Elementul de reținere se consideră element continuu înseriat părții fixate (fig. 5.3) și această conexiune formează partea continuă a sistemului discret cu funcția de transfer:

$$H(s) = H_{ER}(s)H_{PF}(s). \quad (5.44)$$

În domeniul timpului, impulsul dreptunghiular se obține din diferența a două semnale unitare: primul semnal este prezentat pozitiv, iar al doilea semnal este inversat (negativ) și deplasat la dreapta de la origine la distanța τ (fig. 5.8, c).

Modelul matematic al impulsului dreptunghiular în timp se descrie prin funcția pondere:

$$w(t) = 1(t) - 1(t - \tau), \quad (5.45)$$

iar având în vedere că semnalul treaptă unitară $1(t)$ are imaginea $1/s$, funcția de transfer a expresiei (5.45) (a elementului de reținere) este:

$$H_{ER}(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-s\tau} = \frac{1}{s}(1 - e^{-s\tau}). \quad (5.46)$$

Dacă durata impulsului τ este cu mult mai mică decât constantele mai mici de timp ale părții fixate, atunci elementul de reținere ER se poate aproxima cu un element ideal cu coeficientul de transfer $k = 1/T$.

Dacă durata impulsului $\tau = T$, atunci elementul de reținere cu f.d.t. (5.46) formează impulsuri dreptunghiulare pe durata perioadei de eșantionare cu amplitudinea egală cu valoarea semnalului de intrare de la momentul de eșantionare și, în aceste cazuri, elementul de reținere se numește element de formare sau de memorare cu f.d.t. (fig. 5.8, b):

$$H_{ER}(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-sT}). \quad (5.47)$$

Fixarea valorii instantanee ale semnalului la nivel constant la ieșirea elementului de reținere ER poate fi tratată ca o operație de extrapolare cu polinom de ordin zero și atunci elementul de reținere ER se numește extrapolator de ordin zero sau element de reținere de ordin zero (EROZ).

Deoarece elementul de reținere ER are o influență puternică asupra proprietăților sistemului discret este necesar a analiza proprietățile frecvențiale ale acestuia. Elementul ideal de eșantionare se prezintă ca un generator de armonici suplimentare cu frecvența de eșantionare $\omega_e = 2\pi/T$. Spectrul $X(j\omega)$ al semnalului $x^*(t)$ eșantionat cu modulație în amplitudine este egal cu suma spectrelor deplasate a semnalului continuu de la intrare $x(t)$:

$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[j(\omega - k\omega_e)], \quad (5.48)$$

unde $X(j\omega)$ este spectrul semnalului de intrare (fig. 5.9, a). Din relația (5.48) rezultă că toate amplitudinile sunt reduse de T ori și elementul de reținere este echivalent după proprietățile lui cu un element ideal cu coeficientul de transfer $k = 1/T$.

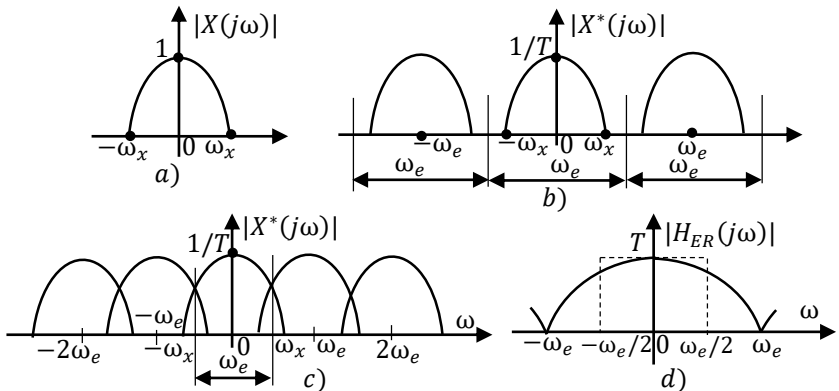


Fig. 5.9. Amplitudinile spectrelor semnalelor de intrare și de ieșire ale elementului ideal de eșantionare și funcția amplitudine frecvență a EROZ

În general, spectrul $X^*(j\omega)$ se deosebește de spectrul $X(j\omega)$, deoarece acesta conține componenta de bază ($k = 0$), care coincide cu spectrul $X(j\omega)$, dar și componentele aderente ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) ca rezultat al discretizării.

Dacă lățimea benzii semnalului eșantionat este $\omega_x < \omega_e/2$, atunci componentele aderente în banda de bază a frecvențelor

$(-\omega_e/2, +\omega_e/2)$ nu vor deforma spectrul $X(j\omega)$ (fig. 5.9, *b*) și relația (5.48) devine:

$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T}X(j\omega). \quad (5.49)$$

Se menționează că prezența componentelor aderente în spectrul (5.48) se utilizează la reconstruirea semnalului continuu după eșantioanele acestuia.

Dacă frecvența de eșantionare ω_e este joasă și $\omega_x > \omega_e/2$, atunci banda de bază a spectrului $X(j\omega)$ este deformată de componentele aderente cu $k \pm 1$ (fig. 5.9, *c*). Când semnalul continuu $x(t)$ are spectrul limitat de frecvență ω_x și frecvența de eșantionare $\omega_e \geq 2\omega_x$, atunci în baza teoremei de eșantionare perioada de eșantionare T se alege din condiția [12, 13, 17, 20]:

$$T = 0.5 \frac{2\pi}{\omega_x}. \quad (5.50)$$

Dacă semnalul continuu $x(t)$ este discretizat în condiția (5.50), atunci și spectrul lui $X(j\omega)$ în banda de bază $(-\omega_e/2, +\omega_e/2)$ nu este deformat de componentele aderente și spectrul poate fi reconstruit în forma continuă cu aplicarea elementului de formare ca filtru ideal de frecvență joasă cu locul de transfer (fig. 5.9, *d*, linia întreruptă):

$$|H_{ER}(j\omega)| = \begin{cases} T, & \text{când } -\omega_e \leq \omega \leq \omega_e, \\ 0, & \text{când } \omega < -\omega_e \text{ și } \omega > \omega_e. \end{cases} \quad (5.51)$$

Dacă filtrul (5.51) nu este fizic realizabil, atunci în practică se folosește elementul de reținere (5.47) cu locul de transfer:

$$|H_{ER}(j\omega)| = T \left| \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \right|, \quad (5.52)$$

care esențial diferă de forma dreptunghiulară a funcției amplitudine-frecvență $|H_{ER}(j\omega)|$ din (5.47).

În rezultat, acest element de reținere real (5.52) introduce o deformare a spectrului $X(j\omega)$ în banda de bază și conține și armonici ale componentelor aderente cu frecvența $\omega_x > \omega_e/2$.

În cazul când frecvența de eșantionare $\omega_e \gg \omega_x$, atunci elementul de reținere (5.47) se aproximează cu un element cu timp mort $T/2$ cu f.d.t.:

$$H_{ER}(s) \approx T e^{-sT/2}. \quad (5.53)$$

În aceste cazuri, sistemul cu eșantionare (fig. 5.3, *b*) se poate studia ca sistem continuu descris cu f.d.t. (5.44) și (5.47), având în vedere că elementul de reținere echivalent reduce rezerva de stabilitate a sistemului.

Pentru a simplifica procedura de analiză a dinamicii sistemului discret, elementul de reținere se recomandă a fi aproximat ca element cu inerție de ordinul unu cu f.d.t. cu parametrii [12]:

$$H_{ER}(s) \approx \frac{T}{Ts+1}, \quad (5.54)$$

care este cu atât mai precisă cu cât este mai mare frecvența de eșantionare ω_e .

La determinarea frecvenței de eșantionare minimale admisibile a sistemului închis, frecvența ω_x este frecvența de tăiere a părții continue a sistemului.

Deoarece spectrele semnalelor de intrare și ale sistemului lent se micșorează și la valori finite ale frecvenței ω_x nu sunt nule (fig. 5.8, *a*), în practică frecvența de eșantionare se alege din condiția:

$$\omega_e = (5 - 10)\omega_x, \quad (5.55)$$

iar banda spectrului ω_x se determină ca 5-10 % ale zonei de intensitate a spectrului [12].

5.5 Transformarea *z* discretă

Expresia (5.33) conține componenta transcendentă e^{-skT} și imaginea $X^*(s)$, iar funcțiile de transfer discrete care se obțin sunt funcții transcendente pe argumentul s , astfel, calculele fiind laborioase.

Pentru a transforma expresia (5.33) în expresie rațională se utilizează transformata z care este [1, 4, 8, 11–14, 16, 17, 20]:

$$z = e^{sT} \quad (5.56)$$

și atunci expresia (5.33) cu substituția (5.56) ia forma:

$$X(z) = Z\{x^*(t)\} = Z\{x(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k}, \quad (5.57)$$

care prezintă transformata z a succesiunii de impulsuri $x(kT)$.

Pentru a obține transformata z de la funcția de timp $x(t)$, fiecare componentă discretă $x(kT)$ se înmulțește cu z^{-k} și șirul obținut se însumează.

Pentru determinarea semnalului $x(t)$ de la transformata $X(z)$ cunoscută, aceasta se prezintă în șir după puterile în descreștere ale lui z^{-k} și coeficienții obținuți ai șirului prezintă valorile ordonatelor în momentele de eșantionare $x(kT)$ ale semnalului $x(t)$.

Pentru cele mai larg utilizate funcții în timp continuu și funcții de transfer în s transformatele acestora în z pot fi obținute, folosind tabelul A2.1, anexa 2 și tabelul A3.1, anexa 3.

5.5.1 Proprietățile de bază ale transformatei z directe

Transformarea z stabilește o corespondență între mulțimea șirurilor reale și mulțimea funcțiilor de variabilă complexă, asociind fiecărui șir $f(k)$ seria de puteri în z^{-1} cu coeficienți reali:

$$f(t)_{t=kT} = x(kT) = f(k), \quad (5.58)$$

iar imaginea șirului (5.58) este:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}, \quad (5.59)$$

unde z este o variabilă complexă și pornind de la variabila complexă Laplace $s = \alpha + j\omega$ se obține:

$$\begin{aligned} z = e^{Ts} &= e^{T(\alpha + j\omega)} = e^{T\alpha + jT\omega} = \operatorname{Re}z + j\operatorname{Im}z = \\ &= e^{T\alpha} \cos\omega T + je^{T\alpha} \sin\omega T. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Variabila Laplace s este funcție de variabila z în forma:

$$s = \frac{1}{T} \ln z. \quad (5.61)$$

Seria (5.59) este convergentă într-un domeniu al planului z^{-1} de forma unui disc $|z^{-1}| < R$ și $R > 0$, iar în planul variabilei complexe z se obține:

$$|z| > \frac{1}{R}, \quad (5.62)$$

care reprezintă domeniul în afara unui disc.

Suma seriei (5.59) este funcție analitică pe mulțimea pe care seria este convergentă, notată prin $F(z)$ și numită transformata z a șirului $f(k)$.

Proprietățile și avantajele derivă din proprietățile șirurilor și ale seriilor de puteri, obținute prin relația de definiție a transformatei z . Se dau principalele proprietăți ale transformatei z directe.

1. *Liniaritatea.* Oricare ar fi șirurile $f_1(k)$, $f_2(k)$ și constantele reale α_1 , α_2 se obține:

$$Z\{\alpha_1 f_1(k) \pm \alpha_2 f_2(k)\} = \alpha_1 F_1(z) \pm \alpha_2 F_2(z).$$

2. *Teorema deplasării în real a argumentului originalului.* Dacă $f(k)$ este un șir și $F(z) = Z(f(k))$, transformatele șirurilor deplasate cu un pas înainte se definesc prin operatorul q cu avans cu un pas:

$$g = qf(k) = \begin{cases} g(k) = f(k+1), k \geq 0, \\ g(k) = 0, k < 0. \end{cases}$$

Se introduce operatorul invers, notat cu q^{-1} , de deplasare înapoi cu un pas (de întârziere cu un pas):

$$g = q^{-1}f(k) = \begin{cases} g(0) = 0, \\ g(k) = f(k-1), k \geq 1, \end{cases}$$

atunci se obține:

$$Z(qf(k)) = z(F(z) - f(0)),$$

$$Z(q^{-1}f(k)) = z^{-1}F(z).$$

Prin inducția matematică, ultimele relații se generalizează pentru orice $m > 0$, natural și finit:

$$Z(q^m f(k)) = z^m(F(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f(k)z^{-k}),$$

$$Z(q^{-m} f(k)) = z^{-m}F(z).$$

În relația dată, înmulțirea la z^{-m} corespunde reținerii semnalului discret pe m perioadele de eșantionare.

Această proprietate este deosebit de utilă la rezolvarea ecuațiilor cu diferențe finite prin mijloace operaționale.

3. *Transformata z a șirului diferențelor.* Pentru șirul diferențelor definite:

$$\Delta f(k) = f(k+1) - f(k),$$

se obține, utilizând proprietatea 2:

$$Z(\Delta f(k)) = (z-1)Z(f(k) - f(0)) = (z-1)F(z) - zf(0).$$

4. *Transformata z a șirului $g(k)$ al sumelor parțiale.* Fie un șir arbitrar. Definem șirul $g(k)$ al sumelor parțiale ale lui $f(k)$ astfel:

$$g(k) = \sum_{i=0}^{k-1} f(i) = \Delta^{-1}f(k)$$

și interpretăm operatorul de sumare ca inversul operatorului diferență.

Atunci transformata z a șirului $g(k)$ este dată prin relația:

$$G(z) = Z(g(k)) = \frac{Z(f(k))}{z-1} = \frac{F(z)}{z-1}.$$

5. *Transformata z a produsului de convoluție.* Fie funcția $g(k) = f_1 * f_2(k)$ și șirul produs de convoluție, definit:

$$g(k) = (f_1 * f_2)(k) = \sum_{i=0}^k f_1(k-i)f_2(i), k \geq 0$$

a șirurilor f_1, f_2 de transformate $F_1(z), F_2(z)$ și se obține:

$$G(z) = Z[(f_1 * f_2)(k)] = F_1(z)F_2(z).$$

6. *Teorema valorii inițiale a originalului.* Fiind dată transformata $F(z)$ a șirului $f(k)$, valoarea acesteia din momentul $k = 0$ este:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = \lim_{k \rightarrow 0} f(kT).$$

7. *Teorema valorii finale a originalului.* Dacă șirul $f(k)$ este convergent și are ca transformată z pe $F(z)$, atunci:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)F(z) - zf(0)] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z).$$

Exemplul 5.1. Se prezintă transformata z pe baza relației de definiție pentru semnalele discrete tipice: treaptă unitară, rampă unitară, impuls unitar și exponențială.

1. Pentru șirul treaptă unitară $r(t) = 1(k) = 1, k = 0, 1, 3, \dots$ se obține:

$$\begin{aligned} F(z) &= Z\{1(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} 1(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \\ &= 1z^0 + 1z^{-1} + 1z^{-2} + \dots = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}, \end{aligned}$$

unde pentru calculul sumei se utilizează formula sumei termenilor unei progresii geometrice infinite cu rația z^{-1} și este convergentă în domeniul $|z^{-1}| < 1, |z| > 1$.

Funcția $F(z)$ are ca puncte singulare un pol în $z = 1$ ($A(z) = z - 1 = 0$).

2. Pentru rampa unitară discretă $f(k) = k, k = 0, 1, 3, \dots$ prin definiția (5.58) se obține:

$$\begin{aligned} F(z) &= Z\{k\} = \sum_{k=0}^{\infty} kz^{-k} = 1z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \dots = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=i}^{\infty} z^{-k} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^{-i}}{1-z^{-1}} = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{z}{(z-1)^2}, \end{aligned}$$

care este convergentă pentru $|z| > 1$ și funcția $F(z)$ are un pol dublu în $z = 1$ ($A(z) = (z - 1)^2 = 0$).

3. Pentru impulsul unitar discret:

$$\delta(k) = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

se dă imaginea în forma:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(k)z^{-k} = 1.$$

4. Pentru exponențiala discretă (numită și funcție pondere) dată de relația:

$$f(k) = a^k, |a| < 1$$

se calculează imaginea:

$$F(z) = Z\{a^k\} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a},$$

care este convergentă pentru $|z| > |a|$.

Dacă se consideră:

$$a = e^{j\vartheta} = \cos\vartheta + j\sin\vartheta,$$

atunci rezultă:

$$a^k = e^{jk\vartheta} = \cos k\vartheta + jsink\vartheta.$$

Transformata z de la $a^k = e^{jk\vartheta}$ se reprezintă prin relația:

$$Z\{e^{jk\vartheta}\} = \frac{z}{z - e^{j\vartheta}} = \frac{z}{z - \cos\vartheta - jsin\vartheta} = \frac{z(z - \cos\vartheta + jsin\vartheta)}{(z - \cos\vartheta)^2 + \sin^2\vartheta} = \frac{z^2 - z\cos\vartheta}{z^2 - 2z\cos\vartheta + 1} + j \frac{z\sin\vartheta}{z^2 - 2z\cos\vartheta + 1}.$$

Rezultă că transformata z de la:

$$Z\{\cos k\vartheta\} = \frac{z^2 - z\cos\vartheta}{z^2 - 2z\cos\vartheta + 1}, Z\{\sin k\vartheta\} = \frac{z\sin\vartheta}{z^2 - 2z\cos\vartheta + 1}. \blacksquare$$

Exemplul 5.2. Se consideră funcția în timp continuu (pentru $t \geq 0$) ca suma componentelor de forma:

$$f(t) = a_0 1(t) + a_1 t + a_2 t^2,$$

unde prima componentă este treapta unitară înmulțită la coeficientul a_0 , a doua componentă – semnal rampă unitară înmulțită la coeficientul a_1 și a treia componentă este parabola de gradul unu înmulțită la coeficientul a_2 . Coeficienții funcției au valorile: $a_0 = 1$, $a_1 = 5 \text{ s}^{-1}$, $a_2 = 4 \text{ s}^{-2}$ și perioada de eșantionare $T = 0.1 \text{ s}$.

Se cere să se calculeze transformata z pentru funcția dată.

Soluționare. Pentru fiecare componentă în timp continuu din tabelul A2.1, anexa 2 se găsește imaginea în transformata z a componentelor și după unele transformări se obține expresia:

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{a_0 z}{z-1} + \frac{a_1 T z}{(z-1)^2} + \frac{a_2 T^2 z(z+1)}{(z-1)^3} = \\ &= \frac{a_0 z(z-1)^2 + a_1 T z(z-1) + a_2 T^2 z(z+1)}{(z-1)^3} = \\ &= \frac{a_0 z^3 + z^2(a_1 T + a_2 T^2 - 2a_0) + z(a_0 - a_1 T + a_2 T^2)}{z^3 - 3z^2 + 3z - 1} = \frac{B(z)}{A(z)}. \end{aligned}$$

Cu datele numerice se obține imaginea:

$$F(z) = \frac{z^3 - 1.46z^2 + 0.54z}{z^3 - 3z^2 + 3z - 1} = \frac{B(z)}{A(z)}. \blacksquare$$

5.5.2 Proprietățile transformatei z inverse

Transformata z inversă asociază fiecărei funcții de variabilă complexă $F(z)$ un șir de numere reale $f(k)$ și se determină prin relația:

$$f(k) = Z^{-1}\{F(z)\}. \quad (5.63)$$

În baza teoriei funcțiilor de variabilă complexă și relației de definiție a transformatei z termenii șirului $f(k)$ se calculează prin integrala de contur Γ [4, 8, 11-14, 17, 20]:

$$f(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F(z) z^{k-1} dz, \quad (5.64)$$

unde Γ este un contur în planul complex z , care delimitează domeniul ce conține toate singularitățile funcției $F(z)$. Pentru calculul integralei poate fi folosită teorema reziduurilor.

Se consideră o funcție rațională proprie:

$$F(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}, \quad m < n. \quad (5.65)$$

Se descriu două metode de calcul al relației (5.65):

1. *Metoda dezvoltării în fracții simple*, în care imaginea funcției $F(z)$ se dă în forma $\frac{F(z)}{z}$, deoarece transformatele z ale șirurilor uzuale conțin termenul z la numărător (tabelele anexa 2 și anexa 3), care se descompune în fracții simple:

$$\frac{F(z)}{z} = \sum_{i=1}^p F_i(z) \quad (5.66)$$

și termenii sumei se determină după tabelul 2.1, anexa 2.

Exemplul 5.3. Se consideră imaginea semnalului:

$$F(z) = \frac{z}{z^3 - 2.5z^2 + 2z - 0.5}.$$

Se cere să se calculeze funcția de timp pe durata a 6 perioade de eșantionare.

Soluționare. Se determină rădăcinile numitorului și f.d.t. se dă în forma:

$$F(z) = \frac{z}{z^3 - 2.5z^2 + 2z - 0.5} = \frac{z}{(z-0.5)(z-1)^2},$$

unde rădăcinile sunt $z_1 = 0.5$, $z_2 = z_3 = 1$.

Conform metodei, ultima expresie se dă în fracții elementare cu coeficienții necunoscuți, care se calculează utilizând sistemul de ecuații algebrice și se obține:

$$\begin{aligned} \frac{F(z)}{z} &= \frac{1}{z^3 - 2.5z^2 + 2z - 0.5} = \frac{1}{(z-0.5)(z-1)^2} = \\ &= \frac{c_1}{z-0.5} - \frac{c_2}{z-1} + \frac{c_3}{(z-1)^2} = \frac{4}{z-0.5} - \frac{4}{z-1} + \frac{2}{(z-1)^2}. \end{aligned}$$

Pentru fiecare componentă a sumei imaginii $F(z)/z$ se aplică transformata inversă z și după tabelul 2.1, anexa 2 se găsește componenta în domeniul timpului și șirul discret ia forma:

$$f(k) = 4Z^{-1} \left\{ \frac{z}{z-0.5} \right\} - 4Z^{-1} \left\{ \frac{z}{z-1} \right\} + 2Z^{-1} \left\{ \frac{z}{(z-1)^2} \right\} = 4(0.5)^k - 4 + 2k, \quad k \geq 0.$$

Se calculează funcția discretă pentru 6 perioade de eșantionare $k = \overline{0, 5}$ și se obțin valorile funcției în momentele de eșantionare:

$$\begin{aligned} f(0) &= 4(0.5)^0 - 4 + 2 \cdot 0 = 0, \\ f(1) &= 4(0.5)^1 - 4 + 2 \cdot 1 = 0, \\ f(2) &= 4(0.5)^2 - 4 + 2 \cdot 2 = 1, \\ f(3) &= 4(0.5)^3 - 4 + 2 \cdot 3 = 2.5, \\ f(4) &= 4(0.5)^4 - 4 + 2 \cdot 4 = 4.25, \end{aligned}$$

$$f(5) = 4(0.5)^5 - 4 + 2 \cdot 5 = 6.125.$$

S-a obținut funcția eșantionată reprezentată prin valorile ordonatelor la momentele de eșantionare de forma:

$$\begin{aligned} f(k) &= f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) = \\ &= f(k-2) + 2.5f(k-3) + 4.25f(k-4) + 6.125f(k-5) + \dots \blacksquare \end{aligned}$$

2. *Metoda împărțirii infinite (sintetice)* este dezvoltarea în serie Taylor a funcției raționale în jurul punctului de la ∞ , obținându-se o serie de puteri în z^{-1} . Conform relației de definiție a transformatei z , coeficientul termenului lui z^{-k} va fi chiar termenul k al șirului calculat.

Fiind dată funcția rațională $F(z)$ și făcând schimbarea de variabilă $z = 1/\rho$, se definește funcția:

$$\varphi(\rho) = F(z)|_{z=1/\rho} = F(1/\rho), \quad (5.67)$$

care se dezvoltă în serie Taylor în jurul originii și se obține:

$$\varphi(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \rho^k = \left. \frac{1}{k!} \frac{d^k \varphi(\rho)}{d\rho^k} \right|_{\rho=0}. \quad (5.68)$$

Funcția $F(z)$ se obține din $\varphi(\rho)$ substituind $\rho = z^{-1}$:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k}, \quad (5.69)$$

de unde se obține:

$$f(k) = c_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.70)$$

după care se calculează termenii șirului.

Însă este mult mai avantajos a efectua împărțirea nemijlocită a polinomului de la numărător $B(z)$ la polinomul de la numărător $A(z)$. În rezultat se obține un șir în z^{-1} , unde fiecare termen succesiv reprezintă valoarea ordonatei la pasul de eșantionare egal cu z^{-k} .

Exemplul 5.4. Se consideră imaginea semnalului în transformata z din exemplul 5.3:

$$F(z) = \frac{z}{z^3 - 2.5z^2 + 2z - 0.5} = \frac{C(z)}{D(z)}.$$

Se cere să se calculeze funcția de timp pentru 5 perioade de eșantionare.

Soluționare. Se efectuează operația de împărțire a polinomului

numărătorului $C(z)$ la polinomul numitorului $D(z)$ fracției pentru 5 perioade de eșantionare și se obține șirul în z^{-1} (fig. 5.10):

$$\begin{array}{r} \frac{z}{z - 2.5 + 2z^{-1} - 0.5z^{-2}} \Big| \frac{z^3 - 2.5z^2 + 2z - 0.5}{z^{-2} + 2.5z^{-3} + 4.25z^{-4} + 6.125z^{-5} + \dots} \\ \underline{0 + 2.5 - 2z^{-1} + 0.5z^{-2}} \\ - 2.5 - 6.25z^{-1} + 5z^{-2} - 1.25z^{-3} \\ \underline{0 + 4.25z^{-1} - 4.5z^{-2} + 1.25z^{-3}} \\ - 4.25z^{-1} - 10.625z^{-2} + 8.5z^{-3} - 2.125z^{-4} \\ \underline{0 + 6.125z^{-2} - 7.25z^{-3} + 2.125z^{-4}} \end{array}$$

Fig. 5.10. Operația de împărțire a polinoamelor

În rezultatul calculului funcția are forma șirului:

$$F(z) = \frac{z}{z^3 - 2.5z^2 + 2z - 0.5} = z^{-2} + 2.5z^{-3} + 4.25z^{-4} + 6.125z^{-4} + \dots$$

În domeniul timpului discret se obține funcția eșantionată reprezentată prin valorile ordonatelor la momentele respective de eșantionare de forma:

$$\begin{aligned} f(k) &= f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) = \\ &= f(k-2) + 2.5f(k-3) + 4.25f(k-4) + 6.125f(k-5), \end{aligned}$$

unde valorile ordonatelor sunt: $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f(2) = 1$, $f(3) = 2.5$, $f(4) = 4.25$, $f(5) = 6.125$.

În comparație cu rezultatul din exemplul 5.3 s-a obținut aceeași funcție discretă. ■

Pentru a determina transformata $X(z)$ de la funcția de timp $x(t)$, fiecare discretă $x(kT)$ se înmulțește cu z^{-k} și șirul obținut se însumează.

Pentru a determina semnalul $x(t)$ de la transformata $X(z)$ cunoscută, aceasta se dă în șir după puterile în descreștere ale lui z^{-k} și coeficienții obținuți ai șirului constituie valorile ordonatelor în momentele de eșantionare $x(kT)$ ale semnalului $x(t)$.

5.6 Ecuațiile și funcțiile de transfer ale sistemului deschis cu eșantionare

Se consideră schema structurală a sistemului automat deschis cu eșantionare din figura 5.11, alcătuită din elementul ideal de eșantionare

(EIE), care transformă semnalul continuu $x(t)$ într-o succesiune de impulsuri $x^*(t)$ aplicată la partea continuă cu f.d.t. $H(s)$. Semnalul de ieșire $y(t)$ se reprezintă ca semnal continuu datorită proprietăților de filtru trece-jos ale părții fixate PF la succesiunea de impulsuri $x^*(t)$ la intrare.

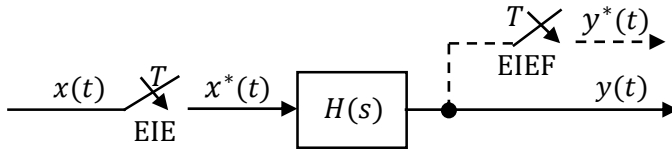


Fig. 5.11. Schema-bloc structurală a sistemului deschis cu eșantionare

Pentru a opera cu valorile semnalului de ieșire $y(kT)$ la momentele de eșantionare T se introduce un element ideal de eșantionare fictiv (EIEF) la ieșire, care funcționează sincron și sinfazic cu elementul ideal de eșantionare EIE cu aceeași perioadă de eșantionare T și se obține mărimea de ieșire discretă $y^*(t)$ [4, 8, 11, 17, 18].

Vom stabili relațiile transferului intrare-ieșire $x^*(t) \rightarrow y^*(t)$.

Se determină modelul matematic discret al sistemului deschis cu eșantionare pentru două cazuri:

1. Se utilizează elementul ideal de eșantionare.
2. Se utilizează elementul real de eșantionare cu EROZ.

Cazul 1. Se pornește de la sistemul automat liniar continuu pentru care f.d.t. se determină prin funcția pondere $w(t)$ ca răspuns al sistemului la semnalul de intrare impuls dreptunghiular (sau δ impuls):

$$H_{PF}(s) = L\{w(t)\} = \int_0^{\infty} w(t)e^{-st} dt. \quad (5.71)$$

Succesiunea $y^*(t) = y(kT)$ se obține din $y(t)_{t=kT} = y(kT)$ și din liniaritatea PF și conform relației (5.71) este:

$$y(t) = \sum_{l=0}^{\infty} w(t - lT)x(lT) \quad (5.72)$$

și la $t = kT$ mărimea $y(t)$ din (5.72) se prezintă astfel:

$$y(kT) = \sum_{l=0}^{\infty} w(kT - lT)x(lT), \quad (5.73)$$

unde $w(kT)$ este funcția pondere discretă a părții fixate PF.

Mărima de ieșire și de intrare se transformă în transformata Laplace discretă în forma:

$$\begin{aligned} Y^*(s) &= L_D\{y^*(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT)e^{-skT} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} w(kT - lT)x(lT)e^{-skT}, \end{aligned} \quad (5.74)$$

$$X^*(s) = L_D\{x^*(t)\} = \sum_{l=0}^{\infty} x(lT)e^{-slT}. \quad (5.75)$$

Se introduce notația $m = k - l$ și $k = m + l$ în expresia (5.74) și se obține:

$$w(kT - lT) = w((k - l)T) = w(mT) \text{ și } e^{-skT} = e^{-smT} * e^{slT}. \quad (5.76)$$

Relația (5.73) cu (5.76) se transformă:

$$\begin{aligned} Y^*(s) &= \sum_{l=0}^{\infty} x(lT) \sum_{m=-l}^{\infty} w(mT) e^{-slT} e^{-smT} = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} x(lT) e^{-slT} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} w(mT) e^{-smT} = X^*(s)H^*(s), \end{aligned} \quad (5.77)$$

unde $w(mT) \equiv 0$ pentru $l < 0$, iar transformata Laplace discretă de la funcția pondere discretă $w^*(t)$ este funcția de transfer discretă:

$$H^*(s) = L_D\{w^*(t)\} = L_D\{w(mT)\} = \sum_{m=0}^{\infty} w(mT)e^{-smT}. \quad (5.78)$$

Din expresia (5.77) reiese funcția de transfer discretă $H^*(s)$ a sistemului deschis ca raportul mărimii de ieșire discretă la mărimea de intrare discretă în condiții inițiale nule:

$$\frac{Y^*(s)}{X^*(s)} = H^*(s) = \sum_{m=0}^{\infty} w(mT)e^{-smT}. \quad (5.79)$$

Aplicând substituția $z = e^{sT}$ în expresiile (5.77)-(5.79), acestea

se exprimă prin transformata z :

$$Y(z) = X(z)H(z), \quad (5.80)$$

de unde se obține f.d.t. discretă în transformata z , care este raportul dintre mărimea de ieșire discretă $Y(z)$ la mărimea de intrare discretă $X(z)$ în condiții inițiale nule:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \sum_{m=0}^{\infty} w(mT)z^{-m} = \frac{C(z)}{D(z)}, \quad m \leq n, \quad (5.81)$$

unde $C(z)$ și $D(z)$ sunt polinoame de gradul m și n respectiv.

F.d.t. discretă în transformata z se determină prin relația:

$$H(z) = Z\{w(t)\} = Z\{w(mT)\} = Z\{H(s)\}. \quad (5.82)$$

Exemplul 5.5. Se consideră funcția de transfer continuă un element cu inerție de ordinul unu cu parametrii cunoscuți:

$$H(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1}.$$

Se cere să se calculeze funcția de transfer discretă în transformata z a sistemului în conexiune serie a elementului ideal de eșantionare și elementului cu inerție.

Soluționare. Funcția pondere a elementului cu inerție de ordinul unu în timp continuu se determină după tabelul A2.1, anexa 2:

$$w(t) = \frac{k_1}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}}$$

sau în timp discret $t = kT$:

$$w(kT) = \frac{k_1}{T_1} e^{-\frac{kT}{T_1}}.$$

Conform tabelului A3.1, anexa 3 funcția de transfer a sistemului are forma:

$$H(z) = Z\left\{\frac{k_1}{T_1} e^{-\frac{kT}{T_1}}\right\} = \frac{k_1}{T_1} \frac{z}{z - e^{-T/T_1}} = \frac{k_1}{T_1} \frac{z}{z - d} = \frac{C(z)}{D(z)},$$

unde T este perioada de eșantionare și $d = e^{-T/T_1}$. ■

Cazul 2. Se consideră structura sistemului deschis cu eșantionare cu elementul de reținere EROZ cu f.d.t. $H_{ER}(s)$ și cu partea fixată cu f.d.t. $H_{PF}(s)$ prezentată în figura 5.12.

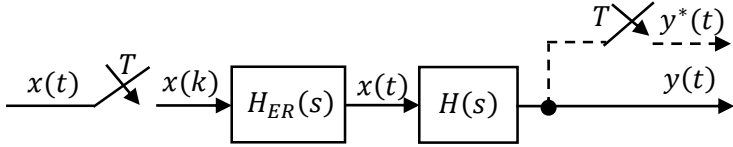


Fig. 5.12. Structura sistemului deschis cu eșantionare cu EROZ

În acest caz, în sistemul cu eșantionare este conectat EROZ cu f.d.t.:

$$H_{ER}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}. \quad (5.83)$$

Se determină f.d.t. a părții liniare continuă a elementelor înseriate cu f.d.t. $H_{PF}(s)$ și $H_{ER}(s)$:

$$H(s) = H_{ER}(s)H_{PF}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} H_{PF}(s) = (1 - e^{-sT}) \frac{H_{PF}(s)}{s}. \quad (5.84)$$

Funcția de transfer discretă se obține din (5.84), utilizând substituția $e^{sT} = z$:

$$\begin{aligned} H(z) &= Z\{H_{ER}(s)H_{PF}(s)\} = Z\left\{(1 - e^{-sT}) \frac{H_{PF}(s)}{s}\right\} = \\ &= Z\{(1 - e^{-sT})H_1(s)\} = (1 - z^{-1})Z\{H_1(s)\} = \\ &= \frac{z-1}{z} H_1(z) = \frac{c_0 z^m + c_1 z^{m-1} + \dots + c_m}{d_0 z^n + d_1 z^{n-1} + \dots + d_n} = \frac{C(z)}{D(z)}, \quad m \leq n \end{aligned} \quad (5.85)$$

unde $H_1(z) = Z\{H_1(s)\} = \sum_{k=0}^{\infty} w_1(kT)z^{-k}$ este raportul polinoamelor $C(z)$, $D(z)$, $w_1(kT) = w_1(t)|_{t=kT} = L^{-1}\{H_1(s)\}|_{t=kT}$.

Exemplul 5.6. Sistemul automat deschis continuu este un element integrator cu funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{k}{s} = \frac{5}{s}.$$

Se cere să se determine pentru perioada de eșantionare $T = 0.1$ s funcția de transfer discretă a sistemului deschis în transformata z .

Soluționare. Elementul de reținere cu funcția de transfer $H_{ER}(s)$ este înseriat cu elementul cu f.d.t. $H(s)$ și funcția de transfer a sistemului deschis este:

$$H_d(s) = H_{ER}(s)H(s) = \frac{1}{s} (1 - e^{-sT}) \frac{k}{s} = (1 - e^{-sT}) \frac{k}{s^2}.$$

Se introduce variabila complexă z :

$$e^{sT} = z.$$

Se determină f.d.t. discretă în transformata z a sistemului deschis:

$$H_d(z) = Z \left\{ (1 - e^{-sT}) \frac{k}{s^2} \right\} = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{k}{s^2} \right\} = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{k}{s^2} \right\}.$$

Pentru expresia din parantezele figurate după tabelul A3.1, anexa 3 se găsește echivalentul în forma transformatei z și se calculează f.d.t. a sistemului:

$$H_e(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{k_1}{s(T_1s+1)} \right\} = \frac{z-1}{z} \frac{kTz}{(z-1)^2} = \frac{kT}{z-1} = \frac{0.5}{z-1}. \blacksquare$$

Exemplul 5.7. Sistemul automat deschis continuu prezintă un element cu inerție de ordinul unu cu funcția de transfer cu parametrii cunoscuți:

$$H(s) = \frac{k_1}{T_1s+1} = \frac{5}{10s+1}.$$

Se cere să se determine pentru perioada de eșantionare $T = 0.1$ s funcția de transfer discretă a sistemului deschis în transformata z .

Soluționare. Elementul de reținere cu funcția de transfer $H_{ER}(s)$ este înseriat cu elementul cu f.d.t. $H(s)$ și funcția de transfer a sistemului deschis este:

$$H_d(s) = H_{ER}(s)H(s) = \frac{1}{s} (1 - e^{-sT}) \frac{k_1}{T_1s+1} = (1 - e^{-sT}) \frac{k_1}{s(T_1s+1)}.$$

Se introduce variabila complexă z :

$$e^{sT} = z.$$

Se determină f.d.t. discretă în transformata z a sistemului deschis:

$$H_d(z) = Z \left\{ (1 - e^{-sT}) \frac{k_1}{s(T_1s+1)} \right\} = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{k_1}{s(T_1s+1)} \right\}.$$

Pentru expresia din parantezele figurate după tabelul A3.1, anexa 3 se găsește echivalentul în forma transformatei z și se calculează f.d.t. a sistemului deschis:

$$H_d(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{k_1}{s(T_1s+1)} \right\} = \frac{z-1}{z} \frac{k_1(1-e^{-T/T_1})z}{(z-1)(z-e^{-T/T_1})} = \frac{k_1(1-e^{-T/T_1})}{z-e^{-T/T_1}} = \frac{k_1(1-d)}{z-d} = \frac{0.05}{z-0.99},$$

unde $d = e^{-T/T_1} = e^{-0.1/10} = 0.99$. ■

Exemplul 5.8. Sistemul automat deschis continuu reprezintă structura sistemului cu astatism și inerție de ordinul n cu funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{k}{s(T_1s+1)(T_2s+1)\dots(T_ns+1)}.$$

Se cere să se determine pentru perioada de eșantionare T funcția de transfer discretă a sistemului deschis în transformata z .

Soluționare. Funcția de transfer $H(s)$ se prezintă în fracții elementare:

$$H(s) = \frac{k}{s(T_1s+1)(T_2s+1)\dots(T_ns+1)} = \frac{k}{s} + k \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{T_i s + 1}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Pentru fiecare fracție elementară după tabelul A3.1, anexa 3 se găsește corespondența în transformata z și funcția de transfer discretă a sistemului deschis este:

$$H(z) = \frac{kT}{z-1} + k \sum_{i=1}^n \frac{c_i(1-d_i)}{z-d_i}, \quad d_i = e^{-T/T_i}. \quad \blacksquare$$

Exemplul 5.9. Sistemul automat deschis continuu reprezintă structura sistemului cu astatism și inerție de ordinul 3 cu funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{k}{s(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}.$$

Se cere să se determine pentru perioada de eșantionare T funcția de transfer discretă a sistemului deschis în transformata z cu elementul de reținere de ordin zero.

Soluționare. Elementul de reținere cu funcția de transfer $H_{ER}(s)$ este inseriat cu elementul cu f.d.t. $H(s)$ și funcția de transfer a sistemului deschis este:

$$\begin{aligned} H_d(s) &= H_{ER}(s)H(s) = \frac{1}{s} (1 - e^{-sT}) \frac{k}{s(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)} = \\ &= (1 - e^{-sT}) \frac{k}{s^2(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}. \end{aligned}$$

Se introduce variabila complexă z :

$$e^{sT} = z.$$

Se determină f.d.t. discretă în transformata z a sistemului deschis, utilizând

rândul 13 din tabelul A3.1, anexa 3 și, după unele transformări, se obține expresia care reprezintă raportul a două polinoame:

$$H_d(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{k}{s^2(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)} \right\} = \frac{kTz}{(z-1)^2} - \frac{c_0z}{z-1} + \frac{c_1z}{z-d_1} + \frac{c_2z}{z-d_1} + \frac{c_3z}{z-d_1} =$$

$$= \frac{kTz}{(z-1)^2} - \frac{c_0z}{z-1} + k \sum_{i=1}^n \frac{c_i z}{z-d_i} = \frac{B(z)}{A(z)},$$

unde coeficienții au semnificația:

$$c_0 = k(T_1 + T_2 + T_3), c_2 = \frac{kT_1^3}{(T_1-T_2)(T_1-T_3)}, c_3 = \frac{kT_2^3}{(T_2-T_1)(T_2-T_3)}, c_4 = \frac{kT_3^3}{(T_3-T_1)(T_3-T_2)}. \blacksquare$$

Pentru determinarea f.d.t. discretă a sistemului deschis cu element de reținere de formă arbitrară se efectuează etapele:

1. Se determină f.d.t. a părții continue $H(s)$.
2. Utilizând transformata Laplace inversă, se calculează funcția pondere a părții liniare $H(s)$: $w_1(t) = L^{-1}\{H(s)\}$.
3. Se determină funcția pondere discretă $w_1(kT) = w_1(t)|_{t=kT}$.
4. Se calculează suma șirului $H(z) = \sum_{m=0}^{\infty} w_1(kT)z^{-k}$.

Dacă f.d.t. $H(s)$ este complexă, atunci aceasta se prezintă prin suma fracțiilor elementare și pentru fiecare componentă se efectuează etapele 2, 3 și 4:

$$H(z) = \sum_{i=1}^r H_i(z). \quad (5.86)$$

Realizarea (5.86) este posibilă dacă se poate calcula suma seriei infinite în etapa 4, care pentru multe sisteme cu eșantionare reale este convergentă. În cazul când seriile din etapa 4 nu pot fi calculate, atunci $H(z)$ se calculează după relațiile (5.84) și (5.85).

În general, f.d.t. discretă a sistemului deschis cu eșantionare are forma:

$$H(s) = \frac{C(z)}{D(z)} = \frac{k}{(z-1)^v} \frac{C_1(z)}{D_1(z)}, \quad (5.87)$$

unde $C(z), D(z)$ sunt polinoame de gradele m și n respectiv cu $m \leq n$, k este coeficientul de transfer al sistemului, $C_1(z), D_1(z)$ – polinoame normate de gradele m și $n - v$, astfel $C_1(0)/D_1(0) = 1$.

În cazul când funcția de transfer a părții liniare prezintă expresii de grad redus, atunci pentru determinarea funcției de transfer discretă se pot utiliza formele tabelare (anexa 3).

Funcția de transfer discretă $H(z)$ se caracterizează prin indicii:

1) n este gradul numitorului $D_1(z) = 0$ și rădăcinile reprezintă polii p_i lui $H(z)$;

2) v este gradul de astatism $(z - 1)^v = 0$ și reprezintă polii unitari $p_v = 1$ lui $H(z)$;

3) m este gradul numărătorului $C_1(z) = 0$ și reprezintă zerourile z_j lui $H(z)$.

Proprietățile funcției de transfer discrete $H(z)$ sunt:

1. Funcția de transfer discretă în forma $H^*(s) = H(z)|_{z=e^{sT}}$ este o funcție periodică cu perioada $j\omega_e$, unde $\omega_e = 2\pi/T$ este frecvența de eșantionare și rezultă:

$$H^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(s + jk\omega_e) \text{ pentru } w(t) \equiv 0, t \leq 0 \quad (5.88)$$

sau în forma:

$$H^*(s) = \frac{w(0)}{2} + \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(s + jk\omega_e) \text{ pentru } w(t) \neq 0, t \leq 0. \quad (5.89)$$

2. Valorile funcției de transfer discrete $H(z)$ sunt numai reale la $z = 1$ ($\omega = 0$) și $z = -1$ ($\omega = n\omega_e/2$), finite la $z = 1$, dacă p_i nu are poli în origine.

3. Polii z_i ai lui $H(z)$ sunt legați funcțional cu polii p_i ai lui $H(s)$ prin relația $z_i = e^{p_i T}$. Numărul polilor $H(z)$ este egal cu numărul polilor $H(s)$ și rezultă că gradul numitorului f.d.t. discrete $H(z)$ este egal cu gradul numitorului f.d.t. $H(s)$ în transformata Laplace s [17].

5.7 Scheme structurale și funcțiile de transfer ale sistemului închis cu eșantionare

Se consideră structura sistemului închis discret din figura 5.13, care include elementele: eșantionatorul ideal și fictiv de eșantionare cu perioada de eșantionare T , elementul de reținere cu f.d.t. $H_{ER}(s)$, partea liniară cu f.d.t. $H_1(s)$, $H_2(s)$, iar în reacție este un element liniar cu f.d.t.

$H_r(s)$ și asupra sistemului acționează semnalele de referință $r(t)$ și perturbația $p(t)$.

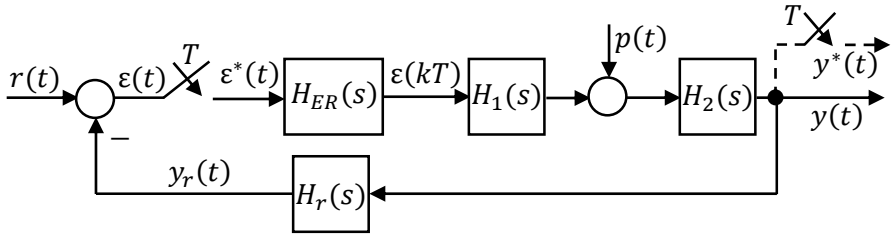


Fig. 5.13. Structura sistemului automat închis cu eșantionare

În cazul când perturbația $p(t) = 0$, partea liniară cu elementul de reținere este înseriată și se obține f.d.t. din canalul direct:

$$H_d(s) = H_{ER}(s)H_1(s)H_2(s). \quad (5.90)$$

Semnalul de intrare al eșantionatorului ideal este semnalul erorii:

$$\varepsilon(t) = r(t) - y_r(t) \quad (5.91)$$

sau în formă discretă și transformata z:

$$\begin{aligned} \varepsilon^*(t) &= r^*(t) - y_r^*(t), \\ \varepsilon(z) &= r(z) - y_r(z). \end{aligned} \quad (5.92)$$

Se determină f.d.t. discretă a sistemului deschis (5.90) prin mărirea de ieșire în forma:

$$\begin{aligned} y(z) &= Z\{H_d(s)\}\varepsilon(z) = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{H_1(s)H_2(s)}{s}\right\}\varepsilon(z) = H_d(z)\varepsilon(z), \\ \frac{y(z)}{\varepsilon(z)} &= H_d(z) = \frac{C(z)}{D(z)}. \end{aligned} \quad (5.93)$$

Se calculează semnalul transferului $\varepsilon(z) \rightarrow y_r(z)$:

$$y_r(z) = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{H_1(s)H_2(s)H_r(s)}{s}\right\}\varepsilon(z) = H(z)\varepsilon(z). \quad (5.94)$$

Se determină funcția de transfer discretă a sistemului închis ca transferul $\varepsilon(z) \rightarrow y(z)$:

$$\begin{aligned} y(z) &= H_d(z)\varepsilon(z) = H_d(z)(r(z) - y_r(z)) = \\ &= H_d(z)r(z) - H_d(z)H(z)\varepsilon(z) = H_d(z)r(z) - H_d(z)H(z)\frac{y(z)}{H_d(z)} = \\ &= H_d(z)r(z) - H(z)y(z) \end{aligned} \quad (5.95)$$

sau după transformare se obține:

$$\begin{aligned} y(z) &= (1 + H(z))^{-1}H_d(z)r(z), \\ y(z) &= \frac{H_d(z)}{1+H(z)}r(z) = \frac{\frac{z^{-1}}{z}Z\left\{\frac{1}{s}(H_1(s)H_2(s))\right\}}{1+\frac{z^{-1}}{z}Z\left\{\frac{1}{s}(H_1(s)H_2(s)H_r(s))\right\}}r(z) = H_0(z)r(z), \\ \frac{y(z)}{r(z)} &= H_0(z) = \frac{\frac{z^{-1}}{z}Z\left\{\frac{1}{s}(H_1(s)H_2(s))\right\}}{1+\frac{z^{-1}}{z}Z\left\{\frac{1}{s}(H_1(s)H_2(s)H_r(s))\right\}} = \frac{B(z)}{A(z)}, \quad m \leq n, \end{aligned} \quad (5.96)$$

unde $B(z)$, $A(z)$ sunt polinoame de gradul m și n respectiv.

Se determină f.d.t. discretă a erorii sistemului închis, pornind de la (5.92) și după unele transformări se obține:

$$\begin{aligned} \varepsilon(z) &= r(z) - y_r(z) = r(z) - H(z)\varepsilon(z), \\ \varepsilon(z)(1 + H(z)) &= r(z), \\ \frac{\varepsilon(z)}{r(z)} &= H_\varepsilon(z) = \frac{1}{1+H(z)} = \frac{1}{1+\frac{z^{-1}}{z}Z\left\{\frac{1}{s}(H_1(s)H_2(s)H_r(s))\right\}} = \frac{B_\varepsilon(z)}{A_\varepsilon(z)}. \end{aligned} \quad (5.97)$$

Dacă reacția este unitară $H_r(z) = 1$, atunci f.d.t. discretă a sistemului închis (5.96) și a erorii (5.97) vor avea forma:

$$H_0(z) = \frac{\frac{z^{-1}}{z} Z\left\{\frac{1}{s}(H_1(s)H_2(s))\right\}}{1 + \frac{z^{-1}}{z} Z\left\{\frac{1}{s}(H_1(s)H_2(s))\right\}} = \frac{H_d(z)}{1 + H_d(z)} = \frac{B(z)}{A(z)}, \quad (5.98)$$

$$H_\varepsilon(z) = \frac{1}{1 + \frac{z^{-1}}{z} Z\left\{\frac{1}{s}(H_1(s)H_2(s))\right\}} = \frac{1}{1 + H_d(z)} = \frac{B_\varepsilon(z)}{A_\varepsilon(z)}. \quad (5.99)$$

Se analizează cazul când referința $r(t) = 0$ și asupra sistemului închis acționează perturbația $p(t)$ și schema structurală din figura 5.13 se transformă în structura dată în figura 5.14 [8, 17].

Mărima de ieșire a sistemului va fi mărima ieșirii elementului fictiv de eșantionare:

$$y^*(t) = y_1^*(t) + y_2^*(t) \quad (5.100)$$

sau în transformata z :

$$y(z) = y_1(z) + y_2(z). \quad (5.101)$$

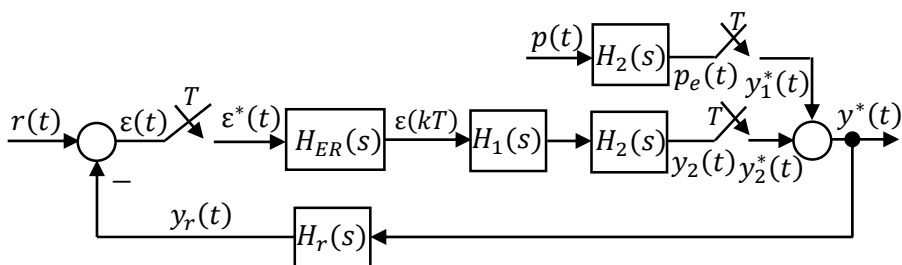


Fig. 5.14. Structura sistemului închis discret cu acțiunea perturbației

Se determină expresiile pentru $y_1(z)$ și $y_2(z)$:

$$y_1(z) = Z\{p(s)H_2(s)\} = PH_2(z),$$

$$y_2(z) = -y(z)Z\{H_{ER}(s)H_1(s)H_2(s)\} = -y(z)H_d(z). \quad (5.102)$$

Se calculează expresia (5.101) cu (5.102) și se obține:

$$y(z) = y_1(z) + y_2(z) = PH_2(z) - y(z)H_d(z)$$

sau în forma:

$$y(z) = \frac{PH_2(z)}{1+H_d(z)}. \quad (5.103)$$

În acest caz, nu s-a obținut f.d.t. discretă a sistemului la acțiunea perturbației $p(t)$ (nu este posibil). Aceasta se explică prin faptul că perturbația nu acționează la intrarea elementului ideal de discretizare. În aceste cazuri, f.d.t. discretă se prezintă pentru perturbația echivalentă obținută prin recalcularea perturbației reale la intrarea eșantionatorului ideal.

Perturbația echivalentă se determină prin relația:

$$p_e(z) = L^{-1}\{p(s)H_2(s)\} = PH_2(z), \quad (5.104)$$

iar f.d.t. discretă se obține pentru transferul $p_e(z) \rightarrow y(z)$:

$$H_{yp_e}(z) = \frac{y(z)}{p_e(z)} = \frac{PH_2(z)}{(1+H_d(z))PH_2(z)} = \frac{1}{1+H_d(z)}. \quad (5.105)$$

Dacă structura sistemului automat discret este complexă, atunci pentru a obține funcția de transfer discretă se utilizează reguli de transformare a schemei sistemului automat.

Într-o structură a sistemului discret există conexiuni de elemente discrete tipice: *în serie*, *în paralel* și *în reacție*. Algebra funcțiilor de transfer discrete ale acestor conexiuni este identică cu cea a conexiunilor de elemente continue liniare [4, 8, 11, 17].

Se dau f.d.t. discrete ale conexiunilor de elemente tipice.

Se consideră conexiune serie a n elemente discrete cu f.d.t. $H_i(z)$, $i = 1, 2, \dots, n$, funcția de transfer discretă echivalentă se determină ca produsul algebric al funcțiilor de transfer al elementelor componente:

$$H(z) = \prod_{i=1}^n H_i(z). \quad (5.106)$$

Pentru o conexiune paralelă a n elemente discrete cu f.d.t. $H_i(z)$,

$i = 1, 2, \dots, n$ f.d.t.d. echivalentă se obține suma algebrică a funcțiilor de transfer al elementelor componente:

$$H(z) = \sum_{i=1}^n H_i(z). \quad (5.107)$$

Pentru o conexiune cu reacție, în care canalul direct se descrie cu f.d.t. discretă. $H_1(z)$, iar în reacție negativă (pozitivă) se caracterizează cu elementul discret cu f.d.t. discretă $H_2(z)$, atunci f.d.t. echivalentă se descrie prin relația:

$$H(z) = \frac{H_1(z)}{1 \pm H_1(z)H_2(z)}. \quad (5.108)$$

Pentru transformarea schemelor structurale ale sistemelor automate discrete se aplică regulile expuse pentru sistemele continue.

5.8 Transformata z de la conexiuni de elemente discrete și continue

În structura unui sistem automat discret pot exista diverse tipuri de conexiuni ale elementului de discretizare cu elementele funcționale ale sistemului. Tipurile de conexiuni se evidențiază în reguli de transformare, care simplifică procedura de obținere a f.d.t. discretă a sistemului discret.

Se expun cele mai des utilizate reguli de transformare și determinare a transformatei z a conexiunilor de elemente [4, 8, 11, 13, 17].

1. *Conexiunea directă*—conexiunea elementului discret ideal cu elementul cu f.d.t. $H(s)$ (fig. 5.15). Se aplică semnalul de intrare $x(t)$ și se determină imaginea semnalului de ieșire $y(z)$ prin relația:

$$y(z) = Z\{H(s)\}x(z) = H(z)x(z).$$

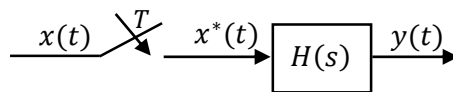


Fig. 5.15. Conexiune directă

2. *Conexiunea inversă* – conexiunea elementului cu f.d.t. $H(s)$ cu elementul discret ideal (fig. 5.16) cu semnalul de intrare $x(t)$:

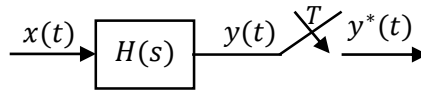


Fig. 5.16. Conexiune inversă

Pentru această conexiune, f.d.t. discretă echivalentă explicit nu poate fi obținută. În aceste cazuri, se calculează transformata z a semnalului de ieșire în forma:

$$y(z) = Z\{x(s)H(s)\} = XH(z).$$

Exemplul 5.10 Se consideră sistemul descris cu funcția de transfer continuă:

$$H(s) = \frac{k_1}{T_1s+1} = \frac{5}{10s+1}$$

și la intrare se aplică semnalul treaptă unitară $x(t) = 1(t)$ cu imaginea $x(s) = 1/s$.

Se cere pentru perioada de eșantionare $T = 0.1$ s să se determine f.d.t. discretă de la conexiunea inversă.

Soluționare. Funcția de transfer discretă se reprezintă în forma:

$$XH(z) = Z\left\{\frac{1}{s} \frac{k_1}{T_1s+1}\right\}$$

și pentru expresia din parantezele figurate după tabelul A3.1, anexa 3 se găsește echivalentul în transformata z în forma:

$$XH(z) = Z\left\{\frac{1}{s} \frac{k_1}{T_1s+1}\right\} = \frac{k_1(1-d)z}{(z-1)(z-d)} = \frac{5(1-0.99)z}{(z-1)(z-0.99)} = \frac{0.05z}{z^2-1.99z+0.99},$$

unde $d = e^{-T/T_1} = e^{-0.1/10} = 0.99$. ■

3. *Conexiunea directă dublă* – conexiunea serie dublă a elementului discret ideal cu un element cu f.d.t. $H_1(s)$ și a elementului discret ideal cu elementul cu f.d.t. $H_2(s)$ (fig. 5.17).

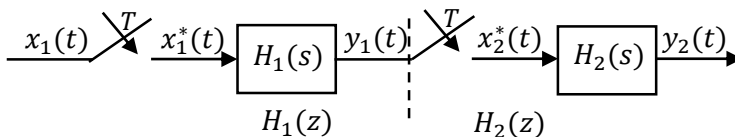


Fig. 5.17. Conexiune directă dublă

La intrarea conexiunii acționează semnalul $x_1(t)$ și se determină f.d.t. discretă echivalentă după regula produsului f.d.t. discrete a conexiuni directe:

$$H_e(z) = H_1(z)H_2(z), y(z) = H_e(z)x(z).$$

4. *Conexiunea elementului discret ideal cu două elemente liniare înseriate* (fig. 5.18). În acest caz, pentru elementele liniare se determină f.d.t. echivalentă $H_e(s) = H_1(s)H_2(s)$ și pentru structura obținută se aplică regula 1, se calculează f.d.t. discretă:

$$H_e(z) = Z\{H_e(s)\} = Z\{H_1(s)H_2(s)\} = H_1H_2(z).$$

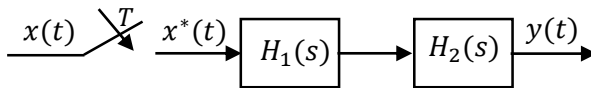


Fig. 5.18. Conexiune directă cu elemente liniare înseriate

5. *Elementul discret ideal conectat între două elemente cu f.d.t. $H_1(s)$ și $H_2(s)$* . Structura inițială (fig. 5.19) se dividează în conexiune inversă și conexiune directă, care reprezintă conexiunea în serie:

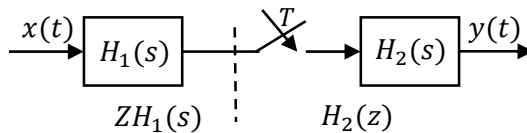


Fig. 5.19. Conexiune cu elementul discret între două elemente continue

Se calculează f.d.t. discretă a conexiunilor după regulile 2 și 1 și mărimea de ieșire se prezintă ca produsul f.d.t. discretă a conexiunii serie:

$$y(z) = XH_1(z)H_2(z).$$

6. *Conexiunea directă cu reacție continuă* (fig. 5.20). În acest caz, în prima etapă se determină f.d.t. a transferului $\varepsilon(t) \rightarrow y(t)$ al

canalului direct, iar în a doua etapă se determină f.d.t. a transferului $\varepsilon(t) \rightarrow y_r(t)$:

$$y(z) = Z\{H_1(s)\}\varepsilon(z) = H_1(z)\varepsilon(z), \text{ (regula 1),}$$

$$y_r(z) = Z\{H_1(s)H_2(s)\}\varepsilon(z) = H_1H_2(z)\varepsilon(z), \text{ (regula 4).}$$

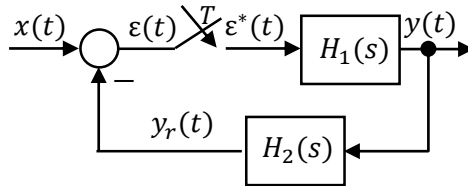


Fig. 5.20. Conexiune directă cu reacție continuă

În continuare, se determină semnalul mărimii de ieșire $y(z)$ din canalul direct ca funcție de semnalul intrării $x(z)$:

$$\begin{aligned} y(z) &= H_1(z)\varepsilon(z) = H_1(z)(x(z) \pm y_r(z)) = \\ &= H_1(z)x(z) \pm H_1(z)y_r(z) = H_1(z)x(z) \pm H_1(z)H_1H_2(z)\varepsilon(z) = \\ &= H_1(z)x(z) \pm H_1(z)H_1H_2(z)\frac{y(z)}{H_1(z)} = H_1(z)x(z) \pm H_1H_2(z)y(z). \end{aligned}$$

În rezultatul transformărilor respective se obține f.d.t. discretă a sistemului închis:

$$y(z)(1 \mp H_1H_2(z)) = H_1(z)x(z),$$

$$y(z) = \frac{H_1(z)}{1 \mp H_1H_2(z)} x(z),$$

$$\frac{y(z)}{x(z)} = H_0(z) = \frac{H_1(z)}{1 \mp H_1H_2(z)} = \frac{B(z)}{A(z)}.$$

7. *Conexiunea directă cu reacție discretă* (fig. 5.21). Se determină mărimile discrete ale ieșirii $y(z)$ și ale semnalului reacției

$y_r(z)$ ca și conexiuni directe (regula 1):

$$y(z) = Z\{H_1(s)\}\varepsilon(z) = H_1(z)\varepsilon(z),$$

$$y_r(z) = Z\{H_2(s)\}y(z) = H_2(z)y(z).$$

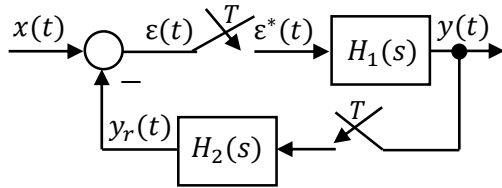


Fig. 5.21. Conexiune directă cu reacție discretă

Se determină semnalul discret al ieșirii $y(z)$ în raport cu eroarea $\varepsilon(z)$ și după unele transformări se obține f.d.t. discretă a acestei conexiuni:

$$y(z) = H_1(z)\varepsilon(z) = H_1(z)(x(z) \pm y_r(z)) =$$

$$= H_1(z)x(z) \pm H_1(z)y_r(z) = H_1(z)x(z) \pm H_1(z)H_2(z)y(z),$$

$$y(z)(1 \mp H_1(z)H_2(z)) = H_1(z)x(z),$$

$$y(z) = \frac{H_1(z)}{1 \mp H_1(z)H_2(z)} x(z),$$

$$\frac{y(z)}{x(z)} = H_e(z) = \frac{H_1(z)}{1 \mp H_1(z)H_2(z)} = \frac{B(z)}{A(z)}.$$

8. *Conexiunea directă cu două eșantionatoare în canalul direct și cu reacție continuă.* Se determină mărimea $y(z)$ ca funcție de mărimea erorii $\varepsilon(z)$ a conexiunii directe (fig.5.22), aplicând regula 1:

$$y(z) = H_1(z)\varepsilon(z).$$

În continuare, se determină mărimea discretă a semnalului de reacție $y_r(z)$ în raport cu semnalul erorii $\varepsilon(z)$ (regula 3):

$$y_r(z) = H_1(z)H_2(z)\varepsilon(z).$$

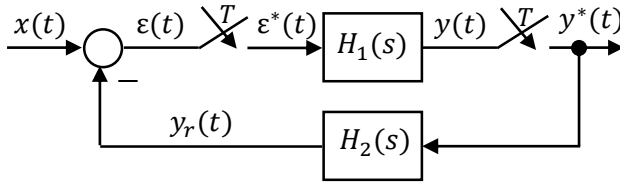


Fig. 5.22. Conexiune directă cu reacție continuă

F.d.t. discretă a conexiunii se determină prin analogie cu regula 7 și se obține:

$$\begin{aligned}
 y(z) &= H_1(z)\varepsilon(z) = H_1(z)(x(z) \pm y_r(z)) = \\
 &= H_1(z)x(z) \pm H_1(z)y_r(z) = H_1(z)x(z) \pm H_1(z)H_1(z)H_2(z)\varepsilon(z) = \\
 &= H_1(z)x(z) \pm H_1(z)H_1(z)H_2(z) \frac{y(z)}{H_1(z)} = \\
 &= H_1(z)x(z) \pm H_1(z)H_2(z)y(z), \\
 y(z)(1 \mp H_1(z)H_2(z)) &= H_1(z)x(z), \\
 y(z) &= \frac{H_1(z)}{1 \mp H_1(z)H_2(z)} x(z), \\
 \frac{y(z)}{x(z)} &= H_0(z) = \frac{H_1(z)}{1 \mp H_1(z)H_2(z)} = \frac{B(z)}{A(z)}.
 \end{aligned}$$

9. *Conexiunea directă dublă în canalul direct cu reacție continuă* (fig. 5.23). Se determină mărimea discretă a ieșirii $y(z)$ de la conexiunea directă dublă în canalul direct (regula 3):

$$y(z) = H_1(z)H_2(z)\varepsilon(z).$$

În continuare, se determină f.d.t. discretă a semnalului de reacție $y_r(t)$ în raport cu semnalul de intrare $\varepsilon(t)$ (regula 3 și 4):

$$y_r(z) = H_1(z)H_2H_3(z)\varepsilon(z).$$

F.d.t. discretă a conexiunii se determină, aplicând regulile 7, 8:

$$\frac{y(z)}{x(z)} = H_0(z) = \frac{H_1(z)H_2(z)}{1 \mp H_1(z)H_2H_3(z)} = \frac{B(z)}{A(z)}.$$

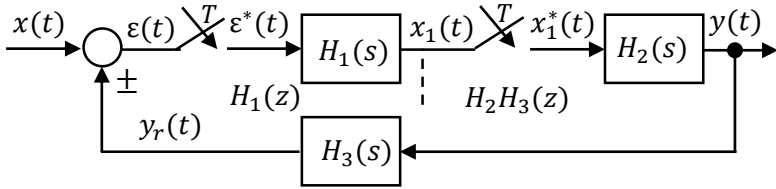


Fig. 5.23. Conexiune directă dublă în canalul direct cu reacție continuă

10. *Conexiune indirectă în canalul direct cu reacție continuă* (fig. 5.24). În structura sistemului există conexiune indirectă (regula 2) în canalul direct al elementului cu f.d.t. $H_1(s)$ cu elementul de eșantionare cu funcția de transfer $H_{ER}(s)$ și înseriat cu elementul cu funcția de transfer $H_2(s)$, iar în canalul reacției elementul cu f.d.t. $H_r(s)$.

Se întrerupe canalul direct în punctul L și se calculează transformata z a semnalului $y_1(z)$ în raport cu semnalul erorii $\varepsilon(s)$ și după transformările respective se obține:

$$\begin{aligned}
 y_1(z) &= Z\{H_1(s)\varepsilon(s)\} = Z\{H_1(s)(x(s) - H_1(s)y_r(s))\} = \\
 &= Z\{x(s)H_1(s) - H_1(s)H_{ER}(s)H_2(s)H_r(s)y_1(s)\} = \\
 &= Z\{x(s)H_1(s)\} - Z\{H_{ER}(s)H_2(s)H_r(s)H_1(s)\}y_1(z) = \\
 &= XH_1(z) - H_{ER}H_2H_rH_1(z)y_1(z), \\
 y_1(z) &= \frac{XH_1(z)}{1+H_{ER}H_2H_rH_1(z)}.
 \end{aligned}$$

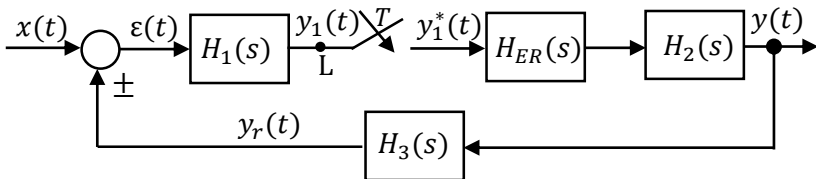


Fig. 5.24. Conexiune indirectă în canalul direct cu reacție continuă

Se determină mărimea de ieșire $y(z)$ a sistemului în raport cu mărimea $y_1(z)$:

$$y(z) = H_{ER}H_2(z)y_1(z) = \frac{H_{ER}H_2(z)XH_1(z)}{1+H_{ER}H_2H_rH_1(z)} = \frac{B(z)}{A(z)}.$$

5.9 Funcții frecvențiale ale sistemului automat cu eșantionare

Esența fizică a funcțiilor frecvențiale ale sistemelor automate cu eșantionare și ale sistemelor continue este similară [4, 8, 11, 17].

Deosebirea funcțiilor frecvențiale ale sistemelor cu eșantionare constă în faptul că aceste funcții reprezintă dependența succesiunilor de impulsuri armonice la intrarea și ieșirea filtrului de impulsuri cu f.d.t. $H^*(s)$ sau $H(z)$. Înfășurătoarea succesiunilor de impulsuri se modifică după legi armonice.

Dacă la intrarea filtrului de impulsuri armonici se aplică un semnal armonic de forma:

$$x(kT) = A_x \sin \omega kT, \quad (5.109)$$

atunci la terminarea procesului tranzitoriu la ieșirea filtrului de asemenea va exista un semnal armonic cu amplitudinea A_y și aceeași frecvență de eșantionate ω și cu defazajul φ :

$$y(kT) = A_y \sin(\omega kT + \varphi). \quad (5.110)$$

Funcțiile armonice continue sunt funcții periodice, ceea ce în cazuri generale, funcțiile de succesiune nu sunt funcții periodice de k .

Amplitudinile A_x , A_y nu pot fi întocmai valorile maxime ale semnalelor $x(kT)$, $y(kT)$. Aceste amplitudini vor determina limitele de sus, dar nu valorile maxime ale acestor succesiuni.

Dacă informația inițială a sistemului discret este reprezentată prin f.d.t. $H^*(s)$ sau $H(z)$, atunci pentru a trece în domeniul frecvență se utilizează substituțiile $s = j\omega$ sau $z = e^{j\omega T}$ și se obține:

$$H^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(j(\omega + k\omega_d)) \quad (5.111)$$

sau

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}, \quad (5.112)$$

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{B(e^{j\omega T})}{A(e^{j\omega T})} = \frac{b_m e^{jm\omega T} + b_{m-1} e^{j(m-1)\omega T} + \dots + b_1 e^{j\omega T} + b_0}{a_n e^{jn\omega T} + a_{n-1} e^{j(n-1)\omega T} + \dots + a_1 e^{j\omega T} + a_0}. \quad (5.113)$$

După unele transformări pentru (5.111) se obține:

$$\begin{aligned} H^*(j\omega) &= P^*(\omega) + jQ^*(\omega) = A^*(\omega)e^{j\varphi^*(\omega)} = \\ &= A^*(\omega)\cos\varphi^*(\omega) + jA^*(\omega)\sin\varphi^*(\omega), \end{aligned} \quad (5.114)$$

unde:

$$\begin{aligned} A^*(\omega) &= \sqrt{P^{*2}(\omega) + Q^{*2}(\omega)}, \\ \varphi^*(\omega) &= \text{Arctg} \frac{Q^*(\omega)}{P^*(\omega)} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (5.115)$$

Se modifică $\omega = 0 \dots \frac{\pi}{T}$ și se calculează partea reală $P^*(\omega)$ și imaginară $Q^*(\omega)$ după valorile cărora se construiește locul de transfer $H^*(j\omega)$ sau funcțiile amplitudinii $A^*(\omega)$ și faza $\varphi^*(\omega)$.

Proprietățile locului de transfer al sistemului discret.

1. Locul de transfer $H^*(j\omega)$ al sistemului discret este o funcție periodică cu perioada $\omega_e = \frac{2\pi}{T}$. La construirea acestor funcții modificarea lui $\omega = 0 \dots \frac{\pi}{T}$ (sau $\frac{2\pi}{T}$) ($-\frac{\pi}{T} \dots \frac{\pi}{T}$; $-\frac{\pi}{T} \dots 0$; $0 \dots \frac{\pi}{T}$) și sunt funcții simetrice.

2. Locul de transfer $H^*(j\omega)$ al sistemului discret se localizează pe axa reală, fiindcă la $\omega = \frac{\pi}{T}$ funcția $H^*(j\omega)$ este un număr real.

Proprietatea de funcție periodică a locului de transfer $H^*(j\omega)$ fizic este efectul stroboscopic: funcția armonică $x(kT) = A_x \sin \omega kT$ la intrarea filtrului nu se modifică la variația lui ω a înfășurătoarei la mărimi multiple lui ω_e și atunci succesiunea $x(kT)$ va fi una și aceeași la toate pulsațiile înfășurătoarei egale cu $\omega + k\omega_e$, unde $k = 0, 1, 2, \dots$

Locul de transfer $H^*(j\omega)$ al sistemului discret se poate construi după $H^*(s)$ sau $H(z)$ și după f.d.t. a părții continue prin relațiile (5.88), (5.89) cu substituția lui $s = j\omega$ sau după funcția pondere discretă dată de relația (5.79) cu $s = j\omega$.

Pentru sistemele cu eșantionare se utilizează și caracteristicile logaritmice.

Dăm exemple de construire a locului de transfer $H^*(j\omega)$ al

sistemului deschis cu eșantionare.

Exemplul 5.11 [13, 17]. Se consideră structura sistemului deschis discret (fig. 5.25) alcătuită din elementul dinamic de integrare cu f.d.t. $H(s)$ și elementul de reținere de ordin zero cu f.d.t. $H_{ER}(s)$:

$$H(s) = 1/T_i s = k_i/s, \quad H_{ER}(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s},$$

unde T_i este constanta de timp de integrare, iar $k_i = 1/T_i$, T – perioada de eșantionare.

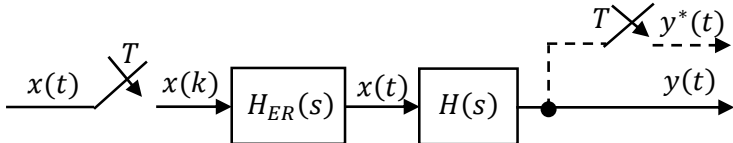


Fig. 5.25. Structura sistemului deschis cu eșantionare

Să se determine locul de transfer al sistemului deschis cu eșantionare.

Soluționare. Se determină f.d.t. a sistemului deschis cu elementele liniare înseriate:

$$H_d(s) = H_{ER}(s)H(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s} \frac{k_i}{s} = (1 - e^{-Ts}) \frac{k_i}{s^2}.$$

Se introduce variabila complexă $e^{Ts} = z$ și se calculează transformata z a sistemului, utilizând expresia din rândul trei al tabelului A3.1, anexa 3 și se obține:

$$H_d(z) = k_i(1 - z^{-1})Z\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = \left(\frac{z-1}{z}\right) \frac{k_i T z}{(z-1)^2} = \frac{k_i T}{z-1}.$$

Se utilizează substituțiile $s = j\omega$, $z = e^{Ts} = e^{j\omega T} = \cos\omega T + j\sin\omega T$ și după unele transformări se obține locul de transfer al sistemului discret în forma:

$$H_d^*(j\omega) = \frac{k_i T}{e^{j\omega T} - 1} = \frac{k_i T}{\cos\omega T - 1 + j\sin\omega T} = -\frac{k_i T}{2} - j \frac{k_i T}{2} \operatorname{ctg} \frac{\omega T}{2}.$$

Se variază $\omega = 0 \dots \frac{\pi}{T}$, se calculează și se trasează $H_d^*(j\omega)$ care este reprezentată în figura 5.26.

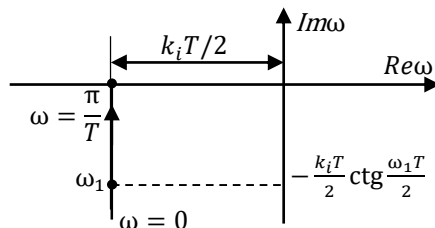


Fig. 5.26. Locul de transfer al sistemului discret

Din figură se constată că locul de transfer $H_d^*(j\omega)$ al sistemului reprezintă o dreaptă paralelă axei ordonatelor la distanța $-k_i T/2$ situată în cadranul III.

Pentru valoarea frecvenței $\omega = \omega_1$ s-a calculat și s-a trasat punctul cu coordonatele $(-\frac{k_i T}{2}, -\frac{k_i T}{2} \operatorname{ctg} \frac{\omega T}{2})$. ■

Exemplul 5.12 [15]. Ce consideră partea continuă a sistemului din exemplul 5.8 (fig. 5.25) care este o conexiune serie a elementului cu inerție de ordinul unu cu f.d.t. $H(s)$ și elementul de reținere de ordin zero cu f.d.t. $H_{ER}(s)$:

$$H(s) = \frac{k}{T_1 s + 1}, \quad H_{ER}(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s},$$

unde k este coeficientul de transfer, T_1 – constanta de timp, T – perioada de eșantionare.

Se cere să se determine locul de transfer $H_d^*(j\omega)$ al sistemului deschis discret.

Soluționare. Se determină f.d.t. a sistemului deschis cu elementele înseriate:

$$H_d(z) = H_{ER}(s)H_{PF}(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \frac{k}{T_1 s + 1} = (1 - e^{-Ts}) \frac{k}{s(T_1 s + 1)}.$$

Se introduce variabila complexă $e^{Ts} = z$ și se calculează transformata z a sistemului deschis, utilizând tabelul A3.1, anexa 3 cu $d = e^{-T/T_1}$:

$$H_d(z) = k(1 - z^{-1})Z\left\{\frac{1}{s(T_1 s + 1)}\right\} = \left(\frac{z-1}{z}\right) \frac{k(1 - e^{-T/T_1})z}{(z-1)(z - e^{-T/T_1})} = \frac{k(1 - e^{-T/T_1})}{z - e^{-T/T_1}} = \frac{k(1-d)}{z-d}.$$

Se utilizează substituțiile $s = j\omega$, $z = e^{j\omega T} = \cos\omega T + j\sin\omega T$ și după unele transformări se obține locul de transfer al sistemului în forma:

$$H_d^*(j\omega) = \frac{k(1-d)}{e^{j\omega T} - d} = \frac{k(1-d)}{\sqrt{1 - 2d\cos\omega T + d^2}} e^{-j\arctg \frac{\sin\omega T}{\cos\omega T - d}}.$$

Se variază $\omega = 0 \dots \pi/T$, se calculează și se trasează locul de transfer al sistemului deschis $H_d^*(j\omega)$ care este reprezentat în figura 5.27.

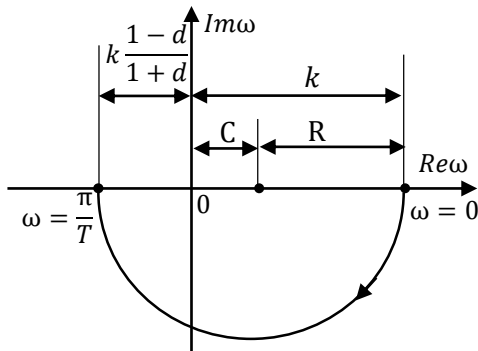


Fig. 5.27. Locul de transfer al sistemului deschis cu eșantionare

5.10 Modele intrare–stare–ieșire ale sistemelor automate cu eșantionare

Modelele intrare–stare–ieșire (ISI) ale sistemului cu eșantionare se pot obține pe mai multe căi. Se analizează două metode [4, 11, 13, 17].

1. Modele intrare–stare–ieșire obținute din ecuația cu diferențe finite sau transformata z .

2. Modele intrare–stare–ieșire obținute prin soluția ecuației diferențiale a elementelor înseriate – elementul de reținere ER și partea fixată PF.

Modele intrare–stare–ieșire obținute din ecuația cu diferențe finite sau transformata z . Prin această metodă modelul intrare–stare–ieșire se obține pe cale directă – trecerea de la ecuația diferențială la variabilele de stare.

Se consideră f.d.t. a sistemului discret (filtru) cu intrarea $x(kT)$ și ieșirea $y(kT)$:

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{b_0z^n + b_1z^{n-1} + \dots + b_n}{z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n} = \\
 &= \frac{b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_nz^{-n}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_nz^{-n}} = \frac{B(z)}{A(z)}. \tag{5.116}
 \end{aligned}$$

Ecuația cu diferențe finite este:

$$\begin{aligned}
 y(k+n) + a_1y(k+n-1) + \dots + a_ny(k) = \\
 = b_0u(k+n) + b_1u(k+n-1) + \dots + b_nu(k). \tag{5.117}
 \end{aligned}$$

Se introduc variabilele de stare:

$$\begin{aligned}
 x_1(k) &= y(k), \\
 x_2(k) &= y(k+1) = x_1(k+1), \\
 x_3(k) &= y(k+2) = x_2(k+1), \\
 &\dots\dots\dots \\
 x_n(k) &= y(k+n-1) = x_{n-1}(k+1), \\
 y(k+n) &= x_n(k+1). \tag{5.118}
 \end{aligned}$$

Expunem cazuri particulare, admițând că în expresiile (5.116) și (5.117) $b_n = 1, b_0 = b_1 = \dots = b_{n-1} = 0$. Substituim în (5.117) cu (5.118) și se obține:

$$\begin{aligned} y(k+n) &= x_n(k+1) = \\ &= -a_1 x_n(k) - a_2 x_{n-1}(k) - \dots - a_n x_1(k) + u \end{aligned} \quad (5.119)$$

Expresia (5.119) are forma variabilelor de stare:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (5.120)$$

și ecuația de ieșire:

$$y(k) = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix}. \quad (5.121)$$

Se dau relațiile (5.120)-(5.121) în forma vector-matriceală:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u(k), \\ y(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k), \end{aligned} \quad (5.122)$$

unde $\mathbf{x}(k)$ este vectorul stărilor, matricea de stare:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix},$$

matricea intrării $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$, matricea de ieșire $\mathbf{C} = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$.

Dacă în expresia (5.116) polinomul $B(z) = 1$, atunci se obține:

$$y(z) = \frac{1}{A(z)}u(z) = \frac{1}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}u(z). \quad (5.123)$$

Deoarece $x_1(k) = y(k)$, atunci $y(z) = x_1(z)$ și expresiei (5.123) îi corespunde ecuația cu diferențe finite:

$$a_n x_1(k) + a_{n-1} x_1(k+1) + \dots + a_1 x_1(k+n-1) + x_1(k+n) = u(k). \quad (5.124)$$

În cazul când $b_n \neq 1$, și $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1} \neq 0$, din expresiile (5.116) și (5.123) se obține:

$$y(z) = B(z)x_1(z) = (b_n + b_{n-1}z + \dots + b_0 z^n)x_1(z), \quad (5.125)$$

căreia îi corespunde ecuația cu diferențe finite:

$$y(k) = b_n x_1(k) + b_{n-1} x_1(k+1) + \dots + b_0 x_1(k+n), \quad (5.126)$$

unde componenta $x_1(k)$ este soluția ecuației (5.124).

Prin variabilele de stare din (5.118) partea dreaptă a expresiei (5.126) este:

$$y(k) = b_n x_1(k) + b_{n-1} x_2(k) + \dots + b_1 x_n(k) + b_0 x_n(k+1). \quad (5.127)$$

Se substituie în (5.127) cu (5.119) pentru $x_n(k+1)$ și se obține:

$$y(k) = (b_n - b_0 a_n)x_1(k) + (b_{n-1} - b_0 a_{n-1})x_2(k) + \dots + (b_1 - b_0 a_1)x_n(k) + b_0 u(k). \quad (5.128)$$

Schema structurală aferentă ecuațiilor (5.119) și (5.127) prin variabilele de stare este dată în figura 5.28.

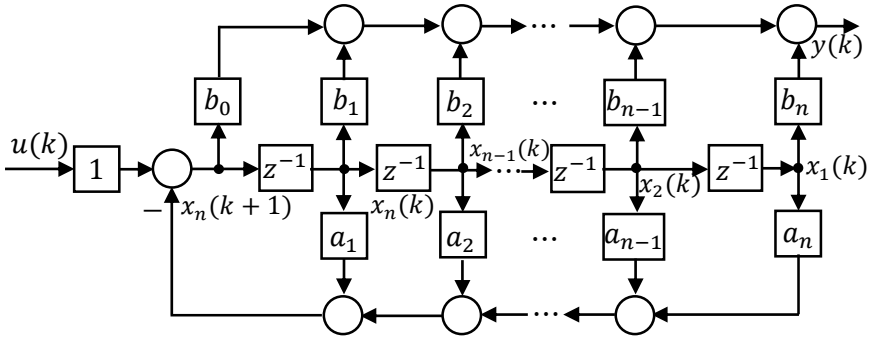


Fig. 5.28. Schema-bloc informațională a sistemului cu eșantionare în variabilele de stare

Expresia (5.128) este ecuația de ieșire în formă matriceală:

$$y(k) = [(b_n - b_0 a_n) \ (b_{n-1} - b_0 a_{n-1}) \ \dots \ (b_1 - b_0 a_1)] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k) \quad (5.129)$$

sau în formă vectorială:

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + b_0 u(k). \quad (5.130)$$

Dacă $b_0 = 0$, expresiile (5.126) și (5.127) au forma:

$$y(k) = \underbrace{[b_n \ b_{n-1} \ \dots \ b_1]}_{\mathbf{c}} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix}, \quad (5.131)$$

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k). \quad (5.132)$$

În final, ecuațiile discrete în formă vector-matriceală au forma:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u(k), \quad (5.133)$$

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + du(k).$$

Schema-bloc structurală generalizată aferentă ecuației (5.133) prin variabilele de stare este dată în figura 5.29.

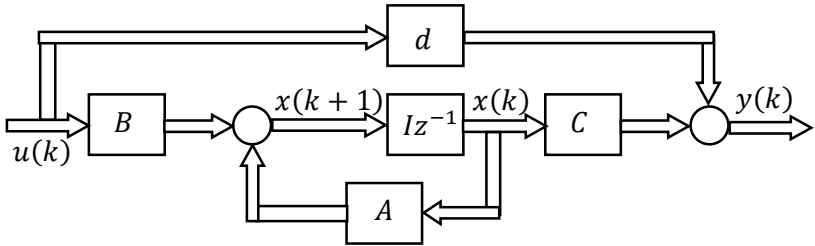


Fig. 5.29. Schema-bloc informațională aferentă realizării (5.133)

Modele intrare–stare–ieșire obținute prin soluția ecuației diferențiale ale ansamblului ER+PF.

Se consideră partea continuă reprezentată de elementul de reținere de ordinul zero și partea continuă descrisă de ecuația diferențială vector-matriceală și ecuația de ieșire:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), \quad (5.134)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + du(t). \quad (5.135)$$

Soluția sistemului (5.134) în condiții inițiale $\mathbf{x}(0)$ se dă prin relația:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(t - \tau)\mathbf{B}u(\tau)d\tau. \quad (5.136)$$

Matricea de transfer a stărilor este o matrice exponențială, care se reprezintă ca un șir:

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}t)^\gamma}{\gamma!}. \quad (5.137)$$

Dacă semnalele de intrare $u(t)$ și de ieșire $y(t)$ sunt discretizate, atunci descrierea sistemului discret în spațiul stărilor se poate obține din (5.134), (5.136) când la partea continuă există elementul de reținere de ordinul zero și mărimea de intrare este:

$$u(t) = u(kT) \text{ când } kT \leq t < (k + 1)T.$$

În acest caz, pentru starea inițială $\mathbf{x}(kT)$ soluția (5.136) a ecuației de stare pe intervalul $kT \leq t < (k+1)T$ are forma:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t - kT)\mathbf{x}(kT) + u(kT) \int_{kT}^t \Phi(t - \tau)\mathbf{B}d\tau. \quad (5.138)$$

Atunci pentru momentul de timp $t = (k+1)T$ starea se determină prin relația:

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \Phi(T)\mathbf{x}(kT) + u(kT) \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi((k+1)T - \tau)\mathbf{B}d\tau. \quad (5.139)$$

Se introduce o nouă variabilă $m = (k+1)T - \tau$ pentru care derivata acesteia este $dm = -d\tau$ și expresia (6.139) devine:

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi(T)\mathbf{x}(k) + u(k) \int_0^T \Phi(m)\mathbf{B}dm. \quad (5.140)$$

Pentru a simplifica descrierea se introduc notațiile:

$$\mathbf{A}_1 = \Phi(T) = \mathbf{e}^{AT}, \quad \mathbf{B}_1 = \int_0^T \Phi(m)\mathbf{B}dm. \quad (5.141)$$

Ecuația (5.140) cu (5.141) se transformă în forma:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_1\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_1u(k) \quad (5.142)$$

și ecuația ieșirii este:

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + du(k). \quad (5.143)$$

Dacă se aplică transformarea vectorului stărilor \mathbf{x} de tipul:

$$\mathbf{v} = \mathbf{T}\mathbf{x},$$

atunci se poate schimba baza spațiului stărilor, care permite a obține și alte forme de reprezentare ale sistemelor discrete și, în locul ecuațiilor (5.142)-(5.143), se obțin ecuațiile:

$$\mathbf{v}(k+1) = \mathbf{A}_v\mathbf{v}(k) + \mathbf{B}_v u(k), \quad (5.143')$$

$$y(k) = \mathbf{C}_v\mathbf{x}(k) + du(k),$$

unde $\mathbf{A}_v = \mathbf{T}\mathbf{A}_1\mathbf{T}^{-1}$, $\mathbf{B}_v = \mathbf{T}\mathbf{B}_1$, $\mathbf{C}_v = \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}$.

Se expun procedurile de soluționare a ecuațiilor cu diferențe în baza ecuațiilor (5.142)-(5.143).

Prima metodă se reduce la construirea procedurii recurente pentru succesiunea dată a semnalului de intrare $u(k)$ în condițiile inițiale cunoscute $\mathbf{x}(0)$. Această procedură se reprezintă prin succesiunea:

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(0) + \mathbf{B}_1 u(0),$$

$$\mathbf{x}(2) = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(1) + \mathbf{B}_1 u(1) = \mathbf{A}_1^2 \mathbf{x}(0) + \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 u(0) + \mathbf{B}_1 u(1),$$

.....(5.144)

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}_1^k \mathbf{x}(0) + \sum_{i=1}^k \mathbf{A}_1^{k-i} \mathbf{B}_1 u(i).$$

În sistemul (5.140), primul termen constituie soluția liberă a ecuației cu diferențe, iar al doilea termen – soluția forțată a sistemului. Mărimea de ieșire se determină prin ecuația (5.143).

Metoda a doua de soluționare a ecuației cu diferențe se aplică dacă semnalul discret este dat în transformata z . În aceste cazuri, ecuațiile de stare (5.142) se reprezintă prin transformata z și se obține:

$$z[\mathbf{x}(z) - \mathbf{x}(0)] = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(z) + \mathbf{B}_1 u(z)$$

sau după transformare se obține:

$$\mathbf{x}(z) = [z\mathbf{I} - \mathbf{A}_1]^{-1} z \mathbf{x}(0) + [z\mathbf{I} - \mathbf{A}_1]^{-1} \mathbf{B}_1 u(z). \quad (5.145)$$

Ecuția de ieșire este:

$$y(z) = \mathbf{C}[z\mathbf{I} - \mathbf{A}_1]^{-1} z \mathbf{x}(0) + [\mathbf{C}[z\mathbf{I} - \mathbf{A}_1]^{-1} \mathbf{B}_1 + d]u(z). \quad (5.146)$$

Comparând ecuația (5.145) și (5.144), se constată:

$$\mathbf{A}_1^k = \mathbf{Z}^{-1} \{ [z\mathbf{I} - \mathbf{A}_1]^{-1} z \}. \quad (5.147)$$

Utilizând ecuația (5.146), se determina f.d.t. discretă în condiții inițiale nule $\mathbf{x}(0) = 0$:

$$\frac{y(z)}{u(z)} = H(z) = \mathbf{C}[z\mathbf{I} - \mathbf{A}_1]^{-1}\mathbf{B}_1 + d = \frac{B(z)}{A(z)} = \mathbf{C} \frac{\text{adj}[z\mathbf{I} - \mathbf{A}_1]}{\det[z\mathbf{I} - \mathbf{A}_1]} \mathbf{B}_1 + d. \quad (5.148)$$

Deoarece termenul $[z\mathbf{I} - \mathbf{A}_1]^{-1} = \text{adj}[z\mathbf{I} - \mathbf{A}_1] A^{-1}(z)$ este adjuncta, iar $A(z) = \det[z\mathbf{I} - \mathbf{A}_1]$ determinantul matricei caracteristice (ecuația caracteristică), atunci f.d.t. discretă (5.148) va avea forma:

$$H(z) = \mathbf{C}[z\mathbf{I} - \mathbf{A}_1]^{-1}\mathbf{B}_1 + d = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\mathbf{C}\text{adj}[z\mathbf{I} - \mathbf{A}_1]\mathbf{B}_1 + dA(z)}{\det[z\mathbf{I} - \mathbf{A}_1]}. \quad (5.149)$$

Se substituie expresia (5.142) cu (5.143) pentru valorile lui $\mathbf{x}(k)$ în condiția $\mathbf{x}(0) = 0$ și se obține mărimea de ieșire în forma:

$$y(k) = \sum_{i=1}^k \mathbf{C}\mathbf{A}_1^{i-1} \mathbf{B}_1 u(k-i) + du(k). \quad (5.150)$$

Dacă semnalul de intrare este treaptă unitară discretă:

$$u(k) = \begin{cases} 1, & \text{când } k = 0, \\ 0, & \text{când } k > 0, \end{cases} \quad (5.151)$$

atunci semnalul de ieșire discret $y(k)$ reprezintă funcția pondere:

$$y(k) = w(k) = \begin{cases} d, & \text{când } k = 0, \\ \mathbf{C}\mathbf{A}_1^{k-1} \mathbf{B}_1, & \text{când } k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (5.152)$$

Din ultimele expresii se poate obține legătura dintre funcția de transfer discretă și funcția pondere în forma:

$$H(z) = \sum_{i=0}^{\infty} w(k)z^{-k} = d + \mathbf{C}\mathbf{A}_1^{k-1} \mathbf{B}_1 z^{-k}. \quad (5.153)$$

Chestionar și probleme

1. Explicați noțiunea de discretizare a semnalelor. Evidențiați tipurile de discretizare.
2. Prezentați un impuls dreptunghiular și numiți parametrii impulsului.
3. Ce prezintă modulația semnalelor? Explicați tipurile de modulații ale semnalelor.

4. Explicați ce reprezintă elementul de discretizare ideal și real.
5. Prezentați clasificarea sistemelor discrete după modulație.
6. Prezentați modelul matematic al elementului de reținere de ordinul zero.
7. Ce reprezintă perioada de eșantionare și din ce condiții se alege valoarea acesteia?
8. Prezentați schema-bloc funcțională și structurală a sistemului cu eșantionare și numiți elementele funcționale și dinamice.
9. Din care condiții se alege locul de conectare a elementului de reținere în structura sistemului cu eșantionare?
10. Ce reprezintă partea fixată a sistemului cu eșantionare?
11. Explicați diferența dintre sistemul cu eșantionare și sistemul numeric.
12. Care sunt avantajele sistemului automat discret?
13. Explicați diferența dintre sistemul liniar în timp continuu și sistemul liniar cu eșantionare.
14. Prezentați eșantionarea semnalelor $x(t) = 1(t)$, $x(t) = t$ și $x(t) = t^2$.
15. Explicați noțiunea de ecuație cu diferențe finite și ce reprezintă diferența finită?
16. Cum se introduce noțiunea de variabila complexă z la descrierea unui element dinamic sau a sistemului?
17. Determinați funcția de transfer în z pentru elementul dinamic integrator.
18. Determinați funcția de transfer în z pentru un element dinamic cu inerție de ordinul unu.
19. Determinați funcția de transfer în z pentru un element dinamic cu inerție de ordinul doi.
20. Se consideră funcția pondere a elementului cu inerție de ordinul unu cu coeficientul de transfer k și constanta de timp T_0 :

$$w(t) = \frac{k}{T_0} e^{-t/T},$$
 unde T este perioada de eșantionare. Determinați funcția de transfer în z a elementului și comparați-o cu funcția de transfer obținută în p. 18.
21. Se consideră funcția de transfer $H_d(z)$ a sistemului deschis. Prezentați funcțiile de transfer ale sistemului închis și pentru eroarea sistemului cu reacție unitară.
22. Pentru sistemul deschis cu funcția de transfer $H_d(z)$ determinată în p. 18, calculați funcția de transfer a sistemului închis.
23. Pentru sistemul deschis cu funcția de transfer $H_d(z)$ determinată în p. 18, calculați funcția de transfer a erorii sistemului închis.

6 STABILITATEA SISTEMELOR AUTOMATE CU EȘANTIONARE

6.1 Conceptul de stabilitate

O formulare mai cunoscută și relativ precisă a *conceptului de stabilitate* este cea de *stare de echilibru a unui sistem termodinamic*. În acest caz, starea de echilibru a sistemului automat se consideră stabilă când sistemul sub influența unor condiții externe sau interne, cu acțiune permanentă sau trecătoare, evoluează spre o nouă stare de echilibru staționară sau după caz revine la inițiala stare de echilibru [4, 8, 9, 11-14, 16, 17, 20].

Calitatea unui sistem de a fi stabil se poate manifesta ca urmare a modificării:

- 1) modificării unei sau unor intrări ale sistemului;
- 2) modificării unor parametri ai sistemului;
- 3) modificării structurii sistemului.

Se menționează faptul că sistemele tehnice sunt utilizabile numai dacă sunt stabile.

Tratările prezentate în continuare se referă la sistemele fizice sau modelele dinamice cu timp discret în forma transferului intrare stare inițială–ieșire ca și concept de stabilitate internă.

Se consideră modelul matematic al sistemului discret prezentat în transformata z cu f.d.t. discretă în forma:

$$H(z) = \frac{y(z)}{r(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{B(z)}{A(z)}. \quad (6.1)$$

Dacă în expresia (6.1) se substituie $z = q$, care este operatorul de deplasare, atunci se obține ecuația cu diferențe în forma:

$$\begin{aligned} & (a_0 q^n + a_1 q^{n-1} + \dots + a_n) y(k) = \\ & = (b_0 q^m + b_1 q^{m-1} + \dots + b_m) r(k) = f(k). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Soluționarea ecuației cu diferențe finite (6.2) înseamnă a găsi

șirul $y(k)$, atunci când se dau șirul $f(k)$ și condițiile inițiale ce dau o soluție unică și se obține:

$$y(k+n) = -\frac{1}{a_0} [a_1 y(k+n-1) + \dots + a_{n-1} y(k+1) + a_n y(k)] + \frac{1}{a_0} f(k), \quad (6.3)$$

după care se calculează toate valorile lui $y(k)$ pentru $k = 0, 1, 2, \dots$, cunoscând $f(k)$ și valorile $y(0), y(1), \dots, y(n-1)$ și condițiile inițiale.

Proprietățile dinamice ale sistemului cu eșantionare cu modulație în amplitudine sunt apropiate proprietăților dinamice ale sistemelor automate liniare continue.

Soluția ecuației cu diferențe finite care descrie dinamica sistemului (6.2) are forma:

$$y(k) = y_l(k) + y_f(k), \quad (6.4)$$

unde $y_l(kT)$ este componenta liberă a șirului-soluție ca soluție omogenă care descrie procesul tranzitoriu al sistemului în baza proprietăților interne, $y_f(kT)$ – componenta forțată care descrie regimul staționar al sistemului ca răspuns la semnalul de referință ca o soluție neomogenă (particulară) cu diferențe.

Soluția ecuației omogene:

$$A(q)y(k) = (a_0 q^n + a_1 q^{n-1} + \dots + a_n)y(k) = 0, \quad (6.5)$$

pentru care se caută rădăcinile în forma:

$$y(k) = e^{rk} = (e^r)^k = \beta^k \quad (6.6)$$

și ecuația caracteristică se reprezintă ca ecuație algebrică în forma:

$$A(\beta) = a_0\beta^n + a_1\beta^{n-1} + \dots + a_{n-1}\beta + a_n = 0, \quad (6.7)$$

unde rădăcinile β pot fi nule, reale distincte, cu multiplicitate, complex-conjugate.

Dacă rădăcinile ecuației caracteristice sunt reale distincte $\beta_i, i = \overline{1, n}$, atunci acestea sunt liniar independente și soluția ecuației caracteristice va fi:

$$y_i(k) = \sum_{i=1}^n c_i \beta_i^k,$$

unde c_i sunt constante arbitrare.

Definiția 1. Condițiile necesare și suficiente de stabilitate ale sistemului discret sunt: când timpul tinde la infinit componenta liberă tinde către zero și se exprimă în forma:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_l(k) = 0, \quad (6.8)$$

care este soluția ecuației cu diferențe omogene din (6.5).

Dacă se utilizează f.d.t. discretă (6.1), atunci ecuația caracteristică se reprezintă prin transformata z :

$$A(z)y(z) = (a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n)y(z) = 0, \quad (6.9)$$

de unde rezultă ecuația caracteristică a sistemului:

$$A(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (6.10)$$

Soluția ecuației (6.10) când sunt rădăcini distincte este:

$$y_l(k) = \sum_{i=1}^n c_i z_i^k, \quad (6.11)$$

unde c_i sunt constantele de integrare, z_i – rădăcinile ecuației caracteristice.

Condițiile necesare și suficiente de stabilitate a sistemului automat discret în baza la (6.10) se formulează în modul următor.

Definiția 2. Sistemul automat discret este stabil dacă și numai dacă toate rădăcinile ecuației caracteristice (6.10) sunt mai mici după valoarea absolută ca unitate $|z_i| < 1$.

Definiția 3. Sistemul automat discret este instabil dacă există rădăcini ale ecuației caracteristice (6.10) mai mari după valoarea absolută ca unitate $|z_i| > 1$.

Definiția 4. Sistemul automat discret este la limita de stabilitate dacă există rădăcini ale ecuației caracteristice (6.10) după valoarea absolută egale cu unitatea $|z_i| = 1$.

În planul complex al rădăcinilor, definiția de stabilitate a sistemului cu eșantionare (6.10) va avea următoarea formulare.

Definiția 5. Sistemul automat discret este stabil, dacă și numai dacă toate rădăcinile ecuației caracteristice (6.10) sunt alocate în interiorul cercului unitar cu centrul în origine (fig. 6.1, a).

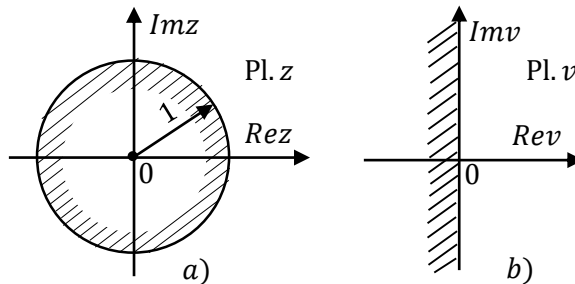


Fig. 6.1. Condițiile de stabilitate a sistemului cu eșantionare

Definiția 6. Sistemul automat cu eșantionare este instabil, dacă printre rădăcinile ecuației caracteristice (6.10) există rădăcini alocate în afara cercului unitar.

Definiția 7. Sistemul automat cu eșantionare este la limita de stabilitate, dacă există rădăcini ale ecuației caracteristice (6.10) alocate pe cercul unitar.

Se consideră un sistem automat continuu cu rădăcinile $s_i = \alpha_i \pm j\omega_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ (fig. 6.1, a) și acest sistem se discretizează în timp, atunci se obțin rădăcinile sistemului discret în forma:

$$z_i = e^{s_i T} = e^{\alpha_i T} e^{\pm j\omega_i T} \quad (6.12)$$

și cerința ca $|z_i| < 1$ se transformă în inegalitatea:

$$|e^{\alpha_i T}| < 1, \quad (6.13)$$

care conduce la cerința (fig. 6.1, a, b):

$$\alpha_i < 0. \quad (6.14)$$

Soluționarea ecuațiilor cu diferențe este dificilă și pentru a depăși această dificultate se utilizează criteriile de stabilitate [4, 8, 13, 17].

6.2 Criterii de stabilitate

Pentru studierea stabilității sistemului discret descris în baza modelor înțrare-ieșire se aplică criteriile de stabilitate de două tipuri:

1. Criterii algebrice specifice sistemelor cu eșantionare Shur-Cohn, Jury și criterii bazate pe extinderea criteriilor algebrice din clasa sistemelor liniare continue Routh, Hurwitz.

2. Criterii frecvențiale (de pulsație), de regulă, prin formulări grafo-analitice în planul Mihailov și planul Nyquist.

6.2.1 Criteriul de stabilitate Shur-Cohn

Se consideră ecuația caracteristică a sistemului automat discret:

$$A(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (6.15)$$

Conform criteriului Shur-Cohn, din coeficienții ecuației caracteristice (6.15) se construiește tabelul 6.1.

Tabelul 6.1. Criteriul Shur-Cohn

	a_n	a_{n-1}	...	a_1	a_0
	a_0	a_1	...	a_{n-1}	a_n
$\lambda_1 = \frac{a_n}{a_0}$	$c_{0,2} =$ $= a_{n-1} - \lambda_1 a_1$	$c_{1,2} =$ $= a_{n-2} - \lambda_1 a_2$...	$c_{n-1,2} =$ $= a_0 - \lambda_1 a_n$...
	$c_{n-1,2}$	$c_{n-2,2}$...	$c_{0,2}$...
$\lambda_2 =$ $= \frac{c_{0,2}}{c_{n-1,2}}$	$c_{0,3} =$ $= c_{n-1} -$ $-\lambda_2 c_{n-2,2}$	$c_{1,3} =$ $= c_{2,2} -$ $-\lambda_2 c_{n-3,2}$
	$c_{n-2,3}$	$c_{n-3,3}$
...

În primul rând se înscriu coeficienții ecuației caracteristice în ordinea $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$, iar în rândul al doilea coeficienții ecuației caracteristice se scriu în ordinea inversă $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$.

Coeficienții din rândurile următoare impare se calculează prin analogie cu criteriul Routh, iar în rândurile pare se înscriu coeficienții calculați în rândurile impare, dar în ordine inversă. Astfel, se calculează toți coeficienții $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ și se completează tabelul 6.1.

Definiția 8. Pentru ca sistemul discret să fie stabil, este necesar și suficient ca toți coeficienții din coloana unu a tabelului 6.1 după valoarea absolută să fie mai mici ca unitate $|\lambda_i| < 1, i = 1, 2, \dots, n$.

Acest criteriu poate fi realizat pe calculator.

6.2.2 Criteriul de stabilitate Hurwitz

Extinderea criteriilor Hurwitz și Routh se bazează pe utilizarea unei transformări conforme de forma [4, 8, 12-14, 17, 20]:

$$z = \frac{v+1}{v-1} \text{ sau } z = \frac{1+w}{1-w}, \quad (6.16)$$

care transformă toate punctele din interiorul cercului de rază unitate al planului complex z (puncte ce caracterizează sistemul stabil) în puncte situate în semiplanul stâng al planului variabilei complexe v sau w (fig. 6.2, a, b).

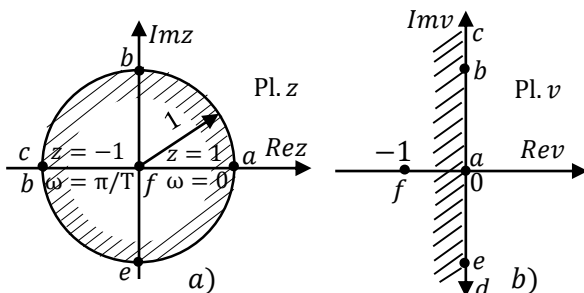


Fig. 6.2. Convertirea cercului unitar din planul z în planul v

Ca rezultat, pornind de la funcția de transfer $H(z)$ a sistemului,

se determină o funcție de transfer pseudocontinuu $H(v)$ sau $H(w)$, care are proprietatea că polii aferenți respectă precizarea admisă, apoi, pe această bază, se pot aplica criteriile Hurwitz, Routh, devenite astfel extinse și pentru cazul sistemului cu eșantionare.

Se consideră ecuația caracteristică (6.15) a sistemului discret cu coeficienții cunoscuți:

$$A(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0.$$

Se aplică substituția variabilei z cu variabila v (6.16) și după unele transformări se obține ecuația caracteristică în noua variabilă v :

$$\begin{aligned} A(v) &= a_0 \left(\frac{v+1}{v-1}\right)^n + a_1 \left(\frac{v+1}{v-1}\right)^{n-1} + \dots + a_{n-1} \frac{v+1}{v-1} + a_n = \\ &= a_0 (v+1)^n + a_1 (v+1)^{n-1} + \dots + a_{n-1} (v+1) + a_n (v-1)^n = \\ &= A_0 (v)^n + A_1 (v)^{n-1} + \dots + A_{n-1} v + A_n = 0. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Observație. Relația de transformare (6.17) nu trebuie acceptată ca o *readucere* a polilor planului z în polii ai sistemului continuu discretizat, deoarece prin această transformare nu este evidențiată nici într-un fel perioada de eșantionare T . Efectul discretizării asupra stabilității sistemului se manifestă prin conversia inițială *continuu* (s) în *discret* (z).

Exemplul 6.1. Se consideră ecuația caracteristică a sistemului discret în transformata z :

$$A(z) = a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = 0.$$

Se cere să se determine ecuația caracteristică în transformata complexă v .

Soluționare. În ecuația caracteristică se substituie variabila complexă z cu variabila complexă v conform (6.16) și după unele transformări se obține ecuația caracteristică în noua variabilă complexă:

$$\begin{aligned} A(v) &= a_0 \left(\frac{v+1}{v-1}\right)^3 + a_1 \left(\frac{v+1}{v-1}\right)^2 + a_3 \frac{v+1}{v-1} + a_4 = \\ &= a_0 (v+1)^3 + a_1 (v+1)^2 (v-1) + a_3 (v+1)(v-1)^2 + a_4 (v-1)^3 = \\ &= A_0 v^3 + A_1 v^2 + A_2 v + A_3 = 0, \end{aligned}$$

unde coeficienții A_0, A_1, A_2, A_3 sunt reprezentați prin coeficienții primari prin relațiile:

$$A_0 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3, A_1 = 3(a_0 - a_3) + a_1 - a_2,$$

$$A_2 = 3(a_0 + a_3) - a_1 - a_2, A_3 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3. \blacksquare$$

Pentru determinarea stabilității sistemului dat de expresia (6.17) se utilizează criteriile de stabilitate Routh și Hurwitz. În tabelul 6.2 se dau condițiile necesare și suficiente de stabilitate a sistemului cu eșantionare conform criteriului Hurwitz, exprimate prin coeficienții inițiali ai ecuației caracteristice de gradul 1, 2, 3, 4 a sistemului și determinanții respectivi.

Tabelul 6.2. Condiții de stabilitate ale sistemului discret

Gradul ecuației caracteristice n	Condiții de stabilitate
1	$A_0 = a_0 + a_1 > 0,$ $A_1 = a_0 - a_1 > 0$
2	$A_0 = a_0 + a_1 + a_2 > 0,$ $A_1 = a_0 - a_1 + a_2 > 0,$ $A_3 = 2(a_0 - a_2) > 0$
3	$A_0 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 > 0,$ $A_1 = 3(a_0 - a_3) + a_1 - a_2 > 0,$ $A_2 = 3(a_0 + a_3) - a_1 - a_2 > 0,$ $A_3 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 > 0,$ $\Delta_2 = A_1 A_2 - A_0 A_3 > 0$
4	$A_0 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 > 0,$ $A_1 = 4(a_0 - a_4) + 2(a_3 - a_1) > 0,$ $A_2 = 6(a_0 + a_4) - 2a_2 > 0,$ $A_3 = 4(a_0 - a_4) + 2(a_1 - a_3) > 0,$ $A_4 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 > 0,$ $\Delta_2 = A_1 A_2 - A_0 A_3 > 0,$ $\Delta_3 = A_1 A_2 - A_0 A_3 = A_3 \Delta_2 - A_1^2 A_4 > 0$

Exemplul 6.2. Se dă ecuația caracteristică de gradul trei a sistemului cu eșantionare cu coeficienții cunoscuți:

$$A(z) = a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = z^3 + 0.2z^2 + z + 1 = 0.$$

Se cere să se verifice stabilitatea sistemului automat cu eșantionare după criteriul Hurwitz.

Soluționare. Conform tabelul 6.2, pentru sistemul de gradul trei se verifică inegalitățile cu coeficienții ecuației caracteristice:

$$A_0 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 0.2 + 1 + 1 = 3.2 > 0,$$

$$A_1 = 3(a_0 - a_3) + a_1 - a_2 = 3(1 - 1) + 0.2 - 1 = -0.8 < 0,$$

$$A_2 = 3(a_0 + a_3) - a_1 - a_2 = 3(1 + 1) - 0.2 - 1 = 4.8 > 0,$$

$$A_3 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 1 - 0.2 + 1 - 1 = 0.8 > 0,$$

$$\Delta_2 = A_1 A_2 - A_0 A_3 = -0.8 \cdot 4.8 - 3.2 \cdot 0.8 = -6.38 < 0.$$

Sistemul automat cu eșantionare la valorile cunoscute ale coeficienților ecuației caracteristice este instabil, fiindcă a doua inegalitate și determinantul de ordinul doi au valori negative.■

Exemplul 6.3. Se dă ecuația caracteristică a sistemului cu eșantionare în variabila complexă v cu coeficienții calculați în exemplul 6.2:

$$A(v) = A_0 v^3 + A_1 v^2 + A_2 v + A_3 = 3.2v^3 - 0.8v^2 + 4.8v + 0.8 = 0.$$

Se cere să se analizeze stabilitatea sistemului cu eșantionare, utilizând criteriul Routh.

Soluționare. Din analiza coeficienților A_0, A_1, A_2, A_3 se constată că coeficientul $A_1 < 0$ și rezultă că sistemul automat cu eșantionare la valorile coeficienților ecuației caracteristice este instabil.■

6.3 Criterii frecvențiale de apreciere a stabilității sistemului cu eșantionare

Criteriile frecvențiale de determinare a stabilității sistemului discret se bazează pe principiul argumentului funcției complexe [4, 8, 12, 13, 17].

6.3.1 Criteriul de stabilitate Mihailov

Se consideră ecuația caracteristică a sistemului automat închis cu eșantionare în transformata z :

$$A(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (6.18)$$

Ecuația caracteristică (6.18) se reprezintă prin transformata

Laplace discretă, utilizând substituția $z = e^{sT} \Big|_{s=j\omega} = e^{j\omega T}$ și se obține funcția frecvențială:

$$\begin{aligned}
 A(e^{j\omega T}) &= a_0(e^{j\omega T})^n + a_1(e^{j\omega T})^{n-1} + \dots + a_{n-1}e^{j\omega T} + a_n = \\
 &= U(\omega) + jV(\omega) = 0,
 \end{aligned}
 \tag{6.19}$$

unde T este perioada de eșantionare, iar ω este pulsația, $U(\omega)$ – partea reală, $V(\omega)$ – partea imaginară. Modificând pulsația $0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}$, se calculează partea reală $U(\omega)$ și imaginara $V(\omega)$ al funcției (7.19) și se construiește locul de transfer (hodograful) $A(e^{j\omega T})$, care este reprezentat în figura 6.3, a.

Definiția 9. Pentru ca sistemul discret să fie stabil este necesar și suficient ca la creșterea lui ω de la 0 la $\frac{\pi}{T}$ funcția $A(e^{j\omega T})$ să se rotească contra orar la unghiul $2\pi n$, unde n este gradul ecuației caracteristice al sistemului închis.

În figura 6.3, a sunt reprezentate locurile de transfer la analiza stabilității sistemului cu eșantionare de gradul $n = 2$, utilizând criteriul Mihailov: curba 1 reprezintă sistemul instabil, iar curba 2 – sistemul stabil.

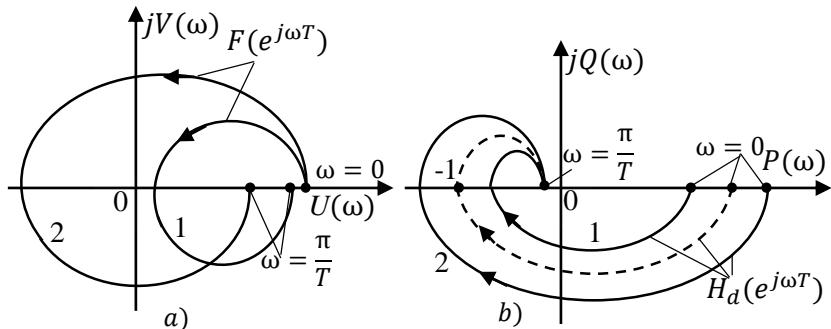


Fig. 6.3. Criteriile de stabilitate Mihailov a) și Nyquist b)

Dacă locul de transfer $A(e^{j\omega T})$ trece prin origine, atunci sistemul este la limita de stabilitate.

Din analiza sistemului discret s-a constatat că sistemul de

ordinul doi și, în unele cazuri, sistemele de ordinul unu pot fi instabile când coeficienții ecuației caracteristice sunt pozitivi ($a_0, \dots, a_n > 0$). Acest fenomen se observă și din tabelul 6.1 – criteriul Hurwitz – și se explică prin faptul că elementul de reținere introduce un defazaj suplimentar.

6.3.2 Criteriul de stabilitate Nyquist

În acest caz, ca și pentru sistemele continue se analizează evoluția sistemului deschis discret. Funcția de transfer discretă $H_d(z)$ cunoscută a sistemului deschis se transformă în locul de transfer, utilizând substituția $z = e^{sT}|_{s=j\omega} = e^{j\omega T}$ și se obține funcția frecvențială a sistemului deschis:

$$H_d(e^{j\omega T}) = P(\omega) + jQ(\omega). \quad (6.20)$$

În locul de transfer (6.20) se modifică pulsația ω de la 0 la π/T , se calculează și se construiește locul de transfer funcția $H_d(e^{j\omega T})$ a sistemului deschis (fig. 6.3, b).

Se utilizează noțiunea de punct critic $(-1, j0)$. În figura 6.3, b sunt reprezentate trei curbe pentru sistemul deschis.

Definiția 10. Sistemul discret închis va fi stabil dacă la modificarea lui ω de la 0 la π/T locul de transfer $H_d(e^{j\omega T})$ al sistemului deschis nu va înconjura punctul critic $(-1, j0)$ – curba 1.

Definiția 11. Sistemul discret închis va fi instabil dacă la modificarea lui ω de la 0 la π/T locul de transfer al sistemului deschis va înconjura punctul critic $(-1, j0)$ – curba 2.

Definiția 12. Sistemul discret închis va fi la limita de stabilitate dacă la modificarea lui ω de la 0 la π/T locul de transfer al sistemului deschis va trece prin punctul critic $(-1, j0)$ – curba cu linie întreruptă.

Se constată că stabilitatea sistemului deschis este determinată de stabilitatea părții continue. Dacă partea continuă este stabilă, atunci sistemul deschis cu eșantionare cu elementul de reținere este stabil. Astfel, elementul de reținere nu influențează stabilitatea sistemului deschis cu eșantionare, dar are o influență puternică asupra stabilității și calității sistemului închis.

Pentru perioade mici de eșantionare T locul de transfer al sistemului deschis cu eșantionare este cvazicontinuu și coincide cu locul de transfer al părții continue. Odată cu creșterea perioadei de eșantionare T , la sistemul cu eșantionare se reduce coeficientul de transfer k al sistemului deschis și performanțele sistemului.

S-a constatat că pentru structuri de sisteme continue instabile și sisteme cu timp mort locul de transfer al sistemului cu eșantionare are o configurație care intersectează semiaxa pozitivă a ordonatelor și rezultă că elementul de eșantionare acționează în sensul stabilizării sistemului.

Pentru aceste tipuri de sisteme automate se recomandă ca perioada de eșantionare să se calculeze prin relația $T \geq \pi/\omega_0$, unde ω_0 este frecvența la care locul de transfer al părții continue intersectează semiaxa imaginară pozitivă.

6.4 Influența perioadei de eșantionare asupra stabilității sistemului

Se consideră sistemul cu eșantionare compus din elementul de reținere EROZ cu f.d.t. $H_{ER}(s)$ și partea continuă cu f.d.t. $H_{PF}(s) = k/(T_1s + 1)$. Se calculează transformata z de la conexiunea serie a elementelor sistemului deschis, utilizând tabelul A3.1, anexa 3:

$$\begin{aligned} H(s) &= H_{ER}(s)H_{PF}(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s} \frac{k}{T_1s+1} = \frac{k(1-e^{-Ts})}{s(T_1s+1)}, \\ H(z) &= Z\{H(s)\} = Z\left\{\frac{k(1-e^{-Ts})}{s(T_1s+1)}\right\} = \frac{k(z-1)}{z} Z\left\{\frac{1}{s(T_1s+1)}\right\} = \\ &= \frac{k(z-1)}{z} \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T/T_1}}\right) = \frac{k(1-e^{-T/T_1})}{(z-e^{-T/T_1})}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Se determină f.d.t. discretă a sistemului închis:

$$H_0(z) = \frac{H(z)}{1+H(z)} = \frac{\frac{k(1-e^{-T/T_1})}{z-e^{-T/T_1}}}{1+\frac{k(1-e^{-T/T_1})}{z-e^{-T/T_1}}} = \frac{k(1-e^{-T/T_1})}{z-e^{-T/T_1}+k(1-e^{-T/T_1})} = \frac{B(z)}{A(z)}. \quad (6.22)$$

Ecuția caracteristică a sistemului închis este:

$$A(z) = z - e^{-T/T_1} + k(1 - e^{-T/T_1}) = a_0 z - a_1 = 0, \quad (6.23)$$

unde $a_0 = 1$, $a_1 = -e^{-T/T_1} + k(1 - e^{-T/T_1})$.

Se aplică substituția $z = \frac{1+v}{1-v}$ și se calculează coeficienții ecuației caracteristice $A(v)$:

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 - a_1 = 1 + e^{-T/T_1} - k(1 - e^{-T/T_1}), \\ c_1 &= a_0 + a_1 = 1 - e^{-T/T_1} + k(1 - e^{-T/T_1}). \end{aligned} \quad (6.24)$$

Condițiile necesare și suficiente de stabilitate ale sistemului sunt: $c_0 > 0$, $c_1 > 0$. Condiția pentru $c_1 > 0$ se realizează pentru orice $k > 0$, iar condiția $c_0 > 0$ se realizează numai pentru $k < k_{cr}$, care se determină când $c_0 = 0$ și din (6.24) se obține:

$$k_{cr} = \frac{1+e^{-T/T_1}}{1-e^{-T/T_1}}. \quad (6.25)$$

La valori mici ale perioadei de eșantionare $T \ll 0$, raportul $T/T_1 \ll 1$ și aproximarea termenului $e^{-T/T_1} \approx 1 - T/T_1$ determină valoarea critică a coeficientului de transfer al sistemului deschis:

$$k_{cr} = \frac{2T_1}{T} - 1. \quad (6.26)$$

Când perioada de eșantionare $T \rightarrow 0$, atunci coeficientul critic al sistemului deschis $k_{cr} \rightarrow \infty$.

Exemplul 6.4. Se consideră ecuația caracteristică a sistemului închis cu eșantionare:

$$A(z) = z + kT - 1 = 0,$$

unde k este coeficientul de transfer al sistemului deschis, T – perioada de eșantionare.

Se cere să se determine valoarea critică a coeficientului de transfer k_{cr} aplicând criteriul Hurwitz.

Soluționare. În ecuația caracteristică se utilizează substituția variabilei complexe z cu variabila complexă v (6.16) și după transformare se obține:

$$A(v) = kTv + 2 - kT = A_0 v + A_1 = 0.$$

Condițiile de stabilitate conform criteriului Hurwitz sunt valorile pozitive ale coeficienților:

$$A_0 = kT > 0 \text{ și } A_1 = 2 - kT > 0.$$

Inegalitatea $A_1 = 2 - kT > 0$ se egalează cu zero și se determină valoarea k_{cr} :

$$2 - kT = 0, k_{cr} = \frac{2}{T}.$$

Valoarea critică a coeficientului de transfer este $k_{cr} = 2/T$ și limitele de variație ale coeficientului de transfer sunt:

$$0 < k < 2/T. \blacksquare$$

Chestionar și probleme

1. Explicați care ar trebui să fie rădăcinile ecuației caracteristice ca sistemul discret să fie stabil, utilizând relația (6.11).
2. Prin ce metode se poate determina stabilitatea sistemului discret?
3. Se consideră funcția de transfer a sistemului deschis:

$$H(z) = \frac{bz}{z-a}.$$

Determinați ecuația caracteristică a sistemului închis.

4. Numiți tipurile de criterii utilizate la verificarea stabilității sistemului discret.
5. Explicați cum se determină stabilitatea sistemului cu eșantionare, utilizând criteriul Hurwitz.
6. Se consideră ecuația caracteristică:

$$A(z) = a_0z^2 - a_1z + a_2 = 0.$$

În ecuația caracteristică aplicați substituția $z = (v + 1)/(v - 1)$ și determinați ecuația caracteristică în variabila v .

7. Pentru ecuația caracteristică a sistemului deschis:

$$A(z) = a_0z^2 - a_1z - a_2 = 0$$

verificați stabilitatea sistemului închis cu eșantionare, aplicând criteriul Hurwitz.

8. Verificați stabilitatea sistemului închis cu eșantionare cu ecuația caracteristică din p. 3, aplicând criteriul Hurwitz.
9. Pentru ecuația caracteristică:

$$A(z) = 5z^2 - 6z + 3 = 0$$

determinați rădăcinile și verificați stabilitatea sistemului.

10. Verificați stabilitatea sistemului închis cu eșantionare cu ecuația caracteristică din p. 3, aplicând criteriul Hurwitz.

11. Pentru ecuația caracteristică $A(z) = 5z^2 - kTz + 3 - kT = 0$ determinați valoarea critică a coeficientului de transfer k_{cr} al sistemului funcție de perioada de eșantionare T .

7 PERFORMANȚELE SISTEMELOR AUTOMATE CU EȘANTIONARE

Pentru determinarea performanțelor sistemului automat cu eșantionare în regimul tranzitoriu și staționar se utilizează aceiași indici de calitate ca și pentru sistemele automate liniare. Indicii de calitate se clasifică în două clase: *indici direcți* și *indirecți*. Indicii direcți sunt cei care se determină după răspunsul indicial al sistemului, iar indicii direcți – care se determină prin alte metode fără a apela la procesul tranzitoriu al sistemului [4, 8, 12, 13, 16, 17, 20].

7.1 Ecuația răspunsului sistemului cu eșantionare

Se consideră structura sistemului discret dată în figura 7.1, alcătuită din elementul real de prezentat cu elementul ideal de eșantionare și elementul de reținere cu f.d.t. $H_{ER}(s)$ și partea fixată liniară descrisă de f.d.t. $H_{PF}(s)$. Conexiunea serie a elementelor liniare se exprimă ca partea liniară echivalentă din canalul direct $H_d(s) = H_{ER}(s)H_{PF}(s)$. Asupra sistemului acționează semnalul de referință $r(t)$ și perturbația $p(t)$.

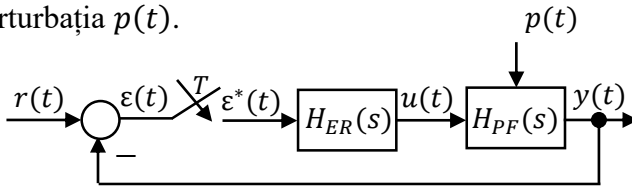


Fig. 7.1. Structura sistemului automat cu eșantionare

Se consideră funcția de transfer discretă a sistemului deschis a transferului $\varepsilon^*(t) \rightarrow y^*(t)$:

$$H_d(z) = \frac{y(z)}{\varepsilon(z)} = Z\{H_{ER}(s)H_{PF}(s)\}. \quad (7.1)$$

Se determină funcția de transfer a sistemului automat închis cu eșantionare:

$$H_0(z) = \frac{y(z)}{r(z)} = \frac{H_d(z)}{1+H_d(z)} = \frac{B(z)}{A(z)}. \quad (7.2)$$

Se consideră funcția de transfer discretă a semnalului de intrare ca raportul a două polinoame:

$$H_r(z) = \frac{B_r(z)}{A_r(z)}. \quad (7.3)$$

Din (7.2), (7.3) reiese mărimea de ieșire a sistemului în formă operațională:

$$y(z) = H_0(z)r(z) = \frac{B(z) B_r(z)}{A(z) A_r(z)} = \frac{B_y(z)}{A_y(z)}. \quad (7.4)$$

Mărimea de ieșire $y(t)$ a sistemului discret (7.4) la momentele de eșantionare $t = kT$ (sisteme continue, dar *văzute la momentele discrete ale timpului*) se calculează, utilizând transformata z inversă:

$$y(kT) = Z^{-1}\{H_0(z)r(z)\}. \quad (7.5)$$

Se utilizează mai multe metode de determinare a originalului $y(kT)$ după transformata z .

Prezentăm trei metode de calcul al originalului $y(kT)$ după transformata z , care sunt cel mai des utilizate în practică [4, 9, 12, 13, 17]:

1. Metoda în baza teoremei de calcul al reziduurilor.
2. Metoda dezvoltării în fracții elementare.
3. Metoda împărțirii infinite (sintetice).

1. În baza teoremei de calcul al reziduurilor, originalul $y(kT)$ se calculează, utilizând relația [14, 17, 20]:

$$y(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint y(z) z^{k-1} dz, \quad (7.6)$$

unde integrala se calculează pe conturul Γ din planul complex z , care include în interiorul lui toți polii expresiei integralei $y(z)z^{k-1}$, ce sunt punctele singulare ale lui $y(z)$ sau sunt rădăcinile ecuației caracteristice $A_y(z) = 0$. Cel mai des utilizat contur Γ este în forma cercului cu raza

$R > \max|z_i|$ (fig. 7.2), care începe în originea planului complex z și include în interiorul cercului toate punctele singulare ale lui $y(z)$.

De exemplu, în planul z (fig. 7.2) sunt indicate 4 rădăcini z_1, z_2, z_3, z_4 – ale sistemului automat discret.

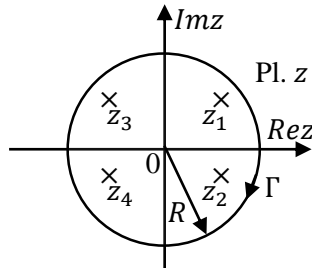


Fig. 7.2. Planul complex al rădăcinilor

Integrala (7.6) se calculează în baza teoremei reziduurilor [12, 17] ca suma totală a reziduurilor funcției $y(z)z^{k-1}$ în funcție de toate punctele singulare (rădăcinile) prin relația:

$$y(kT) = \sum_{i=1}^N \text{Res}_{z_i} y(z)z^{k-1}, \quad (7.7)$$

unde z_i ($i = 1, 2, 3, \dots, N$) sunt punctele singulare ale funcției $y(z)z^{k-1}$.

Dacă imaginea $y(z)$ nu conține termenul z , atunci numărul de puncte singulare se identifică în modul următor:

$$N = \begin{cases} n + 1 & \text{când } k = 0, \\ n & \text{când } k > 0, \end{cases}$$

unde n sunt punctele singulare ale funcției $y(z)$.

În aplicații tehnice expresia $y(z)$ din (7.4) se consideră ca funcții raționale și punctele singulare sunt rădăcinile ecuației caracteristice:

$$A_y(z) = A(z)A_r(z) = 0, \quad (7.8)$$

care va avea rădăcinile $z_i, i = \overline{1, n}$ și acestea sunt polii lui $y(z)$.

În cazul când $y(z)$ are poli z_i de multiplicitatea μ , atunci reziduurile se determină prin relația:

$$\text{Res}_{z_i} y(z) z^{k-1} = \lim_{z \rightarrow z_i} \frac{1}{(\mu-1)!} \frac{d^{\mu-1}}{dz^{\mu-1}} [(z - z_i)^\mu y(z) z^{k-1}]. \quad (7.9)$$

Dacă $\mu = 1$ este un pol simplu z_i , expresia (7.9) se simplifică:

$$\text{Res}_{z_i} y(z) z^{k-1} = \lim_{z \rightarrow z_i} [(z - z_i)^\mu y(z) z^{k-1}].$$

Mărimea de ieșire $y(kT)$ din expresia (7.5) se consideră soluția ecuației cu diferențe ale sistemului, când la intrarea lui se aplică semnalul de referință sau perturbația, ca suma componentelor:

$$y(kT) = y_l(kT) + y_f(kT), \quad (7.10)$$

unde componenta liberă caracterizează procesul tranzitoriu și se descrie prin expresia:

$$y_l(kT) = \sum_{i=1}^n \text{Res}_{z_i} H_0(z) H_r(z) (z) z^{k-1} \quad (7.11)$$

și componenta forțată (regimul staționar sau permanent) $y_f(kT)$, care descrie regimul staționar și se exprimă prin relația:

$$y_f(kT) = \sum_{j=1}^p \text{Res}_{z_j} H_0(z) H_r(z) z^{k-1}. \quad (7.12)$$

În cazul când polii funcțiilor din (7.2) și (7.3) sunt reali și nu sunt egali cu zero, atunci componenta (7.11) va avea forma:

$$y_l(kT) = \sum_{i=1}^k \frac{B(z_i)}{A'(z_i)} r(z_i) z_i^k, \quad (7.13)$$

iar componenta forțată (regimul staționar) se descrie prin relația:

$$y_f(kT) = \sum_{j=1}^p H_0(z_j) \frac{B_r(z_j)}{A'_r(z_j)} z_j^k, \quad (7.14)$$

unde z_i sunt polii lui $H_0(z)$ ($i = \overline{1, n}$), z_j – polii lui $r(z)$ ($j = \overline{1, p}$), $A'(z_i) = dA(z_i)/dz_i$ – derivata lui $A(z_i)$.

Din analiza expresiilor (7.13), (7.14) se observă că componentele răspunsului tranzitoriu $y_l(kT)$ și $y_f(kT)$ sunt funcții de polii f.d.t. $H(z)$ a sistemului discret și a imaginii referinței $r(z)$. Din expresia (7.14) rezultă că pentru determinarea componentei $y_f(kT)$ nu este necesar a calcula polii lui $H_0(z)$.

Determinarea polilor z_j ai referinței $r(z)$ pentru funcțiile tipice este o procedură simplă.

Exemplul 7.1. Se consideră funcția de transfer a sistemului discret $H_0(z)$, la intrarea căreia se aplică semnal treaptă unitară discretă cu imaginea $r(z) = 1(z) = \frac{z}{z-1} = \frac{B_r(z)}{A_r(z)}$.

Se cere să se prezinte expresia componentei forțate a sistemului.

Soluționare. Imaginea semnalului are ecuația caracteristică:

$$A_r(z) = z - 1 = 0, \quad z = 1.$$

Rezultă că imaginea are un singur pol $z_j = 1$ și din (7.14) imediat se calculează componenta forțată:

$$y_f(kT) = \sum_{j=1}^p H_0(z_j) \frac{B_r(z_j)}{A'_r(z_j)} z_j^k = H_0(z_j) \frac{z}{1} z_j^k = H_0(z)|_{z=1},$$

care este constantă pentru toate valorile lui k . ■

Exemplul 7.2. Se consideră sistemul descris de f.d.t. discretă:

$$H_0(z) = \frac{3z^2 - 5z + 3}{4z^3 - 8z^2 + 2z + 4},$$

la intrarea căruia acționează semnalul treaptă unitară discretă cu f.d.t.:

$$H_r(z) = \frac{B_r(z)}{A_r(z)} = 1(z) = \frac{z}{z-1}.$$

Se cere să se determine valoarea componentei forțate $y_f(kT)$ pentru $k = 1$.

Soluționare. Se determină polul imaginii din ecuația caracteristică a semnalului:

$$A_r(z) = z - 1 = 0, \quad z = 1,$$

care are un singur pol $z_j = 1$.

Se calculează derivata polinomului $A_r(z)$:

$$\frac{dA_r}{dz} = A'_r(z) = \frac{d}{dz}(z-1) = 1.$$

Conform expresiei (7.14) se determină valoarea componentei forțate:

$$y_f(kT) = \sum_{j=1}^p H(z_j) \frac{B_r(z_j)}{A'_r(z_j)} z_j^k = \frac{3z^2-5z+3}{4z^3-8z^2+2z+4} \frac{z}{1} \mathbf{1}^1 \Big|_{z_j=1} = \frac{1}{2} = 0.5,$$

care, în continuare, pentru valori ale lui $k = 2, 3, \dots$ rămâne constantă și reprezintă regimul staționar al sistemului. ■

2. Metoda dezvoltării funcției $y(z)/z$ în fracții elementare

Dacă imaginea funcției $y(z)/z$ este relativ simplă, atunci originalul se calculează, utilizând tabele ale funcțiilor în transformata z . În cazul când funcția de transfer discretă rațională este complexă, atunci aceasta se dezvoltă în fracții simple (de ordinul unu) și se prezintă ca suma acestora. Originalul se determină ca transformata z inversă a fiecărei fracții care se înmulțește la z și se determină după tabelul A3.1, anexa 3 transformata z inversă.

Imaginea funcției $y(z)/z$ în fracții simple:

$$\frac{y(z)}{z} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{c_1}{z-z_1} + \frac{c_2}{z-z_2} + \dots + \frac{c_n}{z-z_n} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{z-z_i} = \sum_{i=1}^n F_i(z), \quad (7.15)$$

unde c_i sunt coeficienții necunoscuți care se calculează, $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ sunt rădăcinile distincte (simple) ale ecuației caracteristice $A(z) = 0$, iar termenii sumei se determină după tabelul A3.1, anexa 3. Descompunerea se face pentru $y(z)/z$ în loc de $y(z)$, deoarece transformatele z ale șirurilor uzuale conțin termenul z la numărător. Coeficienții c_i se calculează după expresia:

$$c_i = \frac{B(z_i)}{A'(z_i)}, \quad A'(z_i) = \left. \frac{dA(z)}{dz} \right|_{z=z_i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (7.16)$$

Exemplul 7.3 [6]. Se consideră expresia polinomului numitorului din (7.2) dată prin relația:

$$H_d(z) = H_1 H_{ER} H_2 H_r(z) = \frac{z-1}{z} Z\{L(s)\} = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{k_2 k_3 T_1 s^2 + k_2 k_3 s + k_1 k_2 k_4}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)} \right\} =$$

$$= \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{p_0 s^2 + p_1 s + p_2}{q_0 s^4 + q_1 s^3 + q_2 s^2 + q_3 s} \right\} = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{P(s)}{Q(s)} \right\},$$

unde parametrii elementelor au valorile: $k_1 = 2, k_2 = 5, k_3 = 0.5, k_4 = 0.5, T_1 = 5 \text{ s}, T_2 = 3 \text{ s}, T_3 = 8 \text{ s}$, iar coeficienții polinoamelor $P(s)$ și $Q(s)$ sunt: $p_0 = k_2 k_3 T_1 = 12.5, p_1 = k_2 k_3 = 2.5, p_2 = k_1 k_2 k_4 = 5, q_0 = T_2 T_3 = 120, q_1 = T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3 = 79, q_2 = T_1 + T_2 + T_3 = 16, q_3 = 1$.

Se cere să se determine funcția de transfer $H_d(z)$.

Soluționare. Se calculează perioada de eșantionare în raport cu cea mai mică constantă de timp după relația:

$$T = 0.1 \min\{T_1, T_2, T_3\} = 0.1 \min\{5, 3, 8\} = 0.1 * 3 = 0.3 \text{ s}.$$

Se calculează coeficienții:

$$d_1 = e^{-T/T_1} = e^{-0.3/5} = 0.9418, \quad d_2 = e^{-T/T_2} = e^{-0.3/3} = 0.9048,$$

$$d_3 = e^{-T/T_3} = e^{-0.3/8} = 0.9632.$$

Pentru polinomul $Q(s)$ se determină rădăcinile:

$$Q(s) = s(q_0 s^3 + q_1 s^2 + q_2 s + q_3) = 0,$$

$$s_1 = 0, \quad s_2 = -\frac{1}{T_1} = -\frac{1}{5} = -0.2, \quad s_3 = -\frac{1}{T_2} = -\frac{1}{3} = -0.3333,$$

$$s_4 = -\frac{1}{T_3} = -\frac{1}{8} = -0.125.$$

Având o rădăcină nulă $s_1 = 0$, polinomul $Q(s) = sQ_1(s)$.

Expresia $L(s)$ se exprimă în fracții elementare pentru polii simpli p_1, p_2, p_3, p_4 în forma:

$$L(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{sQ_1(s)} = \frac{c_1}{s-s_1} + \frac{c_2}{s-s_2} + \frac{c_3}{s-s_3} + \frac{c_4}{s-s_4},$$

unde coeficienții c_1, c_2, c_3, c_4 sunt coeficienții necunoscuți ai dezvoltării în fracții elementare, care prezintă reziduurile funcției $L(s)$ în polii s_1, s_2, s_3, s_4 și se calculează prin relațiile:

$$b_i = \frac{P(s)}{Q(s)} \Big|_{s=s_i}, \quad \dot{Q}(s) = \frac{dQ(s)}{ds}, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

$$b_1 = \frac{P(s_1)}{\dot{Q}(s_1)} = \frac{p_0 s^2 + p_1 s + p_2}{4q_0 s^3 + 3q_1 s^2 + q_2 s + q_3} \Big|_{s=0} = \frac{12.5(0)^2 + 2.5(0) + 5}{480(0)^3 + 237(0)^2 + 32 \cdot 0 + 1} = \frac{5}{1} = 5,$$

$$b_2 = \frac{P(s_2)}{\dot{Q}(s_2)} = \frac{p_0 s^2 + p_1 s + p_2}{4q_0 s^3 + 3q_1 s^2 + q_2 s + q_3} = \frac{12.5(-0.2)^2 + 2.5(-0.2) + 5}{480(-0.2)^3 + 237(-0.2)^2 + 32(-0.2) + 1} = \frac{5}{0.24} = 20.8333,$$

$$b_3 = \frac{P(s_3)}{\dot{Q}(s_3)} = \frac{p_0 s^2 + p_1 s + p_2}{4q_0 s^3 + 3q_1 s^2 + q_2 s + q_3} = \frac{12.5(-0.3333)^2 + 2.5(-0.3333) + 5}{480(-0.3333)^3 + 237(-0.3333)^2 + 32(-0.3333) + 1} = \frac{5.5554}{-1.1101} = -5,$$

$$b_4 = \frac{P(s_4)}{\dot{Q}(s_4)} = \frac{p_0 s^2 + p_1 s + p_2}{4q_0 s^3 + 3q_1 s^2 + q_2 s + q_3} = \frac{12.5(-0.125)^2 + 2.5(-0.125) + 5}{480(-0.125)^3 + 237(-0.125)^2 + 32(-0.125) + 1} = \frac{4.8828}{0.2344} = -20.8333.$$

În expresia $L(s)$, pentru fiecare componentă în s din parantezele figurate, după tabelul A3.1, anexa 3 se găsește corespondența în transformata z și după unele transformări se determină polinomul $H_d(z)$ în forma:

$$\begin{aligned} H_d(z) &= \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{b_1}{s} + \frac{b_2}{(T_1 s + 1)} + \frac{b_3}{(T_2 s + 1)} + \frac{b_4}{(T_3 s + 1)} \right\} = \\ &= \frac{z-1}{z} \left\{ \frac{b_0 z}{z-1} + \frac{b_1 z}{T_1(z - e^{-T/T_1})} + \frac{b_2 z}{T_2(z - e^{-T/T_2})} + \frac{b_3 z}{T_3(z - e^{-T/T_3})} \right\} = \\ &= \frac{z-1}{z} \left\{ \frac{c_1 z}{z-1} + \frac{c_2 z}{(z-d_1)} + \frac{c_3 z}{(z-d_2)} + \frac{c_4 z}{(z-d_3)} \right\} = \\ &= \frac{c'_1(z-d_1)(z-d_2)(z-d_3) + c'_2(z-1)(z-d_2)(z-d_3) + c'_3(z-1)(z-d_1)(z-d_3) + c'_4(z-1)(z-d_1)(z-d_2)}{(z-d_1)(z-d_2)(z-d_3)} = \\ &= \frac{v_0 z^3 - v_1 z^2 + v_2 z + v_3}{z^3 - m_1 z^2 + m_2 z - m_3} = \frac{V(z)}{M(z)}, \end{aligned}$$

unde coeficienții au semnificația:

$$\begin{aligned} v_0 &= c'_1 + c'_2 + c'_3 + c'_4, \\ v_1 &= c'_1(d_1 d_2 + d_1 d_3 + d_2 d_3) + c'_2(1 + d_2 + d_3) + c'_3(1 + d_1 + d_3) + \\ &\quad + c'_4(1 + d_1 + d_2), \\ v_2 &= c'_1(d_1 d_2 + d_1 d_3 + d_2 d_3) + c'_2(d_2 d_3 + d_2 + d_3) + c'_3(d_1 d_3 + d_1 + d_3) + \\ &\quad + c'_4(d_1 d_2 + d_1 + d_2), \\ v_3 &= c'_1 d_1 d_2 d_3 + c'_2 d_2 d_3 + c'_3 d_1 d_3 + c'_4 d_1 d_2, \\ m_1 &= d_1 + d_2 + d_3, m_2 = d_1 d_2 + d_1 d_3 + d_2 d_3, m_3 = d_1 d_2 d_3. \end{aligned}$$

Se calculează coeficienții:

$$c_1 = b_0, c_2 = \frac{b_1}{T_1}, c_3 = \frac{b_2}{T_2}, c_4 = \frac{b_3}{T_3},$$

$$\begin{aligned}
c'_1 &= c_1 T_1 T_2 T_3 = 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 8 = 600, \quad c'_2 = c_2 T_2 T_3 = 20.833 \cdot 3 \cdot 8 = 500, \\
c'_3 &= c_3 T_1 T_3 = -5 \cdot 5 \cdot 8 = -200, \quad c'_4 = c_4 T_1 T_2 = -20.8333 \cdot 5 \cdot 3 = -312.5, \\
v_0 &= c'_1 + c'_2 + c'_3 + c'_4 = 600 + 500 - 200 - 312.5 = 587.5, \\
v_1 &= c'_1(d_1 d_2 + d_1 d_3 + d_2 d_3) + c'_2(1 + d_2 + d_3) + c'_3(1 + d_1 + d_3) + \\
&\quad + c'_4(1 + d_1 + d_2) = 1541.8575, \\
v_2 &= c'_1(d_1 d_2 + d_1 d_3 + d_2 d_3) + c'_2(d_2 d_3 + d_2 + d_3) + c'_3(d_1 d_3 + d_1 + d_3) + \\
&\quad + c'_4(d_1 d_2 + d_1 + d_2) = 1578.3935, \\
v_3 &= c'_1 d_1 d_2 d_3 + c'_2 d_2 d_3 + c'_3 d_1 d_3 + c'_4 d_1 d_2 = 600 \cdot 0.9418 \cdot 0.9048 \cdot 0.9632 + \\
&\quad + 500 \cdot 0.9048 \cdot 0.9632 - 200 \cdot 0.9418 \cdot 0.9632 - 312.5 \cdot 0.9418 \cdot 0.9048 = 480.5093, \\
m_1 &= d_1 + d_2 + d_3 = 0.9418 + 0.9048 + 0.9632 = 2.8098, \\
m_2 &= d_1 d_2 + d_1 d_3 + d_2 d_3 = \\
&= 0.9418 \cdot 0.9048 + 0.9418 \cdot 0.9632 + 0.9048 \cdot 0.9632 = 2.6307, \\
m_3 &= d_1 d_2 d_3 = 0.9418 \cdot 0.9048 \cdot 0.9632 = 0.8208.
\end{aligned}$$

Astfel, polinomul $H_d(z)$ în formă numerică este:

$$H_d(z) = \frac{V(z)}{M(z)} = \frac{v_0 z^3 - v_1 z^2 + v_2 z - v_3}{z^3 - m_1 z^2 + m_2 z - m_3} = \frac{587.5z^3 - 1578.3935z^2 + 1578.3935z - 480.5093}{z^3 - 2.8098z^2 + 2.6307z - 0.8208}. \blacksquare$$

3. *Metoda împărțirii infinite (sintetice)* în care imaginea $y(z)$ se reprezintă în forma unui șir după puterile descrescătoare ale lui z^{-1} . Metoda constă în realizarea procedurii de împărțire nemijlocită a numărătorului $B_y(z)$ la numitorul $A_y(z)$ al expresiei (7.4) și rezultă un șir în z^{-1} , unde fiecare termen succesiv reprezintă valoarea ordonatei la pasul de eșantionare egal cu z^{-k} :

$$\begin{aligned}
y(z) &= \frac{B_y(z)}{A_y(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}} = \\
&= c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + c_3 z^{-3} + \dots, \tag{7.17}
\end{aligned}$$

unde c_0, c_1, c_2, \dots sunt coeficienții necunoscuți care se vor calcula.

După definiție, transformata z a originalului $y(kT)$ este:

$$y(z) = H_0(z) \cdot 1 = \sum_{k=0}^{\infty} w(kT) z^{-k}, \quad (7.22)$$

unde coeficienții c_k , $k = 0, 1, 2, \dots$ determină funcția pondere $w(t)$ la momentele de eșantionare $t = kT$.

În comparație cu sistemul continuu în care răspunsul indicial exista pe o durată mare de timp ($t \rightarrow \infty$), în sistemele discrete sunt condiții pentru care răspunsul indicial finalizează pentru un timp finit și pentru $k > k_0$ componenta liberă $y_l(kT) = 0$. Această condiție există dacă la numitorul expresiei (7.17) coeficienții $a_1 = a_2 = a_n = 0$. Astfel, se obține condiția timpului finit al răspunsului indicial pentru care ecuația caracteristică este $A_y(z) = a_0 z^n$, $n \geq m$.

Construirea răspunsului indicial $y(kT)$ se poate realiza și prin metoda prezentării lui $y(z)$ în fracții elementare și pentru fiecare fracție după tabelul A3.1, anexa 3 se găsește corespondența originalului și se calculează $y(kT)$.

La analiza și construirea procesului tranzitoriu $y(kT)$ al sistemului discret se soluționează următoarele trei clase de probleme:

1. Determinarea erorii staționare $\varepsilon(kT)$.
2. Construirea procesului tranzitoriu $y(kT)$.
3. Determinarea performanțelor răspunsul indicial: timpul de reglare t_r , suprareglarea σ , timpul de creștere t_c etc.

7.2 Aprecierea erorii regimului staționar

Pentru caracterizarea regimului staționar se utilizează eroarea staționară $\varepsilon(kT)$ și coeficienții erorii c_k . Pentru determinarea erorii unui sistem discret închis supus acțiunii semnalelor de referință $r(kT)$ și perturbației $p(kT)$ se utilizează relația în transformata z :

$$\varepsilon(z) = H_{er}(z)r(z) + H_{ep}(z)p(z) = \frac{1}{1+H_d(z)}r(z) + \frac{pH_p(z)}{1+H_d(z)}p(z), \quad (7.23)$$

unde $H_{er}(z) = \frac{1}{1+H_d(z)}$ este f.d.t. discretă a erorii în raport cu referința $r(z)$, $H_{ep}(z) = \frac{pH_p(z)}{1+H_d(z)}$ - f.d.t. discretă a erorii în raport cu

perturbația $p(z)$ care acționează asupra sistemului prin elementul funcțional cu f.d.t. discretă $H_p(z)$, $H_d(z)$ – f.d.t. discretă a sistemului deschis.

Eroarea sistemului (7.23) în domeniul timpului se calculează în baza teoremei valorii finale a originalului prin relația:

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \varepsilon(z). \quad (7.24)$$

Se dau relațiile de calcul al erorii sistemului la acțiunea semnalelor tipice discrete.

La semnalul treaptă unitară discretă $1(t) = kT = 1$, pentru sistemul discret stabil eroarea procesului tranzitoriu se determină prin relația:

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(kT) = \frac{B(0)}{A(0)} = \frac{1}{1+H_d(0)}. \quad (7.25)$$

Pentru sistemul discret static cu modulație în amplitudine eroarea $\varepsilon(\infty) \neq 0$ dacă f.d.t. $H_d(0) \neq \infty$.

Dacă sistemul discret conține în partea liniară un element integrator, atunci eroarea $\varepsilon(\infty) = 0$ și sistemul este astatic.

Dacă la intrarea sistemului discret se aplică semnalul treaptă discretă $r(t) = r_0 1(t)$, atunci transformata z este $r(z) = r_0 \frac{z}{z-1}$ și eroarea se calculează prin relația:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k \rightarrow \infty}(kT) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{1}{1+H_d(z)} r(z) = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{1}{1+H_d(z)} r_0 \frac{z}{z-1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{r_0}{1+H_d(z)}. \end{aligned} \quad (7.26)$$

La semnalul de referință rampă $r(t) = r_1 t = r_1 k$ (cu viteză constantă) prin imaginea:

$$r(z) = r_1 \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

eroarea sistemului după viteză se calculează prin expresia:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{k \rightarrow \infty}(kT) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{1}{1+H_d(z)} r(z) = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{1}{1+H_d(z)} \frac{r_1 T z}{(z-1)^2} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{z-1} \frac{r_1 T}{1+H_d(z)}.\end{aligned}\quad (7.27)$$

La semnalul de referință parabolă $r(t) = r_2 t^2 / 2$ (cu accelerație constantă) prin imaginea:

$$r(z) = \frac{T^2 r_2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$$

eroarea sistemului după accelerație se calculează prin expresia:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{k \rightarrow \infty}(kT) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{1}{1+H_d(z)} \frac{T^2 r_2 z(z+1)}{2(z-1)^3} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1+H_d(z)} \frac{T^2 r_2 (z+1)}{2(z-1)^2}.\end{aligned}\quad (7.28)$$

Dacă semnalul de referință este $r(t) = r_k t^k / k!$ prin imaginea:

$$r(z) = \frac{r_k T^k z P_k(z)}{(z-1)^{k+1}},$$

unde $P_k(z)$ este un polinom de gradul $(k - 1)$ și care la $z = 1$ $P_k(1) = 1$ și eroarea sistemului se calculează prin expresia:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{k \rightarrow \infty}(kT) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{1}{1+H_d(z)} \frac{r_k T^k z P_k(z)}{(z-1)^{k+1}} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1+H_d(z)} \frac{T^k r_k P_k(z)}{(z-1)^k}.\end{aligned}\quad (7.29)$$

Se consideră un sistem discret deschis cu astatism descris cu f.d.t.:

$$H(z) = \frac{1}{(z-1)^{\nu}} H_1(z) \quad (7.30)$$

cu $\nu = 0, 1, 2, \dots$, iar $H_1(z)$ nu are zerouri și poli egali cu unu. Substituim (7.30) în (7.29) și după unele transformări se obține expresia pentru eroarea sistemului:

$$\varepsilon(kT) = \begin{cases} 0 & \text{când } k < \nu, \\ \frac{r_k T^k}{H_1(1)} & \text{când } k = \nu, \\ \infty & \text{când } k > \nu. \end{cases} \quad (7.31)$$

Din analiza expresiei obținute rezultă că sistemul va avea eroarea staționară nulă dacă gradul de astatism al sistemului va fi mai mare decât ordinul semnalului ($k < \nu$).

Procedura expusă de calcul a erorii sistemului se aplică preponderent pentru semnale tipice. Dacă semnalul de referință nu are forma standard, atunci pentru calculul erorii sistemului se pot utiliza metodele de calcul al coeficienților erorii sistemului.

7.3 Coeficienții erorii sistemului discret în regim staționar

Eroarea sistemului discret închis în transformata z la acțiunea semnalului de referință va avea forma:

$$\varepsilon(z) = H_{\varepsilon r}(z)r(z), \quad (7.32)$$

iar în domeniului timpului prin funcția pondere:

$$\varepsilon(kT) = \sum_{k=0}^l w_{\varepsilon r}((l-k)T) r(kT). \quad (7.33)$$

Semnalul $r(kT)$ se reprezintă în șirul Taylor prin derivatele acestuia și după unele transformări expresia (7.33) devine:

$$\varepsilon_{k \rightarrow \infty}(kT) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^{(k)}(lT), \quad (7.34)$$

unde coeficienții c_k se calculează prin expresia:

$$c_k = (-1)^k \sum_{i=0}^{\infty} \frac{w_{er}(iT)(iT)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (7.35)$$

Coeficienții c_k din (7.35) caracterizează performanțele sistemului în regim staționar și se numesc coeficienții erorii sistemului. Coeficientul c_0 este coeficientul erorii de poziție, $c_1 = k_v$ – coeficientul erorii de viteză, iar $c_2 = k_a$ – coeficientul erorii de accelerație.

Calculul coeficienților după relația (7.35) este dificil. Pentru a simplifica calculul coeficienților c_k se utilizează relații care reprezintă legătura dintre coeficienții erorii și f.d.t. discretă a erorii sistemului dată de expresia:

$$c_k = \frac{1}{k!} H_{0k}(z)|_{z=1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.36)$$

unde $H_{0k}(z)$ se determină prin expresii recurente:

$$H_{00}(z) = H_{er}(z), \quad H_{0k}(z) = Tz \frac{dH_{0,k-1}(z)}{dz}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (7.37)$$

Din relațiile (7.36), (7.37) rezultă că coeficientul erorii de poziție $c_0 = H_{er}(1)$, iar pentru a calcula coeficienții c_1, c_2, \dots este necesar a calcula derivata f.d.t. discretă $\frac{dH_{0,k-1}(z)}{dz}$.

Exemplul 7.4. Se dă funcția de transfer a erorii sistemului discret $H_{er}(z) = \frac{1}{z-0.6}$ și perioada de eșantionare $T = 0.1$ s.

Să se calculeze coeficienții erorii sistemului c_0, c_1, c_2 .

Soluționare. Se determină coeficienții erorii după relațiile (7.36), (7.37):

$$c_0 = H_{er}(z)|_{z=1} = \frac{1}{z-0.6}|_{z=1} = \frac{1}{0.4} = 2.5,$$

$$H_{01}(z) = Tz \frac{dH_{er}(z)}{dz} = 0.1z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z-0.6} \right) = -\frac{0.1z}{(z-0.6)^2},$$

$$c_1 = H_{01}(z)|_{z=1} = -\frac{0.1z}{(z-0.6)^2}|_{z=1} = -\frac{0.1}{0.16} = -0.625,$$

$$H_{02}(z) = TZ \frac{dH_{01}(z)}{dz} = 0.1z \frac{d}{dz} \left(\frac{0.1z}{(z-0.6)^2} \right) = -\frac{0.01z(z-0.6)}{(z-0.6)^3},$$

$$c_2 = H_{02}(z)|_{z=1} = -\frac{0.01z(z-0.6)}{(z-0.6)^3} \Big|_{z=1} = 0.25. \blacksquare$$

Pentru sistemul discret cu astatism de gradul ν primii $\nu + 1$ coeficienți ai erorii se determina prin relația:

$$c_k = \frac{T^k H_{er}(z)}{(z-1)^k} \Big|_{z=1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \nu. \quad (7.38)$$

Sistemul discret este astatic dacă în componența sistemului există elemente integratoare în obiectul de reglare (f.d.t. în s va avea termenul $1/s$) sau în regulatorul discret (în f.d.t. va fi termenul $z/(z-1)$).

Coeficienții erorii pot fi calculați, reprezentând f.d.t. discretă în șir după $(1 - z^{-1})$:

$$H_{er}(z) = \frac{1}{1+H_d(z)} = c_0 + \frac{c_1}{T}(1 - z^{-1}) + \frac{c_2}{2!T^2}(1 - z^{-1})^2 + \dots + \frac{c_m}{m!T^m}(1 - z^{-1})^m + \dots \quad (7.39)$$

Din (7.39) rezultă că pentru sistemul static coeficientul erorii de poziție se determină prin relația:

$$c_0 = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1+H_d(z)} = \frac{1}{1+k}, \quad (7.40)$$

unde $k = H_d(1)$ este coeficientul de transfer al sistemului deschis discret.

Dacă sistemul discret conține astatism de gradul unu $\nu = 1$, atunci coeficientul $c_0 = 0$, iar coeficientul c_1 se calculează prin relația:

$$c_1 = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T}{(1-z^{-1})(1+H_d(z))} = \frac{T}{k_1}, \quad (7.41)$$

unde $k_1 = H_d(1)$ în regim staționar.

Dacă sistemul cu eșantionare are astatism de gradul doi $\nu = 2$, atunci coeficienții $c_0 = c_1 = 0$, iar coeficientul c_2 se calculează prin relația:

$$c_2 = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{2T^2}{(1-z^{-1})^2(1+H_d(z))} = \frac{2T^2}{k_2}, \quad (7.42)$$

unde $k_2 = H_d(1)$.

7.4 Construirea răspunsului indicial al sistemului cu eșantionare

În sistemul automat liniar continuu procesul tranzitoriu se termină la infinit ($t \rightarrow \infty$). În comparație cu sistemele liniare continue, în sistemele discrete procesele tranzitorii pot să se termine într-un număr finit de perioade de eșantionare k_m astfel încât:

$$y(kT) = y(k_m T) = y(\infty), \text{ pentru } \forall k \geq k_m. \quad (7.43)$$

Dacă condiția (7.43) este valabilă, atunci răspunsul indicial al sistemului discret este optimal și sistemul se numește optimal după rapiditatea răspunsului indicial.

Condițiile ca răspunsul indicial al sistemului să fie optimal se obțin din funcția de transfer discretă a sistemului:

$$H_0(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + b_2 z^{m-2} + \dots + b_m}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n}, \quad m \leq n \quad (7.44)$$

și răspunsul indicial durează un număr finit de perioade de eșantionare în condiția când coeficienții de la numitor:

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0, \quad a_0 \neq 0 \quad (7.45)$$

și atunci timpul de reglare $t_r = nT$, unde n este ordinul sistemului, iar T perioada de eșantionare.

Exemplul 7.5. Se consideră sistemul închis discret, alcătuit din elementul de

reținere de ordinul zero cu f.d.t. $H_{ER}(s)$ și partea continuă descrisă de funcția de transfer $H_{PF}(s) = k_0/(T_1s + 1) = k_0/(2s + 1)$ cu perioada de eșantionare $T = 0.1$ s.

Se cere să se determine valoarea parametrului k_0 pentru care răspunsul indicial al sistemului este optimal.

Soluționare. Funcția de transfer a canalului deschis se determină ca conexiune serie a elementului de reținere și partea fixată:

$$H_d(s) = H_{ER}(s)H_{PF}(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s} \frac{k_0}{T_1s+1},$$

iar f.d.t. discretă se calculează după tabelul A3.1, anexa 3 și se obține:

$$\begin{aligned} H_d(z) &= Z\{H_{ER}(s)H_{PF}(s)\} = \frac{k_0(z-1)}{z} Z\left\{\frac{1}{s(T_1s+1)}\right\} = \\ &= \frac{k_0(z-1)}{z} \frac{z(1-e^{-T/T_1})}{(z-1)(z-e^{-T/T_1})} = \frac{k_0(1-e^{-0.1/z})}{(z-e^{-0.1/2})} = \frac{0.0488k_0}{z-0.9512}. \end{aligned}$$

Se determină f.d.t. discretă a sistemului închis:

$$H_0(z) = \frac{H_d(z)}{1+H_d(z)} = \frac{0.0488k_0}{z-0.9512+0.0488k_0} = \frac{b_0}{a_0z+a_1},$$

unde $a_0 = 1$, $a_1 = -0.9512 + 0.0488k_0$.

Din numitorul f.d.t. $H_0(z)$ din relația (7.44) se calculează valoarea optimală a coeficientului k_0 și se obține:

$$a_1 = -0.9512 + 0.0488k_0 = 0, \quad k_{\text{opt}} = \frac{0.9512}{0.0488} = 19.4918. \blacksquare$$

Exemplul 7.6. Se consideră sistemul închis cu eșantionare descris cu f.d.t.:

$$H_0(z) = \frac{h(z)}{r(z)} = \frac{1}{z^2-1.5z+0.5} = \frac{B(z)}{A(z)},$$

la acțiunea semnalului treaptă unitară discretă $r(z) = 1(z) = z/(z-1)$.

Se cere să se calculeze răspunsul indicial al sistemului în domeniul timpului discret prin metoda fracțiilor elementare.

Soluționare. Se determină rădăcinile ecuației caracteristice ale sistemului:

$$A(z) = z^2 - 1.5z + 0.5 = (z - 0.5)(z - 1) = 0.$$

Se prezintă răspunsul indicial în raport cu intrarea treaptă unitară discretă:

$$\begin{aligned} h(z) &= H_0(z)r(z) = \frac{B(z)}{A(z)}r(z) = \frac{1}{z^2-1.5z+0.5} \frac{z}{z-1} = \\ &= \frac{z}{z^3-2.5z^2+2z-0.5} = \frac{1}{(z-0.5)(z-1)} \frac{z}{z-1} = \frac{z}{(z-0.5)(z-1)^2}. \end{aligned}$$

Rădăcinile polinomului caracteristic $h(z)$: $z_1 = z_2 = 1$, care sunt multiple și $z_3 = 0.5$.

Ultima expresie a lui $h(z)$ se prezintă în fracții elementare cu coeficienții necunoscuți, care se calculează după tabelul A3.1, anexa 3 (coeficienții necunoscuți se determină din sistemul de ecuații algebrice) și se obține:

$$\frac{h(z)}{z} = \frac{1}{z^3 - 2.5z^2 + 2z - 0.5} = \frac{1}{(z-0.5)(z-1)^2} = \frac{c_1}{z-0.5} + \frac{c_2}{z-1} + \frac{c_3}{(z-1)^2} = \frac{4}{z-0.5} - \frac{4}{z-1} + \frac{2}{(z-1)^2}.$$

Pentru fiecare componentă a sumei imaginii $h(z)/z$ după tabelul A3.1, anexa 3 se găsește componenta în domeniul timpului discret și se calculează șirul:

$$h(k) = 4Z^{-1} \left\{ \frac{z}{z-0.5} \right\} - 4Z^{-1} \left\{ \frac{z}{z-1} \right\} + 2Z^{-1} \left\{ \frac{z}{(z-1)^2} \right\} = 4(0.5)^k - 4 + 2k, \quad k \geq 0.$$

Se calculează valorile lui $h(k)$ care reprezintă ordonatele la momentele de eșantionare pentru 5 valori ale lui $k = 0, 1, 2, 3, 4$:

$$k = 0, h(0) = 4(0.5)^0 - 4 + 2 \cdot 0 = 0,$$

$$k = 1, h(1) = 4(0.5)^1 - 4 + 2 \cdot 1 = 0,$$

$$k = 2, h(2) = 4(0.5)^2 - 4 + 2 \cdot 2 = 1,$$

$$k = 3, h(3) = 4(0.5)^3 - 4 + 2 \cdot 3 = 2.5,$$

$$k = 4, h(4) = 4(0.5)^4 - 4 + 2 \cdot 4 = 4.25.$$

În figura 7.3 se reprezintă răspunsul indicial pentru 5 perioade de eșantionare.

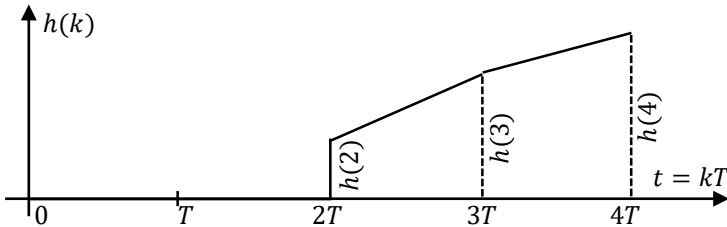


Fig. 7.3. Răspunsul indicial al sistemului cu eșantionare

Exemplul 7.7. Se consideră f.d.t. a sistemului discret închis din ex. 7.5:

$$H_0(z) = \frac{h(z)}{r(z)} = \frac{1}{z^2 - 1.5z + 0.5} = \frac{B(z)}{A(z)}.$$

La intrarea sistemului acționează semnalul treaptă unitară discretă cu f.d.t.:

$$r(z) = 1(z) = \frac{z}{z-1}.$$

Se cere să se calculeze răspunsul indicial al sistemului închis, utilizând metoda coeficienților necunoscuți.

Soluționare. Mărimea de ieșire a sistemului se dă în formă operațională în z^{-1} în raport cu referința treaptă unitară discretă și se prezintă prin șirul coeficienților necunoscuți $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$:

$$\begin{aligned} h(z) &= \frac{B(z)}{A(z)} = H_0(z)r(z) = \frac{1}{z^2-1.5z+0.5} \frac{z}{z-1} = \frac{z}{z^3-2.5z^2+2z-0.5} = \\ &= \frac{b_2z^{-2}}{a_0-a_1z^{-1}+a_2z^{-2}-a_3z^{-3}} = c_0 + c_1z^{-1} + c_2z^{-2} + c_3z^{-3} + c_4z^{-4} + c_5z^{-5}, \end{aligned}$$

unde coeficienții au semnificațiile: $b_2 = 1, a_0 = 1, a_1 = 2.5, a_2 = 2, a_3 = 0.5$.

Înmulțim termenii din stângă și dreapta ai expresiei cu numitorul acesteia și se obține egalitatea:

$$\begin{aligned} b_2z^{-2} &= (a_0 - a_1z^{-1} + a_2z^{-2} - a_3z^{-3} + a_4z^{-4}) \rightarrow \\ &\rightarrow (c_0 + c_1z^{-1} + c_2z^{-2} + c_3z^{-3} + c_4z^{-4} + c_5z^{-5}). \end{aligned}$$

În continuare, egalând coeficienții din stânga și dreapta de pe lângă aceleași grade ale lui z , se construiește sistemul de ecuații algebrice:

$$\begin{aligned} a_0c_0 &= 0, \\ a_0c_1 - a_1c_0 &= 0, \\ a_0c_2 - a_1c_1 + a_2c_0 &= b_2, \\ a_0c_3 - a_1c_2 + a_2c_1 - a_3c_0 &= 0, \\ a_0c_4 - a_1c_3 + a_2c_2 - a_3c_1 &= 0, \\ a_0c_5 - a_1c_4 + a_2c_3 - a_3c_2 &= 0, \end{aligned}$$

din care se calculează coeficienții necunoscuți c_0, c_1, c_2, \dots prin coeficienții cunoscuți b_2, b_3 și a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 :

$$c_0 = 0, c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = 2.5, c_4 = 4.25, c_5 = 6.125$$

și se reprezintă șirul ieșirii:

$$h(z) = c_0 + c_1z^{-1} + c_2z^{-2} + c_3z^{-3} + c_4z^{-4} + c_5z^{-5}.$$

În domeniul timpului discret răspunsul indicial are forma:

$$h(k) = 0 \cdot h(0) + 0 \cdot h(1) + h(2) + 2.5h(3) + 4.25h(4) + 6.125h(5)$$

sau:

$$h(kT) = 0 \cdot h(0) + 0 \cdot h((k-1)T) + h((k-2)T) + 2.5h((k-3)T) + \\ + 4.25h((k-4)T) + 6.125h((k-5)T).$$

Rezultatul obținut este același ca și în ex. 7.5.

Exemplul 7.8. Se consideră mărimea de ieșire a sistemului cu eșantionare din exemplul 7.5:

$$h(z) = H_0(z)r(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{1}{z^2 - 1.5z + 0.5} \frac{z}{z-1} = \frac{z}{z^3 - 2.5z^2 + 2z - 0.5}.$$

Se cere să se calculeze răspunsul indicial $h(k)$ în timp discret pentru 6 perioade de eșantionare, utilizând metoda împărțirii număratorului $B(z)$ la numitor $A(z)$.

Soluționare. Se efectuează împărțirea număratorului $B(z)$ la numitorul $A(z)$ a fracției pentru 5 perioade de eșantionare și se obține șirul în z^{-1} (fig. 7.4):

$$\begin{array}{r} \frac{z}{z - 2.5 + 2z^{-1} - 0.5z^{-2}} \Big| \frac{z^3 - 2.5z^2 + 2z - 0.5}{z^{-2} + 2.5z^{-3} + 4.25z^{-4} + 6.125z^{-5} + \dots} \\ \underline{0 + 2.5 - 2z^{-1} + 0.5z^{-2}} \\ \quad 2.5 - 6.25z^{-1} + 5z^{-2} - 1.25z^{-3} \\ \quad \underline{0 + 4.25z^{-1} - 4.5z^{-2} + 1.25z^{-3}} \\ \quad \quad 0 + 4.25z^{-1} - 10.625z^{-2} + 8.5z^{-3} - 2.125z^{-4} \\ \quad \quad \quad \underline{0 + 6.125z^{-2} - 7.25z^{-3} + 2.125z^{-4}} \end{array}$$

Fig. 7.4. Operația de împărțire a polinoamelor

În rezultatul împărțirii polinoamelor s-a obținut șirul în z^{-1} de forma:

$$h(z^{-1}) = z^{-2} + 2.5z^{-3} + 4.25z^{-4} + 6.125z^{-5}.$$

În domeniul timpului discret se obține răspunsul indicial prezentat prin valorile ordonate la momentele respective de eșantionare în forma:

$$h(k) = h(0) + h(1) + h(2) + h(3) + h(4) + h(5) =$$

$$= 0 \cdot h(0) + 0 \cdot h(k-1) + 1 \cdot h(k-2) + 2.5h(k-3) + \\ + 4.25h(k-4) + 6.125h(k-5),$$

unde valorile ordonatelor sunt: $h(0) = 0$, $h(1) = 0$, $h(2) = 1$, $h(3) = 2.5$, $h(4) = 4.25$, $h(5) = 6.125$.

În comparație cu rezultatul din exemplul 7.3 s-a obținut același răspuns indicial. ■

Exemplul 7.9. Se consideră structura sistemului discret deschis alcătuită din elementul ideal de eșantionare, elementul de reținere de ordin zero și elementul integrator și prezentată cu funcția de transfer:

$$H_d(z) = \frac{k}{z-1},$$

unde k este coeficientul de transfer al sistemului, T – perioada de eșantionare.

Se cere să se construiască răspunsul indicial al sistemului închis când la intrare acționează semnalul treaptă unitară discretă cu imaginea $1(z) = z/(z-1)$ pentru cazurile când $kT = 0.5$; 1 ; 1.5 și numărul de perioade de eșantionare $k = \overline{0, 6}$.

Soluționare. Se determină funcția de transfer a sistemului închis:

$$H_0(z) = \frac{h(z)}{1(z)} = \frac{H_d(z)}{1+H_d(z)} = \frac{kT}{z+kT-1}.$$

Se exprimă mărimea de ieșire a sistemului închis în formă operațională:

$$h(z) = H_0(z)1(z) = \frac{kT}{z+kT-1} \frac{z}{z-1}.$$

Mărimea $y(z)$ se prezintă în fracții elementare:

$$h(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-(1-kT)} = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-d}, \quad d = 1 - kT.$$

Se utilizează tabelul A3.1, anexa 3 și pentru ambele componente se determină transformata z și se obține expresia răspunsului indicial în domeniul timpului:

$$h(kT) = 1(kT) - (1 - kT)^k.$$

După relația obținută pentru răspunsul indicial s-au efectuat calculele și rezultatele sunt incluse în tabelul 7.1, iar în figura 7.5 sunt reprezentate alurile răspunsurilor: alura 1 pentru $kT = 0.5$, alura 2 – $kT = 1$, alura 3 – $kT = 1.5$. Alura 2 este răspunsul indicial optimal cu timpul de reglare $t_r = kT = 1$.

Tabelul 7.1. Răspunsul indicial al sistemului cu eșantionare

Răspunsul indicial	Numărul perioadei de eșantionare k						
	0	1	2	3	4	5	6
$h(0.5)$	0	0.5	0.75	0.875	0.9375	0.9688	0.9844
$h(1)$	0	1	1	1	1	1	1
$h(1.5)$	0	1.5	0.75	1.125	0.9375	0.9688	0.9844

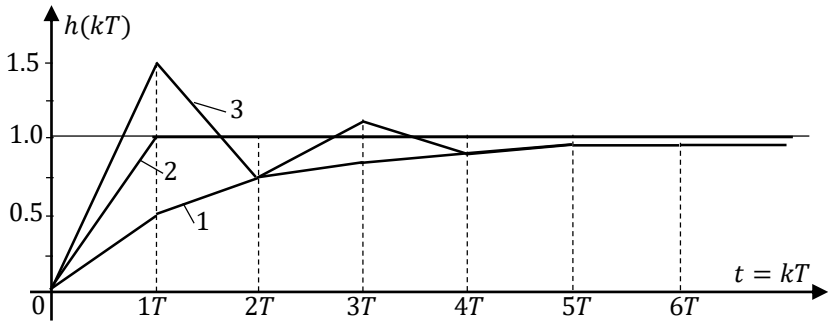


Fig. 7.5. Alurile răspunsurilor indiciale ale sistemului cu eșantionare

Exemplul 7.10. Se consideră funcția de transfer a sistemului discret deschis (din ex. 7.8):

$$H_d(z) = \frac{kT}{z-1},$$

unde k este coeficientul de transfer al sistemului deschis discret, T – perioada de eșantionare.

Se cere să se determine eroarea staționară a sistemului închis când la intrare acționează: 1) semnalul treaptă unitară discretă $r(t) = 1(t)$, 2) semnal rampă $r(t) = bt$, 3) semnal parabolă de gradul unu $r(t) = bt^2$.

Soluționare. Se determină funcția de transfer a erorii sistemului închis la acțiunea semnalului treaptă discretă prin imaginea $r(z)$:

$$H_\varepsilon(z) = \frac{\varepsilon(z)}{r(z)} = \frac{1}{1+H_d(z)} = \frac{z-1}{z+kT-1}.$$

Se dă expresia în forma operațională a erorii:

$$\varepsilon(z) = H_\varepsilon(z)r(z) = \frac{z-1}{z+kT-1}r(z).$$

1.1. Se calculează eroarea sistemului la acțiunea semnalului treaptă unitară discretă cu imaginea $r(z) = 1(z) = z/(z-1)$, aplicând relația (7.26) și, deoarece funcția de transfer a sistemului deschis are polul $z = 1$ ($H_d(z) = \infty$), eroarea este egală cu zero:

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \varepsilon(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{z}{z+kT-1} = 0.$$

2.1. Se reprezintă imaginea pentru semnalul rampă:

$$r(z) = bt(z) = \frac{bTz}{(z-1)^2}.$$

2.2. Se reprezintă expresia erorii în formă operațională pentru semnalul rampă:

$$\varepsilon(z) = H_\varepsilon(z)t(z) = \frac{z-1}{z+kT-1} \frac{bTz}{(z-1)^2} = \frac{bTz}{(z+kT-1)(z-1)}.$$

2.3. Se calculează eroarea sistemului, aplicând relația (7.27) la acțiunea semnalului rampă și se obține eroarea egală cu o constantă:

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \varepsilon(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{bTz}{(z+kT-1)(z-1)} = \frac{b}{k}.$$

3.1. Se reprezintă imaginea pentru semnalul parabolă de gradul unu:

$$r(z) = bt(z) = \frac{bT^2(z+1)}{(z-1)^3}.$$

3.2. Se reprezintă expresia erorii în formă operațională pentru semnalul parabolă:

$$\varepsilon(z) = H_\varepsilon(z)t^2(z) = \frac{z-1}{z+kT-1} \frac{bT^2z}{(z-1)^3} = \frac{bT^2z}{(z+kT-1)(z-1)^2}.$$

3.3. Se calculează eroarea sistemului închis discret, aplicând relația (7.28) la acțiunea semnalului de intrare de tip parabolă de gradul unu și se obține eroarea sistemului egală cu infinit:

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \varepsilon(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{bT^2z}{(z+kT-1)(z-1)^2} = \infty. \blacksquare$$

7.5 Aprecierea performanțelor răspunsului indicial al sistemului cu eșantionare

Performanțele răspunsului indicial al sistemului automat cu eșantionare, timpul de reglare t_r , suprareglarea σ , timpul de creștere t_c etc. se determină prin două grupe de metode: metode directe și metode indirecte.

Metodele directe permit determinarea performanțelor sistemului discret după răspunsul indicial construit ca soluție a ecuației cu diferențe finite sau prin simularea sistemului cu eșantionare, când la intrare se aplică semnalele de referință și perturbație treaptă unitară discretă, utilizând pachete de programe.

După metodele indirecte se pot determina performanțe ca timpul de reglare t_r și suprareglarea σ , aplicând metoda alocării poli-zeroouri, criterii sumare (integrale), metode frecvențiale etc.

Prin metoda poli-zeroourilor se determină gradul de stabilitate:

$$\eta = \min\{-\ln|z_p|\} \quad (7.46)$$

și gradul de oscilație:

$$\mu = \operatorname{tg}\varphi = \left| \frac{\bar{\omega}}{\alpha} \right|, \quad (7.47)$$

unde z_p sunt rădăcinile ecuației caracteristice a sistemului cu eșantionare cu $z_p = -\alpha \pm j\bar{\omega}$, $\bar{\omega} = \omega T$.

Pentru criteriile sumelor se prezintă prin relațiile pentru integrala liniară J_1 și integrală pătratică J_2 :

$$J_1 = \sum_0^\infty \varepsilon(k) = \sum_0^\infty (h(k) - h(\infty)), \quad (7.48)$$

$$J_2 = \sum_0^\infty \varepsilon^2(k) = \sum_0^\infty (h(k) - h(\infty))^2, \quad (7.49)$$

unde $\varepsilon(k) = h(k) - h(\infty)$ este eroarea sistemului, $h(k)$ – mărimea ieșirii sistemului, $h(\infty)$ – mărimea de ieșire a regimului staționar.

7.6 Elemente de corecție în sisteme discrete

În etapele de construire a sistemelor discrete, proprietățile lor de stabilitate și calitate pot să nu satisfacă cerințele impuse. În aceste cazuri, în structura sistemului discret se introduc elemente de corecție a proprietăților sistemului. Se utilizează elemente de corecție liniare și discrete, care se aplică respectiv la partea liniară și la partea discretă a sistemului [17].

Elementele de corecție se conectează în structura sistemului discret în serie, în paralel și în reacție respectiv la partea liniară și discretă.

Alegerea și modul de conectare a elementelor de corecție liniare la sistemele liniare au fost expuse în cadrul disciplinei *Teoria sistemelor automate*.

În continuare, vom descrie modul de conexiune a elementelor de corecție discrete. În calitate de elemente de corecție discrete se utilizează elemente de calcul și filtre discrete.

În figura 7.6 se dau schemele structurale ale sistemului automat discret cu aplicarea elementelor de corecție discrete cu conexiune serie (fig. 7.6, *a*), cu conexiune în paralel (fig. 7.6, *b*) și cu conexiune în reacție (fig. 7.6, *c*).

În structurile sistemelor automate discrete (fig. 7.6, *a, b, c*) sunt reprezentate funcțiile de transfer: $H_{c1}(z)$, $H_{c2}(z)$, $H_{c3}(z)$, care sunt funcțiile de transfer discrete ale elementelor de corecție conectate în serie, în paralel și în reacție, $H_{ER}(s)$ – funcția de transfer a elementului de reținere de ordinul zero, $H_{PF}(s)$ – funcția de transfer a părții fixate, $H_1(s)$, $H_2(s)$ – funcții de transfer și semnalele: $r(t)$ este referința, $y(t)$ – mărimea de ieșire a sistemului, $\varepsilon(t)$ – eroarea sistemului, $\varepsilon^*(t)$ – eroarea discretă.

Expunem funcția de transfer discretă a sistemului deschis cu conexiune în serie a elementului de corecție discret, în paralel și în reacție:

$$H_d(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{H_{PF}(s)}{s} \right\} H_{c1}(z), \quad (7.50)$$

$$H_d(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{H_1(s)H_2(s)}{s} \right\} + H_{c2}(z) \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{H_2(s)}{s} \right\}, \quad (7.51)$$

$$H_d(z) = \frac{\frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{H_1(s)H_2(s)}{s} \right\}}{1 + \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{H(s)}{s} \right\} H_{c3}(z)}. \quad (7.52)$$

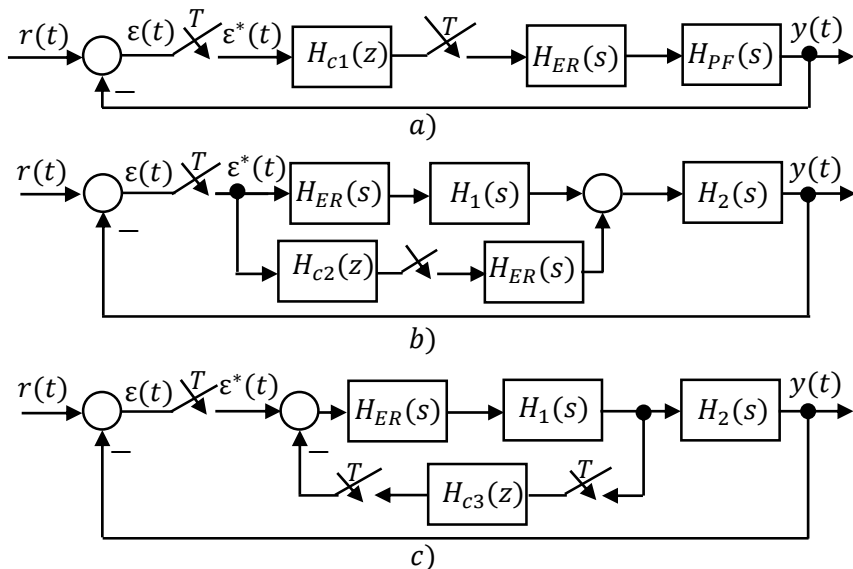


Fig. 7.6. Structura sistemului automat discret cu conexiuni de elemente de corecție discrete

Alegerea și conectarea tipului de corecție discretă în structura sistemului se efectuează din considerente ca structura de realizare a elementului de corecție discretă să fie cât mai simplă, care să conducă la obținerea stabilității, performanțelor impuse și robusteții ridicate a sistemului automat discret.

Chestionar și probleme

1. Explicați cum se obține ecuația operațională a mărimii de ieșire a sistemului închis discret.
2. Ce reprezintă metoda în baza teoremei de calcul al reziduurilor?

3. Prezentați metoda dezvoltării în fracții elementare de calcul al mărimii de ieșire a sistemului discret.

4. Dați exemplu de calcul al mărimii de ieșire a sistemului discret, utilizând metoda împărțirii infinite.

5. Prezentați relațiile de determinare a erorii sistemului discret la acțiunea semnalului de intrare treaptă unitară discretă.

6. Prezentați relațiile de determinare a erorii sistemului discret la acțiunea semnalului de intrare rampă discretă.

7. Prezentați relațiile de determinare a erorii sistemului discret la acțiunea semnalului parabolă discretă.

8. Explicați ce reprezintă coeficienții erorii sistemului și cum se calculează.

9. Se consideră funcția de transfer a sistemului deschis discret:

$$H_d(z) = \frac{kz}{z-1}.$$

Calculați eroarea sistemului închis discret la acțiunea semnalului de intrare treaptă unitară discretă.

10. Se consideră funcția de transfer a sistemului deschis discret de la p. 9 și calculați eroarea sistemului închis discret la acțiunea semnalului de intrare rampă discretă.

11. Se consideră funcția de transfer a sistemului deschis discret:

$$H_d(z) = \frac{k}{T_0} \frac{z}{z - e^{-T/T_0}}.$$

Determinați eroarea sistemului închis discret la acțiunea semnalului de intrare treaptă unitară discretă.

12. Se consideră funcția de transfer a sistemului deschis discret de la p. 11, calculați eroarea sistemului închis discret la acțiunea semnalului de intrare rampă discretă.

13. Cum pot fi determinate performanțele sistemului automat discret?

14. Ce reprezintă elementele de corecție și de ce se utilizează acestea în structura sistemului discret.

15. Ce tipuri de conexiuni ale elementelor de corecție se utilizează în structura sistemului discret?

8 SISTEME AUTOMATE NUMERICE

8.1 Schema funcțională și structurală a sistemului numeric

Sistemele de reglare automată cu calculator de proces, în care se realizează algoritmi de reglare, se numesc *sisteme numerice de reglare automată* (SNRA) (fig. 8.1) și în care semnalele se discretizează în nivel și în timp. Discretizarea în nivel se realizează (cu rotunjiri și trunchieri) în convertorul analog-numeric (CAN), iar discretizarea în timp se realizează cu multiplexorul cu perioada de eșantionare T [1, 2, 4, 8, 10-14, 17].

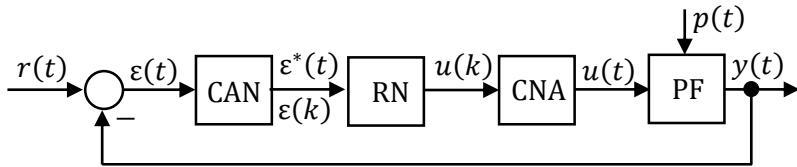


Fig. 8.1. Schema funcțională a sistemului numeric de reglare automată

Multiplexorul și convertorul analog-numeric CAN se realizează într-un singur bloc. Semnalul numeric al convertorului analog-numeric CAN se procesează de calculatorul (CALC) și, în continuare, semnalul se transmite convertorului numeric-analog (CNA) (cel mai frecvent utilizat este elementul de reținere), care la ieșirea lui „construiește” semnalul continuu între două momente de eșantionare consecutive pe baza eșantioanelor și îl transmite elementului de execuție din componența părții fixate (PF). Perioada de timp t_p , necesară pentru prelucrarea semnalului în canalul convertor analog-numeric–procesor–convertor numeric-analog, se impune să fie mai mică decât constantele de timp ale elementului de execuție și ale obiectului de reglare. Deoarece perioada de timp t_p de prelucrare a semnalului pe segmentul canalului numeric este neglijabilă, semnalele la intrările și ieșirile acestora se sincronizează [11-13, 17].

În elementele numerice ale sistemului automat se utilizează module cu un număr mai mare de biți și atunci efectul discretizării în

nivel se neglijează, iar sistemul se analizează ca sistem automat cu modulație în amplitudine și eșantionare, în care partea discretă (procesorul) se prezintă ca un filtru liniar discret (FD) (fig. 8.2).

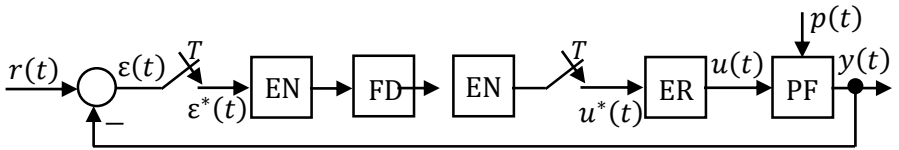


Fig. 8.2. Schema-bloc funcțională a sistemului numeric cu cuantizare

Semnalul discret al filtrului FD se procesează de elementul de reținere ER (cel mai practic utilizat este elementul de reținere de ordinul zero). Efectele discretizării în nivel ale semnalelor la intrarea și ieșirea procesorului sunt reprezentate prin elementele neliniare (EN).

În schema-bloc structurală a sistemului numeric (fig. 8.2) partea fixată PF continuă se descrie de f.d.t. $H_{PF}(s)$. Convertorul analog-numeric CAN se consideră element ideal cu eșantionare în timp al semnalului continuu al erorii $\varepsilon(t)$ și la ieșirea acestuia se obține semnalul discret al erorii $\varepsilon^*(t)$.

Realizarea algoritmului numeric de prelucrare a informației în calculator dintre mărimea de intrare $\varepsilon^*(t)$ ($\varepsilon(k)$) și mărimea de conducere (ieșire) $u^*(t)$ ($u(k)$) se reprezintă prin f.d.t. discretă $H_R(z)$, numit regulator numeric (RN) sau filtru discret FD (fig. 8.3).

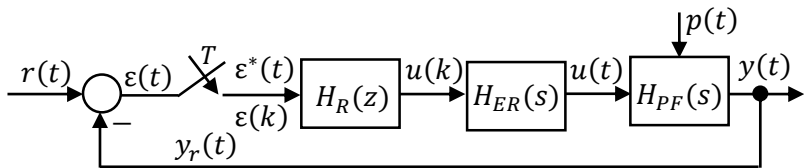


Fig. 8.3. Schema-bloc structurală a sistemului numeric

Semnalele $\varepsilon(kT)$ și $u(kT)$ reale se reprezintă ca o succesiune de coduri. Perioada de eșantionare T a elementului de discretizare se alege în concordanță cu perioada de verificare a traductoarelor din conturul respectiv.

Convertorul numeric-analog CNA se reprezintă ca element de

reținere de ordinul zero (EROZ) descris de f.d.t. $H_{ER}(s)$ (7.47) ca element cu funcționare în timp continuu-discret.

8.2 Modelul matematic al sistemului numeric

Partea liniară continuă în sistemul numeric este o conexiune serie a elementului de reținere cu f.d.t. $H_{ER}(s)$ cu partea fixată cu f.d.t. $H_{PF}(s)$ și se obține f.d.t. echivalentă:

$$H_{PC}(s) = H_{ER}(s)H_{PF}(s), \quad (8.1)$$

iar în transformata z cu f.d.t. discretă:

$$H_{PC}(z) = Z\{H_{ER}(s)H_{PF}(s)\} = \frac{z^{-1}}{z} Z\left\{\frac{H_{PF}(s)}{s}\right\} = \frac{C(z)}{D(z)} = \frac{y(z)}{u(z)}. \quad (8.2)$$

Semnalele de intrare se transmit în calculator prin multiplexoare, iar ieșirile din calculator prin demultiplexoare.

Funcția de transfer discretă a regulatorului numeric RN se reprezintă în forma cu operatori de întârziere:

$$H_R(z^{-1}) = \frac{u(z^{-1})}{\varepsilon(z^{-1})} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_r z^{-r}}{p_0 + p_1 z^{-1} + \dots + p_s z^{-s}}, \quad (8.3)$$

unde $\overline{q_0}, \overline{q_r}$ și $\overline{p_0}, \overline{p_s}$ sunt parametrii de acord ai regulatorului.

Ecuția operațională a regulatorului este:

$$\begin{aligned} u(z^{-1})(p_0 + p_1 z^{-1} + \dots + p_s z^{-s}) &= \\ = \varepsilon(z^{-1})(q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_r z^{-r}) & \end{aligned} \quad (8.4)$$

sau

$$u(z^{-1}) = \frac{1}{p_0} [-p_1 u(z^{-1})(p_1 z^{-1} + \dots + p_s z^{-s}) +$$

$$+\varepsilon(z^{-1})(q_0 + qz^{-1} + \dots + q_r z^{-r}]. \quad (8.5)$$

În domeniul timpului discret, mărimea de conducere din (8.5) se exprimă prin relația recurentă:

$$u(k) = \frac{1}{p_0} [-p_1 u(k-1) - p_2 u(k-2) - \dots - p_s u(k-s) + q_0 \varepsilon(k) + q_1 \varepsilon(k-1) + \dots + q_r \varepsilon(k-r)] \quad (8.6)$$

sau în formă generalizată:

$$u(k) = -\frac{1}{p_0} \sum_{i=1}^s p_i u(k-i) + \frac{1}{p_0} \sum_{i=0}^r q_i \varepsilon(k-i). \quad (8.7)$$

Mărimea de conducere curentă $u(k)$ (8.6)-(8.7) se calculează prin valorile curente și anterioare ale mărimii de conducere și ale erorii sistemului, iar programul se realizează pe calculator, reprezentat în formă canonică de realizare a algoritmului recurent de ordinul n (fig. 8.4).

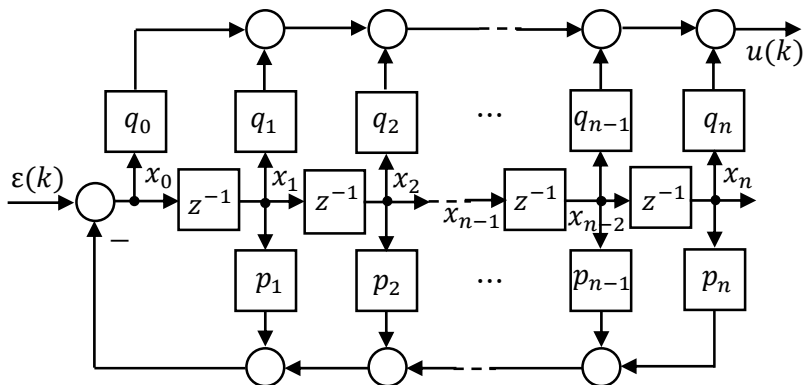


Fig. 8.4. Forma canonică de realizare a algoritmului recurent de ordinul n

Funcția de transfer a sistemului numeric închis în operatori cu avans se descrie prin relația:

$$H_0(z) = \frac{y(z)}{r(z)} = \frac{H_R(z)H_{PC}(z)}{1+H_R(z)H_{PC}(z)} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\dots+b_m}{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\dots+a_n} \quad (8.8)$$

sau în operatori cu întârziere:

$$H_0(z^{-1}) = \frac{y(z^{-1})}{r(z^{-1})} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{b_0z^{m-n}+b_1z^{m-1-n}+\dots+b_mz^{-n}}{a_0+a_1z^{-1}+\dots+a_nz^{-n}}. \quad (8.9)$$

Pentru funcția de transfer discretă a sistemului numeric (8.9) ecuația operațională are forma:

$$\begin{aligned} & a_0y(z^{-1}) + a_1z^{-1}y(z^{-1}) + \dots + a_nz^{-n}y(z^{-1}) = \\ & = b_0z^{m-n}r(z^{-1}) + b_1z^{m-1-n}r(z^{-1}) + \dots + b_mz^{-n}r(z^{-1}) \end{aligned} \quad (8.10)$$

sau în condiția $m = n$ ecuația recursivă este:

$$\begin{aligned} y(k) = \frac{1}{a_0} & [-a_1y(k-1) - a_1y(k-2) - \dots - a_ny(k-n)] + \\ & + b_0r(k) + b_1r(k-1) + \dots + b_nr(k-n)]. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Ecuația recursivă a expresiei (8.9) în formă generalizată este:

$$y(kT) = -\frac{1}{a_0} \sum_{i=1}^s p_i y((k-i)T) + \frac{1}{a_0} \sum_{i=0}^l q_i r((k-i)T). \quad (8.12)$$

Mărimea de ieșire discretă curentă $y(kT)$ a sistemului numeric se calculează prin valorile curente și anterioare ale ieșirii și ale mărimii de referință.

Exemplul 8.1. Se dă funcția de transfer a părții fixate cu parametrii cunoscuți:

$$H_{PF}(s) = \frac{ke^{-\tau s}}{(T_1s+1)(T_2s+1)} = \frac{0.5e^{-s}}{(2s+1)(5s+1)}.$$

Se cere să se elaboreze algoritmul de reglare numerică pentru modelul părții fixate și să se determine răspunsul indicial al sistemului sintetizat la semnalul de intrare treaptă unitară discretă.

Soluționare. Se determină perioada de eșantionare prin relația:

$$T = 0.1 \min\{T_1; T_2\} = 0.1 \min\{2; 5\} = 0.2 \text{ s.}$$

Se reprezintă elementul de reținere de ordin zero cu funcția de transfer:

$$H_{pF}(s) = \frac{1}{s} (1 - e^{-Ts}).$$

Algoritmul PID numeric se obține din algoritmul PID continuu, utilizând metoda trapezului de aproximare și după unele transformări se obține algoritmul numeric în transformata z :

$$\begin{aligned} H_{PID}(z) &= \frac{u(z)}{\varepsilon(z)} = Z \left\{ k_p + \frac{1}{T_i s} + s T_d \right\} \approx k_p + \frac{1}{T_i \frac{2(z-1)}{T(z+1)}} + \frac{2(z-1)}{T(z+1)} T_d = \\ &= \frac{q_0 z^2 + q_1 z + q_2}{p_1 z^2 - p_2} = \frac{Q(z)}{P(z)}, \end{aligned}$$

unde k_p, T_i, T_d sunt parametrii algoritmului continuu și au valorile numerice $k_p = 3.65, T_i = 1.773 \text{ s}, T_d = 4.916 \text{ s}$, iar parametrii regulatorului numeric sunt funcții de parametrii algoritmului continuu și perioada de eșantionare T :

$$\begin{aligned} q_0 &= 2k_p T_i T_d + 4T_i T_d + T^2, \quad q_1 = 8T_i T_d - 2T^2, \\ q_2 &= 4T_i T_d - 2k_p T_i T + T^2, \quad p_1 = 2T_i T, \quad p_2 = 2T_i T. \end{aligned}$$

S-a sintetizat algoritmul PID numeric cu funcția de transfer discretă și parametrii calculați:

$$\begin{aligned} H_{PID}(z) &= \frac{u(z)}{\varepsilon(z)} = \frac{Q(z)}{P(z)} = \frac{q_0 z^2 + q_1 z + q_2}{p_1 z^2 - p_2} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{p_1 - p_2 z^{-2}} = \\ &= \frac{q_0/p_1 + q_1/p_1 z^{-1} + q_2/p_1 z^{-2}}{1 - p_2/p_1 z^{-2}} = \frac{q'_0 + q'_1 z^{-1} + q'_2 z^{-2}}{1 - p'_2 z^{-2}} = \frac{52.8665 - 98.2071z^{-1} + 45.6664z^{-2}}{1 - z^{-2}}. \end{aligned}$$

Se reprezintă mărirea de conducere $u(z)$ cu modelul obiectului în formă operațională:

$$\begin{aligned} u(z)P(z) &= Q(z)\varepsilon(z), \\ u(z)(1 - p'_2 z^{-2}) &= \varepsilon(z)(q'_0 + q'_1 z^{-1} + q'_2 z^{-2}), \\ u(z) &= p'_2 z^{-2} u(z) + q'_0 \varepsilon(z) + q'_1 z^{-1} \varepsilon(z) + q'_2 z^{-2} \varepsilon(z). \end{aligned}$$

Ultima expresie operațională se înscrie în domeniul timpului discret:

$$u(kT) = p'_2 u((k-2)T) + q'_0 \varepsilon(kT) + q'_1 \varepsilon((k-1)T) + q'_2 \varepsilon((k-2)T).$$

S-a obținut algoritmul de reglare numeric în forma recursivă de ordinul 2.

S-a efectuat simularea structurii sistemului numeric în KOPRAS, iar răspunsul indicial este prezentat în figura 8.5, care este un proces aperiodic.

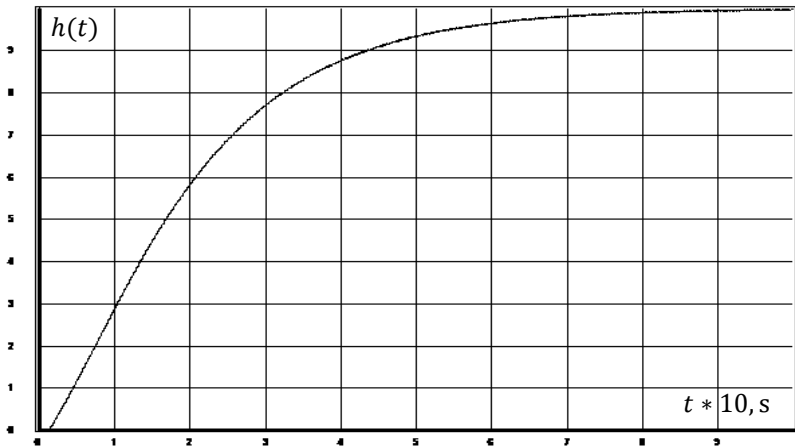


Fig. 8.5. Răspunsul indicial al sistemului numeric

Chestionar și probleme

1. Numiți și explicați elementele funcționale și funcțiile lor din structura sistemului automat de reglare numerică.
2. Care este diferența dintre schema-bloc funcțională a sistemului automat cu eșantionare și sistemului numeric?
3. Explicați cum se determină perioada de eșantionare a sistemului automat.
4. Prezentați forma operațională a algoritmului de reglare PID numeric în transformata z .
5. Se consideră funcția de transfer a algoritmului PID:

$$H_{PID}(z) = \frac{7-9z^{-1}+4z^{-2}}{3-3z^{-2}}.$$

Prezentați expresia mărimi de ieșire în timp discret.

6. Pentru funcția de transfer a algoritmului de reglare PID de la p. 5, când la intrarea lui se aplică semnal treaptă unitară discretă, prezentați ecuația operațională.
7. Pentru funcția de transfer a algoritmului de reglare PID de la p. 5, când la intrarea lui se aplică semnal treaptă unitară discretă, prezentați ecuația recursivă.

9 SEMNALE STOCASTICE ÎN SISTEME AUTOMATE

9.1 Introducere

Procesele în sistemele automate se determină de condițiile inițiale și de semnale, care acționează asupra sistemului. În general, condițiile inițiale și semnalele pot fi considerate procese aleatorii și atunci și procesele în sisteme de asemenea vor fi procese aleatorii (stocastice).

Sistemele automate care funcționează în condiții reale sunt supuse acțiunilor a două tipuri de semnale deterministe și stocastice [9, 12, 14, 17-20]. Semnalele deterministe reprezintă referința sau perturbația care acționează asupra sistemului și se descriu de funcții analitice cunoscute, care permit cu anticipație să descrie evoluția acestor semnale.

În multe cazuri, semnalele de referință și perturbațiile nu pot fi descrise de funcții analitice și, deci, aceste semnale pot fi descrise cu aproximare – au evoluție probabilistă (aleatorie) [9, 17].

Semnalele stocastice se clasifică în semnale de referință $x(t)$, care conțin informația necesară pentru conducere (semnal util), perturbații sau semnal zgomot $p(t)$, care perturbază semnalul de ieșire $y(t)$ al sistemului automat (fig. 9.1).

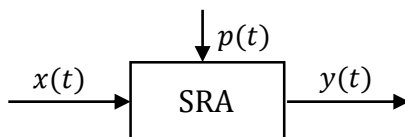


Fig. 9.1. Acțiunea semnalelor stocastice asupra sistemului automat

Semnalele de perturbație și zgomot pot fi atât interne, cât și externe.

Din aceste considerente este necesară analiza dinamicii stocastice a sistemului automat supus acțiunilor semnalelor aleatorii.

Dinamica sistemelor automate stocastice soluționează trei tipuri de probleme.

1. Determinarea caracteristicilor stocastice ale semnalelor de

ieșire și eroare ale structurii cunoscute a sistemului automat cu parametrii cunoscuți ai obiectului și regulatorului și cu caracteristicile cunoscute ale semnalelor de intrare (referința sau perturbația).

2. Determinarea parametrilor optimați ai regulatorului sistemului automat cu structura și parametrii cunoscuți ai obiectului și caracteristicile cunoscute ale semnalelor de intrare.

3. Determinarea structurii optime a sistemului automat sau a structurii optime a regulatorului după caracteristicile cunoscute ale semnalelor de intrare (referința sau perturbația).

În sistemele automate, sub acțiunea semnalelor stocastice, nu există regim staționar, dar sistemul este în regim tranzitoriu, care permanent trece dintr-o stare în alta și, în rezultat, semnalele ieșirii $y(t)$ și erorii $\varepsilon(t)$ se modifică și prezintă semnale stocastice.

9.2 Procese stocastice și caracteristicile lor

Funcția care la diferite valori ale argumentului reprezintă o mărime aleatorie este funcție *aleatorie* sau *stocastică*. Funcțiile stocastice pentru care argumentul este timpul t se numește proces (semnal) stocastic și este notat, de exemplu $x(t)$. În rezultatul unui experiment se obține o singură funcție a procesului stocastic $x_i(t)$ numită realizare, dar care poate să coincidă cu procesul stocastic $x(t)$. Fiecare realizare este o funcție deterministă.

La studierea dinamicii sistemelor automate se analizează evoluția sistemului la acțiunea ansamblului de semnale stocastice $x(t)$ (fig. 9.2), unde semnalele $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ sunt realizările procesului stocastic.

Pentru un moment de timp fixat $t = t_1$ realizarea procesului stocastic $x_i(t_1)$ se reprezintă ca o mărime cunoscută, iar valoarea procesului stocastic $x(t_1)$ este o mărime aleatorie numită *secțiunea* procesului stocastic în momentul de timp t_1 . Însă mărimea $x(t_1)$ nu reprezintă valoarea deterministă a procesului, dar se poate determina printr-o probabilitate că în momentul de timp t_1 valoarea procesului stocastic, ca mărime aleatorie, poate lua valori în anumite limite.

Metodele statistice studiază nu realizările separate $x_i(t)$ care formează mulțimea $x(t)$, dar proprietățile întregii mulțimi prin proceduri de mediere a proprietăților acestora.

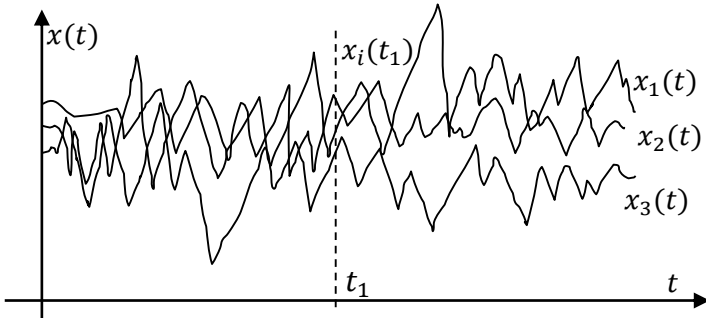


Fig. 9.2. Realizări ale procesului stocastic

Proprietățile stocastice ale mărimii aleatorii $x(t)$ se determină după funcția de repartiție (legea integrală de repartiție sau distribuție) $F(x)$ sau după densitatea repartiției probabiliste (legea diferențială de repartiție) $w(x)$. Mărimile probabilistice pot avea diferite legi de repartiție: normală, uniformă, exponențială etc.

În practică, la analiza sistemelor automate se acceptă semnalele, care au o repartiție normală (de tip Gauss).

Vom studia sistemele automate liniare stabile la acțiunea semnalelor stocastice. Procesele stabilizate nu depind de condițiile inițiale și se determină de acțiunea semnalelor asupra sistemului.

Pentru caracterizarea procesului stocastic se utilizează noțiunile de funcție de distribuție $F(x, t)$ și funcția densitatea de distribuție probabilistă $w(x, t)$ care depind de momentul fixat al timpului t și de o oarecare valoare aleasă a lui x și sunt funcții de două argumente x, t .

Pentru mărimea aleatorie $x(t_1)$ (secțiunea procesului aleatoriu la momentul t_1) funcția de distribuție de ordinul unu a procesului $x(t)$ este probabilitatea că valoarea curentă a procesului $x(t_1)$ în momentul de timp t_1 nu va depăși nivelul dat (numărul dat) x_1 :

$$F_1(x_1, t_1) = P(x(t_1) \leq x_1). \quad (9.1)$$

Dacă funcția $F_1(x_1, t_1)$ are derivata parțială pe variabila x_1 , atunci se obține funcția densității de distribuție probabilistă de ordinul unu:

$$w_1(x_1, t_1) = \frac{\partial F_1(x_1, t_1)}{\partial x_1}. \quad (9.2)$$

Mărimea dată de relația:

$$w_1(x_1, t_1)dx_1 = P(x_1 < x(t_1) \leq x_1 + dx_1) \quad (9.3)$$

reprezintă probabilitatea că mărimea $x(t)$ este în momentul $t = t_1$ în intervalul de la x_1 până la $x_1 + dx_1$.

Pentru momentele de timp t_1, t_2, \dots, t_n secțiunile $x(t_1), \dots, x(t_n)$ ale procesului vor avea repartițiile $F_1(x_1, t_1), F_1(x_2, t_2), \dots, F_1(x_n, t_n)$ și densitățile probabiliste $w_1(x_1, t_1), w_1(x_2, t_2), \dots, w_1(x_n, t_n)$.

Funcțiile $F_1(x, t)$, $w_1(x, t)$ sunt cele mai elementare caracteristici ale procesului stocastic $x(t)$, ce caracterizează procesul stocastic în secțiuni separate, dar nu este descrisă legătura funcțională dintre secțiunile procesului în diferite momente de timp.

Este necesar a caracteriza și legăturile de interinfluență a mărimilor aleatorii la momente de timp arbitrare.

Fie că două mărimi aleatorii $x(t_1)$ și $x(t_2)$ se referă la două momente de timp t_1 și t_2 ale unui proces stocastic $x(t)$. Probabilitatea că $x(t)$ va fi nu mai mare decât x_1 în momentul $t = t_1$ și nu mai mare decât x_2 în momentul $t = t_2$ se dă prin relația:

$$F_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = P(x(t_1) \leq x_1; x(t_2) \leq x_2), \quad (9.4)$$

care este numită funcție de repartiție de ordinul doi.

Derivata parțială de la $F_2(x_1, t_1; x_2, t_2)$ pe variabilele x_1, x_2 se determină prin relația:

$$w_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = \frac{\partial^2 F_2(x_1, t_1; x_2, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad (9.5)$$

care este numită densitate de distribuție probabilistă de ordinul doi.

Mărimea descrisă de relația

$$w_2(x_1, t_1; x_2, t_2)dx_1dx_2 = \\ = P\{x_1 < x(t_1) \leq x_1 + dx_1; x_2 < x(t_2) \leq x_2 + dx_2\} \quad (9.6)$$

este probabilitatea că $x(t)$ se va afla la momentul $t = t_1$ în intervalul de la x_1 până la $x_1 + dx_1$, iar la momentul $t = t_2$ în intervalul de la x_2 până la $x_2 + dx_2$.

Analogic cu reprezentarea dată mai sus se introduc funcțiile de repartiție $F_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = F_n(\bullet)$ și densității probabiliste $w_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = w_n(\bullet)$ de ordinul n . Cu cât este mai ridicat ordinul n , cu atât mai complet se descriu proprietățile statistice ale procesului stocastic. Dacă este cunoscută funcția $F_n(\bullet)$ de ordinul n , atunci după această funcție se pot calcula $F_i(\bullet)$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$.

În multe cazuri, procesele stocastice se caracterizează după legea de repartiție normală. Procesul stocastic este de repartiție normală, dacă toate densitățile de distribuție probabilistă de orice ordin sunt distribuite după legea normală. Pentru procesele de repartiție normală caracteristicile probabiliste totale sunt determinate de densitatea de distribuție probabilistă de ordinul doi (9.5), iar funcția de repartiție se calculează prin relația:

$$F_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} w_2(x_1, t_1; x_2, t_2)dx_1dx_2. \quad (9.7)$$

Funcțiile de repartiție $F_n(\bullet)$ și densitatea de repartiție $w_n(\bullet)$ sunt caracteristici ale procesului stocastic cu care este dificil de operat în practică. În studiul sistemelor automate stocastice se utilizează unele caracteristici ale procesului care descriu nu atât de complet procesele stocastice, dar care sunt mărimi deterministe, calculele fiind mai simple. Astfel de caracterizare se face prin intermediul funcțiilor momentelor inițiale și momentelor centrate: mărimea medie, dispersia și funcția de corelație [9, 12, 17-20].

Mărimea medie (momentul de ordinul unu) $m_x(t)$ a procesului

stocastic $x(t)$ în orice moment de timp t se reprezintă prin relația:

$$m_x(t) = M[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)w_1(x, t)dx, \quad (9.8)$$

unde $w_1(x, t)$ este densitatea de distribuție probabilistă de ordinul unu a procesului stocastic $x(t)$.

Mărimea medie (speranța) $m_x(t)$ a procesului stocastic $x(t)$ este o funcție staționară de timp în jurul căruia se grupează și oscilează toate realizările procesului stocastic și reprezintă media pe ansamblu. Mărimea medie $m_x(t)$ a procesului stocastic $x(t)$ în momentul de timp t_i este egală cu media secțiunii procesului $x(t_i)$ și reprezintă operația de mediere probabilistă a mărimii $x(t_i)$ și fiecare valoare posibilă a mărimii $x(t)$ se percepe cu ponderea egală cu $w_1(x, t_i)dx$.

Media procesului determinist $x(t)$ coincide cu însuși procesul $m_x(t) = x(t)$.

Media pătratică (momentul de ordinul doi) a procesului stocastic se exprimă prin relația:

$$x^2(t) = M[\{x(t)\}^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 w_1(x, t)dx. \quad (9.9)$$

În practică se utilizează noțiunea de proces stocastic centrat $\hat{x}(t)$, care reprezintă abaterea procesului $x(t)$ de la mărimea medie $m_x(t)$:

$$\hat{x}(t) = x(t) - M[x(t)] = x(t) - m_x(t). \quad (9.10)$$

În acest caz, procesul stocastic $x(t)$ din (9.10) se consideră ca suma a două componente:

$$x(t) = m_x(t) + \hat{x}(t), \quad (9.11)$$

unde $m_x(t)$ este componenta deterministă, iar $\hat{x}(t)$ – componenta centrată alternativă.

Media componentei centrate $m_x(t)$ este egală cu zero:

$$M[\hat{x}(t)] = M[x(t) - m_x(t)] = m_x(t) - m_x(t) = 0. \quad (9.12)$$

Pentru a caracteriza domeniul de deviație (abatere) a realizărilor în raport cu media procesului $m_x(t)$, se utilizează *dispersia (abaterea medie pătratică)* $D_x(t)$ procesului centrat, care este un moment de ordinul doi și se descrie prin relația:

$$D_x(t) = M[\{\hat{x}(t)\}^2] = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - m_x(t)]^2 w_1(x, t) dx. \quad (9.13)$$

Dispersia $D_x(t)$ este mărime deterministă ca funcție de timp și valoarea căreia în orice moment de timp t_i este egală cu dispersia secțiunii $x(t_i)$ procesului stocastic.

Mărimea medie $m_x(t)$, dispersia $D_x(t)$ și mărimea medie a pătratului $x^2(t)$, care au aceeași dimensiune, sunt date funcțional prin relația:

$$x^2(t) = D_x(t) + m_x^2(t). \quad (9.14)$$

Din expresia (9.14) se constată că mărimea medie a pătratului $x^2(t)$ procesului stocastic determină media procesului și abaterile realizărilor în raport cu media și se utilizează la determinarea preciziei sistemului automat.

Se utilizează și mărimi care au dimensiunea ca și procesul $x(t)$.

Valoarea medie pătratică a procesului stocastic se determină prin relația:

$$x_{mp}(t) = \sqrt{x^2(t)} = \sqrt{D_x(t) + m_x^2(t)}, \quad (9.15)$$

care este media aritmetică a rădăcinii pătrate din media pătratică a procesului stocastic.

Media pătratică a abaterii procesului stocastic este descrisă prin relația:

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}, \quad (9.16)$$

care este mărimea rădăcinii pătrate din dispersia procesului stocastic. Această mărime se utilizează numai pentru procesele centrate.

Mărimile $m_x(t)$, $D_x(t)$ sunt caracteristici importante ale procesului stocastic, dar acestea nu caracterizează statistic legătura dintre secțiunile realizărilor procesului stocastic, însă fiind cunoscute, permit a soluționa mai multe probleme ale sistemului automat.

Două grupuri de realizări ale două procese stocastice, diferite după structura lor, pot avea aceeași medie $m_x(t)$ și dispersie $D_x(t)$.

Pentru a caracteriza structura internă a procesului stocastic și a evidenția legătura dintre valorile procesului în diferite momente de timp se utilizează noțiunea *funcție de corelație (autocorelație)* a procesului.

Funcția de corelație a procesului stocastic $x(t)$ este o funcție de două argumente $K_{xx}(t_1, t_2)$, care pentru fiecare pereche arbitrară a valorilor argumentelor t_1 și t_2 este media de la produsul a două mărimi ale secțiunilor $\hat{x}(t_1)$ și $\hat{x}(t_2)$ ale procesului stocastic centrat:

$$K_{xx}(t_1, t_2) = M[\hat{x}(t_1)\hat{x}(t_2)] = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1(t_1) - m_x(t_1)][x_2(t_2) - m_x(t_2)] w_2(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2. \quad (9.17)$$

Funcția de corelație indică legătura probabilistă dintre mărimile aleatorii $\hat{x}(t_1)$ și $\hat{x}(t_2)$. Cu cât este mai mică dependența probabilistă dintre $\hat{x}(t_1)$ și $\hat{x}(t_2)$, cu atât este mai mică valoarea lui $K_{xx}(t_1, t_2)$ și cu atât mai rapid se modifică valorile procesului stocastic $x(t)$.

Două procese stocastice care se modifică diferit, unul mai rapid, iar altul mai lent, pot avea aceleași mărimi medii și dispersii, dar care pot avea diferite funcții de corelație la aceleași valori ale secțiunilor la diferite momente de timp.

De exemplu, realizările semnalelor $x_1(t)$ și $x_2(t)$ (fig. 9.3) au aceleași mărimi, media $m_x(t)$ și dispersia D_x , însă, în realitate, aceste semnale se deosebesc esențial. Semnalul $x_1(t)$ variază mai lent decât variația semnalului $x_2(t)$.

Procesul stocastic care se modifică mai lent și dependența probabilistă dintre secțiuni este mai mare și, la creșterea intervalului dintre momentele de timp t_2 , t_1 , funcția de corelație se stinge mai lent.

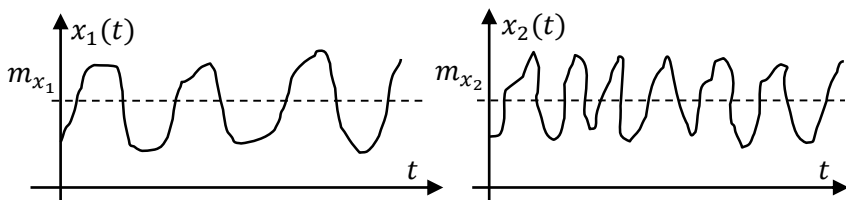


Fig. 9.3. Exemple de procese stocastice staționare

Funcția de corelație este simetrică în raport cu argumentele t_1, t_2 :

$$K_{xx}(t_1, t_2) = K_{xx}(t_2, t_1). \quad (9.18)$$

Dacă momentele de timp $t_1 = t_2 = t$, atunci funcția de corelație este egală cu dispersia:

$$K_{xx}(t, t) = D_x(t). \quad (9.19)$$

La studierea proprietăților sistemului automat este necesar a stabili legătura transferului dintre procesul stocastic de intrare $x(t)$ și procesul stocastic $y(t)$ al ieșirii sistemului automat. Relațiile funcționale dintre două procese $x(t)$ și $y(t)$ se determină prin funcția lor de intercorelație.

Funcția de intercorelație a două procese $x(t)$ și $y(t)$ este funcția de două variabile $K_{xy}(t_1, t_2)$, valoarea căreia pentru fiecare pereche de momente de timp alese aleatoriu t_1, t_2 , este egală cu momentul de corelație a secțiunilor respective ale procesului stocastic centrat $\hat{x}(t) = x(t) - m_x(t)$ și $\hat{y}(t) = y(t) - m_y(t)$:

$$\begin{aligned} K_{xy}(t_1, t_2) &= M[\hat{x}(t_1)\hat{y}(t_2)] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x(t_1) - m_x(t_1)][y(t_2) - m_y(t_2)] w_2(x, y; t_1, t_2) dx dy. \end{aligned} \quad (9.20)$$

Funcția de intercorelație nu este simetrică dacă:

$$K_{xy}(t_1, t_2) \neq K_{yx}(t_1, t_2), \quad (9.21)$$

dar este simetrică în cazul când:

$$K_{xy}(t_1, t_2) = K_{yx}(t_2, t_1). \quad (9.22)$$

9.3 Procese stocastice staționare

Diverse procese stocastice, după modificarea caracteristicilor statistice în timp, se divizează în două clase.

1. Procese stocastice staționare.
2. Procese stocastice nestaționare.

Procesul stocastic $x(t)$ este *staționar* dacă caracteristicile probabiliste ale acestuia nu depind de timp, deci, caracteristicile procesului stocastic $x(t + \tau)$ la orice valoare τ coincid total cu caracteristicile procesului stocastic $x(t)$.

Staționaritatea proceselor se definește *în sens restrâns* și *în sens larg* [9, 17-18].

Procesul stocastic $x(t)$ este staționar în sens restrâns sau strict staționar, dacă funcțiile n dimensionale ale repartiției $F_n(\bullet)$ și densității $w(\bullet)$ ale acestuia pentru orice n nu depind de translațiile momentelor de timp t_1, t_2, \dots, t_n la aceeași mărime τ (invarianța la translația în timp la mărimea τ):

$$F_n(x_1, t_1 + \tau; x_2, t_2 + \tau; \dots; x_n, t_n + \tau) = F_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n), \quad (9.23)$$

$$w_n(x_1, t_1 + \tau; x_2, t_2 + \tau; \dots; x_n, t_n + \tau) = w_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n). \quad (9.24)$$

Procesele stocastice $x(t)$ și $x(t + \tau)$ staționare care au aceleași proprietăți pentru orice τ sau caracteristicile statistice ale acestora sunt invariante în timp și nu depind de momentul inițial de timp.

Pentru procesele staționare toate densitățile probabiliste $w_1(x, t), w_2(x, t), \dots, w_n(x, t)$ nu depind de modificarea timpului inițial al procesului, iar densitățile probabiliste de ordinul unu, în general, nu depind de timp și rezultă că caracteristicile probabiliste, media m_x și dispersia D_x , nu sunt funcții de timp.

Procesul stocastic $x(t)$ este staționar în sens larg (slab staționar)

dacă mărimea medie pe ansamblu este constantă:

$$m_x(t) = M[x(t)] = m_x = \text{const.} \quad (9.25)$$

Funcția de corelație depinde numai de durata intervalului de timp $\tau = t_2 - t_1$, deci, este funcție de un singur argument τ , nu și de plasarea acestuia pe axa timpului și se reprezintă prin relația:

$$\begin{aligned} K_{xx}(\tau) &= K_{xx}(t_1, t_1 + \tau) = M[\hat{x}(t_1) \hat{x}(t_1 + \tau)] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1(t_1) - m_x(t_1)] [x_2(t_1 + \tau) - m_x(t_1 + \\ &\quad + \tau)] w_2(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (9.26)$$

Procesele stocastice $x(t)$ și $y(t)$ sunt staționare corelate dacă funcția lor de intercorelație depinde numai de intervalul de translație $\tau = t_2 - t_1$:

$$K_{xy}(t_1, t_2) = K_{xy}(\tau). \quad (9.27)$$

Procesele staționare în sens restrâns sunt și staționare în sens larg, însă invers nu este adevărat.

Pentru procesele stocastice cu distribuție normală noțiunea de staționaritate în sens restrâns și sens larg coincide, deoarece pentru aceste procese media și funcția de corelație se determină de densitatea probabilistă de ordinul n .

La soluționarea problemelor în ingineria sistemelor automate se consideră că procesul stocastic este staționar în sens larg.

Procesul stocastic staționar reprezintă după analogie procesul staționar în sistemele automate deterministe.

Procesele stocastice nestaționare își modifică proprietățile în timp, deci, proprietățile acestuia sunt funcții de timp.

La studierea proceselor stocastice staționare în sistemele automate se utilizează două noțiuni de mărimi medii: pe ansamblu și temporală.

Media pe ansamblu se determină pe ansamblul realizărilor

procesului stocastic în aceleași momente de timp:

$$\tilde{x} = m_x = M[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x w_1(x) dx. \quad (9.28)$$

Mărima medie m_x se tratează ca operația de mediere probabilistă a procesului stocastic $x(t)$ la un moment determinat de timp, când fiecare valoare posibilă a lui x se calculează cu o pondere egală cu elementul de probabilitate $w_1(x)dx$.

Mărima medie temporală de ordinul unu se determină pe o singură realizare $x(t)$ a procesului stocastic de o durată finită T :

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt. \quad (9.29)$$

În general, mărima medie temporală \bar{x} are valori diferite pentru diverse realizări ale procesului stocastic. Pentru un proces stocastic staționar, mărima medie $m_x(t)$ pe ansamblu și mărima medie temporală \bar{x}_i nu sunt egale.

Dispersia procesului stocastic staționar este o mărime constantă determinată prin relația:

$$D_x = K_{xx}(0) = \text{const.} \quad (9.30)$$

Din (9.30) rezultă că și abaterea mediei pătratice este o mărime constantă:

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \text{const.} \quad (9.31)$$

9.4 Procese stocastice ergodice

În practică, pentru studierea proceselor stocastice staționare se ridică o singură realizare experimentală a procesului, dar care este o componentă a ansamblului, fiindcă obținerea mai multor realizări în aceleași condiții nu este posibilă.

Din considerente practice, se constată că existența unei realizări

a procesului stocastic de durată mare de timp permite a studia proprietățile întregului ansamblu de realizări. Procesele stocastice staționare care au această proprietate se numesc *procese ergodice*.

Procesul stocastic staționar $x(t)$ este ergodic dacă caracteristicile lui probabiliste nu depind de numărul realizărilor.

Unul și același proces stocastic poate fi ergodic după unele caracteristici probabiliste și neergodic în raport cu alte caracteristici probabiliste.

Procesul staționar stocastic $x(t)$ este ergodic dacă funcția lui de corelație satisface condiția:

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} K_{xx}(\tau) = 0. \quad (9.32)$$

Aparatul matematic pentru analiza proceselor stocastice staționare se bazează pe ipoteza ergodică [17-19], conform căreia caracteristicile statistice ale unui număr mare de realizări obținute ale semnalului stocastic staționar coincide cu caracteristicile statistice ale unei singure realizări de o durată mare, dar finită de timp T (fig. 9.4).

Din aceste considerente, se constată că media pe ansamblul de realizări ale procesului stocastic staționar este substituită cu media temporală a unei singure realizări a procesului staționar $m_x = \bar{x}$.

Ca rezultat, se simplifică procedurile experimentale de calcul al caracteristicilor statistice ale proceselor stocastice staționare.

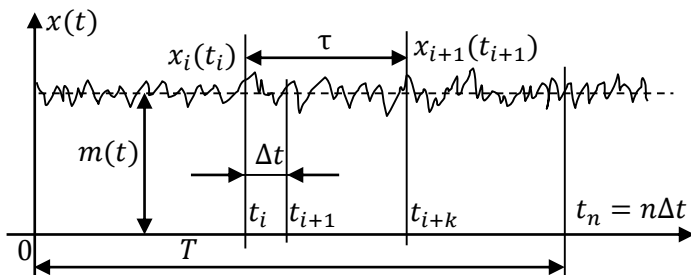


Fig. 9.4. Proces stocastic staționar ergodic

Se dau caracteristicile statistice principale ale procesului stocastic staționar ergodic descris în figura 9.4 printr-o singură realizare

în intervalul de timp $0 \leq t \leq T$.

Primele caracteristici ale procesului stocastic ergodic sunt:

1. *Media temporală* a semnalului pe intervalul de timp T se determină prin relația:

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt \approx \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt. \quad (9.33)$$

În cazul când intervalul de timp $T \rightarrow \infty$, conform ipotezei ergodice, media temporală \bar{x} este egală cu media pe ansamblu:

$$\bar{x} = m_x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt. \quad (9.34)$$

În calculele practice, când timpul este discretizat $t_n = n\Delta t$ în n puncte cu pasul $\Delta t = T/n$, relația medie temporală (9.34) va avea forma:

$$\bar{x} \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (9.35)$$

Dispersia procesului stocastic ergodic $x(t)$ va fi:

$$D_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x(t) - \bar{x}]^2 dt, \quad (9.36)$$

unde $x(t)$ este oricare realizare a procesului stocastic staționar.

Valoarea dispersiei este proporțională valorii pulsației componentei alternative a semnalului stocastic.

Pentru analiza sistemului automat, o mare importanță are proprietatea că suma sau diferența dispersiilor semnalelor necorelate $x(t) = x_1(t) \pm x_2(t)$ este egală cu suma dispersiilor:

$$D_x = D_{x_1} + D_{x_2}. \quad (9.37)$$

Pentru studierea proceselor stocastice staționare ergodice se utilizează două metode, care se substituie între ele și se expun în continuare.

1. În domeniul timpului caracteristica principală este funcția de corelație a semnalului.

2. În domeniul frecvență se utilizează caracteristica principală – densitatea spectrală a semnalului.

Funcția de corelație a procesului stocastic ergodic $x(t)$ este:

$$K_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x(t) - \bar{x}][x(t + \tau) - \bar{x}] dt. \quad (9.38)$$

Dacă media temporală $\bar{x} = 0$, atunci relația (9.38) ia forma:

$$K_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t + \tau) dt. \quad (9.39)$$

Valoarea inițială a funcției de corelație este egală cu dispersia procesului stocastic:

$$K_{xx}(0) = D_x. \quad (9.40)$$

Funcția de intercorelație a proceselor stocastice ergodice $x(t)$ și $y(t)$ se dă prin relația:

$$K_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x(t) - \bar{x}][y(t + \tau) - \bar{y}] dt, \quad (9.41)$$

unde $x(t)$, $y(t)$ sunt oricare realizări ale proceselor stocastice, iar \bar{x} , \bar{y} – mărimile medii temporale.

Din relația (9.41) rezultă proprietatea de simetrie:

$$K_{xy}(\tau) = K_{yx}(-\tau), K_{yx}(\tau) = K_{xy}(-\tau). \quad (9.42)$$

Funcția $K_{xy}(\tau)$ caracterizează legătura de corelație probabilistă a două procese stocastice în sistem $x(t)$, $y(t)$ în diferite momente de timp la intervalul τ . Dacă intervalul $\tau = 0$, valoarea $K_{xy}(0)$ stabilește această legătură la unul și același moment de timp.

Pentru procesele stocastice $x(t)$ și $y(t)$ necorelate, funcția de

intercorelație este nulă:

$$K_{xy}(0) \equiv 0. \quad (9.43)$$

Exemplul 9.1. Se consideră semnalul continuu descris prin relația:

$$x(t) = a.$$

Se cere să se determine funcția de corelație.

Soluționare. Funcția de corelație se calculează prin relația (9.39):

$$K_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t + \tau)dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T a \cdot a dt = a^2. \blacksquare$$

Exemplul 9.2. Se consideră semnalul armonic cu faza inițială stocastică descris prin relația:

$$x(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$$

cu parametrii amplitudinea $a = 10$ și frecvența $\omega = 5 \text{ s}^{-1}$.

Se cere să se determine funcția de corelație.

Soluționare. Funcția de corelație se calculează prin relația (9.39):

$$K_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T a^2 \sin(\omega t + \varphi) \sin(\omega(t + \tau) + \varphi) dt.$$

Deoarece funcția integralei este periodică, integrala se reprezintă ca suma integralelor cu limitele de la $(k - 1) \frac{2\pi}{\omega} \dots k \frac{2\pi}{\omega}$, ($k = \pm 1, k = \pm 2, \dots$):

$$\begin{aligned} K_{xx}(\tau) &= \frac{a^2 \omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin(\omega t + \varphi) \sin(\omega(t + \tau) + \varphi) dt = \\ &= \frac{a^2 \omega}{4\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} [\cos \omega \tau - \cos(\omega t + 2\omega \tau + 2\varphi)] dt = \frac{a^2 \omega}{4\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} [\cos \omega \tau] dt = \\ &= \frac{a^2}{2} \cos \omega \tau = 50 \cos 5\tau, \end{aligned}$$

iar integrala de la a doua componentă din parantezele pătrate este egală cu zero:

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos(\omega t + 2\omega \tau + 2\varphi) dt = 0.$$

Funcția de corelație a semnalului armonic cu frecvența ω și faza φ nu este funcție de faza φ și prezintă o funcție armonică cu amplitudinea $a^2/2$ și aceeași frecvență ω . ■

9.5 Proprietățile funcției de corelație

Se dau proprietățile de bază ale funcției de corelație.

1. Valoarea inițială a funcției de corelație este egală cu dispersia:

$$K_{xx}(\tau) = D_x. \quad (9.44)$$

2. Funcția de corelație este limitată de valoarea dispersiei:

$$|K_{xx}(\tau)| \leq D_x. \quad (9.45)$$

3. Funcția de corelație este o funcție pară în raport cu τ :

$$K_{xx}(\tau) = K_{xx}(-\tau). \quad (9.46)$$

Din (9.46) rezultă că curba funcției de corelație este simetrică în raport cu axa ordonatelor.

4. Pentru suma sau diferența proceselor stocastice $z(t) = x(t) \pm y(t)$ funcția de corelație este:

$$K_{zz}(\tau) = K_{xx}(\tau) + K_{yy}(\tau) \pm K_{xy}(\tau) \pm K_{yx}(\tau). \quad (9.47)$$

5. Funcția de corelație a procesului constant $x(t) = a$ este o mărime constantă și egală cu pătratul amplitudinii semnalului:

$$K_{xx}(\tau) = a^2. \quad (9.48)$$

6. Pentru procesul armonic $x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$ funcția de corelație:

$$K_{xx}(\tau) = 0.5A^2 \cos \omega_0 \tau, \quad (9.49)$$

unde funcția de corelație este o funcție pară în raport cu argumentul τ și armonică cu aceeași pulsație ω_0 , dar care nu depinde de defazajul φ .

Exemple de funcții de corelație tipice ale proceselor stocastice sunt date în figura 9.5, fiind descrise prin expresii analitice de forma:

$$K_{xx}(\tau) = De^{-\mu|\tau|}, \text{ (fig. 9.5, a),} \quad (9.50, a)$$

$$K_{xx}(\tau) = De^{-\mu|\tau|}\cos\omega_0\tau, \text{ (fig. 9.5, b),} \quad (9.50, b)$$

$$K_{xx}(\tau) = De^{-\mu|\tau|}\cos(\omega_0\tau + \frac{\mu}{\omega_0}\sin\omega_0|\tau|), \text{ (fig. 9.5, c),} \quad (9.50, c)$$

unde D este dispersia, ω_0 – frecvența de rezonanță, μ – parametrul de amortizare (coeficientul de iregularitate).

Cu cât este mai mare valoarea parametrului μ din (9.50, a), cu atât mai rapid se reduce funcția de corelație și densitatea spectrală este mai largă.

Când $\mu \rightarrow \infty$, semnalul stocastic analizat se transformă în semnal zgomot alb ideal.

În calculele practice parametrul μ se determină după realizarea semnalului – numărul mediu n_0 de intersecțiuni ale semnalului centrat al axei timpului $\mu = \pi n_0$.

Din figura 9.5 se observă că la creșterea lui τ interacțiunile dintre procesele $x(t)$ și $x(t + \tau)$ se reduc și funcția de corelație este descrescătoare. Apariția valorilor negative ale funcției de corelație (fig. 9.5, b, c) denotă că în structura procesului stocastic există periodicitate: abaterea pozitivă de la media unei secțiuni, iar după un timp abaterea negativă a altei secțiuni, și invers.

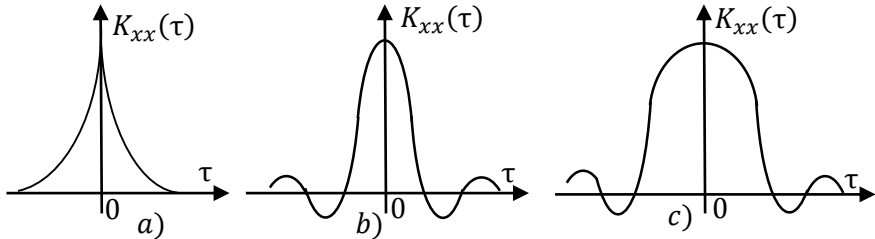


Fig. 9.5. Funcții de corelație tipice

Parametrul ω_0 din (9.50, b) corespunde valorii medii a componentei „perioadei” aderente, iar μ caracterizează intensitatea relativă a restului componentelor stocastice, care se suprapun pe componenta periodică. Dacă $\mu = \omega_0/2\pi$, atunci nivelul relativ al

acestor componente este redus și semnalul sumar se determină ca semnal armonic. Dacă $\mu \approx (5 \div 10)\omega_0/\pi$, atunci nivelul componentelor stocastice este comparabil cu „amplitudinea” componentei periodice. Când $\mu \geq 20\omega_0/\pi$ funcția de corelație (9.50, *b*) practic coincide cu funcția de corelație (9.50, *a*).

În figura 9.6 sunt reprezentate două semnale: un semnal lent (fig. 9.6, *a*) și al doilea semnal rapid (fig. 9.6, *b*).

Cu cât procesul conține mai multe componente de frecvență înaltă (fig. 9.6), cu atât mai rapid se restrânge funcția de corelație (fig. 9.6, *b*).

Ca mărime de existență a legăturii de corelație dintre două secțiuni $x(t)$ și $x(t + \tau)$ ale procesului este intervalul de timp τ_c , care se determină prin relația:

$$|K_{xx}(\tau_c)/D_x| \leq \varepsilon, \quad (9.51)$$

unde eroarea ε este o mărime mică pozitivă (în practică se recomandă $\varepsilon = 0.05 \dots 0.1$).

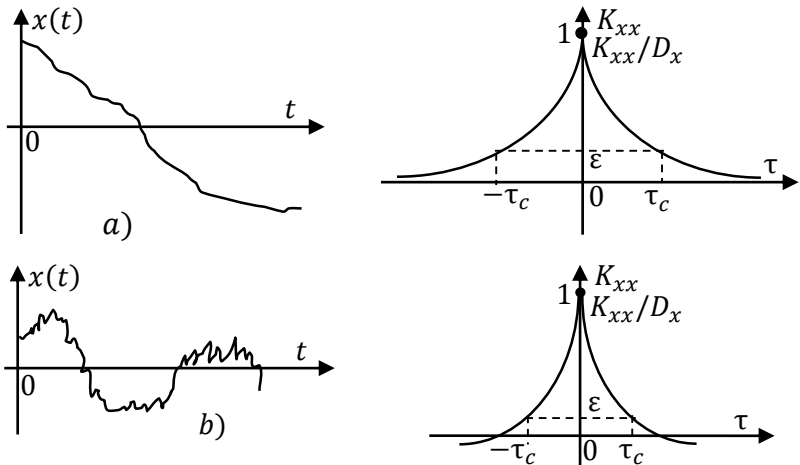


Fig. 9.6. Procese stocastice și funcțiile lor de corelație

Procesul stocastic, în care valorile a două mărimi succesive sunt mutual independente, se numește *zgomot alb* sau *proces absolut stocastic*. Această proprietate a procesului îl evidențiază din clasa de

procese stocastice, care este utilizat ca cel mai simplu model de proces staționar cu intervalul de timp de corelație $\tau_c = 0$.

Exemplu de proces zgomot alb și funcția lui de corelație se dă în figura 9.7. Funcția de corelație a zgomotului alb este:

$$K_{xx}(\tau) = N\delta(\tau), \quad (9.52)$$

unde N – intensitatea semnalului.

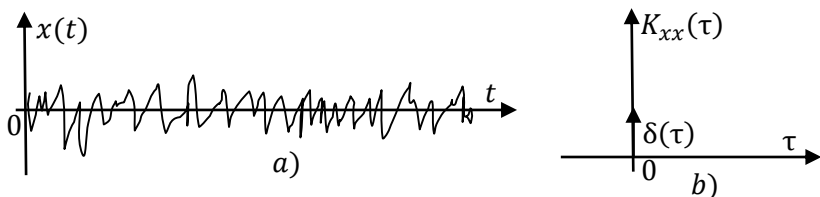


Fig. 9.7. Semnalul zgomot alb a) și funcția de corelație b)

Procesul stocastic zgomot alb nu este practic realizabil, fiindcă valoarea dispersiei $D_x = K_{xx}(0) \rightarrow \infty$ (puterea semnalului este infinită). Din aceste considerente, intensitatea N zgomotului alb este caracteristica lui principală.

9.6 Densitatea spectrală și legătura funcțională cu funcția de corelație

Densitatea spectrală este funcția care descrie distribuția puterii procesului (semnalului) pe frecvențe [9, 12, 17-19]. Această caracterizare a semnalelor, zgomotelor și perturbațiilor, care acționează asupra sistemului automat, este importantă pentru proiectarea sistemului.

Funcția principală a sistemului automat este de a amplifica semnalele cu frecvențe de lucru și de a neutraliza frecvențele cu influență negativă ale semnalelor zgomotelor albe și perturbațiilor.

Pentru a obține funcția densității spectrale $S_{xx}(\omega)$ a procesului stocastic $x(t)$ se aplică transformarea Fourier a funcției de corelație $K_{xx}(\tau)$ a procesului $x(t)$:

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (9.53)$$

unde $S_{xx}(\omega)$ este densitatea spectrală, $j = \sqrt{-1}$ este unitatea imajinară, ω – frecvența în radiani/secundă ($\omega = 2\pi f$, unde f este frecvența de rețea în Hz).

Utilizând formula $e^{-j\omega\tau} = \cos\omega\tau - j\sin\omega\tau$, expresia (9.53) se reprezintă ca suma a două componente:

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{xx}(\tau) \cos\omega\tau d\tau - j \int_{-\infty}^{\infty} K_{xx}(\tau) \sin\omega\tau d\tau. \quad (9.54)$$

În expresia (9.54), componenta $K_{xx}(\tau) \sin\omega\tau = 0$, deoarece este funcție impară în raport cu τ și integrala acesteia în limitele integrării simetrice este egală cu zero, iar componenta $K_{xx}(\tau) \cos\omega\tau$ – funcție pară și la limitele integrării de la 0 la ∞ se dublează rezultatul și dispersia se prezintă prin relația:

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{xx}(\tau) \cos\omega\tau d\tau = 2 \int_0^{\infty} K_{xx}(\tau) \cos\omega\tau d\tau. \quad (9.55)$$

Densitatea spectrală este funcție reală pară în raport cu frecvența ω și simetrică axei ordonatelor:

$$S_{xx}(\omega) = S_{xx}(-\omega). \quad (9.56)$$

Densitatea spectrală reprezintă densitatea distribuției probabilității și caracterizează *densitatea distribuției puterii* semnalului pe frecvențe.

De exemplu, dacă procesul stocastic este o tensiune cu dimensiunea volți, atunci funcția de corelație are dimensiunea V^2 , iar densitatea spectrală va avea dimensiunea V^2/Hz .

Pentru orice proces stocastic densitatea spectrală $S_{xx}(\omega)$ este o funcție pozitivă de ω .

Dacă este dată densitatea spectrală $S_{xx}(\omega)$ a procesului stocastic, atunci se poate determina funcția de corelație ca transformarea inversă Fourier:

$$K_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_{xx}(\omega) \cos\omega\tau d\omega. \quad (9.57)$$

Din (9.57) se obține dispersia procesului stocastic:

$$D_x = K_{xx}(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_{xx}(\omega) d\omega. \quad (9.58)$$

Relațiile (9.55) și (9.57), care exprimă relațiile dintre funcția de corelație și densitatea spectrală a procesului stocastic, se numesc formulele Wiener-Hinchin [9, 12, 17-19].

Dispersia (9.58) exprimă puterea medie a semnalului ca suma infinită a mărimilor mici ale componentelor $(1/\pi)S_{xx}(\omega)d\omega$ pentru toate frecvențele lui $\omega = 0 \dots \infty$. Fiecare componentă $(1/\pi)S_{xx}(\omega)d\omega$ reprezintă puterea spectrului în intervalul $\omega + d\omega$ pentru fiecare valoare a lui ω . Deci, sensul fizic al densității spectrale a semnalului caracterizează distribuția puterii semnalului pe spectrul frecvențelor.

În figura 9.8 sunt date funcțiile densității spectrale și de corelație, în dependență de caracterul procesului stocastic, din care se observă cu cât este mai largă funcția $S_{xx}(\omega)$, cu atât este mai limitată funcția $K_{xx}(\tau)$.

Procesul stocastic din figura 9.8, *a* include componente cu frecvențe înalte care se modifică mai rapid în comparație cu procesul stocastic din figura 9.8, *b*.

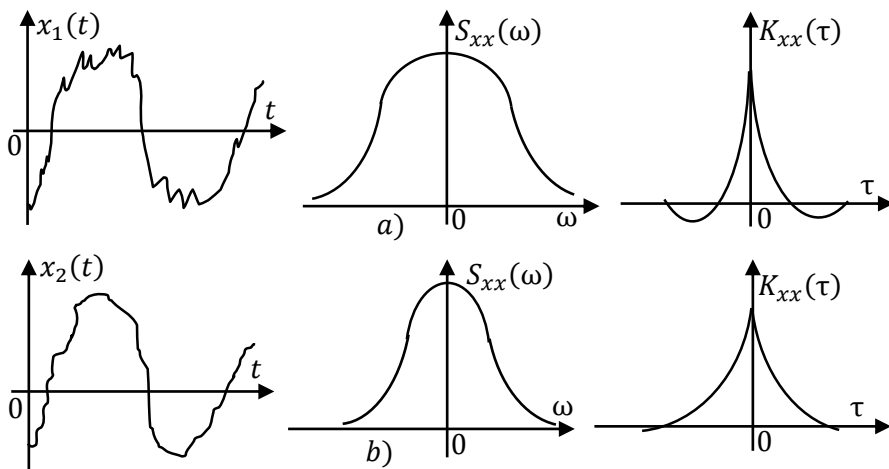


Fig. 9.8. Funcții spectrale și de corelație ale proceselor stocastice

Densitatea spectrală are prioritate practică importantă, deoarece aplicarea acesteia simplifică procedura de studiere a transformărilor semnalelor din sistemele automate.

Pentru reprezentarea sensului fizic al densității spectrale, se introduce o funcție finită, care se manifestă în forma:

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & \text{când } |t| \leq T, \\ 0 & \text{când } |t| > T, \end{cases} \quad (9.59)$$

unde T este intervalul de timp de existență a funcției $x(t)$.

Aplicând transformata Fourier la funcția (9.59), se obține caracteristica spectrală a acesteia:

$$X_T(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-T}^T x(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (9.60)$$

Funcția $X_T(j\omega)$ a semnalului neperiodic $x(t)$ caracterizează distribuția amplitudinilor relative ale semnalului pe axa frecvențelor și se numește *densitatea spectrală a amplitudinilor* sau *spectrul frecvențelor* funcției $x(t)$.

Pentru relațiile (9.59) și (9.60) se utilizează formula Parseval și se obține relația [9, 12, 17-19]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_T^2(t) dt = \int_{-T}^T x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(j\omega)|^2 d\omega, \quad (9.61)$$

unde $|X_T(j\omega)|^2$ este densitatea spectrală a energiei semnalului $x_T(t)$ între armonicile lui. Dacă expresia (9.61) se împarte la $2T$ și $T \rightarrow \infty$, aceasta se transformă în forma:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X_T(j\omega)|^2 d\omega. \quad (9.62)$$

Când $\bar{x}_T = 0$, partea stângă a expresiei (9.62) reprezintă dispersia:

$$D_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X_T(j\omega)|^2 d\omega =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X_T(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_{xx}(\omega) d\omega. \quad (9.63)$$

Comparând expresia (9.63) cu (9.58) se obține:

$$S_{xx}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X_T(j\omega)|^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} X_T(j\omega) X_T(-j\omega), \quad (9.64)$$

care este densitatea spectrală și determină densitatea spectrală a puterii semnalului stocastic.

Transformata Fourier directă de la funcția de *intercorelație* $K_{xy}(\tau)$ a două procese stocastice $x(t)$ și $y(t)$ se numește densitatea spectrală de *interacțiune* a semnalelor determinată prin relația:

$$S_{xy}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (9.65)$$

Densitatea spectrală de interacțiune $S_{xy}(j\omega)$ este funcție complexă și exprimă *etalonul* de legătura probabilistă dintre două semnale stocastice $x(t)$ și $y(t)$:

$$S_{xy}(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} X_T(j\omega) Y_T(-j\omega), \quad (9.66)$$

care nu este funcție pară.

Cunoscând densitatea spectrală de interacțiune $S_{xy}(j\omega)$, se poate determina funcția de intercorelație a două semnale stocastice $x(t)$ și $y(t)$ după relația:

$$K_{xy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (9.67)$$

Densitatea spectrală a sumei sau diferenței a două semnale stocastice $z(t) = x(t) \pm y(t)$ se determină prin relația:

$$S_{xy}(\omega) = S_{xx}(\omega) + S_{yy}(\omega) \pm S_{xy}(j\omega) \pm S_{yx}(j\omega). \quad (9.68)$$

Dacă semnalele stocastice $x(t)$ și $y(t)$ nu sunt corelate, atunci

expresia densității spectrale (9.68) se simplifică și devine:

$$S_{xy}(\omega) = S_{xx}(\omega) + S_{yy}(\omega). \quad (9.69)$$

Din acest rezultat se constată că densitatea spectrală a unui ansamblu de semnale stocastice necorelate între ele este egală cu suma densității spectrale ale acestora, indiferent de semnele plus sau minus ale sumelor semnalelor ansamblului.

Exemplul 9.3. Pentru semnalul stocastic staționar $x(t)$ funcția de corelație este dată prin relația:

$$K_{xx}(\tau) = D e^{-\mu|\tau|}.$$

Se cere să se determine densitatea spectrală $S_{xx}(\omega)$ a semnalului.

Soluționare. Se aplică formula (9.56) de definiție a densității spectrale și după unele transformări se obține expresia de calcul al densității spectrale:

$$\begin{aligned} S_{xx}(\omega) &= D \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu|\tau|} e^{-j\omega\tau} d\tau = D \left[\int_{-\infty}^0 e^{\mu\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-\mu\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau \right] = \\ &= D \left[\frac{-1}{\mu-j\omega} e^{-(\mu-j\omega)\tau} + \frac{-1}{\mu+j\omega} e^{-(\mu+j\omega)\tau} \right]_0^{\infty} = D \left[\frac{1}{\mu-j\omega} + \frac{1}{\mu+j\omega} \right] = \frac{2D\mu}{\mu^2 + \omega^2} = \frac{2TD}{1 + \omega^2 T^2}, \end{aligned}$$

unde $T = 1/\mu$ este timpul de realizare a semnalului.

La micșorarea parametrului μ în spectrul semnalului stocastic se evidențiază componente de frecvență joasă (curba se reduce în lățime și crește pe verticală), iar la valoarea $\mu \rightarrow 0$ curba $S_{xx}(\omega)$ degenerază în linie verticală; cu creșterea lui μ se reduce influența componentelor de frecvență joasă și curba $S_{xx}(\omega)$ se lărgeste de-a lungul axei frecvențelor ω .■

9.7 Modele de semnale stocastice și caracteristicile lor

Vom expune în continuare exemple de modele larg utilizate de semnale stocastice și caracteristicile lor probabiliste [9, 12, 17-19].

1. *Zgomot alb ideal* (fig. 9.9, a). Semnalul stocastic staționar este caracterizat de densitatea spectrală constantă în tot intervalul de frecvențe $\omega = (-\infty, \infty)$ dat de relația:

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} N\delta(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = N e^{-j\omega\tau} |_{\tau=0} = N = c^2, \quad (9.70)$$

unde c^2 este intensitatea semnalului.

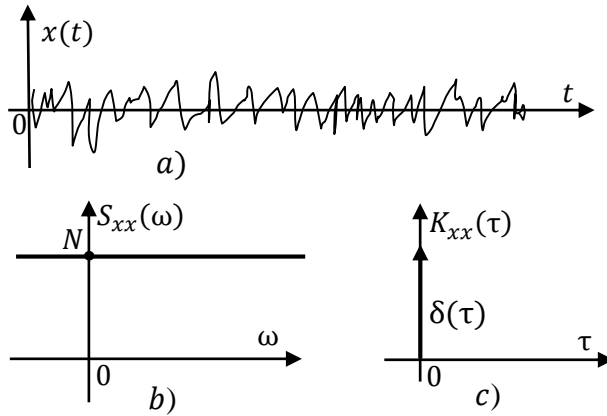


Fig. 9.9. Densitatea spectrală și funcția de corelație a zgomotului alb ideal

Densitatea spectrală $S_{xx}(\omega)$ este dată în figura 9.9, *b*, uniform distribuită pe toate frecvențele, iar funcția de corelație (fig. 9.9, *c*) se descrie prin relația:

$$K_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_{xx}(\omega) \cos\omega\tau d\omega = c^2 \delta(\tau). \quad (9.71)$$

2. *Zgomot alb real.* În practică se utilizează modelul de zgomot alb cu densitatea spectrală limitată (fig. 9.10, *a*):

$$S_{xx}(\omega) = N = c^2 \text{ pentru } |\omega| \leq \omega_0, \quad S_{xx}(\omega) = 0 \text{ pentru } |\omega| > \omega_0. \quad (9.72)$$

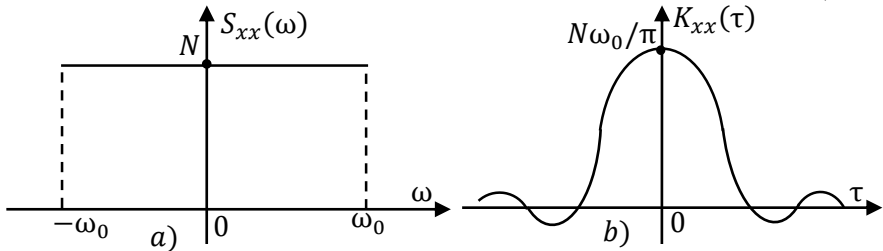


Fig. 9.10. Densitatea spectrală și funcția de corelație a zgomotului alb real

Dispersia se determină prin relația:

$$D_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) d\omega = \frac{c^2 \omega_0}{\pi}. \quad (9.73)$$

Funcția de corelație (fig. 9.10, b) este:

$$K_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c^2 e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{c^2}{2\pi} \frac{1}{j\tau} e^{j\omega\tau} \Big|_{-\omega_0}^{\omega_0} = \frac{c^2}{\pi\tau} \sin\omega_0\tau. \quad (9.74)$$

3. *Zgomot alb real neted.* În studiile analitice, densitatea spectrală se aproximează cu o funcție netedă fără întreruperi (fig. 9.11, a):

$$S_{xx}(\omega) = \frac{2D\mu}{\mu^2 + \omega^2}, \quad (9.75)$$

unde D este dispersia, μ – parametrul de amortizare cu dimensiunea ca și a pulsației ω , rad/s. Pentru valorile pulsației ω din intervalul $[-\mu, \mu]$ densitatea spectrală a zgomotului alb ideal se determină cu o precizie acceptabilă pentru soluționarea problemelor practice (linia punctată) $S_{xx}(\omega) = D/\mu$.

Dispersia D_x și funcția de corelație $K_{xx}(\tau)$ (fig. 9.11, a) în acest caz, se descriu prin relațiile:

$$D_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2D\mu}{\mu^2 + \omega^2} d\omega = \frac{D\mu}{\pi} \frac{1}{\mu} \arctg \frac{\omega}{\mu} \Big|_{-\infty}^{\infty} = D, \quad K_{xx}(\tau) = D e^{-\mu|\tau|}. \quad (9.76)$$

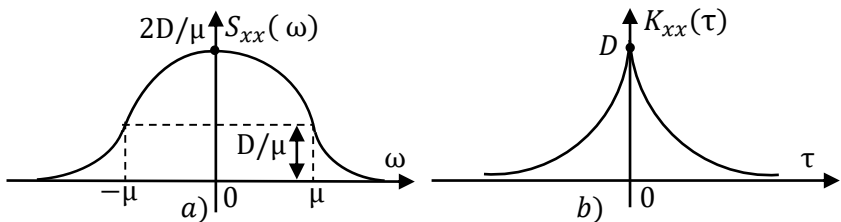


Fig. 9.11. Densitatea spectrală și funcția de corelație a zgomotului alb real neted

4. *Semnal balansare neperiodică.* Acest tip de semnal apare la obiectele de reglare care sunt în mișcare, fiind supuse acțiunilor perturbațiilor (fig. 9.12, a).

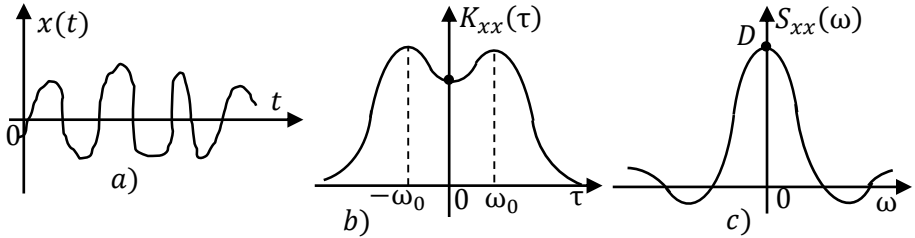


Fig. 9.12. Semnal balansare neperiodică a) și funcția de corelație b) și densitatea spectrală c)

Funcția de corelație $K_{xx}(\tau)$ (fig. 9.12, b) și densitatea spectrală $S_{xx}(\omega)$ (fig. 9.12, c) se descriu prin relațiile:

$$K_{xx}(\tau) = D e^{-\mu|\tau|} \cos \omega_0 \tau, \quad (9.77)$$

$$S_{xx}(\omega) = \mu D \left[\frac{1}{\mu^2 + (\omega_0 - \omega)^2} + \frac{1}{\mu^2 + (\omega_0 + \omega)^2} \right], \quad (9.78)$$

unde ω_0 este pulsația de rezonanță, μ – parametrul de amortizare, D – dispersia.

5. *Semnal continuu $x(t) = a$.* Funcția de corelație $K_{xx}(\tau)$ este o constantă și densitatea spectrală $S_{xx}(\omega)$ (fig. 9.13, a) pentru care toată puterea este concentrată la pulsația $\omega = 0$ și sunt descrise de relațiile:

$$K_{xx}(\tau) = a^2, \quad S_{xx}(\omega) = 2\pi a^2 \delta(\omega). \quad (9.79)$$

6. *Semnal armonic cu fază stocastică $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$* funcția de corelație se descrie prin relația:

$$K_{xx}(\tau) = 0.5A^2 \cos \omega_0 \tau, \quad (9.80)$$

care este o funcție simetrică în raport cu τ , armonică cu aceeași pulsație ω_0 și nu depinde de defazajul φ .

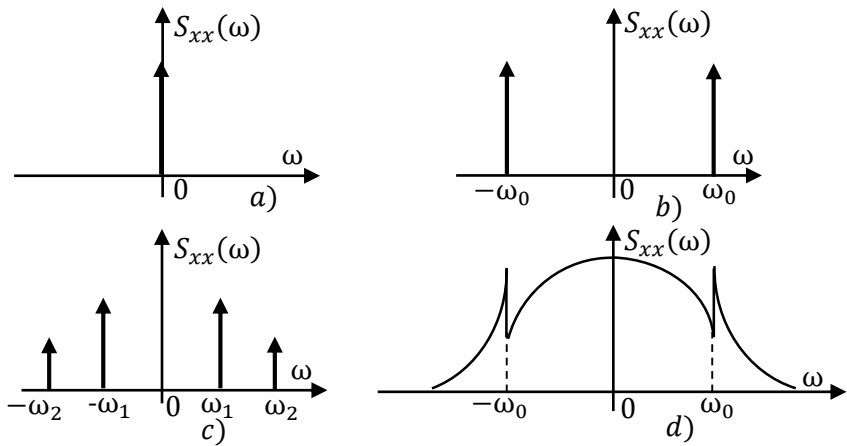


Fig. 9.13. Densitățile spectrale ale diferitor semnale stocastice

Densitatea spectrală (fig. 9.13, *b*) se descrie prin relația:

$$S_{xx}(\omega) = 2\pi(A/2)^2[\delta(\omega_0 - \omega) + \delta(\omega_0 + \omega)], \quad (9.81)$$

pentru care toată puterea este concentrată la pulsațiile $-\omega_0$ și ω_0 , iar dacă se analizează pulsația $\omega = 0 \dots \omega_0$, atunci puterea este concentrată la pulsația ω_0 .

7. *Suma parțială a șirului Fourier a semnalului* $x(t) = c_0 + \sum_{k=1}^n c_k \sin(\omega_k t + \varphi_k)$. Densitatea spectrală (fig. 9.13, *c*) are forma discretă a spectrului pentru care amplitudinile impuls-săgeților sunt proporționale pătratului coeficienților respectivi Fourier c_0^2 și $(c_k/2)^2$:

$$S_{xx}(\omega) = 2\pi\{c_0^2\delta(\omega) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{c_k}{2}\right)^2 [\delta(\omega_0 - \omega_k) + \delta(\omega_0 + \omega_k)]\}. \quad (9.82)$$

8. *Procese stocastice care conțin componente armonice deterministe* au densitatea spectrală în care se evidențiază componentele de rezonanță corespunzător armonicilor și care sunt dificil de observat (fig. 9.13, *d*).

Exemplu 9.4. Se consideră semnalul sinusoidal cu fază inițială stocastică φ_1 $x(t) = a \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$ și semnalul stocastic $y(t)$ cu funcția de corelație $K_{yy}(t) =$

$$= b^2 e^{-\mu|\tau|}.$$

Se cere să se determine funcția de corelație a sumei semnalelor necorelate.

Soluționare. Prin relația (9.80) se determină funcția de corelație a semnalului $x(t)$:

$$K_{xx}(\tau) = 0.5A^2 \cos \omega_0 \tau.$$

Utilizând relația (9.47) de calcul a funcției de corelație a două semnale necorelate:

$$K_{xy}(\tau) = K_{xx}(\tau) + K_{yy}(\tau) = 0.5A^2 \cos \omega_0 \tau + b^2 e^{-\mu|\tau|}.$$

Din analiza funcției de intercorelație $K_{xy}(\tau)$ obținută se constată că la creșterea lui τ componenta a doua se reduce, iar prima componentă armonică rămâne constantă. Dacă semnalul $x(t)$ prezintă semnalul util, iar semnalul $y(t)$ este semnalul zgomot, atunci, măsurând funcția de intercorelație a sumei semnalelor pentru valori mari ale lui τ , se poate filtra semnalul mic util $x(t)$ pe fonul semnalului mare $y(t)$.

Exemplul 9.5. Se consideră două semnale: semnalul $x(t)$ cu densitatea spectrală $S_{xx}(\omega)$ și semnalul $y(t) = x(t + \tau)$, iar suma lor este $z(t) = x(t) + y(t)$.

Se cere să se determine densitatea spectrală a sumei $z(t)$ a două semnale.

Soluționare. Se reprezintă densitățile spectrale de interacțiune dintre semnale:

$$S_{xy}(\omega) = e^{-j\omega\tau} S_{xx}(\omega), S_{yx}(\omega) = e^{j\omega\tau} S_{xx}(\omega),$$

Din relația (9.69) se determină densitatea spectrală a sumei a două semnale:

$$S_{zz}(\omega) = 2S_{xx}(\omega) \left(1 + \frac{e^{-j\omega\tau} + e^{j\omega\tau}}{2} \right) = 2S_{xx}(\omega)(1 + \cos \omega\tau). \blacksquare$$

Chestionar și probleme

1. Dați definiția semnalului stocastic. Ce reprezintă realizarea semnalului stocastic?
2. Cum clasificați semnalele stocastice staționare și nestaționare?
3. Ce reprezintă semnalul stocastic ergodic?
4. Care este esența analizei stocastice a sistemelor automate?
5. Numiți cele trei probleme pe care le rezolvă dinamica stocastică a sistemelor automate.
6. Ce caracteristici se utilizează pentru descrierea proprietăților semnalelor stocastice?
7. Prezentați funcția de corelație și valoarea ei în condiții inițiale.

8. Care este sensul fizic al funcției de corelație?
9. Cum se raportează forma curbei funcției de corelație cu viteza medie de variație a semnalului stocastic $x(t)$ în timp?
10. Prezentați formula funcției de corelație pentru semnalul continuu.
11. Pentru semnalul zgomot alb ideal prezentați calculul funcției de corelație.
12. Cum explicați noțiunea funcției de intercorelație a semnalelor?
13. Ce reprezintă densitatea spectrală a semnalului stocastic?
14. Desenați curbele densității spectrale pentru semnalul stocastic lent și rapid.
15. Prezentați relația de calcul a densității spectrale a semnalului prin funcția de corelație.
16. Cum explicați sensul fizic al ordonatelor densității spectrale?
17. Explicați noțiunea densității spectrale de interacțiune a semnalelor.
18. Calculați densitatea spectrală a semnalului zgomotului alb ideal.
19. Care este diferența densității spectrale a semnalului zgomotului alb ideal și semnalului zgomotului alb real?
20. Ce reprezintă dispersia semnalului stocastic?
21. Prezentați relația dintre dispersia și densitatea spectrală a semnalului stocastic.

10 ANALIZA SISTEMELOR AUTOMATE LINIARE LA ACȚIUNEA SEMNALELOR STOCASTICE

10.1 Introducere

Semnalele în sistemele automate sunt determinate de condițiile inițiale și semnalele care acționează asupra sistemului. În general, condițiile inițiale se pot trata ca mărimi aleatorii, iar semnalele care acționează asupra sistemului ca semnale stocastice. Rezultă că și răspunsurile sistemului de asemenea vor fi funcții stocastice în timp.

Pentru multe sisteme automate reale, condițiile inițiale aleatorii și semnalele stocastice sunt caracterizate de legea de distribuție normală, care sunt total caracterizate de speranță (media), funcțiile de corelație și intercorelație. Dacă aceste procese nu pot fi aproximate de legea de distribuție normală, atunci se aplică alte caracteristici ca excesul și asimetria, care evidențiază diferența legii de distribuție a procesului stocastic în raport cu legea normală [9, 12, 17-19].

Vom studia sistemele automate stabile la acțiunea semnalelor stocastice în regim tranzitoriu și staționar. Semnalele stabilizate, în comparație cu răspunsurile tranzitorii, nu depind de condițiile inițiale și sunt determinate numai de mărimile de intrare în sistem, care au fost aplicate în momentul de timp $t = -\infty$ și au o acțiune de durată.

Problema analizei sistemului automat constă în determinarea caracteristicilor stocastice ale reacției elementului, obiectului sau sistemului liniar la acțiunea semnalelor stocastice cu caracteristicile cunoscute, aplicate la intrarea lor, considerându-se semnalele stocastice staționare și ergodice [9, 17, 18].

10.2 Transformarea semnalului stocastic de elementul liniar

Se consideră un element dinamic liniar stabil reprezentat în figura 10.1 și descris de funcția de transfer $H(s)$ sau funcția pondere $w(t)$ cunoscute și determinate de relația:

$$w(t) = L^{-1}\{H(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} H(s)e^{st} ds, \quad (10.1)$$

unde c este abscisa de convergență.

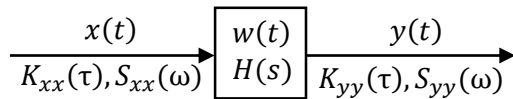


Fig. 10.1. Transformarea semnalului stocastic staționar de elementul dinamic liniar

Fie realizarea semnalului stocastic $x(t)$ aplicat la intrarea elementului dinamic, care se exprimă prin suma mărimii medii și semnalului stocastic centrat:

$$x(t) = m_x + \hat{x}(t), \quad (10.2)$$

ce se caracterizează prin media $m_x = 0$, funcția de corelație $K_{xx}(\tau)$ și densitatea spectrală $S_{xx}(\omega)$ cunoscute, atunci realizarea semnalului stocastic de ieșire al elementului dinamic se consideră ca suma mărimii medii și semnalul stocastic centrat:

$$y(t) = m_y + \hat{y}(t). \quad (10.3)$$

Conform principiului superpoziției, componentele semnalului din (10.3) se determină separat: media m_y ca rezultatul transformării mărimii m_x în regim staționar cu $H(0)$:

$$m_y = H(0)m_x = km_x = 0, \quad (10.4)$$

unde k este coeficientul de transfer al elementului, iar componenta $\hat{y}(t)$ este rezultatul transformării mărimii $\hat{x}(t)$. Media m_y a semnalului ieșirii poate fi calculată și prin funcția pondere $w(t)$ a elementului și media $m_x(t)$ prin relația:

$$m_y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t - \theta)m_x(\theta)d\theta = 0, \quad (10.5)$$

unde θ este variabila de integrare.

În continuare, expunem transformările semnalelor centrate și, pentru simplificare, se omit cercelețele și mărimile se prezintă $x(t)$, $y(t)$.

Se dau relațiile de calcul al caracteristicilor semnalului de ieșire $y(t)$ al elementului dinamic în domeniul timpului și în domeniul frecvență.

În domeniul timpului, legătura funcțională a transferului semnalului de intrare-ieșire al elementului dinamic se determină prin funcția de corelație (autocorelație) $K_{yy}(\tau)$ a mărimii de ieșire. Reacția elementului dinamic se exprimă prin funcția pondere $w(t)$ a elementului și realizarea semnalului $x(t)$ de intrare cu integrala de convoluție:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t - \theta_1)x(\theta_1)d\theta_1 = \int_{-\infty}^{\infty} w(\theta_1)x(t - \theta_1)d\theta_1, \quad (10.6)$$

unde θ_1 este variabila independentă de integrare.

Pentru momentul de timp $t + \tau$ expresia (10.6) este:

$$y(t + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\theta_2)x(t + \tau - \theta_2)d\theta_2, \quad (10.7)$$

unde θ_2 este altă variabilă independentă de integrare.

Funcția de corelație a semnalului de ieșire a elementului dinamic în baza (10.6)-(10.7) se determină prin relația:

$$\begin{aligned} K_{yy}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t)y(t + \tau)dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left[\int_{-\infty}^{\infty} w(\theta_1)x(t - \theta_1)d\theta_1 \int_{-\infty}^{\infty} w(\theta_2)x(t + \tau - \theta_2)d\theta_2 \right] dt. \end{aligned} \quad (10.8)$$

În (10.8) se schimbă ordinea de integrare și se obține expresia:

$$K_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\theta_1)d\theta_1 \int_{-\infty}^{\infty} w(\theta_2) \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t - \theta_1) \rightarrow \right.$$

$$\rightarrow x(t + \tau - \theta_2)]d\theta_2. \quad (10.9)$$

Dacă se introduce notarea parantezelor pătrate din (10.9) ca funcția de corelație a semnalului de intrare:

$$K_{xx}(\theta_1 + \tau - \theta_2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t - \theta_1)x(t + \tau - \theta_2)dt, \quad (10.10)$$

atunci din (10.9) se obține expresia integrală, care exprimă funcția de corelație $K_{yy}(\tau)$ a mărimii de ieșire a elementului cu funcția pondere $w(t)$ a elementului și funcția de corelație $K_{xx}(\theta_1 + \tau - \theta_2)$ a semnalului de intrare:

$$K_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\theta_1)d\theta_1 \int_{-\infty}^{\infty} w(\theta_2)K_{xx}(\theta_1 + \tau - \theta_2)d\theta_2. \quad (10.11)$$

Dispersia semnalului stocastic la ieșirea elementului are forma:

$$D_y = K_{yy}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\theta_1)d\theta_1 \int_{-\infty}^{\infty} w(\theta_2)K_{xx}(\theta_1 - \theta_2) d\theta_2. \quad (10.12)$$

Când la intrarea elementului acționează semnalul zgomot alb ideal cu funcția de corelație $K_{xx}(\tau) = c^2\delta(\tau)$, atunci dispersia semnalului de ieșire a elementului este:

$$\begin{aligned} D_y &= \int_{-\infty}^{\infty} w(\theta_1)d\theta_1 \int_{-\infty}^{\infty} w(\theta_2)[c^2\delta(\theta_1 - \theta_2)] d\theta_2 = \\ &= c^2 \int_{-\infty}^{\infty} w^2(\theta_1)d\theta_1, \end{aligned} \quad (10.13)$$

din care rezultă că pentru calculul dispersiei semnalului de ieșire, când la intrare acționează semnalul zgomot alb ideal, se integrează în timp pătratul funcției pondere a elementului.

Funcția de intercorelație dintre realizările semnalelor $y(t)$ și $x(t)$ se descrie prin relația:

$$K_{yx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t)x(t - \tau)dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left[\int_{-\infty}^{\infty} w(\theta) x(t - \theta) d\theta \right] x(t - \tau) dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} w(\theta) d\theta \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t - \theta) x(t - \tau) dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} w(\theta) K_{xx}(\tau - \theta) d\theta, \tag{10.14}
\end{aligned}$$

care reprezintă ecuația Wiener–Hopf sau integrala convoluției funcțiilor și răspunsul elementului la acțiunea semnalului, având forma funcției de corelație $K_{xx}(\tau)$.

La analiza dinamicii stocastice a sistemelor se utilizează relațiile dintre caracteristicile densității spectrale a transferului $x(t) \rightarrow y(t)$ al semnalelor de intrare și ieșire.

În domeniul frecvență, densitatea spectrală dintre semnalele $y(t)$ și $x(t)$ se descrie prin expresia:

$$S_{yy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{yy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \tag{10.15}$$

Se substituie în (10.15) funcția de corelație din (10.11) și se obține:

$$\begin{aligned}
S_{yy}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} w(\theta_1) d\theta_1 \int_{-\infty}^{\infty} w(\theta_2) K_{xx}(\theta_1 + \tau - \theta_2) d\theta_2 \right] e^{-j\omega\tau} d\tau = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(\theta_1) d\theta_1 \int_{-\infty}^{\infty} w(\theta_2) K_{xx}(\theta_1 + \tau - \theta_2) \rightarrow \right. \\
&\quad \left. \rightarrow e^{-j\omega(\theta_1 + \tau - \theta_2)} e^{j\omega(\theta_1 - \theta_2)} d\theta_2 \right] d\tau = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} w(\theta_2) e^{-j\omega\theta_2} d\theta_2 \int_{-\infty}^{\infty} w(\theta_1) e^{j\omega\theta_1} d\theta_1 \rightarrow \\
&\quad \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} K_{xx}(\theta_1 + \tau - \theta_2) e^{-j\omega(\theta_1 + \tau - \theta_2)} d\tau. \tag{10.16}
\end{aligned}$$

Transformata Fourier a funcției pondere $w(t)$ a elementului de la prima și a doua integrală din (10.16) determină locul de transfer

$H(j\omega)$ al elementului pentru valorile lui ω în intervalul $-\infty \dots + \infty$ și se obține:

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\theta_2) e^{-j\omega\theta_2} d\theta_2, H(-j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\theta_1) e^{j\omega\theta_1} d\theta_1. \quad (10.17)$$

Densitatea spectrală (10.16) cu (10.17) are forma:

$$S_{yy}(\omega) = H(j\omega)H(-j\omega) \int_{-\infty}^{\infty} K_{xx}(\theta_1 + \tau - \theta_2) e^{-j\omega(\theta_1 + \tau - \theta_2)} d\tau. \quad (10.18)$$

Luând în considerație relațiile:

$$H(j\omega)H(-j\omega) = |H(j\omega)|^2,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_{xx}(\theta_1 + \tau - \theta_2) e^{-j\omega(\theta_1 + \tau - \theta_2)} d\tau = S_{xx}(\omega)$$

expresia (10.18) în formă finală se determină prin relația:

$$S_{yy}(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_{xx}(\omega) = A^2(\omega) S_{xx}(\omega), \quad (10.19)$$

unde $|H(j\omega)|^2$ este pătratul modulului locului de transfer al elementului, $A^2(\omega)$ – pătratul funcției amplitudine–frecvență a elementului și $S_{xx}(\omega)$ – densitatea spectrală a semnalului de intrare $x(t)$.

Rezultă că densitatea spectrală a semnalului stocastic staționar al ieșirii $y(t)$ a elementului liniar se determină ca produsul dintre pătratul modulului locului de transfer $|H(j\omega)|^2$ (sau pătratul funcției amplitudine–frecvență $A^2(\omega)$) a elementului și densitatea spectrală a semnalului de intrare $S_{xx}(\omega)$.

Relația (10.19) are explicație fizică: modulul locului de transfer $|H(j\omega)|$ la fiecare valoare a argumentului ω determină raportul amplitudinilor armonicilor semnalelor de ieșire către intrare, iar raportul densităților spectrale $S_{yy}(\omega)/S_{xx}(\omega)$ la valoarea constantă a lui ω este egal cu pătratul amplitudinilor armonicilor $A^2(\omega)$ respective.

Din relația (10.19) rezultă că caracteristica fază–frecvență $\varphi(\omega)$

a elementului, care nu este în această relație, nu are nicio influență asupra densității spectrale a mărimii de ieșire $y(t)$ a elementului dinamic.

În baza relației (10.19) se obține relația de calcul al dispersiei semnalului de ieșire al elementului dinamic:

$$D_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{yy}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) |H(j\omega)|^2 d\omega, \quad (10.20)$$

care are aplicabilitate practică.

Exemplul 10.1. Se consideră elementul ideal derivator cu f.d.t. $H(s) = ks$ și cu funcția amplitudine-frecvență $A^2(\omega) = k^2\omega^2$, la intrarea căruia se aplică semnalul zgomot alb ideal cu densitatea spectrală $S_{xx}(\omega)$.

Se cere să se determine densitatea spectrală a semnalului de ieșire.

Soluționare. Densitatea spectrală a semnalului de ieșire a elementului se determină prin relația (10.19) și se obține:

$$S_{yy}(\omega) = A^2(\omega)S_{xx}(\omega) = k^2\omega^2 S_{xx}(\omega).$$

Din această relație se constată că elementul derivator la frecvențe joase atenuază amplificarea, iar la frecvențe înalte amplifică semnalul. ■

Exemplul 10.2. Se dă funcția de transfer $H(s) = 1/Ts$ a elementului integrator cu funcția amplitudine-frecvență $A^2(\omega) = 1/T^2\omega^2$, la intrarea căruia se aplică semnalul zgomot alb ideal cu densitatea spectrală $S_{xx}(\omega)$.

Se cere să se determine densitatea spectrală a semnalului de ieșire.

Soluționare. Densitatea spectrală a semnalului de ieșire a elementului se determină prin relația (10.19) și se obține:

$$S_{yy}(\omega) = A^2(\omega)S_{xx}(\omega) = (1/T^2\omega^2)S_{xx}(\omega).$$

Pentru elementul integrator procesul este invers: la frecvențe joase semnalul se amplifică, iar la frecvențe înalte amplitudinea semnalului se reduce. ■

Funcția de corelație la ieșirea elementului dinamic cu locul de transfer $H(j\omega)$, la intrarea căruia se aplică semnalul de intrare cu densitatea spectrală $S_{xx}(\omega)$, se calculează prin formula Wiener-Hinchin [9, 17], care este mai simplă în aplicații decât relația (10.11):

$$K_{yy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 S_{xx}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \quad (10.21)$$

unde $|H(j\omega)|^2$ este pătratul modulului locului de transfer $H(j\omega)$ al elementului dinamic, $S_{xx}(\omega)$ – densitatea spectrală a semnalului de intrare, $e^{j\omega\tau}$ – operatorul de convertire.

Dacă la intrarea elementului se alică semnalul zgomot ideal cu densitatea spectrală $S_{xx}(\omega) = c^2$, atunci dispersia semnalului de ieșire a elementului se descrie prin relația:

$$D_y = \frac{c^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega = \frac{c^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A^2(\omega) d\omega. \quad (10.22)$$

Exemplul 10.3. Se consideră elementul dinamic cu inerție de ordinul unu descris de funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{k}{Ts+1},$$

la intrarea căruia acționează semnalul zgomot alb cu banda spectrului $\omega_b \gg \omega_0 = 1/T$ și cu densitatea spectrală S_{xx} .

Se cere să se determine dispersia D_y semnalului la ieșirea elementului.

Soluționare. Se utilizează relația (10.20) și dispersia D_y va fi:

$$\begin{aligned} D_y &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) |H(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx} \left| \frac{k}{Tj\omega+1} \right|^2 d\omega = \\ &= \frac{S_{xx}k^2}{\pi T} \arctg\omega T \Big|_0^{\omega_b} = \frac{S_{xx}k^2}{2T}, \omega_b T \gg 1. \end{aligned}$$

Dispersia D_y a semnalului de ieșire se reduce astfel: cu cât este mai redusă densitatea spectrală S_{xx} a semnalului de intrare și cu cât este mai mare constanta de timp T a elementului dinamic. ■

Densitatea interspectrală dintre semnalul de ieșire $y(t)$ și semnalul de intrare $x(t)$ se dă prin relația:

$$\begin{aligned} S_{yx}(j\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} y(j\omega) x(-j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{y(j\omega)}{x(j\omega)} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |x(j\omega)|^2 = \\ &= H(j\omega) S_{xx}(\omega), \end{aligned} \quad (10.23)$$

unde locul de transfer al elementului dinamic liniar se reprezintă ca

raportul amplitudinii semnalului de ieșire la amplitudinea semnalului de intrare funcție de frecvență descris prin relația:

$$H(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{y(j\omega)}{x(j\omega)} \Big|_{s=j\omega}.$$

Deci, densitatea interspectrală a transferului intrare-ieșire $x(t) \rightarrow y(t)$ a semnalelor stocastice staționare ale elementului dinamic liniar este produsul dintre locul de transfer al elementului $H(j\omega)$ și densitatea spectrală a semnalului de intrare $S_{xx}(\omega)$.

10.3 Obiecte de conducere la acțiunea semnalelor stocastice

Se analizează obiectul de conducere reprezentat în figura 10.2, *a* la acțiunea semnalelor stocastice staționare, unde $u(t)$ este semnalul de conducere, $y(t)$ – semnalul de ieșire, $p(t)$ – semnalul perturbator.

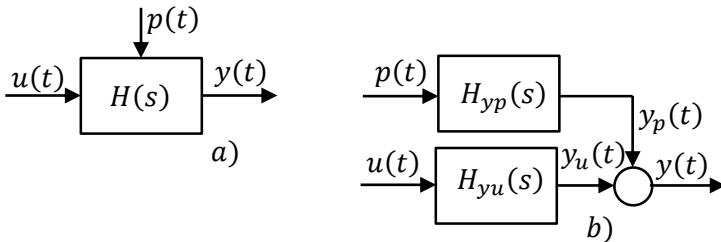


Fig. 10.2. Scheme structurale ale obiectului de conducere

În figura 10.2, *b* este reprezentată structura obiectului de prelucrare a semnalelor: $H_{yu}(s)$ este funcția de transfer a obiectului pe canalul de transfer mărimea de conducere $u(t)$ – răspunsul $y_u(t)$, $H_{yp}(s)$ – f.d.t. a obiectului pe canalul perturbație $p(t)$ răspunsul $y_p(t)$, iar $y(t) = y_p(t) + y_u(t)$ – răspunsul obiectului la ambele semnale de intrare.

Funcțiile de corelație $K_{uu}(\tau)$ și $K_{pp}(\tau)$ și densitățile spectrale $S_{uu}(\omega)$, $S_{pp}(\omega)$ ale semnalelor stocastice staționare de intrare sunt cunoscute.

Se formulează problema: să se determine legătura dintre funcția

de corelație și funcția densității spectrale a semnalului de ieșire $y(t)$, dacă funcțiile de corelație și densitățile spectrale ale semnalelor de intrare $u(t)$ și $p(t)$ sunt cunoscute.

Deoarece pentru sistemele liniare este valabil principiul superpoziției, atunci răspunsul obiectului este suma răspunsurilor la semnalele de intrare aplicate separat și se descrie prin relația:

$$y(t) = y_p(t) + y_u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w_{yu}(\theta_1)u(t - \theta_1)d\theta_1 + \int_{-\infty}^{\infty} w_{yp}(\theta_1)p(t - \theta_1)d\theta_1, \quad (10.24)$$

unde $w_{yu}(\theta_1)$, $w_{yp}(\theta_1)$ sunt funcțiile pondere ale obiectului pe canalele de conducere și ale perturbației, iar $u(t - \theta_1)$ și $p(t - \theta_1)$ – realizările semnalelor stocastice.

Realizarea răspunsului obiectului translat la timpul τ se dă prin relația:

$$y(t + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} w_{yu}(\theta_2)u(t + \tau - \theta_2)d\theta_2 + \int_{-\infty}^{\infty} w_{yp}(\theta_2)p(t + \tau - \theta_2)d\theta_2. \quad (10.25)$$

Funcția de corelație a răspunsului obiectului se descrie prin relația:

$$K_{yy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left[\int_{-\infty}^{\infty} w_{yu}(\theta_1)u(t - \theta_1)d\theta_1 + \int_{-\infty}^{\infty} w_{yu}(\theta_2)u(t + \tau - \theta_2)d\theta_2 + \int_{-\infty}^{\infty} w_{yp}(\theta_2)p(t + \tau - \theta_2)d\theta_2 \right] dt. \quad (10.26)$$

În relația (10.26) se schimbă ordinea integrării, se efectuează înmulțirea termenilor și se obține relația funcției de corelație în forma:

$$K_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} w_{yu}(\theta_1)d\theta_1 \int_{-\infty}^{\infty} w_{yu}(\theta_2)K_{uu}(\theta_1 + \tau - \theta_2)d\theta_2 + \int_{-\infty}^{\infty} w_{yu}(\theta_1)d\theta_1 \int_{-\infty}^{\infty} w_{yp}(\theta_2)K_{up}(\theta_1 + \tau - \theta_2)d\theta_2 +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{-\infty}^{\infty} w_{yp}(\theta_1) d\theta_1 \int_{-\infty}^{\infty} w_{yu}(\theta_2) K_{pu}(\theta_1 + \tau - \theta_2) d\theta_2 + \\
& + \int_{-\infty}^{\infty} w_{yp}(\theta_1) d\theta_1 \int_{-\infty}^{\infty} w_{yp}(\theta_2) K_{pp}(\theta_1 + \tau - \theta_2) d\theta_2, \quad (10.27)
\end{aligned}$$

unde $K_{uu}(\theta_1 + \tau - \theta_2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t - \theta_1) u(t + \tau - \theta_2) dt,$

$$K_{pp}(\theta_1 + \tau - \theta_2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T p(t - \theta_1) p(t + \tau - \theta_2) dt,$$

$$K_{up}(\theta_1 + \tau - \theta_2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t - \theta_1) p(t + \tau - \theta_2) dt,$$

$$K_{pu}(\theta_1 + \tau - \theta_2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T p(t - \theta_1) u(t + \tau - \theta_2) dt.$$

Relațiile integrale (10.27) determină interacțiunile dintre funcția de corelație $K_{yy}(\tau)$ a răspunsului staționar stabilizat al obiectului, funcțiile de autocorelații $K_{uu}(\tau)$, $K_{pp}(\tau)$ și funcțiile de intercorelații $K_{up}(\tau)$, $K_{pu}(\tau)$ ale semnalelor stocastice staționare.

Densitatea spectrală a răspunsului stabilizat al obiectului este:

$$\begin{aligned}
S_{yy}(\omega) = & |H_{yu}(j\omega)|^2 S_{uu}(\omega) + H_{yu}(-j\omega) H_{yp}(j\omega) S_{up}(j\omega) + \\
& + H_{yu}(j\omega) H_{yp}(-j\omega) S_{pu}(j\omega) + |H_{yp}(j\omega)|^2 S_{pp}(\omega), \quad (10.28)
\end{aligned}$$

unde $H_{yu}(-j\omega), H_{yp}(-j\omega)$ sunt locurile de transfer complex-conjugate cu locurile de transfer $H_{yu}(j\omega), H_{yp}(j\omega)$, iar $S_{uu}(\omega), S_{pp}(\omega)$ – densitățile spectrale ale semnalelor, $S_{up}(j\omega), S_{pu}(j\omega)$ – densitățile interspectrale ale semnalelor.

Dacă semnalele stocastice de intrare $u(t)$ și $p(t)$ nu sunt corelate între ele, atunci densitățile interspectrale sunt nule:

$$S_{up}(j\omega) = S_{pu}(j\omega) = 0$$

și densitatea spectrală a răspunsului stabilizat al obiectului (10.28) este:

$$S_{yy}(\omega) = |H_{yu}(j\omega)|^2 S_{uu}(\omega) + |H_{yp}(j\omega)|^2 S_{pp}(\omega). \quad (10.29)$$

10.4 Sistemul automat liniar închis la acțiunea semnalelor stocastice

Se consideră structura sistemului automat închis cu reacție unitară stabil sub acțiunea semnalelor stocastice de intrare a referinței $r(t)$ și a perturbației $p(t)$ (fig. 10.3). Obiectul de reglare (OR) este reprezentat prin două componente cu f.d.t. $H_1(s)$ și $H_2(s)$ și perturbația acționează la intrarea componentei a doua, $H_R(s)$ – f.d.t. a regulatorului. Scopul conducerii este ca sistemul să reproducă semnalul de intrare $r(t)$ și să rejeteze acțiunile perturbației $p(t)$ care acționează asupra obiectului.

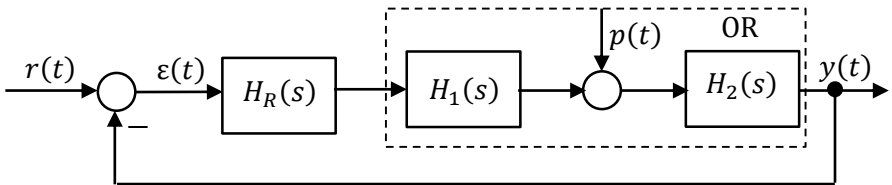


Fig. 10.3. Schema structurală a sistemului închis la acțiunea semnalelor stocastice

În general, se admite că semnalele stocastice să se reprezinte astfel:

$$r(t) = m_r(t) + \overset{\circ}{r}(t), \quad p(t) = m_p(t) + \overset{\circ}{p}(t), \quad (10.30)$$

unde $m_r(t)$ și $m_p(t)$ sunt mediile semnalelor, iar $\overset{\circ}{r}(t)$ și $\overset{\circ}{p}(t)$ – semnalele stocastice centrate.

Pentru analiza urmăririi de către sistemul automat a semnalului de intrare $r(t)$ se utilizează eroarea sistemului:

$$\varepsilon(t) = r(t) - y(t), \quad (10.31)$$

iar eroarea se reprezintă ca semnal stocastic prin componentele:

$$\varepsilon(t) = m_\varepsilon(t) + \overset{\circ}{\varepsilon}(t), \quad (10.32)$$

unde $m_\varepsilon(t)$ este media erorii, iar $\varepsilon(t)$ – semnalul centrat al erorii.

Pentru sistemele liniare este valabil principiul superpoziției și se determină separat componentele erorii $m_\varepsilon(t)$ și $\varepsilon(t)$ pentru fiecare semnal de intrare $r(t)$ și $p(t)$. Media erorii $m_\varepsilon(t)$ este reacția la mediile intrărilor $m_r(t)$ și $m_p(t)$ și se reprezintă prin transformata Laplace:

$$m_\varepsilon(s) = H_{\varepsilon r}(s)m_r(s) + H_{\varepsilon p}(s)m_p(s). \quad (10.33)$$

Dacă mediile sunt constante și semnalele centrate sunt staționare, atunci expresia (10.33) ia forma:

$$m_\varepsilon = H_{\varepsilon r}(0)m_r + H_{\varepsilon p}(0)m_p. \quad (10.34)$$

În continuare, mărimea erorii centrate $\varepsilon(t)$ se determină ca reacția sistemului la acțiunea semnalelor centrate $r^*(t)$ și $p^*(t)$. Caracteristicile probabiliste ale semnalelor centrate $r^*(t)$ și $p^*(t)$ se descriu cu funcțiile de corelația $K_{rr}(\tau)$ și $K_{pp}(\tau)$ sau prin densitățile spectrale $S_{rr}(\omega)$ și $S_{pp}(\omega)$. Dacă semnalele sunt corelate, atunci trebuie să fie cunoscută și funcția de intercorelație $K_{rp}(\tau)$ sau densitatea interspectrală $S_{rp}(j\omega)$.

După caracteristicile probabiliste cunoscute ale semnalelor de intrare se calculează dispersia D_ε a semnalului erorii după relația:

$$D_\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\varepsilon\varepsilon}(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_{\varepsilon\varepsilon}(\omega) d\omega, \quad (10.35)$$

Densitatea spectrală a erorii se determinată prin expresia:

$$S_{\varepsilon\varepsilon}(\omega) = |H_{\varepsilon r}(j\omega)|^2 S_{rr}(\omega) + H_{\varepsilon r}(-j\omega)H_{\varepsilon p}(j\omega)S_{rp}(j\omega) + \\ + H_{\varepsilon r}(j\omega)H_{\varepsilon p}(-j\omega)S_{pr}(j\omega) + |H_{\varepsilon p}(j\omega)|^2 S_{pp}(\omega), \quad (10.36)$$

unde $H_{\varepsilon r}(j\omega)$, $H_{\varepsilon p}(j\omega)$ sunt locurile de transfer ale erorii sistemului pentru semnalele de intrare $r(t)$ și $p(t)$.

Din (10.36) rezultă că dispersia sistemului se determină ca suma dispersiilor erorilor prin relația:

$$D_{\varepsilon} = D_{\varepsilon}^u + D_{\varepsilon}^{up} + D_{\varepsilon}^{pu} + D_{\varepsilon}^p, \quad (10.37)$$

unde indecșii de sus indică semnalele de intrare pentru care se calculează dispersia erorii.

Dacă semnalele de intrare $u(t)$ și $p(t)$ nu sunt corelate, atunci densitățile spectrale de interacțiuni sunt nule și densitatea spectrală (10.36) și dispersia erorii (10.37) se simplifică și se determină prin relațiile:

$$S_{\varepsilon\varepsilon}(\omega) = |H_{\varepsilon r}(\omega)|^2 S_{rr}(\omega) + |H_{\varepsilon p}(\omega)|^2 S_{pp}(\omega), \quad (10.38)$$

$$D_{\varepsilon} = D_{\varepsilon}^u + D_{\varepsilon}^p. \quad (10.39)$$

În caz particular, când perturbația acționează la ieșirea obiectului ($H_2(s) = 1$), atunci semnalele de intrare $u(t)$ și $p(t)$ nu sunt corelate și densitatea spectrală a erorii este:

$$S_{\varepsilon\varepsilon}(\omega) = \left| \frac{1}{1+H_d(j\omega)} \right|^2 [S_{uu}(\omega) + S_{pp}(\omega)], \quad (10.40)$$

unde $H_d(j\omega) = H_R(j\omega)H_1(j\omega)$ este locul de transfer al sistemului deschis.

Media erorii sistemului se calculează prin următoarele relații.
Valoarea medie a pătratului erorii:

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = D_{\varepsilon} + m_{\varepsilon}^2(t). \quad (10.41)$$

Media erorii pătratice:

$$\varepsilon(t) = \sqrt{\overline{\varepsilon^2(t)}} = \sqrt{D_{\varepsilon} + m_{\varepsilon}^2(t)}. \quad (10.42)$$

Dacă media este constantă și semnalul centrat este staționar,

atunci relațiile (10.41) și (10.42) au forma:

$$\overline{\varepsilon^2} = D_\varepsilon + m_\varepsilon^2, \quad \varepsilon = \sqrt{\overline{\varepsilon^2}} = \sqrt{D_\varepsilon + m_\varepsilon^2}. \quad (10.43)$$

În cazul când media $m_\varepsilon = 0$, atunci media erorii pătratice este:

$$\varepsilon = \sqrt{\overline{\varepsilon^2}} = \sqrt{D_\varepsilon} = \sigma_\varepsilon, \quad (10.44)$$

unde σ_ε este devierea erorii pătratice.

Pentru determinarea dispersiei semnalului erorii sistemului la acțiunea semnalelor stocastice cu densitățile spectrale cunoscute este necesar de calculat integrala (10.35), care este o procedură dificilă.

10.5 Metode de calcul a dispersiei semnalului stocastic

Pentru calculul dispersiei semnalului stocastic al mărimii de ieșire a sistemului se utilizează două clase de metode:

1. Metode analitice.
2. Metode grafo-analitice.

10.5.1 Metode analitice de calcul a dispersiei semnalului stocastic

Pentru determinarea valorii dispersiei semnalului stocastic de ieșire $y(t)$ al sistemului descris cu funcția de transfer $H(s)$, la intrarea căruia acționează semnalul stocastic de intrare $x(t)$ cu densitatea spectrală cunoscută $S_{xx}(\omega)$ se utilizează relația:

$$D_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 S_{xx}(\omega) d\omega, \quad (10.45)$$

unde $H(j\omega)$ este locul de transfer al sistemului studiat.

Deoarece funcția de transfer $H(s) = B(s)/A(s)$ se exprimă ca raportul polinoamelor $B(s)$ și $A(s)$ și atunci pătratul modulului locului de transfer este o funcție pară de valorile pare ale lui ω de forma:

$$|H(j\omega)|^2 = H(\omega^2). \quad (10.46)$$

Se consideră densitatea spectrală $S_{xx}(\omega)$ a semnalului de intrare o funcție pozitivă, reală, pară și rațională, polinoamele căreia conțin componente numai cu grade pare de variabila ω :

$$S_{xx}(\omega) = \frac{P(\omega^2)}{Q(\omega^2)} = \frac{p_m\omega^{2m} + p_{m-1}\omega^{2m-2} + \dots + p_0}{q_n\omega^{2n} + q_{n-1}\omega^{2n-2} + \dots + q_0}, \quad m < n, \quad (10.47)$$

unde p_j, q_i sunt coeficienții reali ai polinoamelor $P(\omega^2)$ și $Q(\omega^2)$.

Gradul $2m$ al polinomului $P(\omega^2)$ este mai mic decât gradul $2n$ al polinomului $Q(\omega^2)$ și polinomul $Q(\omega^2) \neq 0$ nici pentru o valoare a lui ω și, numai pentru aceste cazuri, integrala (10.45) de la densitatea spectrală $S_{xx}(\omega)$ a semnalului de intrare este convergentă și dispersia D_y va fi o mărime finită.

Rădăcinile ecuațiilor $P(\omega^2) = 0$, $Q(\omega^2) = 0$ cu coeficienții reali vor fi reale sau complexe conjugate. Dacă polinomul este o funcție pară, atunci fiecărei rădăcini ω_k îi corespunde rădăcina $-\omega_k$.

Polinomul $Q(\omega^2)$ numitorului nu poate avea rădăcini reale, deoarece densitatea spectrală $S_{xx}(\omega)$ va avea un pol situat pe semiaxa reală pozitivă și integrala de la densitatea spectrală $S_{xx}(\omega)$ nu va fi o mărime finită.

Rădăcinile polinoamelor $P(\omega^2)$, $Q(\omega^2)$ pot fi alocate simetric în raport cu axele reală și imaginară a planului complex al variabilei $\omega = u + jv$ (fig. 10.4, a).

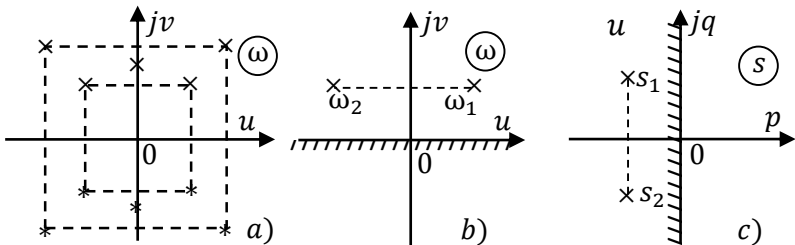


Fig. 10.4. Transformarea planului complex ω a), b) în planul complex s c)

Rezultă că relația (10.45) pentru determinarea dispersiei D_y este o funcție pară de gradele pare ale lui ω , reprezentată ca fracție rațională și dacă poliile sunt simpli și reali $p_i = \omega_i^2$ ($i = \overline{1, n}$), atunci această fracție se descrie ca suma fracțiilor simple:

$$|H(j\omega)|^2 S_{xx}(\omega) = \frac{B(\omega^2)}{A(\omega^2)} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{\omega^2 + \omega_i^2}. \quad (10.48)$$

Expresia (10.45) cu substituția (10.48) se integrează și se obține:

$$D_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{\omega^2 + \omega_i^2} d\omega = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{\omega_i} \arctg \frac{\omega}{\omega_i} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{\omega_i}. \quad (10.49)$$

Deci, pentru calculul dispersiei D_y este necesar a determina rădăcinile ecuației $A(\omega^2) = 0$ și se calculează coeficienții c_i . În practică, rădăcinile lui $A(\omega^2) = 0$ sunt complexe și acest calcul este laborios.

În general, pentru calculul dispersiei D_y după relația (10.45) există o metodă analitică, care se bazează pe descrierea funcției integralei în forma [9, 17]:

$$\begin{aligned} D_y = J_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\omega^2)}{A(\omega^2)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|B(j\omega)|^2}{A(j\omega)A(-j\omega)} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b_{n-1}(j\omega)^{2(n-1)} + b_{n-2}(j\omega)^{2(n-2)} + \dots + b_1(j\omega)^2 + b_0}{A(j\omega)A(-j\omega)} d\omega, \end{aligned} \quad (10.50)$$

unde $A(j\omega) = a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{(n-1)} + \dots + a_0$ și $A(-j\omega) = a_n(-j\omega)^n + a_{n-1}(-j\omega)^{(n-1)} + \dots + a_0$.

Polinoamele numărătorului $B(\omega^2)$ și numitorului $A(\omega^2)$ din funcția integralei (10.50) se dau în forma:

$$\begin{aligned} A(\omega^2) &= |A(j\omega)|^2 = A(j\omega)A(-j\omega), \\ B(\omega^2) &= |B(j\omega)|^2 = B(j\omega)B(-j\omega). \end{aligned} \quad (10.51)$$

Rădăcinile polinomului $A(j\omega)$ sunt alocate în semiplanul

superior, notate \times (fig. 10.4, *a*, sunt 4 rădăcini), iar rădăcinile polinomului $A(-j\omega)$ sunt alocate în semiplanul inferior al planului complex al rădăcinilor, notate $*$ (fig. 10.4, *a*, sunt 4 rădăcini).

Înmulțirea numărului complex la unitatea imaginară $j = \sqrt{-1}$ rotește vectorul, care reprezintă acest număr, la unghiul $\pi/2$ contra sens. Rezultă că toate rădăcinile polinoamelor $A(j\omega)$ și $B(j\omega)$ din semiplanul superior ale variabilei ω (fig. 10.4, *b*, 2 rădăcini) se transformă în rădăcinile polinoamelor $A(s)$ și $B(s)$, care vor fi alocate în semiplanul stâng al planului complex al variabilei s (fig. 10.4, *c*, 2 rădăcini).

Integrala din (10.50) pentru sistemele automate stabile de ordinul n se calculează prin relația [17]:

$$J_n = (-1)^{n+1} \frac{Q_n}{2a_n \Delta_n}, \quad (10.52)$$

unde Δ_n este determinantul Hurwitz de ordinul n , construit din coeficienții $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0$ polinomului $A(j\omega)$ de forma:

$$\Delta_n = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{bmatrix},$$

iar Q_n este determinantul care coincide cu determinantul Δ_n , dar în care primul rând se substituie cu coeficienții $b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_0$ ai polinomului $B(j\omega)$ și are forma:

$$Q_n = \begin{bmatrix} b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \dots & b_0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{bmatrix}.$$

Pentru sistemele automate de ordinul $n = 1 \div 4$ expresiile de calcul al integralei J_n din (10.52) se dau în tabelul 10.1 [9, 17].

Tabelul 10.1. Expresiile de calcul al integralei J_n

Gradul n polinomului i $A(s)$	Expresiile de calcul al integralei J_n
1	$\frac{b_0}{2a_1a_0}$
2	$\frac{-b_1 + b_0a_2/a_0}{2a_1a_2}$
3	$\frac{-a_1b_2 + a_3b_1 - a_3a_2b_0/a_0}{2a_3(a_3a_0 - a_2a_1)}$
4	$\frac{b_3(-a_3a_0 + a_2a_1) - a_4a_1b_2 + a_4a_3b_1 + a_4b_0(a_4a_1 - a_3a_2)/a_0}{2a_4(a_4a_1^2 + a_3^2a_0 - a_3a_2a_1)}$

În numitorii expresiei lui J_n (10.52) se regăesc minorii principali ai determinantului Hurwitz de ordinul Δ_{n-1} . În cazul când în sistem se instalează limita de stabilitate oscilantă, regimul critic în sistem, rezultă că în ecuația caracteristică a sistemului există rădăcini complex conjugate pentru care determinantul $\Delta_{n-1} = 0$ și dispersia semnalelor sistemului tinde la infinit.

Exemplul 10.4. Se consideră f.d.t. a sistemului:

$$H(s) = \frac{2}{8s^2 + 6s + 3},$$

la intrarea căruia acționează semnalul stocastic $x(t)$ cu densitatea spectrală:

$$S_{xx}(\omega) = \frac{6}{\omega^2 + 1}.$$

Se cere să se determine densitatea spectrală a semnalului de ieșire $y(t)$ a sistemului.

Soluționare. Densitatea spectrală $S_{yy}(\omega)$ a semnalului de ieșire $y(t)$ al sistemului se determină prin relația (10.19):

$$S_{yy}(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_{xx}(\omega) = \left| \frac{2}{8(j\omega)^2 + 6j\omega + 3} \right|^2 \frac{6}{\omega^2 + 1} = \frac{4}{|8(j\omega)^2 + 6j\omega + 3|^2} \frac{6}{\omega^2 + 1}.$$

Determinarea dispersiei D_y prin relația (10.48) este precedată de transformarea funcției integralei în forma:

$$S_{yy}(\omega) = \frac{12}{[8(j\omega)^2+6j\omega+3](j\omega+1)[8(-j\omega)^2+6(-j\omega)+3](-j\omega+1)} =$$

$$= \frac{12}{[8(j\omega)^3+14(j\omega)^2+9j\omega+3][8(-j\omega)^3+14(-j\omega)^2+9(-j\omega)+3]}.$$

În calculul dispersiei D_y prin expresia obținută se utilizează relația pentru J_3 din tabelul 10.1 pentru $n = 3$ cu coeficienții $b_2 = b_1 = 0$, $b_0 = 12$, $a_3 = 8$, $a_2 = 14$, $a_1 = 9$, $a_0 = 3$ și efectuând calculele se obține:

$$D_y = J_3 = \frac{-a_0 a_1 b_2 + a_0 a_3 b_1 - a_2 a_3 b_0}{2 a_0 a_3 (a_0 a_3 - a_1 a_2)} = \frac{-3 \cdot 9 \cdot 0 + 3 \cdot 8 \cdot 0 - 14 \cdot 8 \cdot 12}{2 \cdot 3 \cdot 8 (3 \cdot 8 - 9 \cdot 14)} = \frac{-1344}{-4896} = 0.2745. \blacksquare$$

10.5.2 Metode grafo-analitice

Pentru sistemele automate de ordinul $n > 4$ metoda analitică de calcul al densității erorii este dificilă și atunci se utilizează metodele grafo-analitice.

Se consideră structura sistemului închis cu acțiunea semnalelor stocastice a referinței $r(t)$ și perturbației $p(t)$ (fig. 10.3).

Metoda se reduce la următoarele etape.

La prima etapă se construiește funcția amplitudine–frecvență $A_{\varepsilon p}(\omega) = |H_{\varepsilon p}(j\omega)|$ a erorii sistemului la acțiunea semnalului stocastic perturbator $p(t)$ cu densitatea spectrală $S_{pp}(\omega)$ (fig. 10.5) și, în continuare, se construiește pătratul funcției $A_{\varepsilon p}^2(\omega)$ și se determină densitatea spectrală a erorii în raport cu perturbația ca produsul $S_{\varepsilon\varepsilon}^p(\omega) = A_{\varepsilon p}^2(\omega)S_{pp}(\omega)$ pentru aceleași valori ale lui ω .

În rezultatul acestor construcții se obține aria limitată de curba $S_{\varepsilon\varepsilon}^p(\omega)$ (hașurată) și sistemul de coordonate și, dacă această arie se raportează la mărimea π , atunci se obține expresia dispersiei erorii sistemului în raport cu perturbația $p(t)$:

$$D_{\varepsilon p} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_{\varepsilon\varepsilon}^p(\omega) d\omega. \quad (10.53)$$

Din analiza curbelor $A_{\varepsilon p}^2(\omega)$ și $S_{pp}(\omega)$ rezultă că dacă valorile

maximale ale acestora coincid, atunci aria limitată de curba $S_{\varepsilon\varepsilon}^p(\omega)$ și sistemul de coordonate va fi mai mare, deci, și dispersia $D_{\varepsilon p}$ va fi mai mare, și invers, alegând parametrii sistemului astfel, încât aceste curbe să fie deplasate între ele care să conducă la reducerea dispersiei sistemului.

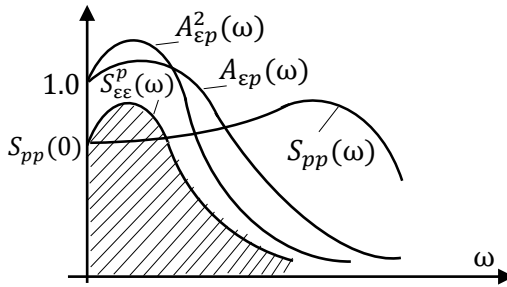


Fig. 10.5. Determinarea dispersiei erorii sistemului

Similar, se obține dispersia erorii $D_{\varepsilon r}$ în raport cu referința și dispersiile D_{ε}^{rp} , D_{ε}^{pr} de interacțiuni dintre semnalele $r(t)$ și $p(t)$ și dispersia sumară a sistemului automat la acțiunea semnalelor stocastice referinței $r(t)$ și perturbației $p(t)$ se determină ca suma dispersiilor:

$$D_{\varepsilon} = D_{\varepsilon r} + D_{\varepsilon}^{rp} + D_{\varepsilon}^{pr} + D_{\varepsilon p}. \quad (10.54)$$

Această metodă are avantaje în cazul când caracteristicile $A_{\varepsilon r}(\omega)$, $A_{\varepsilon p}(\omega)$, $S_{rr}(\omega)$, $S_{pp}(\omega)$ sunt ridicate experimental și se dau în formă grafică.

10.6 Utilizarea semnalului zgomot alb ideal ca model al acțiunilor externe

Alegerea modelului acțiunilor externe impune cerința ca acesta se fie un model relativ simplu, dar să corespundă realității. În practică, studiul dinamicii stocastice a sistemelor automate în calitate de model al acțiunilor externe se utilizează zgomotul alb ideal [9, 17-19].

Se consideră structura sistemului automat închis (fig. 10.3) cu

f.d.t. a canalului direct $H_d(s) = H_R(s)H_1(s) = k/s$ ($H_2(s) = 1$), asupra căruia acționează semnalele stocastice $r(t)$ și $p(t)$ ca modele zgomot alb ideal cu densitatea spectrală $S_{rr}(\omega) = S_{pp}(\omega) = c^2$.

Dispersia D_{yr} răspunsului sistemului închis cu coeficienții cunoscuți $b_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_0 = k$ la acțiunea semnalului de referință $r(t)$ se calculează utilizând expresia pentru integrala J_1 din tabelul 10.1 și se obține:

$$\begin{aligned} D_{yr} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c^2 \left| \frac{k}{j\omega+k} \right|^2 d\omega = \frac{k^2 c^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(j\omega+k)(-j\omega+k)} = \\ &= k^2 c^2 J_1 = k^2 c^2 \frac{b_0}{2a_0 a_1} = \frac{kc^2}{2}. \end{aligned} \quad (10.55)$$

Dispersia erorii $D_{\varepsilon r}$ sistemului închis la acțiunea semnalului de referință $r(t)$ și dispersia reacției D_{yp} a sistemului închis la acțiunea semnalului de perturbație $p(t)$ se dau în forma:

$$\begin{aligned} D_{\varepsilon r} = D_{yp} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c^2 \left| \frac{j\omega}{j\omega+k} \right|^2 d\omega = \frac{c^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2 d\omega}{\omega^2 + k^2} = \\ &= \frac{c^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega - D_{yr}. \end{aligned} \quad (10.56)$$

Prima componentă din expresia dispersiei ia valori infinite, ceea ce nu corespunde cazului real, deoarece dispersia semnalelor are o valoare finită. Rezultatul obținut se explică prin faptul că expresiile pătratelor modulelor locurilor de transfer $|H_{\varepsilon r}(j\omega)|^2$ și $|H_{yp}(j\omega)|^2$ conțin gradul polinomului numărătorului egal cu gradul polinomului numitorului.

De exemplu, se consideră funcția de transfer și locul de transfer al sistemului închis:

$$H_{yr}(s) = \frac{k}{s+k}, \quad H_{yr}(j\omega) = \frac{k}{j\omega+k},$$

care în domeniul frecvență corespunde unui filtru trece-jos și permite trecerea semnalelor de frecvență joasă, iar semnalele de frecvență înaltă sunt filtrate.

Funcțiile de transfer și locurile de transfer ale erorii sistemului în raport cu referința și perturbația au forma:

$$H_{er}(s) = H_{yp}(s) = \frac{s}{s+k},$$

$$H_{er}(j\omega) = H_{yp}(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + k}$$

și corespund unui filtru de frecvență înaltă, care filtrează semnalele de frecvență joasă și permite trecerea semnalelor de frecvență înaltă.

Pătratul modulelor locurilor de transfer ale filtrelor de frecvență joasă și înaltă au forma:

$$|H_{yr}(j\omega)|^2 = A_{fj}^2(\omega) = \frac{k^2}{\omega^2+k^2},$$

$$|H_{er}(j\omega)|^2 = |H_{yp}(j\omega)|^2 = A_{fi}^2(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega^2+k^2}.$$

Din analiza efectuată rezultă că utilizarea modelului zgomotului alb ideal pentru calculul dispersiilor semnalelor este posibil numai în cazurile când funcția de transfer a sistemului în raport cu semnalul stocastic aplicat corespunde unui filtru trece-jos.

În cazul când funcția de transfer a transferului semnalul stocastic de intrare - semnalul stocastic al variabilei ca mărime de ieșire corespunde unui filtru trece-sus, se recomandă a fi aplicate modele de semnale de acționare care au *bandă limitată* de frecvență cu densitatea spectrală limitată $\overline{S_{rr}}(\omega)$, de exemplu:

$$\overline{S_{rr}}(\omega) = \frac{2D\mu}{\omega^2+\mu^2},$$

unde D și μ sunt dispersia și parametrul de amortizare.

Rezultatul analizei sistemului de ordin redus cu semnale

stocastice de intrare este valabil și pentru sistemele de ordin superior.

Dacă funcția de transfer a sistemului în canalul direct este:

$$H_d(s) = \frac{B_1(s)}{A_1(s)}, \quad (10.57)$$

iar în canalul de reacție f.d.t.:

$$H_r(s) = \frac{B_r(s)}{A_r(s)}, \quad (10.58)$$

atunci funcția de transfer a sistemului închis se descrie prin relația:

$$H_0(s) = \frac{H_d(s)}{1+H_d(s)H_r(s)} = \frac{B_1(s)A_r(s)}{A_1(s)A_r(s)+B_1(s)B_r(s)} = \frac{B(s)}{A(s)}. \quad (10.59)$$

Dacă gradul polinomului $\deg B(s) = \deg A(s)$ în sistemul închis, atunci modelul semnalului zgomotului alb ideal $n(t)$ nu poate fi utilizat ca semnal exterior pentru calculul dispersiei D_{yr} .

Pentru a obține modelul semnalului stocastic cu caracteristicile dorite se utilizează elemente dinamice numite *filtre de formare* [9, 17-19].

Definiție. Filtrul de formare este un element dinamic la intrarea căruia se aplică $\delta(t)$ – funcția sau semnalul treaptă unitară, iar la ieșirea lui se formează semnalul stocastic cu proprietățile dorite, corespunzător soluției ecuației diferențiale considerate (fig. 10.6, a).

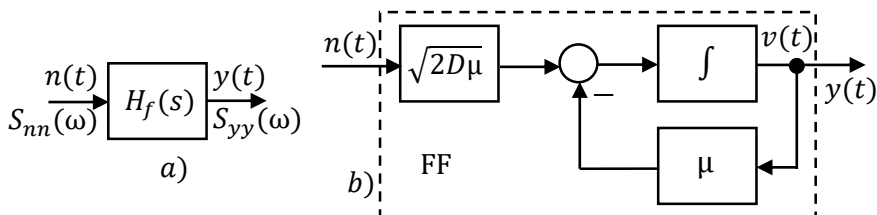


Fig. 10.6. Schema structurală de realizare a filtrului de formare

Pentru generarea semnalului stocastic cu caracteristicile probabiliste impuse se aplică semnalul zgomot alb ideal (fig. 10.6, a, b) cu densitatea spectrală $S_{nn}(\omega) = 1$ la intrarea filtrului și se cere să se

determine funcția de transfer a filtrului de formare $H_f(s)$, care formează la ieșirea filtrului semnalul stocastic cu caracteristica densității spectrale date, de exemplu $S_{ff}(\omega) = 2D\mu/(\omega^2 + \mu^2)$.

Densitatea spectrală la ieșirea filtrului de formare este:

$$\begin{aligned} S_{ff}(\omega) &= |H_f(j\omega)|^2 S_{nn}(\omega) = \frac{2D\mu}{\omega^2 + \mu^2} = |H_f(j\omega)|^2 * 1 = \\ &= H_f(j\omega)H_f(-j\omega). \end{aligned} \quad (10.60)$$

Având în vedere că locul de transfer al filtrului trebuie să fie de fază minimă, atunci se obține:

$$H_f(j\omega) = \frac{\sqrt{2D\mu}}{j\omega + \mu}. \quad (10.61)$$

Funcția de transfer a filtrului de formare se exprimă prin substituirea $j\omega = s$:

$$H_f(s) = \frac{\sqrt{2D\mu}}{s + \mu} = \frac{k_f}{T_f s + 1}, \quad (10.62)$$

unde $k_f = \frac{\sqrt{2D\mu}}{\mu}$ este coeficientul de transfer al filtrului, iar $T_f = \mu^{-1}$ – constanta de timp.

Descrierea filtrului de formare în variabile de stare are forma:

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= -\mu v(t) + \sqrt{2D\mu}n(t), \\ y(t) &= v(t) \end{aligned} \quad (10.63)$$

și în figura 10.6, *b* se reprezintă schema structurală de realizare a filtrului de formare, la ieșirea căruia se obține semnalul stocastic cu densitatea spectrală dorită $S_{ff}(\omega)$.

10.7 Calculul dispersiei erorii sistemului de ordin arbitrar

10.7.1 Calculul preciziei transformării semnalelor stocastice staționare în regim staționar

Pentru determinarea preciziei transformării semnalelor stocastice staționare utile în regim staționar este folosită dispersia D sau mărimea medie pătratică a erorii σ_ε .

Analiza preciziei transformării semnalelor stocastice staționare în sistemele automate de ordin arbitrar, în funcție de parametrii funcțiilor de transfer al sistemului și de caracteristicile semnalelor externe care acționează asupra sistemului, se bazează pe structura sistemului (fig. 10.7).

În baza principiului superpoziției, analiza transferului intrare–ieșire se efectuează separat pentru semnalul de referință $r(t)$, semnalul zgomot alb $n(t)$ și perturbația $p(t)$, care acționează asupra sistemului.

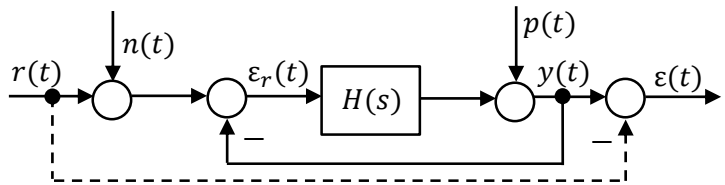


Fig. 10.7. Structura sistemului pentru calculul preciziei

Semnalul util $r(t)$ se însumează aditiv cu semnalul zgomot $n(t)$.

Se cere ca la ieșirea sistemului să fie reprodus semnalul de referință, iar semnalele $n(t)$ și $p(t)$ să fie rejectate.

Mărimea de ieșire $y(t)$ a sistemului se reprezintă ca suma reacției sistemului la semnalele care acționează:

$$y(t) = y_r(t) + y_p(t) + y_n(t). \quad (10.64)$$

Dacă semnalele de intrare în sistem nu sunt corelate, atunci eroarea staționară a transformării semnalelor de intrare în semnal de ieșire $y(t)$ al sistemului va fi:

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= r(t) - y(t) = r(t) - y_r(t) - y_p(t) - y_n(t) = \\ &= \varepsilon_r(t) - y_p(t) - y_n(t),\end{aligned}\quad (10.65)$$

unde $\varepsilon_r(t) = r(t) - y_r(t)$ este eroarea sistemului în raport cu referința, iar $y_p(t)$ și $y_n(t)$ sunt răspunsurile la acțiunea semnalelor $p(t)$ și $n(t)$.

Eroarea sistemului este suma erorilor separate în raport cu acțiunea semnalelor $r(t)$, $p(t)$ și $n(t)$:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_{er}(t) + \varepsilon_{yp}(t) + \varepsilon_{yn}(t),\quad (10.66)$$

unde $\varepsilon_{er}(t)$ este eroarea la reproducerea semnalului referinței $r(t)$, iar componentele erorii $\varepsilon_{yp}(t)$ și $\varepsilon_{yn}(t)$ – eroarea ieșirii sistemului la acțiunea semnalelor $p(t)$ și $n(t)$.

Dispersia erorii sistemului este suma dispersiilor erorilor la acțiunea semnalelor de intrare $r(t)$, $p(t)$ și $n(t)$:

$$D_\varepsilon = D_{er} + D_{yp} + D_{yn},\quad (10.67)$$

unde D_{er} este dispersia erorii sistemului când acționează numai semnalul de referință, D_{yp} – dispersia ieșirii sistemului în raport cu perturbația și D_{yn} – dispersia ieșirii sistemului în raport cu semnalul zgomot.

Componentele dispersiilor erorilor sistemului pentru semnalele de intrare referința $r(t)$, perturbația $p(t)$ și zgomotul alb ideal $n(t)$ se calculează pentru structura sistemului conform relațiilor [9, 17]:

$$\begin{aligned}D_{er} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| 1 - \frac{H(j\omega)}{1+H(j\omega)} \right|^2 S_{rr}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H_{er}(j\omega)|^2 S_{rr}(\omega) d\omega, \\ D_{yp} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{1+H(j\omega)} \right|^2 S_{pp}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H_{yp}(j\omega)|^2 S_{pp}(\omega) d\omega, \\ D_{yn} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{H(j\omega)}{1+H(j\omega)} \right|^2 S_{nn}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H_{yn}(j\omega)|^2 S_{nn}(\omega) d\omega,\end{aligned}\quad (10.68)$$

unde $H_{er}(j\omega)$, $H_{yp}(j\omega)$, $H_{yn}(j\omega)$ sunt locurile de transfer ale erorilor pe canalele intrare $r(t)$, $p(t)$, $n(t)$ – semnalul $y(t)$ de ieșire al sistemului, $S_{rr}(\omega)$, $S_{pp}(\omega)$, $S_{nn}(\omega)$ – densitățile spectrale cunoscute ale semnalelor exterioare $r(t)$, $p(t)$, $n(t)$.

Se consideră semnalele $r(t)$ și $p(t)$ caracterizate prin densitățile spectrale $S_{rr}(\omega) = S_{pp}(\omega) = 2D\mu/(\omega^2 + \mu^2)$, iar semnalul $n(t)$ se descrie prin densitatea spectrală a zgomotului alb ideal $S_{nn}(\omega) = c^2$.

Pentru determinarea preciziei sistemului automat în regim staționar, se calculează dispersiile erorilor cu locurile de transfer cunoscute ale sistemului în raport cu semnalele de intrare $r(t)$, $p(t)$, $n(t)$ și densitățile spectrale cunoscute ale acestora.

În cazul sistemului automat de ordin ridicat, dispersiile semnalelor sunt expresii complexe și calculul lor este o procedură dificilă.

10.7.2 Calculul dispersiei erorii în sistem de ordinu unu

Se consideră sistemul deschis descris de funcția de transfer a elementului integrator $H_d(s) = k/s$. Densitatea spectrală a semnalului de referință $r(t)$ se descrie prin relația $S_{rr}(\omega) = 2D\mu/(\omega^2 + \mu^2)$, iar semnalul zgomot $n(t) = 0$. Funcțiile de transfer ale sistemului închis și ale erorilor sistemului în raport cu semnalele de referință $r(t)$ și perturbație $p(t)$ se dau prin relațiile:

$$H_0(s) = \frac{k}{s+k}, H_{er}(s) = H_{yp}(s) = \frac{s}{s+k}. \quad (10.69)$$

Se determină pătratele modulelor locurilor de transfer în forma:

$$|H_0(j\omega)|^2 = \left| \frac{k}{j\omega+k} \right|^2 = \frac{k^2}{\omega^2+k^2},$$

$$|H_{er}(j\omega)|^2 = |H_{yp}(j\omega)|^2 = \left| \frac{j\omega}{j\omega+k} \right|^2 = \frac{\omega^2}{\omega^2+k^2}. \quad (10.70)$$

Dispersia erorii sistemului automat în raport cu semnalul de

referință $r(t)$ se determină prin relația:

$$D_{\varepsilon r} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H_{\varepsilon r}(j\omega)|^2 S_{rr}(\omega) d\omega. \quad (10.71)$$

Funcția din integrala dispersiei erorii se aduce la forma pentru care integrala se calculează prin relațiile din tabelul 10.1:

$$\begin{aligned} |H_{\varepsilon r}(j\omega)|^2 S_{rr}(\omega) &= \frac{\omega^2}{\omega^2+k^2} \frac{2D\mu}{\omega^2+\mu^2} = \\ &= 2D\mu \frac{-(j\omega)^2}{(j\omega+\mu)(-j\omega+\mu)(j\omega+k)(-j\omega+k)} = \\ &= 2D\mu \frac{-(j\omega)^2}{[(j\omega)^2+(k+\mu)(j\omega)+k\mu][(-j\omega)^2+(k+\mu)(-j\omega)+k\mu]}. \end{aligned} \quad (10.72)$$

Se calculează dispersia erorilor $D_{\varepsilon r} = D_{yp}$ din (10.71) prin expresia lui J_2 cu $n = 2$ din tabelul 10.1 prin relația:

$$D_{\varepsilon r} = D_{yp} = 2D\mu J_2 = 2D\mu \frac{-a_0 b_1 + a_2 b_0}{2a_0 a_1 a_2} = \frac{D\mu}{k+\mu},$$

unde coeficienții din (10.72), conform (10.50), se exprimă: $b_1 = -1$, $b_0 = 0$, $a_2 = 1$, $a_1 = k + \mu$, $a_0 = k\mu$.

Analizând rezultatul obținut, se constată că dispersia erorii pentru oricare variabilă a sistemului este proporțională dispersiei D a semnalului referinței, deoarece sistemul este liniar.

Pentru $k \rightarrow 0$ conturul de reacție a sistemului este deschis și semnalul erorii se egalează cu semnalul de referință $\varepsilon(t) \approx r(t)$ în condiția $n(t) = 0$, iar semnalul mărimii de ieșire este egal cu semnalul perturbației $y(t) = p(t)$ și atunci dispersiile erorilor sunt egale cu dispersia D a semnalului de referință:

$$D_{\varepsilon r} = D_{yp} = D.$$

Când $k \rightarrow \infty$, referința $r(t)$ se reproduce fără eroare ($n(t) = 0$),

iar perturbația $p(t)$ se filtrează și dispersia este egală cu zero:

$$D_{\varepsilon r} = D_{yp} = 0.$$

Creșterea parametrului μ conduce la creșterea componentelor în spectrele de frecvență înaltă a semnalelor $r(t)$ și $p(t)$, care se filtrează de sistem, dar care distorsionează puternic semnalele de intrare. Odată cu creșterea lui μ , dispersiile erorilor sistemului în raport cu semnalele de referință și perturbației cresc până la dispersiile semnalelor de intrare.

Pentru analiza transformării semnalului zgomot alb ideal $n(t)$ dispersia semnalului de ieșire al sistemului închis este:

$$D_{yn} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{nn}(\omega) |H_0(j\omega)|^2 d\omega.$$

Funcția integralei se aduce la forma:

$$S_{nn}(\omega) |H_0(j\omega)|^2 = c^2 \frac{k^2}{\omega^2 + k^2} = c^2 k^2 \frac{1}{(j\omega + k)(-j\omega + k)}.$$

Utilizând expresia J_1 din tabelul 10.1, se calculează dispersia D_{yn} pentru coeficienții $b_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_0 = k$ prin relația:

$$D_{yn} = c^2 k^2 J_1 = c^2 k^2 \frac{b_0}{2a_1 a_0} = \frac{c^2 k}{2}. \quad (10.73)$$

Dacă $k \rightarrow \infty$, atunci crește și frecvența de tăiere ω_t a sistemului și rezultă că banda de frecvență crește și semnalul zgomotului nu se filtrează, ceea ce conduce la creșterea dispersiei D_{yn} .

10.7.3 Calculul dispersiei erorii în sistem de ordinul doi

Se consideră sistemul automat deschis descris prin funcția de transfer [17-19]:

$$H_d(s) = \frac{k}{s(Ts+1)}, k > 0, T > 0.$$

Funcția de transfer a sistemului închis este:

$$H_0(s) = \frac{k}{Ts^2+s+k}.$$

Se reprezintă pătratul modulelor locurilor de transfer ale sistemului închis și a erorii în forma:

$$|H_0(j\omega)|^2 = \left| \frac{k}{T(j\omega)^2+j\omega+k} \right|^2 = \frac{k^2}{[T(j\omega)^2+j\omega+k][T(-j\omega)^2-j\omega+k]},$$

$$|H_{er}(j\omega)|^2 = \left| \frac{T(j\omega)^2+j\omega}{T(j\omega)^2+j\omega+k} \right|^2 = \frac{T^2\omega^4+\omega^2}{[T(j\omega)^2+j\omega+k][T(-j\omega)^2-j\omega+k]}.$$

Produsul densității spectrale a referinței la pătratul modulului locului de transfer al erorii se aduce la formă pentru calculul tabelar:

$$\begin{aligned} S_{rr}(\omega)|H_{er}(j\omega)|^2 &= \frac{2D\mu}{(j\omega+\mu)(-j\omega+\mu)} \frac{T^2(j\omega)^4-(j\omega)^2}{[T(j\omega)^2+j\omega+k][T(-j\omega)^2-j\omega+k]} = \\ &= 2D\mu \frac{T^2(j\omega)^4-(j\omega)^2}{[T(j\omega)^3+(1+\mu T)(j\omega)^2+(k+\mu)j\omega+k\mu][T(-j\omega)^3+(1+\mu T)(-j\omega)^2+(k+\mu)(-j\omega)+k\mu]}. \end{aligned}$$

Se calculează dispersia D_{er} a semnalului erorii sistemului de ordinul $n = 3$ pentru J_3 din tabelul 10.1 prin relația:

$$D_{er} = 2D\mu J_3 = 2D\mu \frac{-a_1b_2+a_3b_1-a_3a_2b_0/a_0}{2a_3(a_3a_0-a_2a_1)} = D \frac{k\mu T+\mu+\mu^2T}{k+\mu+\mu^2T} = D_{yp}, \quad (10.74)$$

pentru coeficienții $b_2 = T^2$, $b_1 = -1$, $b_0 = 0$, $a_3 = T$, $a_2 = 1 + \mu T$, $a_1 = k + \mu$, $a_0 = k\mu$.

Analizând expresia lui D_{er} , se trag unele concluzii.

1. Când constanta de timp se reduce $T \rightarrow 0$, f.d.t. $H(s)$ a sistemului deschis tinde către f.d.t. a elementului integrator și expresia

lui $D_{\varepsilon r}$ se echivalează cu dispersia erorii sistemului de ordinul unu.

2. Când produsul $\mu T = 1$, dispersia semnalului erorii $D_{\varepsilon r} = D$ și nu depinde de coeficientul k , ci se egalează cu dispersia semnalului perturbației D_{yp} .

Se dă expresia dispersiei erorii sistemului în forma:

$$D_{\varepsilon r} = D \left[1 + \frac{k(\mu T - 1)}{k + \mu + \mu^2 T} \right].$$

Când componenta $\mu T > 1$, atunci numărătorul dispersiei $D_{\varepsilon r}$ este mai mare decât numitorul acesteia pentru oricare k . Cu creșterea lui k crește și dispersia $D_{\varepsilon r}$ și la limită se obține $D_{\varepsilon r} = D\mu T > D$.

Dacă $\mu T < 1$, atunci numărătorul dispersiei $D_{\varepsilon r}$ este mai mic decât numitorul dispersiei $D_{\varepsilon r}$ pentru oricare k și cu creșterea lui k crește și dispersia și la limită se obține $D_{\varepsilon r} < D$.

Cu cât este mai mic produsul μT , cu atât mai bine se filtrează perturbația $p(t)$ și se reproduce referința $r(t)$. Cu creșterea lui k , valoarea densitatea erorii $D_{\varepsilon r}$ a sistemului se reduce și la limita $D_{\varepsilon r} = D\mu T$.

Variația dispersiei semnalului erorii $D_{\varepsilon r}(k)$ sistemului în funcție de modificarea μT este dată în figura 10.8.

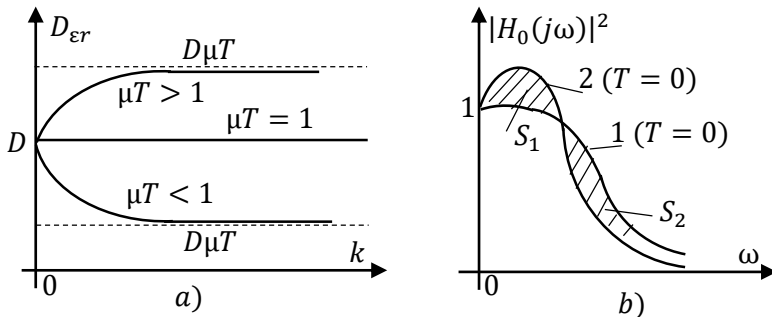


Fig. 10.8. Dispersia $D_{\varepsilon r}(k)$ a) și curbele $|H_0(j\omega)|^2$ ale sistemului b)

Expresia dispersiei erorii $D_{\varepsilon r}$ se aduce la forma:

$$D_{\varepsilon r} = D \frac{k\mu T + \mu + \mu^2 T}{k + \mu + \mu^2 T} = \frac{D\mu}{k + \mu + \mu^2 T} + \frac{D\mu(k + \mu)T}{k + \mu + \mu^2 T}.$$

Dacă $\mu^2 T \ll k + \mu$ sau $\mu T \ll 1 + k/\mu$, atunci se obține:

$$D_{\varepsilon r} = \frac{D\mu}{k+\mu} + D\mu T = \frac{D}{1+k/\mu} + D\mu T.$$

Din ultima expresie a dispersiei $D_{\varepsilon r}$ rezultă că prima componentă reprezintă dispersia erorii sistemului de ordinul unu, care exprimă proprietățile sistemului ca filtru trece-jos, iar a doua componentă exprimă proprietățile de oscilanță ale sistemului închis, care sunt determinate de constanta de timp T a sistemului. În cazul când $\mu T = 1$, efectul proprietăților sistemului ca filtru se compensează cu proprietățile de oscilanță, iar când $\mu T > 1$, atunci proprietățile de oscilanță ale sistemului au efect major.

La analiza transferului semnalului zgomotului $n(t)$, expresia produsului densității spectrale a semnalului zgomotului la modulul locului de transfer al sistemului închis se aduce la forma:

$$\begin{aligned} S_{nn}(\omega)|H_0(j\omega)|^2 &= c^2 \left| \frac{k}{T(j\omega)^2 + j\omega + k} \right|^2 = \\ &= c^2 \frac{k^2}{[T(j\omega)^2 + j\omega + k][T(-j\omega)^2 - j\omega + k]}. \end{aligned}$$

Se calculează dispersia D_{yn} la ieșirea sistemului pentru J_2 din tabelul 10.1 cu coeficienții $b_1 = 1$, $b_0 = 0$, $a_2 = T$, $a_1 = 1$, $a_0 = k$ și se obține:

$$D_{yn} = c^2 k^2 J_2 = c^2 k^2 J_2 \frac{-a_0 b_1 + a_2 b_0}{2a_0 a_1 a_2} = \frac{c^2 k}{2}.$$

Expresia dispersiei $D_{\varepsilon n}$ ieșirii sistemului obținută în raport cu semnalul zgomotului coincide cu dispersia sistemului de ordinul unu și nu depinde de constanta de timp T a sistemului.

În figura 10.8, b se dau curbele pătratului modulului locului de transfer $|H_0(j\omega)|^2$ al sistemului închis de ordinul unu (curba 1) și sistemului închis de ordinul doi (curba 2). La frecvență înaltă, curba 2 este situată mai jos decât curba 1, deci, proprietățile de filtrare ale sistemului de ordinul doi sunt mai bune, iar la frecvență joasă, curba 2

trece mai sus decât curba 1, ceea ce denotă proprietatea de rezonanță a sistemului. Cu cât este mai mare constanta de timp T a sistemului, cu atât mai puternic se evidențiază proprietățile de filtrare ale sistemului în domeniul de frecvență înaltă și proprietățile de rezonanță la frecvență joasă. Ariile hașurate S_1 și S_2 din figura 10.8, b nu depind de constanta de timp T a sistemului și rezultă că dacă asupra sistemului acționează zgomotul alb cu densitatea spectrală constantă, atunci expresia dispersiei D_{yn} nu este funcție de constanta de timp T a sistemului.

Așadar, la studierea sistemelor automate închise este necesar a fi evidențiate nu numai proprietățile de filtrare ale semnalelor de frecvență înaltă, dar și proprietățile de rezonanță și oscilanță, care se evidențiază la frecvențe joase.

La aceleași valori ale dispersiei D_{yn} a sistemului, care determină aceleași deviații ale semnalelor la ieșirea sistemelor închise studiate de ordinul unu și doi, componența spectrală a semnalelor diferă. Pentru sistemele de ordinul doi se evidențiază componentele spectrului de frecvență joasă și medie ale semnalului în comparație cu sistemul de ordinul unu unde și mai puțin se evidențiază componentele spectrului de frecvență înaltă.

În cazul când $n(t)$ este zgomot alb real, produsul densității spectrale a zgomotului și a pătratului modulului locului de transfer al sistemului închis va avea forma:

$$\begin{aligned} S_{nn}(\omega)|H_0(j\omega)|^2 &= \frac{2D\mu}{\omega^2+\mu^2} \left| \frac{k}{T(j\omega)^2+j\omega+k} \right|^2 = \\ &= 2D\mu k^2 \frac{1}{(j\omega+\mu)(-j\omega+\mu)[T(j\omega)^2+j\omega+k][T(-j\omega)^2-j\omega+k]} = \\ &= 2D\mu k^2 \frac{1}{[T(j\omega)^3+(1+\mu T)(j\omega)^2+(k+\mu)j\omega+k\mu]} \times \\ &\times \frac{1}{[T(-j\omega)^3+(1+\mu T)(-j\omega)^2+(k+\mu)(-j\omega)+k\mu]}. \end{aligned}$$

Dispersia D_{yn} a semnalului ieșirii sistemului la acțiunea zgomotului alb real se calculează pentru J_3 din tabelul 10.1 cu coeficienții $b_2 = b_1 = 0$, $b_0 = 1$, $a_3 = T$, $a_2 = 1 + \mu T$, $a_1 = k + \mu$, $a_0 = k\mu$ și se obține expresia:

$$D_{yp} = 2D\mu k^2 J_3 = 2D\mu k^2 \frac{-a_1 b_2 + a_3 b_1 - a_3 a_2 b_0 / a_0}{2a_3(a_3 a_0 - a_2 a_1)} = D \frac{k(1+\mu T)}{k+\mu+\mu^2 T}.$$

Când $\mu T > kT - 1$, atunci dispersia semnalului de ieșire al sistemului $D_{yp} < D$ și rezultă că sistemul filtrează zgomotul alb $n(t)$.

Dacă la intrarea sistemului acționează numai zgomotul $n(t)$ cu densitatea spectrală:

$$S_{nn}(\omega) = \frac{2D\mu}{\omega^2 + \mu^2},$$

atunci suma semnalelor la ieșirea $y(t)$ a sistemului și eroarea $\varepsilon(t)$ a sumatorului este egală cu valoarea semnalului $n(t)$ de intrare:

$$n(t) = y(t) + \varepsilon(t)$$

și dispersia acestor semnale constituie suma dispersiilor:

$$D_s = D_{\varepsilon n} + D_{yn} = D\mu \frac{(k+\mu)T+1}{k+\mu+\mu^2 T} + D \frac{k(1+\mu T)}{k+\mu+\mu^2 T} = D \left[1 + \frac{2k\mu T}{k+\mu+\mu^2 T} \right] > D.$$

Dispersia D_s a sumei este mai mare decât dispersia D a semnalului de intrare $n(t) = y(t) + \varepsilon(t)$, fiindcă aceste semnale sunt corelate.

10.7.4 Calculul dispersiei erorii în sistem de ordinul trei

Se consideră sistemul deschis care se descrie prin f.d.t. [17-19]:

$$H_d(s) = \frac{k}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}, \quad k > 0, T_1 > 0, T_2 > 0.$$

Funcția de transfer a sistemului închis va fi:

$$H_0(s) = \frac{k}{T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2) s^2 + s + k}.$$

Se determină funcțiile de transfer al erorii sistemului și pentru perturbație $p(t)$ în condiția $n(t) = 0$:

$$H_{\varepsilon r}(s) = H_{\varepsilon p}(s) = \frac{T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2) s^2 + s}{T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2) s^2 + s + k}.$$

Dispersia $D_{\varepsilon r}$ erorii sistemului în raport cu referința se reprezintă astfel:

$$\begin{aligned} D_{\varepsilon r} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{rr}(\omega) |H_{\varepsilon r}(j\omega)|^2 d\omega = \\ &= \frac{D\mu}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-(T_1 T_2)^2 (j\omega)^6 + (T_1^2 + T_2^2) (j\omega)^4 - (j\omega)^2}{A(j\omega)A(-j\omega)} d\omega, \end{aligned}$$

iar $A(j\omega) = T_1 T_2 (j\omega)^4 + (T_1 + T_2 + \mu T_1 T_2) (j\omega)^3 + (1 + \mu(T_1 + T_2)) \times (j\omega)^2 + (\mu + k) (j\omega) + \mu k$.

Se calculează dispersia erorii $D_{\varepsilon r}$ după expresia lui J_4 din tabelul 10.1 cu coeficienții $b_3 = (T_1 T_2)^2$, $b_2 = T_1^2 + T_2^2$, $b_1 = -1$, $b_0 = 0$, $a_4 = T_1 T_2$, $a_3 = T_1 + T_2 + \mu T_1 T_2$, $a_2 = 1 + \mu(T_1 + T_2)$, $a_1 = k + \mu$, $a_0 = k\mu$ și se obține expresia:

$$\begin{aligned} D_{\varepsilon r} &= 2D\mu J_4 = 2D\mu \frac{b_3(-a_3 a_0 + a_2 a_1) - a_4 a_1 b_2 + a_4 a_3 b_1 + a_4 b_0 (a_4 a_1 - a_3 a_2) / a_0}{2a_4 (a_4 a_1^2 + a_3^2 a_0 - a_3 a_2 a_1)} = \\ &= D\mu \frac{(T_1 T_2 \mu^2 + 1)(T_1 + T_2 - T_1 T_2 k) + (k + \mu)(T_1 + T_2)^2}{(T_1 + T_2 - T_1 T_2 k)(k + \mu + \mu^2(T_1 + T_2 + T_1 T_2 \mu))} = D_{yp}. \end{aligned}$$

Dacă $k = 0$, atunci dispersia erorii $D_{\varepsilon r}$ și dispersia perturbației D_{yp} se egalează cu dispersia semnalului referinței $D_{\varepsilon r} = D_{yp} = D$.

În cazul când $T_1 = 0$ sau $T_2 = 0$, expresia dispersiei $D_{\varepsilon r}$ a semnalului erorii coincide cu expresia dispersiei erorii (10.74) pentru sistemul de ordinul doi.

Dacă $k = (T_1 + T_2) / T_1 T_2 = k_{cr}$, atunci sistemul este la limita de stabilitate (regim critic) și la frecvența $\omega = 1 / \sqrt{T_1 T_2}$ modulul locului de transfer al sistemului închis $|H_0(j\omega)| \rightarrow \infty$ și dispersia $D_{\varepsilon r} \rightarrow \infty$.

În condiția coeficientului de transfer:

$$k < k_{cr}(1 - \mu(T_1 + T_2) - \mu^2 T_1 T_2)$$

dispersia semnalului erorii satisface condiția:

$$D_{\varepsilon r} < D.$$

În cazul când $k > 0$, se cere satisfacerea condiției:

$$\mu(T_1 + T_2 + \mu T_1 T_2) < 1. \quad (10.75)$$

Din inegalitatea (10.75) rezultă că numai la variația lui k într-un anumit interval dispersia erorii $D_{\varepsilon r}$ poate avea valori mai mici decât dispersia D a referinței și $D_{\varepsilon r} < D$ și, în aceste condiții, sistemul reproduce semnalul referinței și rejectează perturbația.

Dispersia semnalului de ieșire al sistemului automat la acțiunea semnalului zgomot alb ideal, după transformare, se calculează prin integrala J_3 cu coeficienții $b_2 = b_2 = 0$, $b_0 = 1$, $a_3 = T_1 T_2$, $a_2 = T_1 + T_2$, $a_1 = 1$, $a_0 = k$ și se obține expresia:

$$\begin{aligned} D_{yn} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{nn}(\omega) |H_0(j\omega)|^2 d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c^2 \left| \frac{k}{T_1 T_2 (j\omega)^3 + (T_1 + T_2)(j\omega)^2 + j\omega + k} \right|^2 d\omega = \\ &= k^2 c^2 J_3 = k^2 c^2 = \frac{-a_1 b_2 + a_3 b_1 - a_3 a_2 b_0 / a_0}{2 a_3 (a_3 a_0 - a_2 a_1)} = \frac{kc^2}{2} \frac{1}{1 - kT_1 T_2 / (T_1 + T_2)}. \end{aligned}$$

În comparație cu sistemele de ordinul unu și doi, în sistemul de ordinul trei funcția $D_{yn} = f(k)$ la valorile constante ale lui $T_1 = T_2 = \text{const}$ este neliniară. Dacă $k > 0$, se constată creșterea dispersiei D_{yn} și rezultă o creștere a proprietăților de oscilanță ale sistemului în comparație cu cele de filtrare.

Chestionar și probleme

1. Explicați transformarea semnalului stocastic de elementul liniar.
2. Prin ce relație funcțională în domeniul timpului se descrie transferul intrare-ieșire al semnalului stocastic de elementul liniar?
3. Care este relația funcțională a dispersiei semnalului de ieșire al elementului liniar?
4. Explicați ce reprezintă funcția de autocorelație a semnalelor stocastice.
5. Ce reprezintă noțiunea de funcție de intercorelație a semnalelor stocastice?
6. Care sunt relațiile funcționale ce descriu transferul semnalelor stocastice de elementul dinamic liniar în domeniul pulsație?
7. Prezentați relația de calcul al densității spectrale a semnalului de ieșire al elementului liniar.
8. Prezentați relația de calcul al dispersiei semnalului de ieșire al elementului liniar.
9. Prezentați și explicați formula Wiener-Hinchin.
10. Prin ce relație funcțională se calculează densitatea interspectrală a transferului semnalelor stocastice intrare-ieșire de elementul liniar?
11. Explicați metodele analitice de calcul al densității semnalului stocastic al sistemului automat și posibilitățile acestora.
12. Ce reprezintă metodele grafo-analitice de calcul al densității semnalului stocastic al sistemului automat și posibilitățile acestora?
13. Se consideră funcția de transfer a sistemului:

$$H(s) = \frac{4}{4s^2 + 2s + 5},$$

la intrarea căruia acționează semnalul stocastic $x(t)$ cu densitatea spectrală:

$$S_{xx}(\omega) = \frac{10}{\omega^2 + 1}.$$

Calculați densitatea spectrală a semnalului de ieșire $y(t)$ al sistemului.

14. Ce reprezintă elementul dinamic filtrul de formare?
15. Cum se calculează dispersia semnalului erorii sistemului automat?

11 SINTEZA SISTEMELOR AUTOMATE LINIARE LA ACȚIUNEA SEMNALELOR STOCASTICE

11.1 Formularea problemei

Se consideră structura sistemului automat linear cu f.d.t. $H(s)$ (fig. 11.1, a) care transformă semnalul aditiv $g(t)$ ca suma semnalului de referință $r(t)$ și semnalului zgomot $n(t)$ ($g(t) = r(t) + n(t)$) în semnal stocastic al ieșirii $y(t)$ a sistemului. Transformarea ideală a semnalului $r(t)$ în semnalul dorit $z(t)$ se realizează cu operatorul $V(s)$ astfel, încât eroarea să fie minimală $\varepsilon(t) = z(t) - y(t)$.

Problema separării semnalului de referință de semnalul zgomot și rejecția acestuia se numește *problema filtrării* [17-19].

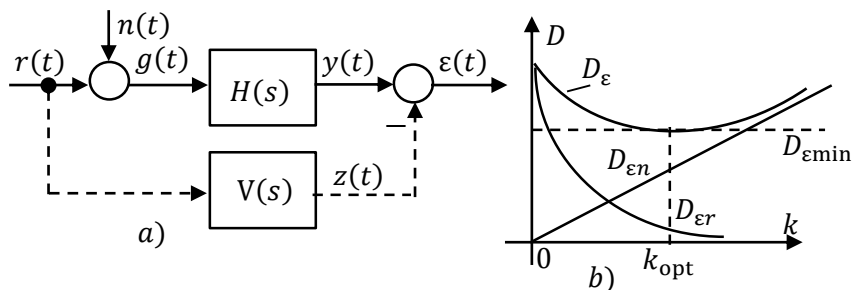


Fig. 11.1. Schema structurală a sistemului:

- a) transformarea ideală și reală a semnalului de referință $r(t)$,
- b) curbele tipice ale componentelor dispersiei erorii

Introducerea operatorului $V(s)$ dă posibilitatea ca problema filtrării să fie aplicabilă nu numai la sistemele de poziționare pentru care $z(t) = r(t)$ ($V(s) = 1$), dar și pentru alte clase de sisteme care depinde de modelul $V(s)$.

În sistemele reale și supuse acțiunilor semnalelor stocastice transformarea ideală a semnalului $r(t)$ în $z(t)$ este imposibilă datorită proprietăților dinamice ale sistemului și acțiunii semnalelor zgomot.

Sinteza sistemului automat la acțiunea semnalelor stocastice constă în determinarea structurii optimale și parametrilor optimali ai operatorului de transformare a semnalelor (caracteristicile dinamice).

Calitatea funcționării sistemului automat se determină prin diferite criterii. Criteriul cel mai semnificativ este criteriul probabilist ce caracterizează precizia transformării (reproducerea) semnalelor utile în condițiile existenței acțiunilor semnalelor stocastice și acesta este criteriul erorii medii pătratică minime $\varepsilon(t)$, iar în cazul când referința $r(t) = 0$, se utilizează criteriul dispersiei erorii minimale $D_\varepsilon = \varepsilon^2$.

În aceste cazuri, problema de sinteză a sistemului se reduce la determinarea unei funcții de transfer $H_{\text{opt}}(s)$ optimale fizic realizabilă, pentru care dispersia va fi minimală $D_\varepsilon = \min$.

Determinarea preciziei sistemului cu aplicarea acestor criterii se efectuează după mărimea medie a erorii, dar nu după eroarea instantanee. Criteriile nu se aplică în cazul când se cere ca eroarea să nu depășească limita impusă și când cerințele pentru valorile erorii nu sunt aceleași la diferite momente de timp.

Dacă în sistem acționează numai semnalul referinței $r(t)$ sau numai al zgomotului $n(t)$, atunci, selectând parametrii respectivi ai f.d.t. a elementelor sistemului, teoretic se poate obține oricare precizie a sistemului. Dacă în sistem acționează ambele semnale $r(t)$ și $n(t)$, atunci precizia sistemului nu poate fi oricare.

În figura 11.1, *b* se dau curbele tipice ale componentelor dispersiei semnalului erorii funcție de coeficientul de transfer k al sistemului deschis: D_ε este dispersia erorii, $D_{\varepsilon r}$ – dispersia în raport cu semnalul $r(t)$, $D_{\varepsilon n}$ – dispersia în raport cu semnalul $n(t)$, $D_{\varepsilon \min}$ – dispersia minimală a sistemului.

Din analiza acestor curbe, pentru o mai bună reproducere a semnalului $r(t)$ și, respectiv, reducerea dispersiei $D_{\varepsilon r}$, coeficientul de transfer k al sistemului trebuie să fie cât mai mare. Pentru o rejecție cât mai eficientă a zgomotului $n(t)$, respectiv reducerea $D_{\varepsilon n}$, coeficientul de transfer k al sistemului trebuie să fie cât mai mic. La acțiunea ambelor semnale, $r(t)$ și $n(t)$, este posibilă obținerea valorii optime $k = k_{\text{opt}}$ pentru care $D_\varepsilon^{\min} < D_\varepsilon$.

În cazul când densitățile spectrale $S_{rr}(\omega)$ ale referinței și $S_{nn}(\omega)$ ale zgomotului alb sunt distanțate una de alta (fig.11.2, *a*), caracteristica amplitudine-frecvență $A(\omega)$ se alege cu o gamă mare de frecvențe pentru a permite transmiterea componentelor spectrului

semnalului de referință $r(t)$ (pentru reproducerea cu precizie a referinței) și totodată o gamă de frecvențe redusă pentru filtrarea componentelor semnalului zgomotului $n(t)$ (pentru a reduce influența zgomotului asupra sistemului).

Din analiza curbelor (fig. 11.2, *b*) se constată că densitatea spectrală (puterea) $S_{rr}(\omega)$ a referinței este concentrată în partea frecvențelor joase și atunci caracteristica amplitudine-frecvență $A(\omega)$ a sistemului se selectează cât mai aproape de densitatea spectrală $S_{rr}(\omega)$, iar partea lui $A(\omega)$ de frecvență înaltă să fie cât mai aproape de curba densității spectrale $S_{nn}(\omega)$.

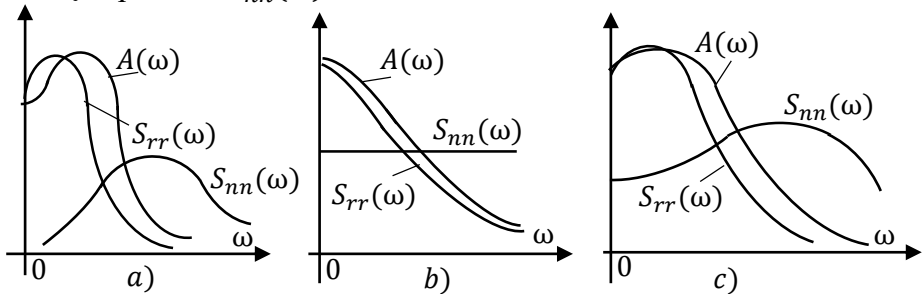


Fig. 11.2. Alurile relative ale densităților spectrale ale semnalelor $r(t)$ și $n(t)$ și ale amplitudinii-frecvență a sistemului

În general, când densitățile spectrale ale semnalelor se suprapun și au formă arbitrară (fig. 11.2, *c*), calculul parametrilor optimați ai sistemului este dificil.

Problema sintezei sistemului automat la acțiunea semnalelor stocastice se formulează în două tipuri de probleme.

1. *Sinteza sistemului optimal cu structură fixă și caracteristicile cunoscute ale semnalelor stocastice* și în rezultat se selectează parametrii sistemului, pentru care se obține dispersia minimă a erorii.

2. *Sinteza optimală a sistemului pentru o structură arbitrară și caracteristicile cunoscute ale semnalelor stocastice* și în rezultat se selectează structura și parametrii sistemului, pentru care se obține dispersia minimă a erorii.

11.2 Sinteza sistemului automat optimal cu structură fixă

Se consideră structura sistemului automat din figura 11.1 cu f.d.t. $H(s)$ cunoscută și cu semnalele stocastice de intrare cu caracteristicile cunoscute. O parte dintre parametrii sistemului q_1, \dots, q_r pot fi variați într-un domeniu limitat și se calculează dispersia erorii minime, utilizând metoda optimizării parametrice prin relația (10.49):

$$D_\varepsilon = J_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\omega^2)}{A(\omega^2)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|B(j\omega)|^2}{A(j\omega)A(-j\omega)} d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b_{n-1}(j\omega)^{2(n-1)} + b_{n-2}(j\omega)^{2(n-2)} + \dots + b_1(j\omega)^2 + b_0}{A(j\omega)A(-j\omega)} d\omega = D_{\min}. \quad (11.1)$$

Expresia dispersiei (11.1) se reprezintă ca funcție de parametrii variabili q_1, q_2, \dots, q_r ai sistemului după care se efectuează optimizarea parametrică:

$$D_\varepsilon = D_\varepsilon(q) = J(q_1, q_2, \dots, q_r) = D_{\varepsilon\min}. \quad (11.2)$$

La soluționarea problemei (11.2) prin modificarea parametrilor în limitele date se presupune că minimumul $D_\varepsilon(q)$ există și este unic. Din (11.2), aplicând derivatele parțiale la parametrii variabili și egalându-le cu zero, se obține un sistem de ecuații algebrice:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(q)}{\partial q_1} &= 0, \\ \frac{\partial J(q)}{\partial q_2} &= 0, \\ \dots\dots\dots & \\ \frac{\partial J(q)}{\partial q_r} &= 0. \end{aligned} \quad (11.3)$$

Rezolvând acest sistem prin metode de optimizare parametrică, se determină valorile optime ale parametrilor q_1, q_2, \dots, q_r pentru care

se obține valoarea minimă a dispersiei erorii sistemului.

La rezolvarea problemelor de optimizare este necesar a stabili posibilitatea de a soluționa problema pentru structura dată a sistemului și caracteristicile cunoscute ale semnalelor stocastice de intrare.

Se consideră structura sistemului automat (fig. 11.3) cu f.d.t. $H_1(s)$, $H_2(s)$ și $H_3(s)$ cunoscute și cu semnalul referinței $r(t)$ și semnalele $n_1(t)$, $n_2(t)$, $n_3(t)$ care acționează asupra sistemului cu caracteristicile cunoscute și sunt semnale zgomote albe ideale.

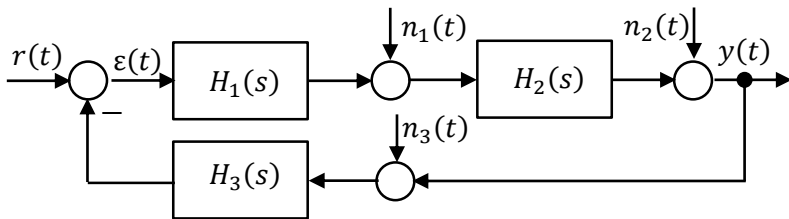


Fig. 11.3. Structura sistemului cu acțiunea semnalelor stocastice de intrare

În structura sistemului, funcțiile de transfer $H_1(s)$, $H_2(s)$ și $H_3(s)$ sunt fizic realizabile, deci, gradele numărătorului sunt mai mici decât gradele numitorului. Se consideră gradul numărătorului $H_2(s)$ mai mic decât gradul numitorului și, în acest caz, semnalul $n_2(t)$ nu poate fi reprezentat ca zgomot alb ideal, deoarece locul de transfer $H_{yn_2}(j\omega)$ este filtrul de frecvență înaltă (vezi p. 10.6).

Pentru realizarea procedurii de optimizare în baza sistemului (11.2) se cere ca la creșterea parametrului modificat unele componente ale dispersiei erorii să crească, iar altele să scadă și, astfel, cel puțin una din componente să fie minimală pe acest parametru.

La optimizarea sistemului de ordinul unu și doi, când asupra sistemului automat acționează semnalul zgomot, dispersia erorii este minimă, când valoarea coeficientului de transfer al sistemului deschis $k = 0$ sau $k = \infty$.

Pentru sistemele de ordinul $n > 2$, dispersia erorii minime poate fi obținută la acțiunea numai a unui singur semnal zgomot, deoarece la valori mici ale lui k dispersia erorii se echivalează cu dispersia semnalului zgomot. Cu creșterea lui k , în anumite condiții dintre

intervalul de frecvență, în care este concentrat spectrul semnalului de referință și a constantelor de timp ale sistemului, dispersia erorii scade, dar începând cu valori ale lui k , când crește oscilația sistemului, dispersia erorii crește și tinde la infinit la valoarea critică k_{cr} .

Problema de optimizare se soluționează când asupra sistemului acționează semnalele stocastice de referință, perturbația și semnalul zgomot și, la variația parametrului sistemului, eroarea sistemului în raport cu semnalul referinței și eroarea sistemului în raport cu zgomotul se modifică în sens diferit.

Exemplul 11.1. Se consideră structura sistemului automat (fig. 10.7) cu f.d.t. $H(s) = k/s$ și la intrarea sistemului acționează semnalul aditiv $g(t) = r(t) + n(t)$, unde $r(t)$ este semnalul util cu densitatea spectrală $S_{rr}(\omega) = 2D\mu/(\omega^2 + \mu^2)$, iar $n(t)$ – semnalul zgomot alb cu densitatea spectrală $S_{nn}(\omega) = c^2$. Dispersia erorii se descrie prin relația:

$$D_\varepsilon = D_{\varepsilon r} + D_{\varepsilon n}.$$

Se cere să se determine coeficientul de transfer al sistemului $k = k_{opt}$ pentru care dispersia erorii $D_\varepsilon = D_{\min}$.

Soluționare. Se dă dispersia erorii prin relația:

$$D_\varepsilon = \frac{D\mu}{k+\mu} + c^2 \frac{k}{2}.$$

Se determină derivata dispersiei în raport cu coeficientul k :

$$\frac{\partial D_\varepsilon}{\partial k} = -\frac{D\mu}{(k+\mu)^2} + \frac{c^2}{2} = 0.$$

Se obține ecuația pătratică:

$$c^2 k^2 + 2k\mu c^2 + \mu^2 c^2 - 2D\mu = 0,$$

care se soluționează și se calculează coeficientul de transfer:

$$k_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{2D\mu}/c.$$

Pentru sistemul automat cu reacție negativă valoarea lui $k > 0$ și se obține:

$$k_{opt} = \frac{\sqrt{2D\mu}}{c} - \mu.$$

Condiția $k_{opt} > 0$ impune inegalitatea:

$$\frac{D}{\mu} > \frac{c^2}{2}.$$

Valoarea optimală a coeficientului de transfer este funcție numai de parametrii semnalului de intrare. Cu cât este mai mare μ (semnalul de intrare are spectrul mai redus), cu atât mai redusă trebuie să fie valoarea lui k (este mai redusă banda de frecvențe a sistemului). Valoarea mai mare a lui D impune banda mai largă de frecvențe. Cu cât este mai mare intensitatea c a semnalului de intrare, cu atât mai redusă va fi valoarea coeficientului k și rezultă că banda de frecvențe este redusă, iar frecvența de tăiere $\omega^2 = k$.

Dispersia minimă a erorii se calculează prin relația:

$$D_{\min} = c(\sqrt{2D\mu} - \frac{\mu c}{2}).$$

Se introduce notația $\alpha = (\mu c^2/2)/D$ și în corespundere cu inegalitatea se obține $\alpha < 1$.

Astfel, dispersia se exprimă:

$$D_{\min} = (2\sqrt{\alpha} - \alpha)D.$$

Se reprezintă eroarea relativă a dispersiei erorii:

$$\delta = \frac{D_{\min}}{D} = \frac{(2\sqrt{\alpha} - \alpha)D}{D} = 2\sqrt{\alpha} - \alpha = \sqrt{\alpha}(2 - \sqrt{\alpha}),$$

ce caracterizează eficiența filtrării. Valoarea lui $\delta = 0$ când $\alpha = 0$ și δ crește cu creșterea valorii lui α până la $\alpha = 1$.

Dacă se cere ca eroarea relativă a dispersiei erorii să fie limitată:

$$\delta = \sqrt{\alpha}(2 - \sqrt{\alpha}) < \delta_l,$$

atunci se limitează valoarea lui α :

$$\alpha < 2 - \delta - 2\sqrt{1 - \delta}.$$

De exemplu, dacă $\delta = 0.8$, atunci $\alpha < 0.306$, iar $c^2 < 0.5D/\mu$. ■

La realizarea parametrilor sintetizați optimali ai sistemului automat trebuie verificate posibilitățile tehnice de realizare, de asemenea, având în vedere și performanțele sistemului (timpul de reglare, suprareglarea etc.).

Dispersia minimală a semnalului erorii sistemului nu poate fi redusă prin mijloace tehnice.

11.3 Sinteza sistemului automat optimal cu structură arbitrară

Se consideră structura optimală a sistemului (fig. 11.1) cu modelul matematic dat de funcția pondere $w(t)$, la intrarea căruia acționează suma semnalelor centrate cu media nulă $g(t) = r(t) + n(t)$ (referință $r(t)$ și semnalul zgomot $n(t)$) corelate și cu caracteristicile cunoscute, atunci dispersia erorii sistemului este minimă pentru o oarecare realizare a erorii stocastice:

$$D_\varepsilon = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \varepsilon^2(t) dt = D_{\min}, \quad (11.4)$$

unde $\varepsilon(t)$ este o realizare a erorii stocastice.

Prin caracteristică dinamică a sistemului se înțelege funcția pondere $w(t)$ sau locul de transfer $H(j\omega)$.

Funcției pondere $w(t)$ se impune condiția de realizabilitate fizică $w(t) \equiv 0$, pentru $t < 0$.

Semnalul la ieșirea sistemului în regim staționar se dă prin relația:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \lambda)w(\lambda)d\lambda, \quad (11.5)$$

iar eroarea staționară a sistemului prin expresia:

$$\varepsilon(t) = z(t) - y(t) = z(t) - \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \lambda)w(\lambda)d\lambda, \quad (11.6)$$

unde $z(t)$ este semnalul dorit la ieșirea sistemului, iar $y(t)$ – mărimea reală a semnalului de ieșire al sistemului.

Dispersia minimală a erorii sistemului se exprimă prin relația:

$$D_\varepsilon = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [z(t) - \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \lambda)w(\lambda)d\lambda]^2 dt = J\{w(t)\} = D_{\min}, \quad (11.7)$$

care reprezintă relația funcțională a dispersiei minimale a erorii sistemului funcție de caracteristicile probabiliste ale semnalelor de intrare și funcția pondere a sistemului.

Soluționarea problemei de minimizare a dispersiei (11.7) conduce la ecuația integrală Wiener-Hopf de filtrare optimală a sistemului automat, soluția căreia este funcția pondere optimală.

După observarea semnalului mărimii de ieșire a sistemului pe intervalul $[t_0, t]$, trebuie determinat semnalul de ieșire la momentul t_1 . Sunt posibile trei modele de formulare a problemei:

- 1) problema de interpolare $t_1 < t$;
- 2) problema de filtrare $t_1 = t$;
- 3) problema de extrapolare sau anticipare $t_1 > t$.

Formularea problemei de *filtrare optimală* a sistemului liniar a fost propusă de N. Wiener în 1949 și A. Kolmogorov în 1951, numită *filtrul optimal Wiener*, și dată de ecuația integrală Wiener-Hopf [17-19]:

$$K_{zg}(\tau) - \int_{-T}^T w(\lambda) K_{gg}(\tau - \lambda) d\lambda = 0, \tau \geq 0, \quad (11.8)$$

unde $K_{zg}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t) z(t + \tau) dt$ este funcția de intercorelație dintre semnalul de ieșire dorit $z(t)$ și semnalul de referință $r(t)$, $w(\lambda)$ – funcția pondere a sistemului, $K_{gg}(\tau) = K_{rr}(\tau) + K_{rn}(\tau) + K_{nr}(\tau) + K_{nn}(\tau)$ – funcția de intercorelație a semnalului sumar de intrare $g(t) = r(t) + n(t)$.

Dificultățile la soluționarea acestei probleme constau în faptul că funcția pondere $w(t)$ trebuie să corespundă condițiilor de realizabilitate fizică. În acest scop, expresia (11.8) ia forma:

$$K_{zg}(\tau) - \int_{-T}^T w(\lambda) K_{gg}(\tau - \lambda) d\lambda = A(\tau), \quad (11.9)$$

unde funcția necunoscută $A(\tau) \equiv 0, \tau \geq 0$.

Funcția de intercorelație $K_{zg}(\tau)$ a semnalului dorit $z(t)$ și a semnalului $g(t)$ și funcția de intercorelație $K_{yg}(\tau)$ a semnalului de ieșire real $y(t)$ a sistemului semnalului $g(t)$ va fi:

$$K_{yg}(\tau) = \int_{-T}^T w(\lambda) K_{gg}(\tau - \lambda) d\lambda, \quad (11.10)$$

și atunci când $|\tau| \rightarrow \infty$ funcția $K_{yg}(\tau) = 0$, de unde rezultă:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} A(\tau) = 0. \quad (11.11)$$

În figura 11.4 este reprezentată o formă posibilă a funcției $A(\tau)$.

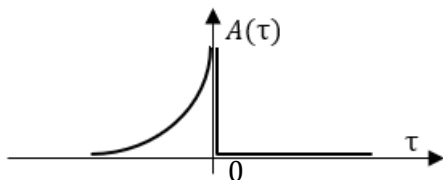


Fig. 11.4. Forma posibilă a funcției $A(\tau)$

Conform condițiilor de realizabilitate fizică a imaginii Fourier $A(\tau)$, se cere ca funcția să nu aibă zerouri și poli alocați în semiplanul superior al planului complex al variabilei ω .

Dacă, de exemplu, funcția $A(\tau)$ are forma:

$$A(\tau) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\alpha_i \tau}, \quad (11.12)$$

atunci toate valorile reale trebuie să fie pozitive $\alpha_i > 0$, iar dacă sunt mai mici decât zero, atunci nu se va respecta condiția (11.11).

Transformata Fourier $A(\tau)$ este:

$$F\{A(\tau)\} = A(j\omega) = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{j\omega - \alpha_i}, \quad (11.13)$$

deci, polii sunt $\omega_i = -j\alpha_i$, fiind alocați în semiplanul inferior al planului complex ω .

Transformata Fourier a expresiei (11.9) este:

$$S_{zg}(j\omega) - H(j\omega)S_{gg}(j\omega) = A(j\omega). \quad (11.14)$$

Se cere ca locul de transfer al sistemului $H(j\omega)$, după care se determină f.d.t. optimală $H_{opt}(s)$ a sistemului stabil, să nu conțină zerouri și poli alocați în semiplanul inferior. Se cunoaște că oricărei rădăcini alocate în semiplanul inferior al planului complex al variabilei ω îi corespunde o rădăcină în semiplanul din dreapta al planului complex s : dacă $\omega_i = -j\alpha_i$, atunci $s_i = j\omega_i = \alpha_i$. Locului de transfer $H(j\omega)$ cu polii în semiplanul inferior îi corespunde funcția pondere $w(t)$, care există și pentru valorile negative ale lui t , dar care nu corespunde condițiilor de realizabilitate fizică a sistemului.

Pentru determinarea condițiilor de realizabilitate fizică a locului de transfer $H(j\omega)$ se dă în formă factorizată. Se introduce notația $H^+(j\omega)$, ceea ce denotă că zerourile și polii lui $H(j\omega)$ sunt alocați în semiplanul superior al planului complex ω , iar $H^-(j\omega)$ – zerourile și polii lui $H(j\omega)$ sunt alocați în semiplanul inferior al planului complex ω .

Rezultă că imaginea $A(j\omega)$ care nu are zerouri și poli în semiplanul superior se notează $A^-(j\omega)$.

Se reprezintă densitatea spectrală a semnalului de intrare $g(t)$ prin factorizare în formă de produs:

$$S_{gg}(\omega) = S_{gg}^+(j\omega) S_{gg}^-(j\omega), \quad (11.15)$$

unde $S_{gg}^+(j\omega)$ are zerourile și polii alocați în semiplanul inferior al planului complex ω , iar $S_{gg}^-(j\omega)$ – zerourile și polii alocați în semiplanul superior al planului complex.

Expresia (11.15) cu (11.14) obține forma:

$$S_{gg}^-(j\omega) \left[\frac{S_{zg}(j\omega)}{S_{gg}^-(j\omega)} - H^+(j\omega) S_{gg}^+(j\omega) \right] = A^-(j\omega). \quad (11.16)$$

Prima componentă din parantezele pătrate a expresiei (11.16) are forma:

$$\frac{S_{zg}(j\omega)}{S_{gg}^-(j\omega)} = \left[\frac{S_{zg}(j\omega)}{S_{gg}^-(j\omega)} \right]^+ + \left[\frac{S_{zg}(j\omega)}{S_{gg}^-(j\omega)} \right]^-.$$

În expresia obținută, primul termen nu are zerouri și poli în semiplanul inferior, iar al doilea termen nu are zerouri și poli în semiplanul superior al planului complex. Operația efectuată se numește *separare* sau *descompunere*.

Deoarece $A^-(j\omega)$ nu are zerouri și poli în semiplanul superior al planului complex, partea stângă a expresiei (11.16), de asemenea, nu va avea zerouri și poli în semiplanul superior al planului complex și aceasta este posibil numai în cazul când se îndeplinește condiția:

$$\left[\frac{S_{zg}(j\omega)}{S_{gg}^-(j\omega)} \right]^+ - H^+(j\omega)S_{gg}^+(j\omega) = 0, \quad (11.17)$$

din care se determină locul de transfer optimal al sistemului în forma:

$$H_{\text{opt}}(j\omega) = \frac{\left[\frac{S_{zg}(j\omega)}{S_{gg}^-(j\omega)} \right]^+}{S_{gg}^+(j\omega)}. \quad (11.18)$$

Locul de transfer optimal al sistemului (11.18) este fizic realizabil și satisface condiția de obținere a valorii minime a dispersiei erorii sistemului în raport cu semnalele stocastice de intrare în regim staționar.

Exemplul 11.2. Se consideră structura sistemului liniar, la intrarea căruia se aplică suma semnalelor $g(t) = r(t) + n(t)$ (referință $r(t)$ și semnalul zgomot $n(t)$) cu densitățile spectrale date prin relațiile:

$$S_{rr}(\omega) = \frac{2D\mu}{\omega^2 + \mu^2}, \quad S_{nn}(\omega) = c^2.$$

Se presupune că semnalele de intrare nu sunt corelate și atunci densitatea interspectrală se dă prin relația:

$$S_{gg}(\omega) = S_{rr}(\omega) + S_{nn}(\omega) = \frac{2D\mu}{\omega^2 + \mu^2} + c^2 = \frac{2D\mu + c^2\omega^2 + c^2\mu^2}{\omega^2 + \mu^2}.$$

Se cere ca sistemul automat să reproducă semnalul de referință $z(t) = r(t)$.

Soluționare. În acest caz, funcția de intercorelație $K_{zg}(\tau)$ a semnalului dorit la ieșirea sistemului $z(t)$ și referința $r(t)$ se exprimă astfel:

$$K_{zg}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T r(t)[r(t + \tau) + n(t + \tau)] dt = K_{rr}(\tau),$$

fiindcă semnalele $r(t)$ și $n(t)$ nu sunt corelate și $K_{rn}(\tau) = 0$.

Deci, densitatea interspectrală va fi:

$$S_{zg}(j\omega) = S_{rr}(\omega) = \frac{2D\mu}{\omega^2 + \mu^2}.$$

Se factorizează densitatea spectrală a semnalului de intrare:

$$S_{gg}(\omega) = \frac{j\omega + \sqrt{2D\mu + c^2\mu^2}}{j\omega + \mu} \frac{-j\omega + \sqrt{2D\mu + c^2\mu^2}}{-j\omega + \mu}$$

și se separă funcția $S_{zg}(j\omega)/S_{gg}^-(j\omega)$:

$$\begin{aligned} \frac{S_{zg}(j\omega)}{S_{gg}^-(j\omega)} &= \frac{\frac{2D\mu}{\omega^2 + \mu^2}}{\frac{-j\omega + \sqrt{2D\mu + c^2\mu^2}}{-j\omega + \mu}} = \frac{2D\mu}{(j\omega + \mu) + (-j\omega + \sqrt{2D\mu + c^2\mu^2})} = \\ &= 2D\mu \left[\frac{c_1}{j\omega + \mu} + \frac{c_2}{-j\omega + \sqrt{2D\mu + c^2\mu^2}} \right], \end{aligned}$$

unde $c_1 = \frac{1}{\mu c + \sqrt{2D\mu + c^2\mu^2}}$, $c_2 = \frac{c}{\mu c + \sqrt{2D\mu + c^2\mu^2}}$.

Se calculează locul de transfer optimal al sistemului prin relația (11.18):

$$H_{\text{opt}}(j\omega) = \frac{2D\mu}{\mu c + \sqrt{2D\mu + c^2\mu^2}} \frac{1}{j\omega + \sqrt{2D\mu + c^2\mu^2}},$$

care este funcția de transfer optimală a sistemului ca element cu inerție de ordinul unu:

$$H_{\text{opt}}(s) = \frac{k_{\text{opt}}}{T_{\text{opt}}s + 1}$$

cu parametrii coeficientului de transfer și constanta de timp:

$$k_{\text{opt}} = \frac{2D}{2D + \mu c^2 + c\sqrt{2D\mu + c^2\mu^2}} < 1, T_{\text{opt}} = \frac{c}{\sqrt{2D\mu + c^2\mu^2}} < \frac{1}{\mu}.$$

Cu cât este mai mare intensitatea c^2 a zgomotului și cât mai larg este spectrul semnalului de referință μ , cu atât este mai mic coeficientul optimal k_{opt} al sistemului. Dacă intensitatea zgomotului $c^2 = 0$, atunci coeficientul de transfer $k_{\text{opt}} = 1$ și

constanta de timp $T_{\text{opt}} = 0$, iar f.d.t. a sistemului se transformă în element dinamic ideal și sistemul reproduce ideal semnalul. Dacă semnalul de referință $r(t) = 0$ ($D = 0$), atunci $k_{\text{opt}} = 0$ și sistemul nu permite să treacă nici semnalul de referință și nici semnalul zgomot.

În acest caz, sistemul optimal reproduce semnalul de referință constant cu eroare, deoarece $k_{\text{opt}} < 1$.

Dispersia semnalului erorii sistemului se calculează prin relația:

$$D_{\varepsilon} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{rr}(\omega) |1 - H(j\omega)|^2 d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{nn}(\omega) |H(j\omega)|^2 d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2D\mu}{\omega^2 + \mu^2} \left| \frac{Tj\omega + (1-k)}{Tj\omega + 1} \right|^2 d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c^2 \left| \frac{k}{Tj\omega + 1} \right|^2 d\omega = D \frac{T\mu + (1-k)^2}{T\mu + 1} + \frac{c^2 k^2}{2T}.$$

Se compară structura optimală a sistemului (filtrul Wiener) cu structura fixă a sistemului optimal formată din elementul integrator cu reacție unitară negativă și în condiția că la intrarea sistemelor se aplică aceleași semnale de referință și zgomot. Se consideră parametrii semnalelor cu valorile: $D = 0.9$, $\mu = 0.9$, $c^2 = 0.6$. Se calculează parametrii sistemului și dispersia:

$$k_{\text{opt}} = \frac{2D}{2D + \mu c^2 + c\sqrt{2D\mu + c^2\mu^2}} = \frac{2 \cdot 0.9}{2 \cdot 0.9 + 0.9 \cdot 0.6 + 0.7746\sqrt{2 \cdot 0.9 \cdot 0.9 + 0.6 \cdot 0.81}} = 0.52,$$

$$T_{\text{opt}} = \frac{c}{\sqrt{2D\mu + c^2\mu^2}} = \frac{0.7746}{\sqrt{2 \cdot 0.9 \cdot 0.9 + 0.6 \cdot 0.81}} = 0.53 \text{ s},$$

$$D_{\varepsilon} = D \frac{T_{\text{opt}}\mu + (1 - k_{\text{opt}})^2}{T_{\text{opt}}\mu + 1} + \frac{c^2 k_{\text{opt}}^2}{2T_{\text{opt}}} = 0.9 \frac{0.53 \cdot 0.9 + (1 - 0.52)^2}{0.53 \cdot 0.9 + 1} + \frac{0.6 \cdot 0.52^2}{2 \cdot 0.53} = 0.58.$$

Se calculează dispersia minimă a sistemului cu structura fixă după relația:

$$D_{\text{min}} = c \left(\sqrt{2D\mu} - \mu \frac{c}{2} \right) = 0.7746 \left(\sqrt{2 \cdot 0.9 \cdot 0.9} - \frac{0.9 \cdot 0.7746}{2} \right) = 0.72. \blacksquare$$

În consecință, din analiza dispersiilor erorilor sistemelor cu structură arbitrară și fixă, se constată că sistemul cu structură arbitrară va avea dispersia erorii care nu coincide cu dispersia erorii sistemului cu structură fixă.

Dacă în sistemul deschis se conține partea fixată $H_{PF}(s)$ (elementul de execuție, obiectul de reglare, traductorul), atunci pentru realizarea funcției de transfer optime $H_{\text{opt}}(s)$ a sistemului închis este posibilă selectarea structurii regulatorului cu f.d.t. $H_R(s)$ prin relația:

$$H_R(s) = \frac{H_{\text{opt}}(s)}{1 - H_{\text{opt}}(s)} \frac{1}{H_{PF}(s)}. \quad (11.19)$$

Realizarea relației (11.19) este o problemă dificilă. De exemplu, sunt cunoscute funcțiile de transfer $H_{PF}(s)$ ale părții fixate și ale filtrului optimal $H_{opt}(s)$:

$$H_{PF}(s) = \frac{k}{s(Ts+1)}, H_{opt}(s) = \frac{k_{opt}}{T_{opt}s+1}.$$

Conform relației (11.19), se determină funcția de transfer a regulatorului:

$$H_R(s) = \frac{H_{opt}(s)}{1-H_{opt}(s)H_{PF}(s)} = \frac{k_{opt}}{k} \frac{s(Ts+1)}{T_{opt}s+1-k_{opt}} = \frac{Q(s)}{P(s)}.$$

Polinomul $Q(s)$ are gradul $m = 2$, iar polinomul $P(s)$ are gradul $n = 1$ și rezultă $m > n$, deci, nu se îndeplinește condiția de realizabilitate fizică a regulatorului (regulatorul nu este fizic realizabil).

11.4 Sinteza sistemului optimal în spațiul stărilor (filtrul Kalman-Busy)

Pentru calculul filtrului Wiener s-au acceptat determinările în baza observării ieșirii sistemului pe segmentul nemărginit de timp, ceea ce reprezintă condiția de limitare în sistemele de conducere [9, 17-19].

O altă procedură de filtrare optimală a sistemului (cu observarea mărimii de ieșire pe segmentul de timp mărginit), care se bazează pe criteriul minimumului mărimii medii a pătratului erorii stocastice a sistemului, constă în prezentarea sistemului în spațiul stărilor propusă de Kalman-Busy [9, 17-19]. În această procedură, pentru obținerea semnalului de referință cu caracteristicile necesare, se utilizează filtrul de formare, la intrarea căruia se aplică semnalul zgomot ideal.

Se consideră dinamica sistemului descrisă în spațiul stărilor:

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{v}(t) + \mathbf{B}r(t), \quad (11.20)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{v}(t) + n(t), \quad (11.21)$$

unde A, B, C sunt matrice constante, $v(t)$ – vectorul stocastic al variabilelor de stare, $y(t)$ – mărimea stocastică observabilă a ieșirii, $r(t)$ și $n(t)$ – semnalele stocastice staționare de intrare de tipul zgomotului alb ideal cu media egală cu zero, necorelate și cu funcțiile de corelație descrise de relațiile:

$$K_{rr}(\tau) = r_0\delta(\tau), K_{nn}(\tau) = n_0\delta(\tau), K_{rn}(\tau) = 0, r_0 = n_0 = \text{const.}$$

Ecuția (11.20) reprezintă modelul obiectului (filtru de formare), iar ecuația (11.21) – ecuația observării mărimii de ieșire a sistemului, $n(t)$ – semnalul zgomotului observării.

În figura 11.5 se reprezintă schema structurală a sistemului descrisă de sistemul (11.20)-(11.21). Filtrul de formare FF din structura sistemului se descrie în variabile de stare, la intrarea căruia se aplică semnalul de referință $r(t)$, care este transformat în semnalul de ieșire $z(t) = Cr(t)$ și asupra căruia se suprapune semnalul zgomot $n(t)$. Din semnalul stocastic $y(t) = z(t) + n(t)$ filtrul optimal FO filtrează semnalul $z(t)$, astfel încât să corespundă criteriului selectat J și se obține semnalul aproximat al sistemului $\hat{z}(t) = C\hat{v}(t)$.

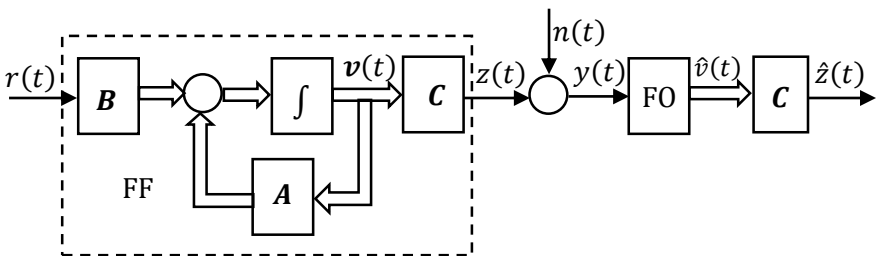


Fig. 11.5. Schema structurală a sistemului optimal

Sistemul automat optimal sintetizat (filtrul Kalman-Busy) trebuie să satisfacă cerințele criteriului minimal al mediei pătratului erorii stocastice $\epsilon(t) = v(t) - \hat{v}(t)$:

$$J = M[\epsilon^2(t)] = M[\{v(t) - \hat{v}(t)\}^2] = \text{min.} \quad (11.22)$$

Filtrul optimal, în orice moment de timp reproduce semnalul $z(t)$ în condiția (12.22) și se descrie prin ecuația diferențială neomogenă:

$$\frac{d\hat{v}(t)}{dt} = \mathbf{A}\hat{v}(t) + \mathbf{K}(t)[y(t) - \hat{z}(t)]. \quad (11.23)$$

unde $\hat{z}(t) = \mathbf{C}\hat{v}(t)$ este determinarea mărimii de ieșire a sistemului.

Ecuației diferențiale (11.23) îi corespunde schema structurală a filtrului optimal reprezentată în figura 11.6.

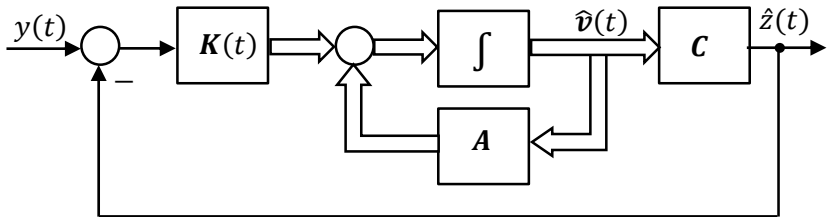


Fig. 11.6. Schema structurală a filtrului Kalman-Busby

În ecuația diferențială (11.23), matricea $\mathbf{K}(t)$ este necunoscută și se determină la soluționarea sistemului de ecuații:

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}\mathbf{C}^T\bar{\mathbf{N}}^{-1}, \quad (11.24, a)$$

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T - \mathbf{P}\mathbf{C}^T\bar{\mathbf{N}}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P} + \mathbf{B}\bar{\mathbf{M}}\mathbf{B}^T, \quad (11.24, b)$$

unde $\bar{\mathbf{N}}$ și $\bar{\mathbf{M}}$ sunt limitate de domeniul frecvență.

Ecuația a doua este ecuația diferențială Riccati și se rezolvă prin metode numerice la calculator.

În regim staționar, ecuația Riccati devine o ecuație algebrică:

$$0 = \mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T - \mathbf{P}\mathbf{C}^T\bar{\mathbf{N}}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P} + \mathbf{B}\bar{\mathbf{M}}\mathbf{B}^T, \quad (11.25)$$

care se soluționează relativ mai simplu.

În caz scalar, când matricele $\mathbf{A} = a$, $\mathbf{B} = \mathbf{C} = 1$, $\mathbf{P} = p$, $z = v$,

$\hat{z} = \hat{v}$, coeficientul de transfer k al sistemului optimal se determină, soluționând sistemul de ecuații algebrice:

$$\frac{1}{N}p^2 - 2ap - \bar{M} = 0,$$

$$k = \frac{p}{N}$$

și se obține:

$$k = a + \sqrt{a^2 + \bar{M}/N}.$$

Pentru procesele stocastice staționare, metoda de optimizare Kalman-Busy nu are priorități comparativ cu metoda de optimizare Wiener și se obțin aceleași determinări.

Metoda de optimizare Kalman-Busy are avantaje la sintetizarea optimală a sistemelor liniare nestaționare [9, 17].

Exemplul 11.3. Se consideră semnalul stocastic staționar $y(t)$ cu funcția de corelație:

$$K_{yy}(\tau) = De^{-\mu|\tau|},$$

care se obține prin aplicarea semnalului zgomot alb $r(t)$ cu densitatea spectrală $S_{r0} = 1$ la intrarea filtrului de formare cu funcția de transfer (fig. 11.5):

$$H_f(s) = \frac{\sqrt{2D\mu}}{\mu+s}.$$

În cazul când $S_{n0} \neq 1$, pentru a obține semnalul $x(t)$ cu parametrii necesari D și μ , la numărătorul funcției de transfer se aplică termenul $\sqrt{2D\mu/S_{r0}}$.

Se admite că semnalul $y(t)$ se măsoară cu semnalul zgomot $n(t)$:

$$y(t) = z(t) + n(t),$$

unde $n(t)$ este semnal staționar zgomot alb cu funcția de corelație $K_{nn}(\tau) = S_{n0}\delta(\tau)$ și densitatea spectrală $S_{nn}(\omega) = S_{n0}$.

Se cere să se determine structura și parametrii filtrului Kalman-Busy, care optimal să filtreze din semnalul măsurat $y(t)$ semnalul util $\hat{z}(t)$.

Soluționare. 1. În acest scop, se dă funcția de transfer al filtrului de formare în forma ecuației de stare (fig. 11.6):

$$\dot{\hat{z}}(t) = a\hat{z}(t) + br(t),$$

unde $a = \mathbf{A} = -\mu$, $b = \mathbf{B} = \sqrt{2D\mu}$ cu $S_{r_0} = 1$ sau $b = \mathbf{B} = 1$ cu $S_{r_0} = 2D\mu$.

2. Matricea observabilă \mathbf{C} și matricele densităților spectrale \mathbf{S}_{r_0} și \mathbf{S}_{n_0} se reprezintă ca mărimi scalare:

$$\mathbf{C} = 1, \mathbf{P} = D_\varepsilon, \bar{\mathbf{M}} = S_{r_0}, \bar{\mathbf{N}} = S_{n_0}, \mathbf{K} = k_f.$$

3. Coeficientul filtrului Kalman-Busy se calculează din (11.24, a):

$$k_f = D_\varepsilon / S_{n_0}.$$

4. Dispersia D_ε a semnalului erorii se determină ca soluție a ecuației algebrice (11.25):

$$aD_\varepsilon + D_\varepsilon a + bS_{r_0}b - D_\varepsilon \cdot 1 \cdot S_{n_0}^{-1} \cdot 1 \cdot D_\varepsilon = 0$$

sau în forma:

$$D_\varepsilon^2 - 2aS_{n_0}D_\varepsilon - b^2S_{r_0}S_{n_0} = 0.$$

5. Se soluționează ecuația pătratică și se obține rădăcina pozitivă:

$$D_\varepsilon = aS_{n_0} + \sqrt{a^2S_{n_0}^2 + b^2S_{r_0}S_{n_0}}.$$

6. Se determină coeficientul de transfer al filtrului:

$$k_f = \frac{D_\varepsilon}{S_{n_0}} = a + \sqrt{a^2 + b^2S_{r_0}/S_{n_0}} = -\mu + \sqrt{\mu^2 + 2D\mu/S_{n_0}}.$$

7. Dispersia semnalului erorii filtrului se determină prin relația:

$$D_\varepsilon = -\mu S_{n_0} + \sqrt{\mu^2 S_{n_0}^2 + 2D\mu S_{n_0}}.$$

8. Funcția de transfer a filtrului se exprimă astfel:

$$H_f(s) = \frac{\hat{z}(s)}{y(s)} = \frac{k_f}{s + \mu + k_f} = \frac{k_f / (\mu + k_f)}{1 + s / (\mu + k_f)} = \frac{k}{Ts + 1},$$

care reprezintă un element cu inerție de ordinul unu cu coeficientul de transfer și constanta de timp:

$$k = \frac{k_f}{\mu + k_f} = \frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 + 2D\mu/S_{n0}}}{\sqrt{\mu^2 + 2D\mu/S_{n0}}},$$

$$T = \frac{1}{\mu + k_f} = \frac{\sqrt{S_{n0}}}{\sqrt{\mu^2 + 2D\mu/S_{n0}}}.$$

Din analiza rezultatului obținut se constată că structura și parametrii filtrului Kalman-Busy coincid cu structura și parametrii filtrului obținuți prin metoda Wiener din exemplul 11.2. ■

Chestionar și probleme

1. Prezentați relația dintre densitățile spectrale ale transferului intrare-ieșire cu caracteristica amplitudine-frecvență a sistemului.
2. Determinați densitatea spectrală a semnalului la ieșirea elementului integrator cu constanta T_i de timp de integrare sau coeficientul k_i când la intrare acționează semnalul zgomot ideal $n(t)$ cu densitatea spectrală S_{n0} .
3. Ce reprezintă filtrul de formare și cum se alege caracteristica amplitudine-frecvență a filtrului?
4. Prezentați relația pentru determinarea dispersiei semnalului la ieșirea elementului dinamic.
5. Calculați dispersia semnalului la ieșirea elementului derivator ideal cu coeficientul $k_d = 1$, când la intrarea lui acționează semnalul zgomot cu densitatea spectrală $S_{n0} = 0.5$ și banda de frecvență $\omega_0 = 5 \text{ s}^{-1}$.
6. După care relații se calculează componentele dispersiei semnalului erorii sistemului automat închis?
7. Explicați cum influențează coeficientul de transfer al sistemului deschis asupra dispersiei sumare a semnalului erorii sistemului.
8. Explicați procedura soluționării problemei Wiener pentru sistemul automat când la intrarea lui acționează semnalul zgomot.
9. Ce probleme există la realizarea filtrului optimal determinat după metoda Wiener?
10. Care este relația dintre caracteristica optimală amplitudine-frecvență a sistemului automat și densitățile spectrale ale semnalelor de referință și zgomot?
11. Explicați ideea și principiul de construire a filtrului optimal Kalman-Busy.

12 SISTEME NELINIARE LA ACȚIUNEA SEMNALELOR STOCASTICE

12.1 Transformarea semnalului stocastic de elementul neliniar

Elementele neliniare, în general, distorsionează semnalul de intrare stocastic.

Deoarece principiul superpoziției pentru sistemele automate neliniare nu se aplică, atunci analiza transferului sumei semnalelor stocastice de intrare a referinței și a zgomotului în semnalul stocastic la ieșirea sistemului nu poate fi efectuată separat pe componente [9, 17-19].

Se consideră un element neliniar la intrarea căruia se aplică un semnal stocastic staționar $x(t)$ reprezentat prin componentele media $m_x = \text{const}$ și centrată $\hat{x}(t)$:

$$x(t) = m_x + \hat{x}(t). \quad (12.1)$$

Se analizează transferul semnalului (12.1) de un element neliniar cu caracteristica statică neliniară de tipul saturație dat în figura 12.1.

Dacă nivelul semnalului stocastic este redus și se menține în domeniul $[-b, b]$, pe partea liniară a caracteristicii neliniare, atunci transferul semnalului la ieșirea elementului este liniar și va fi:

$$y(t) = kx(t) = k[m_x + \hat{x}(t)] = m_y + \hat{y}(t), \quad (12.2)$$

unde $m_y = km_x$ este media semnalului de ieșire, fiind proporțională mediei semnalului de intrare, $\hat{y}(t) = k\hat{x}(t)$ – semnalul centrat al ieșirii care este proporțional semnalului centrat al intrării.

Dacă nivelul semnalului zgomotului este mai mare decât limitele de saturație ale caracteristicii neliniare, atunci transferul semnalului la ieșirea elementului conduce la reducerea mediei m_y a semnalului de ieșire și cu creșterea nivelului semnalului stocastic, aceasta tinde la zero. Rezultă că nivelul ridicat al semnalului stocastic

reduce nivelul semnalului la ieșirea elementului neliniar, care poate fi tratată ca reducerea coeficientului de transfer echivalent al neliniarității pe semnalul util.

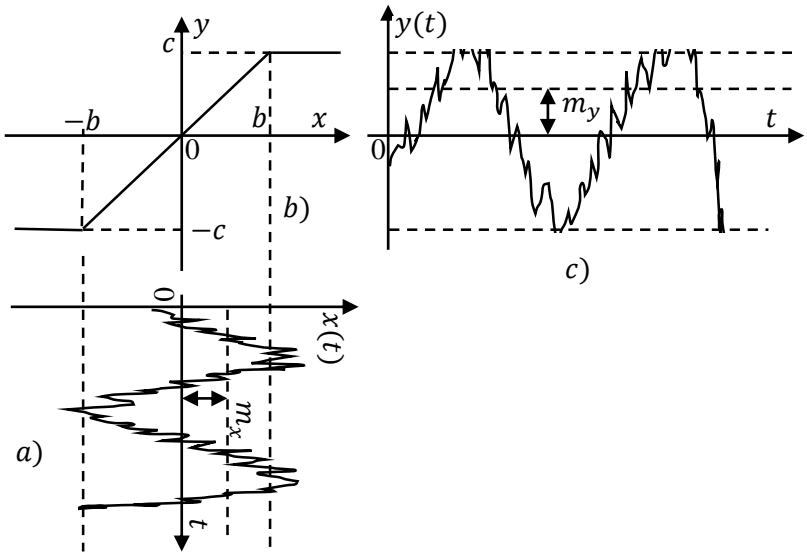


Fig. 12.1. Transferul neliniar al semnalului stocastic

Fluctuațiile la ieșirea neliniarității sunt limitate. Spectrul semnalului ieșirii se lărgțește cu componente de frecvență înaltă și joasă, ceea ce conduce la modificarea componentei spectrale a semnalului de ieșire în raport cu componenta spectrală a semnalului de intrare. Prezența elementelor neliniare în structura sistemului automat poate conduce la instabilitatea sistemului [9, 17].

Vom analiza influența elementului neliniar de tipul saturație (fig. 12.2) asupra distribuției densității probabiliste a semnalului de ieșire.

Dacă semnalul de intrare $x(t)$ cu densitatea probabilistă $w(x)$, având legea normală de distribuție, se regăsește pe segmentul linear al caracteristicii neliniare, atunci densitatea probabilistă $w(y)$ a semnalului de ieșire $y(t)$ nu se modifică și este egală cu densitatea probabilistă a semnalului de intrare $w(y) = w(x)$. Deoarece $|y(t)| \leq$

$\leq c$, probabilitatea apariției valorii $|y(t)| > c$ este egală cu zero, deci, și $w(y) = 0$.

Pentru toate valorile semnalului de intrare $x(t) > b$ sau $x(t) < -b$ ale neliniarității, valorile semnalului de ieșire vor fi $y(t) = c$ sau $y(t) = -c$. Probabilitatea când valorile $y(t) = c$ sau $y(t) = -c$ este egală cu aria S_1 sau S_2 (fig. 12.2) pentru $x \in [b, \infty)$ ($x \in [-\infty, -b)$) și când semnalul de ieșire atinge valoarea de saturație $y(t) = \pm c$, atunci densitatea probabilistă $w(y)$ reprezintă δ impuls. Astfel, expresia densității probabiliste $w(y)$ a semnalului de ieșire se descrie prin relațiile:

$$w(y) = \begin{cases} w(x) & \text{când } |x| < b, \\ 0 & \text{când } |x| > b, \\ S_1 \delta(y-c) & \text{când } x = b, \\ S_2 \delta(y+c) & \text{când } x = -b. \end{cases}$$

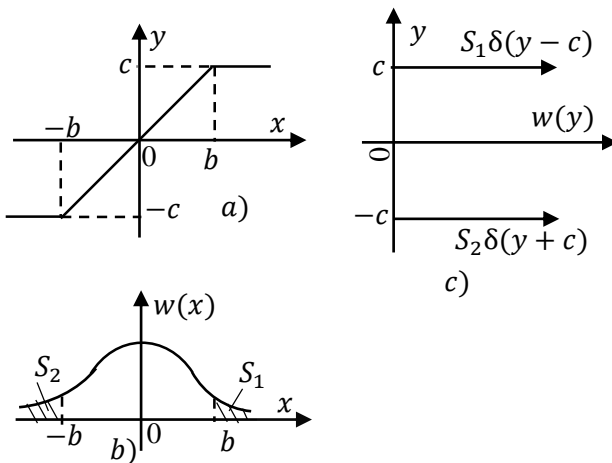


Fig. 12.2. Transferul neliniar al densității probabiliste cu distribuție normală

Aria totală a densității probabiliste $w(y)$ a semnalului de ieșire $y(t)$ rămâne egală cu o unitate dată de relația:

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(y) dy = 1.$$

Studierea sistemelor neliniare la acțiunea semnalelor stocastice este o procedură mai dificilă în comparație cu analiza sistemelor automate liniare la acțiunea semnalelor stocastice.

12.2 Liniarizarea statistică a elementului neliniar

Studierea analitică a transferului semnalelor stocastice de elemente neliniare este dificilă [9, 17-19]. Transformările neliniare ale semnalelor stocastice distorsionează proprietățile acestora. Din aceste considerente, la analiza transformărilor neliniare ale semnalelor stocastice se utilizează metode aproximative, care se bazează pe *liniarizarea statistică a elementelor neliniare*.

Metoda liniarizării statistice, utilizată la analiza sistemelor neliniare la acțiunea semnalelor stocastice, este o metodă analogică metodei liniarizării armonice pentru sistemele neliniare cu semnale deterministe.

Metoda liniarizării statistice se reduce la substituirea caracteristicii statice neliniare a elementului neliniar cu o caracteristică liniară, echivalentă caracteristicii inițiale după proprietățile stocastice. În rezultatul transformării neliniarității în caracteristică liniară pentru care este posibilă utilizarea aparatului matematic existent la analiza sistemelor liniare la acțiunea semnalelor stocastice.

Se consideră elementul neliniar cu caracteristica statică univalentă (cu o ramură), impară, simetrică, care transformă semnalul stocastic de intrare $x(t)$ în semnalul $y(t)$ de ieșire dată prin relația:

$$y(t) = f(x(t)). \quad (12.3)$$

Conform metodei liniarizării statistice, se presupune că semnalul stocastic de intrare $x(t)$ este staționar și se caracterizează prin legea de distribuție normală cu densitatea probabilistă D_x dată prin relația:

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_x}} e^{-(x-m_x)^2/2D_x}. \quad (12.4)$$

Se reprezintă semnalul stocastic de intrare $x(t) = m_x + \hat{x}(t)$ prin suma componentelor medii și centrată din (12.1). Semnalul stocastic stabilizat $y(t)$ la ieșirea elementului neliniar, obținut în rezultatul transformării neliniare (fig. 12.2, a), este descris prin relația (12.3), care de asemenea se reprezintă prin suma componentelor (12.2):

$$y(t) = m_y + \hat{y}(t).$$

Problema liniarizării statistice a elementului neliniar (12.3) se reduce la aproximarea acestuia prin relația:

$$\tilde{y}(t) = m_{\tilde{y}} + \tilde{\hat{y}}(t) = k_0 m_x + k_1 \hat{x}(t), \quad (12.5)$$

unde k_0 este coeficientul liniarizării statistice a neliniarității pe componenta deterministă (media) a procesului, k_1 – coeficientul liniarizării statistice a neliniarității pe componenta stocastică a procesului. Coeficienții k_0, k_1 sunt necunoscuți și care se vor calcula. Structura echivalentă a liniarizării statistice a neliniarității (12.5) este dată în figura 12.3, b.

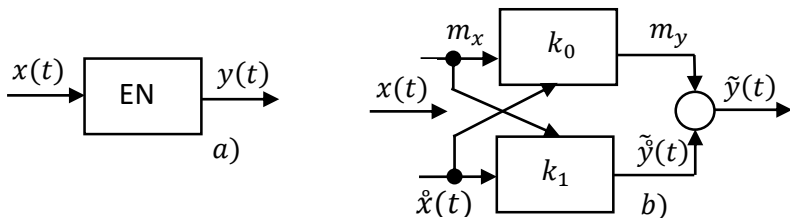


Fig. 12.3. Liniarizarea statistică a neliniarității

Deoarece obținerea egalității semnalului real $y(t)$ și cel aproximat $\tilde{y}(t)$ în rezultatul liniarizării statistice a neliniarității nu este posibil, atunci se limitează la cerințele de egalitate ale unor caracteristici stocastice ale acestor semnale. În funcție de criteriul aplicat, există diferite metode de calcul al coeficienților liniarizării statistice k_0, k_1 . Se analizează aceste cerințe.

1. Media și dispersia semnalelor $y(t)$ și $\tilde{y}(t)$ sunt:

$$m_y = m_{\tilde{y}}, \quad (12.6)$$

$$D_y = D_{\tilde{y}}. \quad (12.7)$$

Dacă sunt satisfăcute condițiile (12.6)-(12.7), atunci legea normală de distribuție a semnalului ieșirii neliniarității nu va fi egală cu legea normală de distribuție a semnalului liniarizării statistice a neliniarității.

Pornind de la relația (12.5) și conform criteriului (12.6), se calculează media semnalului ieșirii:

$$m_y = k_0 m_x. \quad (12.8)$$

Din expresia (12.8) se determină coeficientul liniarizării statistice:

$$k_0 = m_y / m_x. \quad (12.9)$$

Din expresia (12.5) egalăm componentele mărimii de ieșire:

$$\tilde{y}^{\circ}(t) = k_1 \tilde{x}(t) \quad (12.10)$$

și, ridicând la pătrat expresia (12.10), se obține:

$$[\tilde{y}^{\circ}(t)]^2 = k_1^2 [\tilde{x}(t)]^2. \quad (12.11)$$

Media ambelor părți ale expresiei (12.11) este:

$$M \{ [\tilde{y}^{\circ}(t)]^2 \} = M \{ k_1^2 [\tilde{x}(t)]^2 \} = k_1^2 M \{ [\tilde{x}(t)]^2 \} \quad (12.12)$$

sau conform (12.8), dispersia semnalului ieșirii este:

$$D_y = k_1^2 D_x. \quad (12.13)$$

Din (12.13) se calculează coeficientul liniarizării statistice pe componenta centrată a ieșirii:

$$k_1 = \pm \sqrt{D_y/D_x} = \pm \frac{\sigma_y}{\sigma_x}, \quad (12.14)$$

unde $\sigma_y = \sqrt{D_y}$, $\sigma_x = \sqrt{D_x}$ sunt mediile pătratelor abaterilor semnalelor de ieșire și de intrare ale elementului nelinier.

Coeficienții liniarizării statistice k_0, k_1 unilateral sunt funcții de caracteristica statică $f(x)$ a elementului nelinier și densității distribuției $w(x)$ semnalului de intrare.

Mediile în relația (12.9) se calculează prin relațiile:

$$m_x = M[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} xw(x) dx, \quad (12.15)$$

$$m_y = M[y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)w(x) dx.$$

Dispersiile proceselor (12.13) se calculează prin relațiile componentelor semnalelor:

$$D_x = D[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 w(x) dx, \quad (12.16)$$

$$D_y = D[y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_y)^2 w(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)w(x) dx - m_y^2.$$

În acest caz, coeficienții liniarizării statistice după componenta deterministă k_0 și componenta stocastică k_1 a procesului iau forma:

$$k_0 = \frac{1}{m_x} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)w(x) dx, \quad (12.17)$$

$$k_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{D_x}} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)w(x) dx - m_y^2}. \quad (12.18)$$

Semnul coeficientului k_1 se determină de caracterul funcției $f(x)$. Dacă funcția $f(x)$ crește în domeniul punctului $x = m_x$, atunci

funcția este cu semnul plus, iar dacă funcția $f(x)$ se reduce în domeniul punctului $x = m_x$, atunci funcția este cu semnul minus.

2. Media pătratică a abaterii diferenței semnalelor $y(t)$ și $\tilde{y}(t)$ este minimă:

$$\bar{\varepsilon}^2 = M\{[y(t) - \tilde{y}(t)]^2\} \rightarrow \min. \quad (12.19)$$

Dacă se substituie (12.19) prin (12.5), se obține:

$$\bar{\varepsilon}^2 = M\{[y(t) - k_0 m_x - k_1 \dot{x}(t)]^2\}. \quad (12.20)$$

Se calculează media pătratică a abaterii (12.20), utilizând dispersiile și funcția de intercorelație a semnalelor și se obține:

$$\bar{\varepsilon}^2 = D_y + m_y^2 + k_0^2 m_x^2 + k_1^2 D_x - 2k_0 m_x m_y - 2k_1 K_{xy}(0), \quad (12.21)$$

unde $D_x = M\{[\dot{x}(t)]^2\}$, $D_y = M\{[\dot{y}(t)]^2\}$ sunt dispersiile semnalelor de intrare și ieșire, $K_{xy}(0) = K_{xy}(t, t) = M[\dot{x}(t)\dot{y}(t)] = M[\dot{y}(t)\dot{x}(t)]$ – funcțiile de intercorelație ale semnalelor de intrare și ieșire, iar $K_{xy}(0)$ – valoarea funcției de intercorelație a semnalelor centrate $\dot{x}(t)$ și $\dot{y}(t)$.

Pentru calculul coeficienților k_0 și k_1 , care determină valoarea minimă a expresiei (12.21), trebuie calculate derivatele particulare ale mărimii $\bar{\varepsilon}^2$ pentru fiecare coeficient și egaleate cu zero:

$$\frac{\partial \bar{\varepsilon}^2}{\partial k_0} = 2m_x(m_x k_0 - m_y) = 0, \quad (12.22)$$

$$\frac{\partial \bar{\varepsilon}^2}{\partial k_1} = 2[D_x k_1 - K_{xy}(0)] = 0. \quad (12.23)$$

Din sistemul (12.17) și (12.23) se calculează coeficienții k_0 , k_1 ai liniarizării statistice:

$$k_0 = m_y/m_x, \quad (12.24)$$

$$k_1 = K_{xy}(0)/D_x, \quad (12.25)$$

unde $K_{xy}(0) = M[\hat{x}(t)\hat{y}(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)F(x)w(x) dx$.

Expresiile (12.17)-(12.18.) și (12.24)-(12.25) sunt egale.

Calculul coeficientului k'_1 din relația (12.18) dă un rezultat mai mare, iar calculul coeficientului k''_1 din (12.25) este mai redus. În calculele practice se recomandă determinarea mediei aritmetice a coeficientului prin relația:

$$k_1 = \frac{k'_1 + k''_1}{2}. \quad (12.26)$$

Exemple de calcul al coeficienților liniarizării statistice pentru elementele neliniare:

Exemplul 12.1. Se consideră elementul neliniar cu zonă de insensibilitate, la intrarea căruia se aplică semnal stocastic staționar cu dispersia $D_x = D$ cu legea de distribuție normală:

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2D}}.$$

Se cere să se determine coeficienții k_0, k_1 ai liniarizării statistice pentru elementul neliniar.

Soluționare. Coeficientul liniarizării statistice după componenta regulată se descrie prin relația:

$$\begin{aligned} k_0 &= \frac{1}{m_x} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{\sqrt{2\pi D}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2D}} dx = \\ &= \frac{-c}{m_x \sqrt{2\pi D}} \int_{-\infty}^{-b} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2D}} dx + \frac{c}{m_x \sqrt{2\pi D}} \int_b^{\infty} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2D}} dx. \end{aligned}$$

Se introduce notația $u = (x - m_x)/D$ și expresia lui k_0 va avea forma:

$$k_0 = \frac{c}{m_x} \left[-\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{m_x+b}{\sqrt{D}}\right) + \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{m_x-b}{\sqrt{D}}\right) \right] = \frac{1}{m_x} \left[\Phi\left(\frac{m_x+b}{\sqrt{D}}\right) + \Phi\left(\frac{m_x-b}{\sqrt{D}}\right) \right],$$

unde $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \int_0^z e^{-u^2/2} du$ este funcția Laplace (integrala probabilităților).

Componentele coeficientului liniarizării statistice după componenta stocastică a procesului se descriu prin relațiile:

$$k_1' = \frac{1}{\sqrt{D}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^2(x)}{\sqrt{2\pi D}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2D}} dx - m_y^2 \right]^{0.5} = \frac{c}{\sqrt{D}} \left\{ 1 - \left[\Phi\left(\frac{m_x+b}{\sqrt{D}}\right) + \Phi\left(\frac{m_x-b}{\sqrt{D}}\right) \right] \right\}^{0.5},$$

$$k_1'' = \frac{1}{D} \left[-c \int_{-\infty}^b \frac{x-m_x}{\sqrt{2\pi D}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2D}} dx + c \int_b^{\infty} \frac{x-m_x}{\sqrt{2\pi D}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2D}} dx \right] =$$

$$= \frac{c}{\sqrt{2\pi D}} \left[e^{-\frac{(b+m_x)^2}{2D}} + e^{-\frac{(b-m_x)^2}{2D}} \right].$$

În cazul când zona de insensibilitate $b = 0$, caracteristica statică a elementului neliniar se transformă în element releu ideal (fig. 12.4, a) și coeficienții liniarizării statistice au forma:

$$k_0 = \frac{2c}{m_x} \Phi\left(\frac{m_x}{\sqrt{D}}\right), k_1' = \frac{c}{\sqrt{D}} \sqrt{1 - 4[\Phi(m_x/\sqrt{D})]^2}, k_1'' = \frac{2c}{\sqrt{2\pi D}} e^{-\frac{m_x^2}{2D}}.$$

În figura 12.4 se reprezintă curbele dependențelor coeficienților statistici ai releului ideal ca funcții de parametrii media m_x și dispersia m_x a semnalului de intrare: b) pentru coeficientul $k_0 = f(m_x, D)$, c) curba 1 este pentru coeficientul k_1' și curba 2 – pentru coeficientul k_1'' .

Din analiza curbelor rezultă că la valori reduse ale lui m_x caracteristica statică a releului ideal se reprezintă ca a unui amplificator, iar la valori mari ale lui m_x se reduce valoarea coeficientului (curba 2) datorită saturației caracteristice statice. ■

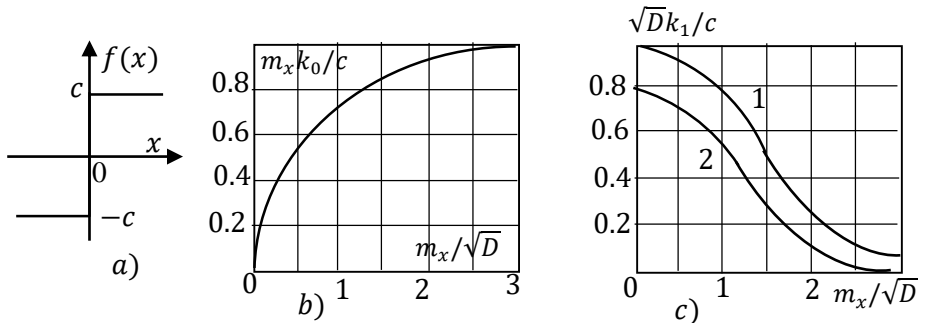


Fig. 12.4. Dependențele coeficienților liniarizării statistice

12.3 Analiza sistemelor neliniare prin metoda liniarizării statistice

Se consideră schema structurală a sistemului automat (fig. 12.5, a) alcătuită din elementul neliniar cu caracteristica statică $y = f(x)$ și

partea liniară cu funcția de transfer $H(s)$ și asupra sistemului acționează suma $g(t) = r(t) + n(t)$ ca semnal stocastic staționar cu legea de distribuție normală reprezentat prin componentele media m_x și mărimea centrată $\hat{x}(t)$:

$$x(t) = m_x + \hat{x}(t).$$

În general, legea de distribuție a semnalului $y(t)$ la ieșirea elementului neliniar nu este o distribuție normală. Semnalul de intrare transformat de partea liniară a sistemului, care se reprezintă ca filtru trece-jos, la ieșirea sistemului se obține un semnalul normalizat.

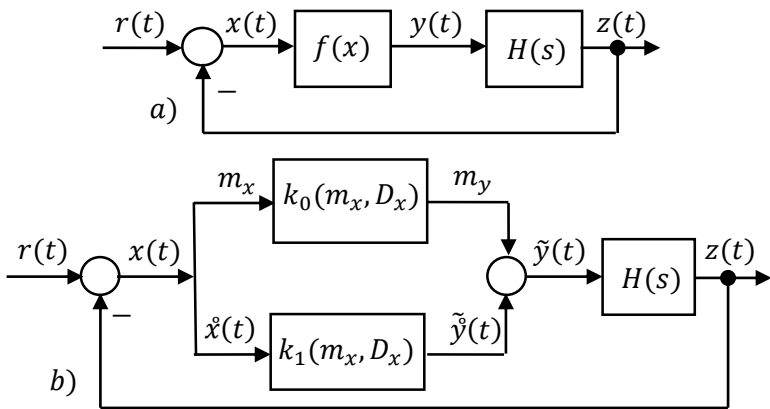


Fig. 12.5. Sistemul neliniar și structura echivalentă a liniarizării statistice

Utilizând metoda liniarizării statistice pentru elementul neliniar, se analizează structura sistemului echivalent dat în figura 12.5, *b*. Elementul neliniar se reprezintă prin două canale cu coeficienții de transfer k_0 și k_1 , care sunt funcții de caracteristicile stocastice ale semnalului de intrare $x(t)$, unde un canal este componenta mării medii (deterministă), iar alt canal – componenta stocastică (centrată).

Modelul echivalent al sistemului se descompune în două sisteme: un model al sistemului pentru componenta medie (fig. 12.6, *a*), iar alt sistem pentru componenta stocastică (fig. 12.6, *b*).

Funcția de transfer a erorii sistemului închis liniarizat statistic în raport cu eroarea semnalului $x(t)$ este:

1) pe componenta medie:

$$H_{m_x}(s) = \frac{m_x}{m_r} = \frac{1}{1+k_0(m_x, D_x)H(s)}, \quad (12.27)$$

2) pe componenta centrată:

$$H_{\hat{x}}(s) = \frac{\hat{x}}{\hat{r}} = \frac{1}{1+k_1(m_x, D_x)H(s)}. \quad (12.28)$$

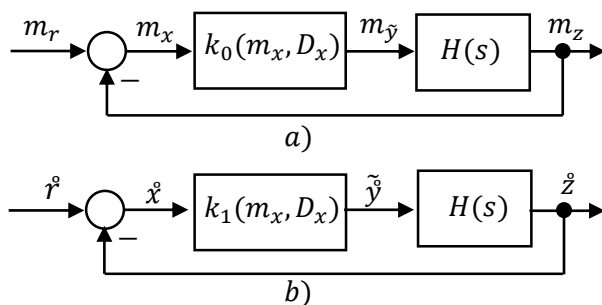


Fig. 12.6. Structura echivalentă a sistemului liniarizat statistic

Interacțiunile dintre f.d.t. (12.27) și (12.28) se realizează prin coeficienții liniarizării statistice k_0 și k_1 , care sunt funcții de mărimile necunoscute m_x și D_x .

Transformata Laplace a mediei erorii modelului sistemului din figura 12.6, *a* este:

$$L\{m_x(t)\} = H_{m_x}(s)L\{m_r(t)\}. \quad (12.29)$$

Deoarece se analizează procesele staționare stabilizate pentru care:

$$m_x = \text{const}, m_r = \text{const},$$

atunci din (12.29) se obține:

$$m_x = \frac{m_r}{1+k_1(m_x, D_x)H(0)}. \quad (12.30)$$

Când sistemul este astatic, coeficientul de transfer al părții liniare $H(0)$ la frecvența $\omega = 0$ tinde la infinit:

$$m_x = m_{\hat{y}} = 0, m_z = m_r.$$

Dispersia stocastică a componentei erorii pentru modelul sistemului din figura 12.6, b este:

$$\begin{aligned} D_x &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H_{\hat{x}}(j\omega)|^2 S_{rr}(\omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{1+k_1(m_x, D_x)H(j\omega)} \right|^2 S_{rr}(\omega) d\omega, \end{aligned} \quad (12.31)$$

unde $|H_{\hat{x}}(j\omega)|^2$ este pătratul modulului locului de transfer al sistemului, $S_{xx}(\omega)$, $S_{gg}(\omega)$ sunt densitățile spectrale ale semnalelor centrate ale componentelor erorii și semnalului de intrare:

$$m_x = f_1(k_0(m_x, D_x)), \quad (12.32)$$

$$D_x = f_2(k_1(m_x, D_x)). \quad (12.33)$$

Sistemul de ecuații (12.32)-(12.33) conține patru mărimi necunoscute m_x, D_x, k_0, k_1 . Pentru soluționarea acestui sistem se mai adaugă încă două ecuații, care se obțin din relațiile (12.9) și (12.14) sau (12.24) și (12.25):

$$k_0 = f_3(m_x, D_x), \quad (12.34)$$

$$k_1 = f_4(m_x, D_x). \quad (12.35)$$

Astfel, s-a obținut sistemul din patru ecuații (12.32)-(12.35) cu patru necunoscute m_x, D_x, k_0, k_1 , care poate fi soluționat prin metode numerice sau grafo-analitice.

Pentru soluționarea sistemului de ecuații (12.32)-(12.35) se aplica metoda grafo-analitică, care se reduce la următoarele etape.

1. În sistemul de coordonate (m_x, f_1) se construiesc o serie de

curbe pentru expresia (12.32) la variația dispersiei $D_{x_i} = D_0 = \text{const}$ (fig. 12.7, a).

2. Din originea sistemului de coordonate se trasează bisectoarea unghiului (fig. 12.7, a) și după punctele de intersecție a acesteia cu familia de curbe $z_1 = f_1(m_x)$ ce construiește dependența $D_x = \varphi_1(m_x)$ (fig. 12.7, c).

3. În sistemul de coordonate (D_x, f_2) se construiesc o serie de curbe pentru expresia (12.33) la variația mediei $m_{x_i} = m_0 = \text{const}$ (fig. 12.7, b).

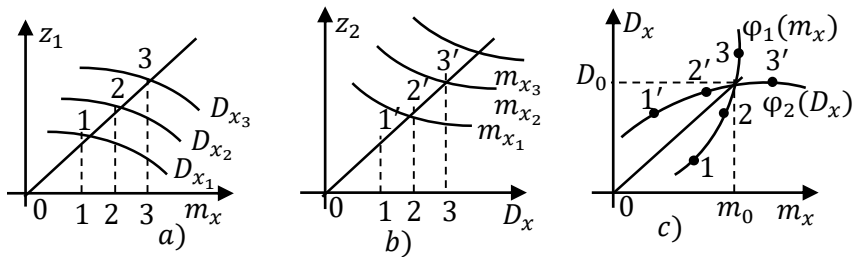


Fig. 12.7. Metoda grafo-analitică de calcul al caracteristicilor probabiliste ale sistemului neliniar închis

4. Din originea sistemului de coordonate se trasează bisectoarea unghiului (fig. 12.7, b) și după punctele de intersecție a acesteia cu familia de curbe $z_2 = f_2(D_x)$ ce construiește funcția $m_x = \varphi_2(D_x)$ (fig. 12.7, c).

Punctele de intersecție ale curbelor $\varphi_1(m_x)$ și $\varphi_2(D_x)$ reprezintă soluția sistemului (12.32)-(12.33) și determină valorile mediei m_x și dispersiei D_x în regimul staționar al sistemului automat neliniar.

Metoda liniarizării statistice, din considerentele simplității și preciziei practice, este larg utilizată în calculele ingineresti ale sistemelor automate neliniare de ordin superior [9, 17].

Menționăm că metoda liniarizării statistice este aplicabilă numai în cazurile când în sistemul neliniar nu există oscilații întreținute.

În cazul când în sistemul nelinier există oscilații întreținute, atunci pentru calculul preciziei sistemului se utilizează concomitent metodele liniarizării armonice și statistice [9, 17].

Exemplul 12.2. Se consideră sistemul nelinier (12.5, a) alcătuit din elementul nelinier releu ideal cu caracteristica statică (fig. 12.4, a) $y = f(x) = c \operatorname{sign} x$ și partea liniară reprezentată de elementul integrator cu funcția de transfer $H(s) = k/s$. Asupra sistemului acționează semnalul stocastic staționar $g(t)$ cu media $m_r = \text{const}$ și densitatea spectrală $S_{rr}(\omega) = 2D\mu/(\mu^2 + \omega^2)$.

Se cere să se determine media m_x și dispersia D_x a erorii staționare a sistemului nelinier.

Soluționare. Sistemul este astatic și media erorii staționare $m_x = 0$ și coeficientul $k_0 = 0$.

1. Funcția de transfer a erorii sistemului liniarizat statistic pe componenta stocastică este:

$$H_x(s) = \frac{x^0}{s} = \frac{1}{1+k_1(m_x, D_x)H(s)} = \frac{s}{s+k_1k}$$

2. Densitatea spectrală a semnalului erorii va fi:

$$S_{xx}(\omega) = |H_x(j\omega)|^2 S_{rr}(\omega) = \frac{-(j\omega)^2}{|j\omega+k_1k|^2} \frac{2D\mu}{\mu^2+\omega^2} = \frac{-2D\mu(j\omega)^2}{|(j\omega)^2+(\mu+k_1k)(j\omega)+\mu k_1k|^2}$$

3. Dispersia semnalului erorii sistemului este:

$$D_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-2D\mu(j\omega)^2}{|(j\omega)^2+(\mu+k_1k)(j\omega)+\mu k_1k|^2} d\omega = \frac{2D\mu^2 k_1 k}{2\mu k_1 k(\mu+k_1k)} = \frac{D\mu}{\mu+k_1k} \quad (12.36)$$

4. Deoarece funcția Laplace $\Phi(0) = 0$, atunci coeficienții liniarizării statistice se reprezintă prin relațiile:

$$k'_1 = \frac{c}{\sqrt{D_x}}, \quad k''_1 = \frac{2c}{\sqrt{2\pi D_x}}$$

5. Se determină coeficientul mediu k_1 prin relația:

$$k_1 = \frac{k'_1+k''_1}{2} = \frac{\frac{c}{\sqrt{D_x}}+\frac{2c}{\sqrt{2\pi D_x}}}{2} = \frac{c\alpha}{\sqrt{D_x}}, \quad (12.37)$$

unde $\alpha = 0.5 + 1/\sqrt{2\pi}$.

6. Din (12.37) se determină mărimea dispersiei:

$$D_x = \frac{c^2 \alpha^2}{k_1^2}. \quad (12.38)$$

7. Se analizează egalitatea expresiilor dispersiilor pentru (12.36) și (12.38):

$$\frac{c^2 \alpha^2}{k_1^2} = \frac{D\mu}{\mu + k_1 k},$$

care se prezintă ca ecuație algebrică în raport cu coeficientul k_1 necunoscut:

$$D\mu k_1^2 - c^2 \alpha^2 k k_1 - c^2 \alpha^2 \mu = 0.$$

8. Ecuația algebrică se soluționează și se determină expresia coeficientului k_1 :

$$k_1 = \frac{c^2 \alpha^2 k + \sqrt{c^4 \alpha^4 k^2 + 4c^2 \alpha^2 D\mu^2}}{2D\mu}. \quad (12.39)$$

9. În (12.36) se substituie k_1 cu expresia din (12.39) și se obține expresia de calcul al dispersiei semnalului erorii sistemului:

$$D_x = \frac{2D^2 \mu^2}{2D\mu^2 + kc\alpha(kc\alpha + \sqrt{c^2 \alpha^2 k^2 + 4D\mu^2})}. \blacksquare$$

Exemplul 12.3. Se consideră sistemul neliniar (12.5, a) alcătuit din elementul neliniar releu ideal cu caracteristica statică (fig. 12.4, a) $y = f(x) = c \operatorname{sign} x$ și partea liniară reprezentată de elementul integrator cu funcția de transfer $H(s) = k/s$. Asupra sistemului acționează perturbația semnalului stocastic staționar perturbația $p(t)$ cu media $m_p = 0$ și densitatea spectrală $S_{pp}(\omega) = 2D\mu/(\mu^2 + \omega^2)$.

Se cere să se determine media m_x și dispersia D_x a erorii staționare a sistemului neliniar.

Soluționare. 1. Se determină coeficienții liniarizării statistice a releului. Deoarece media $m_p = 0$, atunci și media semnalului erorii $m_x = 0$. În condiția $m_x = 0$ din figura 12.4, b, după primul criteriu $k_1 = 1.0c/\sigma_x$, iar după al doilea criteriu $k_1 = 0.8c/\sigma_x$ și se determină media coeficientului $k_1 = 0.9c/\sigma_x$.

2. Se dă expresia dispersiei semnalului erorii sistemului (10.44):

$$\begin{aligned} D_x = \sigma_x^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2D\mu}{\mu^2 + \omega^2} \left| \frac{k}{j\omega + k_1 k} \right|^2 d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2D\mu k^2}{|(j\omega)^2 + (\mu + k_1 k)j\omega + \mu k_1 k|^2} d\omega = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b_0}{a_2|(j\omega)^2 + a_1j\omega + a_0|^2} d\omega.$$

3. Expresia dispersiei D_x se calculează, utilizând metoda de aproximare cu J_2 pentru ordinul sistemului $n = 2$ din tabelul 10.1 cu coeficienții $b_0 = 2D\mu k^2$, $a_2 = 1$, $a_1 = \mu + k_1k$, $a_0 = \mu k_1k$ și se reprezintă prin relația:

$$D_x = \sigma_x^2 \approx J_2 = \frac{-b_1 + b_0 a_2 / a_0}{2a_1 a_2} = \frac{Dk}{k_1(\mu + k_1k)}.$$

4. Utilizând $k_1 = 0.9c/\sigma_x$, din ultima expresie se determină media pătratică a semnalului erorii:

$$\sigma_x^2 k_1 (\mu + k_1 k) = Dk,$$

$$\sigma_x^2 \left(\frac{0.9c}{\sigma_x} \mu + \left(\frac{0.9c}{\sigma_x} \right)^2 k \right) = Dk,$$

$$\sigma_x = \frac{k}{\mu} \left(\frac{1.11D}{c} - 0.9c \right).$$

Mărimea σ_x crește odată cu creșterea coeficientului k și dispersiei D a perturbației și reducerea lui μ și se reduce odată cu creșterea mărimii de comandă c . ■

Chestionar și probleme

1. Explicați transferul semnal stocastic de intrare – semnal stocastic de ieșire de elementul neliniar.
2. Explicați esența metodei liniarizării statistice a elementului neliniar.
3. Prezentați schema structurală a elementului echivalent statistic.
4. Numiți criteriile în baza cărora se determină coeficienții liniarizării statistice.
5. Ce clase de metode se utilizează pentru calculul coeficienților liniarizării statistice?
6. Care este procedura grafo-analitică de calcul al indicilor de precizie a mărimilor medii m_x și media pătratică σ_x a semnalului erorii sau dispersiei $D_x = \sigma_x^2$?

BIBLIOGRAFIE

1. *Automatica* / I. DUMITRACHE. București: Ed. Academiei Române, 2009. V.1, 961 p. ISBN 978-973-1883-4.
2. DYNNIKOV, A.I. *Tzifrovye sistemy upravleniya*. M.: MFTI, 2006, 96 s. ISBN 5-7417-0151-5.
3. DORF, R. K.; BISHOP, R. X. *Sovremennyye sistemy upravleniya (Modern Control Systems)*. Moskva: Laboratoria Bazovykh Znaniy, 2004, 832 s. ISBN 5-93208-119-8.
4. GAIDUK, A. R. *Teoria avtomaticheskogo upravleniya. Uchebnik*. M.: Vysshaya shkola, 2010, 415 s. ISBN 978-5-06-006055-3.
5. IZVOREANU, B. *Teoria sistemelor automate. Manual*. Chișinău: Tehnica-UTM, 2022, 349 p. ISBN 978-9975-45-853-5.
6. IZVOREANU, B. *Teoria sistemelor automate 2. Ghid pentru proiectarea de curs*. Chișinău: Tehnica-UTM, 2021, 110 p. ISBN 978-9975-45-738-5.
7. IZVOREANU, B. *Ingineria sistemelor automate. Ghid pentru proiectarea de curs*. Chișinău: Tehnica-UTM, 2021, 122 p. ISBN 978-9975-45-737-8.
8. KIM, D. P. *Teoria avtomaticheskogo upravleniya. T. 1. Lineinye sistemy*. M.: FIZMATLIT, 2003, 288 c. ISBN 5-9221-0379-2.
9. KIM, D. P. *Teoria avtomaticheskogo upravleniya. T. 2. Mnogomernyye, nelineinye, optimalnyye i adaptivnyye sistemy*. M.: FIZMATLIT, 2004, 464 s. ISBN 5-9221-0534-5.
10. KIM, D.P; DIMITRIEVA, N.D. *Sbornik zadach po teorii avtomaticheskogo upravleniya. Lineinye sistemy*. M.: FIZMATLIT, 2007, 168 c. ISBN 978-5-9221-0873-7.
11. KUO, B. *Teoria i proektirovanie tzyfrovyyh sistem upravleniya*. M.: Mashinostroenie, 1986, 448 s.
12. LUKAS, V.A. *Teoria avtomaticheskogo upravleniya. Uchebnik dlea vuzov*. M.: Nedra, 1990. 416 s. ISBN 5-247-01027-2.
13. *Metody klassicheskoi i sovremennoi teorii avtomaticheskogo upravleniya. T. 1. Matematicheskie modeli, dinamicheskie karakteristiki i analiz sistem avtomaticheskogo upravleniya* / Pod red. K.A. PUPKOVA; N.D. EGUPOVA. M.: Izd-stvo

MGTU im. N.E. Baumana, 2004, 656 c. ISBN 5-7038-2189-4.

14. PANTELEEV, A.V.; BORTAKOVSKII, A.S. *Teoria upravleniia v primerakh i zadachah*. M.: Vysshiaia shkola, 2003, 583 s. ISBN 5-06-004136-0.

15. POPOV, E.P. *Prikladnaia teorii protsessov upravleniia v nelineinykh sistemakh*. M.: Nauka, 1973, 584 s.

16. *Sbornik zadach po teorii avtomaticheskogo regulirovaniia i upravleniia* / Pod red. V. A. BESEKERSKOGO. M.: Nauka, 1978, 512 s.

17. *Teoria avtomaticheskogo upravleniia. Uchebnik dlia vuzov* / Pod red. V.B. IAKOVLEVA. M.: Vysshiaia shkola, 2005, 567 s. ISBN 5-06-004096-8.

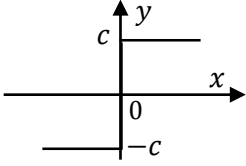
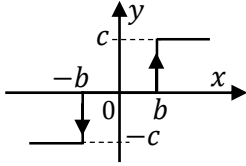
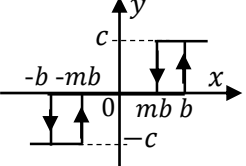
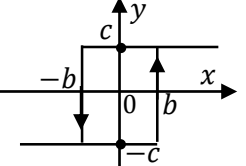
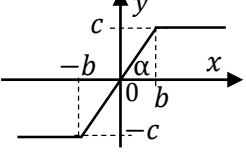
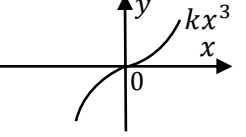
18. *Teoria avtomaticheskogo upravleniia. Nelineinye sistemy upravleniia pri sluchainykh vozdeistviiakh. Uchebnik dlia vuzov* / Pod red. A.V. NETUŠHILA. M.: Vysshiaia shkola, 1983, 432 s.

19. *Teoria avtomaticheskogo upravleniia. Uchebnik dlia vuzov* / Pod red. A.V. VORONOVA. M.: Vysshiaia shkola, 1986, Ch. 2, 432 s.

20. TOPCHEEV, Iu. I.; TZYPLEAKOV, A.P. *Zadachnik po teorii avtomaticheskogo regulirovaniia*. M.: Mashinostroenie, 1977, 592 s.

21. VOICU, M. *Introducere în automatică*. Iași: Editura Dosoftei, 1998, 238 p. ISBN 973-9135-60-9.

Tipuri de neliniarități

Nr. crt.	Caracteristica statică	Coeficienții liniarizării armonice	
		$b(a)$	$g(a)$
1		$\frac{4c}{\pi a}$	-
2		$\frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$, cu $a \geq b$	-
3		$\frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$, cu $a \geq b$	$\frac{4cb}{\pi a^2}$, cu $a \geq b$
4		$\frac{2c}{\pi a} \left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} + \sqrt{1 - \frac{m^2 b^2}{a^2}} \right)$ cu $a \geq b, -1 \leq m \leq 1$	$-\frac{2cb}{\pi a^2} (1 - m)$, cu $a \geq b$
5		$\frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{a} + \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right)$, cu $a \geq b, k = \operatorname{tg} \alpha$	-
6		$\frac{3ka^2}{4}$	-

Notă:

1. Amplitudinea semnalului de intrare a elementului neliniar $a = A$.
2. Caracteristicile statice sunt numite:
 - 2.1. Releu ideal.
 - 2.2. Releu cu zonă de insensibilitate și saturație.
 - 2.3. Releu activ (cu histerezis).
 - 2.4. Releu cu zonă de insensibilitate și histerezis.
 - 2.5. Releu cu saturație.
 - 2.6. Parabolă nesimetrică.
3. Pentru caracteristica de tip parabolă nesimetrică $f(\varepsilon) = k\varepsilon^3$ la valoarea puterii $n = 1$ coeficientul liniarizării armonice $b(a) = k$, unde $k > 0$, iar pentru $n = 5$, $b(a) = \frac{15ka^4}{24}$.

Funcții de timp continuu și discret și
imaginea Laplace s și transformata z

Tabelul A2.1. Funcții originale și imaginea lor

Nr. cr.	Denumirea funcției	Original $f(t)$	Imaginea $H(s)$	Original $f(kT)$	Imaginea $H(z)$
1	Delta impuls	$\delta(t)$	1	$\delta(kT)$	$z^{-0} = 1$
2	Treaptă unitară	$1(t)$	$\frac{1}{s}$	$1(kT)$	$\frac{z}{z-1}$
3	Funcție rampă	t	$\frac{1}{s^2}$	kT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
4	Funcție pătratică	t^2	$\frac{2!}{s^3}$	$(kT)^2$	$\frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$
5	Funcție polinomială	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\frac{1}{n-1} (kT)^{n-1}$	$\frac{1}{n-1} \frac{T^{n-1} z(z+1)}{(z-1)^n}$
6	Exponențială	e^{at}	$\frac{1}{s-\alpha}$	$e^{\alpha kT}$	$\frac{z}{z+e^{\alpha T}}$
7	Exponențială	e^{-at}	$\frac{1}{s+\alpha}$	$e^{-\alpha kT}$	$\frac{z}{z-d}, d = e^{-\alpha T}$
8	Sinusoidă	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\sin \omega kT$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
9	Cosinusoidă	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos \omega kT$	$\frac{z^2 - z \cos \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
10	Produsul exponentei cu sinusoidă	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}$	$e^{-\alpha kT} \sin \omega kT$	$\frac{z d \sin \omega T}{z^2 - 2z d \cos \omega T + d^2}$
11	Produsul exponentei cu cosinusoidă	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}$	$e^{-\alpha kT} \cos \omega kT$	$\frac{z d \cos \omega T}{z^2 - 2z d \cos \omega T + d^2}$

Funcții de transfer ale elementelor dinamice
în transformata Laplace s și în transformata z

Tabelul A3.1. Funcții de transfer în transformata s și transformata z

Nr. crt.	$H(s)$	$H(z)$
1	2	3
1	k	k
2	$\frac{k}{s}$	$\frac{kz}{z-1}$
3	$\frac{k}{s^2}$	$\frac{kTz}{(z-1)^2}$
4	$\frac{k}{T_0s+1}$	$\frac{k}{T_0} \frac{z}{z-e^{-T/T_0}}$
5	$\frac{k}{s(T_0s+1)}$	$\frac{k(1-e^{-T/T_0})z}{(z-1)(z-e^{-T/T_0})}$
6	$\frac{k}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$	$\frac{k(e^{-T/T_1}-e^{-T/T_2})}{T_1-T_2} \frac{z}{(z-e^{-T/T_1})(z-e^{-T/T_2})}$
7	$\frac{k}{(T_0s+1)^2}$	$\frac{kTe^{-T/T_0}}{T_0^2} \frac{z}{(z-e^{-T/T_0})^2}$
8	$\frac{k}{s^2(T_0s+1)}$	$k\left[\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{T_0(1-e^{-T/T_0})z}{(z-1)(z-e^{-T/T_0})}\right]$
9	$\frac{k}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$	$k\left[\frac{z}{z-1} + \frac{T_1}{T_2-T_1} \frac{z}{z-e^{-T/T_1}} - \frac{T_2}{T_2-T_1} \frac{z}{z-e^{-T/T_2}}\right]$
10	$\frac{k}{s^2(T_1s+1)(T_2s+1)}$	$k\left[\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{(T_1+T_2)z}{z-1} - \frac{T_1^2}{T_1-T_2} \frac{z}{z-e^{-T/T_1}} + \frac{T_2^2}{T_2-T_1} \frac{z}{z-e^{-T/T_2}}\right]$
11	$\frac{k}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}$	$k\left[\frac{T_1}{(T_1-T_2)(T_1-T_3)} \frac{z}{z-e^{-T/T_1}} + \frac{T_2}{(T_2-T_1)(T_2-T_3)} \frac{z}{z-e^{-T/T_2}} + \frac{T_3}{(T_3-T_1)(T_3-T_2)} \frac{z}{z-e^{-T/T_3}}\right]$

Anexa 3 (continuare)

1	2	3
		$+ \frac{T_3}{(T_3 - T_1)(T_3 - T_2)} \frac{z}{z - e^{-T/T_3}}$
12	$\frac{k}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)(T_3s + 1)}$	$k \left[\frac{z}{z - 1} - \frac{T_1^2}{(T_1 - T_2)(T_1 - T_3)} \frac{z}{z - e^{-T/T_1}} - \frac{T_2^2}{(T_2 - T_1)(T_2 - T_3)} \frac{z}{z - e^{-T/T_2}} - \frac{T_3^2}{(T_3 - T_1)(T_3 - T_2)} \frac{z}{z - e^{-T/T_3}} \right]$
13	$\frac{k}{s^2(T_1s + 1)(T_2s + 1)(T_3s + 1)}$	$k \left[\frac{Tz}{(z - 1)^2} - \frac{(T_1 + T_2 + T_3)z}{z - 1} + \frac{T_1^3}{(T_1 - T_2)(T_1 - T_3)} \frac{z}{z - e^{-T/T_1}} + \frac{T_2^3}{(T_2 - T_1)(T_2 - T_3)} \frac{z}{z - e^{-T/T_2}} + \frac{T_3^3}{(T_3 - T_1)(T_3 - T_2)} \frac{z}{z - e^{-T/T_3}} \right]$
14	$\frac{k(T_0s + 1)}{s}$	$\frac{k(T_0 + 1)(z - T_0/(T_0 - 1))}{z - 1}$
15	$\frac{k(T_0s + 1)}{s^2}$	$\frac{kT_0z(T_0 + 1)(z + (T/T_0) - 1)}{(z - 1)^2}$
16	$\frac{k(T_1s + 1)}{T_2s + 1}$	$\frac{k}{T_2} \left[T_1 + (1 - T_1/T_2) \frac{z}{z - e^{-T/T_2}} \right]$
17	$\frac{k(T_1s + 1)}{s(T_2s + 1)}$	$\frac{kT_1z(z + (T_2/T_1)(1 - e^{-T/T_2}) - 1)}{T_2(z - 1)(z - e^{-T/T_2})}$
18	$\frac{k(T_3s + 1)}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$	$\frac{k}{T_1 - T_2} \left[\frac{(1 - (T_3/T_1))z}{z - e^{-T/T_1}} + \frac{((T_3/T_2) - 1)z}{z - e^{-T/T_2}} \right]$
19	$\frac{k(T_3s + 1)}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$	$k \left[\frac{z}{z - 1} + \frac{(T_1 - T_3)z}{(T_2 - T_1)(z - e^{-T/T_1})} + \frac{(T_2 - T_3)z}{(T_1 - T_2)(z - e^{-T/T_2})} \right]$

Anexa 3 (continuare)

1	2	3
20	$\frac{k(T_1s + 1)}{s^2(T_2s + 1)}$	$k\left[\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{(T_1 - T_2)(1 - e^{-T/T_1})z}{(z-1)(z - e^{-T/T_1})}\right]$
21	$\frac{k(T_3s + 1)}{s^2(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$	$k\left[\frac{Tz}{(z-1)^2} + \frac{(T_3 - T_1 - T_2)z}{z-1} - \frac{(T_1 - T_3)z}{((T_2/T_1) - 1)(z - e^{-T/T_1})} - \frac{(T_2 - T_3)z}{((T_1/T_2) - 1)(z - e^{-T/T_2})}\right]$
22	$\frac{k}{T_1^2s^2 + 2\xi T_1s + 1}$	$\frac{kze^{-\xi T/T_1} \sin\left(\frac{T}{T_1}\sqrt{1-\xi^2}\right)}{T_1\sqrt{1-\xi^2}\left[z^2 - 2ze^{-\xi T/T_1} \cos\left(\frac{T}{T_1}\sqrt{1-\xi^2}\right) + e^{-2\xi T/T_1}\right]}$

Bartolomeu IZVOREANU

**SISTEME AUTOMATE
NELINIARE DISCRETE ȘI
STOCASTICE**

MANUAL

Redactor: E. Balan

Bun de tipar 16.10.23

Formatul hârtiei 60x84 1/16

Coli de tipar 22,5

Tirajul 50 ex.

Hârtie ofset. Tipar RISO.

Comanda nr.101

MD-2004, Chișinău, bd. Ștefan cel Mare și Sfânt, 168, UTM

MD-2045, Chișinău, str. Studenților, 9/9, Editura „Tehnica-UTM”