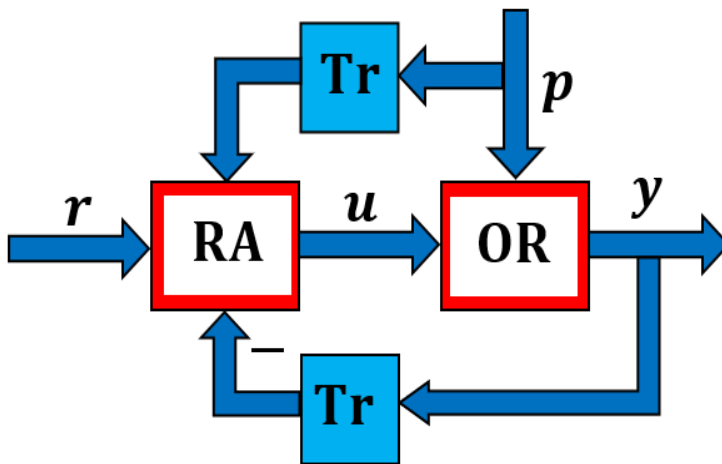


UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI

TEORIA SISTEMELOR AUTOMATE

Ghid pentru proiectarea de curs



Chișinău
2021

UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI

**FACULTATEA CALCULATOARE, INFORMATICĂ
ȘI MICROELECTRONICĂ**

**DEPARTAMENTUL INGINERIA SOFTWARE
ȘI AUTOMATICĂ**

**PROGRAMUL DE STUDII
AUTOMATICĂ ȘI INFORMATICĂ**

TEORIA SISTEMELOR AUTOMATE

Ghid pentru proiectarea de curs

Chișinău
Editura „Tehnica-UTM”
2021

CZU

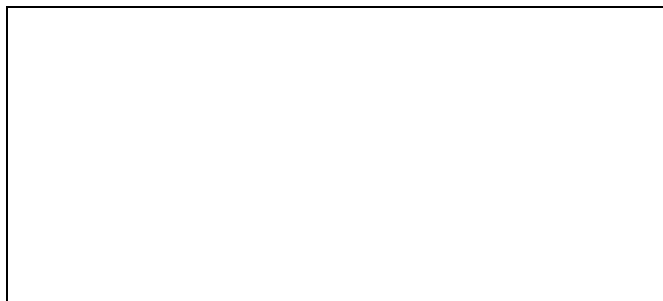
Ghidul pentru proiectare este destinat studenților care studiază Programul de studiu 0714.6 *Automatică și informatică* pentru aprofundarea cunoștințelor și elaborarea proiectului de curs la disciplina *Teoria sistemelor automate*.

În cadrul acestei lucrări sunt abordate aspectele importante ale teoriei sistemelor automate pentru rezolvarea problemelor specifice de analiză a stabilității și performanțelor modelelor structurilor de sisteme automate neliniare și cu eșantionare. Sunt prezentate exemple de calcul al modelelor sistemelor neliniare și cu eșantionare și analiza proprietăților acestora.

Ghidul include 5 capitole, bibliografie și 6 anexe.

Autor: conf. univ., dr. șt. tehn. B. Izvoreanu

Recenzent: acad., cerc. șt., dr. șt. tehn. V. Cheibaș



Redactor E. Balan

Bun de tipar 22.11.21	Formatul 60x84 1/16
Hârtie ofset. Tipar RISO	Tirajul 50 ex.
Coli de tipar 6,75	Comanda nr. 96

2004, UTM, Chișinău, bd. Ștefan cel Mare și Sfânt, 168

Editura "Tehnica-UTM"

2045, Chișinău, str. Studenților, 9/9

ISBN

© UTM, 2021

CUPRINS

1. SISTEME AUTOMATE NELINIARE	5
1.1 Generalități	5
1.2 Metoda planului fazelor.....	6
1.3 Metoda funcției de descriere	10
1.4 Metoda planului Mihailov (metoda algebrică	15
1.5 Metoda planului Nyquist (metoda Goldfarb)	16
1.6 Criteriul V.M. Popov de stabilitate absolută a sistemului neliniar	17
2. ANALIZA STABILITĂȚII SISTEMULUI AUTOMAT NELINIAR	21
2.1. Determinarea funcției de transfer a părții liniare a sistemului neliniar	21
2.2. Ecuația diferențială și ecuațiile de stare ale sistemului neliniar	23
2.3. Analiza stabilității sistemului neliniar în planul Mihailov.....	26
2.4. Analiza stabilității sistemului neliniar în planul Nyquist.....	36
2.5. Analiza stabilității absolute a sistemului neliniar după criteriul Popov	40
2.6. Simularea și analiza stabilității și performanțelor sistemului neliniar.....	44
2.7. Analiza stabilității sistemului neliniar cu element integrator	47
3. SISTEME AUTOMATE CU EȘANTIONARE	49
3.1. Ecuația cu diferențe finite și ecuația recursivă ale sistemului cu eșantionare	49
3.2. Schema structurală și funcțiile de transfer ale sistemului cu eșantionare închis.....	50
3.3. Analiza stabilității sistemului automat cu eșantionare.....	53
3.4. Performanțele sistemului automat cu eșantionare.....	54
4. ANALIZA SISTEMELOR AUTOMATE CU EȘANTIONARE	58
4.1. Funcția de transfer a sistemului automat cu eșantionare închis	58
4.2. Determinarea polinomului $B(z)$ a f.d.t. a sistemului cu eșantionare	61
4.3. Calculul polinomului $A(z)$ a f.d.t. a sistemului.....	68
4.4. Determinarea funcției de transfer a sistemului automat	

cu eșantionare închis	88
4.5. Analiza stabilității sistemului automat cu eșantionare	89
4.6. Performanțele sistemului automat cu eșantionare	90
5. DESCRIEREA SARCINII PROIECTULUI DE CURS	92
5.1. Sarcina proiectului de curs	92
5.2. Variante de teme la proiectare.....	93
5.3. Indicații metodice la realizarea proiectului	94
5.4. Cerințe la perfectarea proiectului de curs.....	97
BIBLIOGRAFIE.....	100
ANEXE.....	102
Anexa 1. Foaia de titlu	102
Anexa 2. Variante de date inițiale pentru proiect.....	103
Tabelul A2.1. Date inițiale ale sistemului automat	103
Anexa 3. Tipuri de neliniarități	104
Tabelul A3.1. Caracteristici statice ale neliniarităților.....	104
Anexa 4. Funcții de timp și imaginea lor	106
Tabelul A4.1. Funcții de timp continuu și discret și imaginea Laplace s și transformata z	106
Anexa 5. Funcții de transfer ale elementelor dinamice în transformata Laplace s în transformata z	107
Tabelul A5.1. Funcții de transfer ale elementelor dinamice în transformata Laplace s și în transformata z	107
Anexa 6. Sarcina individuală pentru proiect	110
Tabelul A6.1. Sarcina individuală pentru proiect a studentului....	110
Tabelul A6.2. Graficul de elaborare a capitolelor proiectului de curs	110

1 SISTEME AUTOMATE NELINIARE

1.1 Generalități

La automatizarea diverselor procese industriale rezultatul este construirea unui sistem cu conducere automată a acestui proces. În practică sistemele automate reale sunt neliniare, în sensul că unul sau mai multe elemente funcționale ale sistemului sunt neliniare (organe de reglare cu limitări, elemente de acționare cu caracteristică de saturație, elemente cu caracteristică de tip releu etc.), inclusiv procesele industriale care se automatizează sunt neliniare. În calitate de procese industriale ca obiecte de reglare sunt diferite tipuri de instalații din diverse ramuri ale industriei în care evoluează procesele cu reglarea temperaturii, presiunii, debitului, nivelului, vitezei liniare, rotațiile unui motor etc.

Sistemele automate liniare sunt cazuri particulare ale sistemelor neliniare, când modelele elementelor funcționale și ale proceselor sunt liniarizate (idealizări, simplificări și aproximații ale fenomenelor reale) și sunt acceptabile ca modele care corespund cerințelor practice.

Există însă numeroase situații când obținerea unui model matematic liniar nu este acceptabil în practică. În aceste cazuri, în structura sistemului există elemente funcționale liniare și neliniare și atunci sistemul se studiază ca sistem neliniar [1, 2, 6-8, 10-13, 15-18].

Se admite că sistemele automate neliniare (SAN) satisfac ipoteza de separabilitate, care presupune că sistemul poate fi divizat în subsisteme liniare și neliniare conectate adecvat între ele. Pentru subsistemele liniare se adoptă descrierea cu ajutorul transformatei Laplace (funcției de transfer) sau ecuațiilor de stare, iar elementele funcționale neliniare se caracterizează prin diferite tipuri de neliniarități prezentate ca și caracteristici statice idealizate ca funcții intrare-ieșire: saturație, zonă de insensibilitate, jocul de angrenaje, histerezis etc.

În general, neliniaritățile se pot clasifica în neliniarități statice și neliniarități dinamice, sau, în termeni ce ilustrează mai bine diferența dintre acestea, neliniarități fără memorie și neliniarități cu memorie. Pentru simplificarea studiului sistemului proprietățile dinamice ale

neliniarităților se atașează elementelor liniare și, în continuare, neliniaritatea se acceptă ca neliniaritate statică. În cazul neliniarităților statice comportamentul acestora la un anumit moment nu este influențat de istoria comportamentului până la momentul respectiv și sunt prezentate ca funcție intrare-ieșire, numită caracteristică statică a elementului neliniar, care modelează regimurile de funcționare ale elementelor reale.

Analiza și sinteza sistemelor automate neliniare se efectuează prin diferite metode aplicabile unor clase diferite de sisteme. Multe metode se bazează pe idei și concepte din teoria sistemelor automate liniare, dar aceste metode au un scop comun de analiză a stabilității și sinteza unor sisteme automate neliniare stabile [1, 2, 6-8, 10-4,16-18].

În continuare vom prezenta metodele de analiză a sistemului automat neliniar: metoda planului fazelor, metoda funcției de descriere (în planul Mihailov și Nyquist) și criteriul V.M. Popov de stabilitate absolută.

1.2 Metoda planului fazelor

Metoda spațiului fazelor a fost introdusă de Poincare pentru studierea sistemelor mecanice cu unul sau mai multe grade de libertate și de Gibbs la studiul echilibrului chimic. În principiu, se asociază mișcării sistemului considerat un punct care se mișcă simultan cu sistemul într-un spațiu raportat la un sistem de coordonate alcătuit din variabilele (parametrii) care determină poziția momentană a sistemului și derivatele acestor variabile, denumit spațiul fazelor.

Deoarece starea unui sistem fizic de ordinul n , liniar, este complet determinată de variabila de stare aleasă și cele $(n - 1)$ derivate ale acesteia, coordonatele spațiului stărilor $x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{n-1}$ și reprezintă variabile de fază. Pentru sistemele cu un singur grad de libertate, spațiul fazelor devine planul fazelor, cu coordonatele x_1 și x_2 , respectiv variabila de ieșire $y = x_1$, caracterizând funcționarea sistemului în regim dinamic și $x_2 = dx_1/dt = \dot{x}_1$ prima ei derivată în raport cu timpul [1, 2, 7-8, 16-17].

De exemplu, în cazul unui sistem de reglare automată cu

parametrul reglat y se aleg variabilele de fază: răspunsul sistemului $y = x_1$ și viteza de variație a răspunsului sistemului $dy(t)/dt = dx_1(t)/dt = x_2$. În planul fazelor (x_1, x_2) , oricărui punct M îi corespunde o singură stare a sistemului reprezentat. Pentru timpul variabil t , punctual M se deplasează pe o curbă numită *traietorie de fază* (curba din fig. 1.1). Această curbă poate fi gradată în valori de timp $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$, permițând evaluări calitative ale comportării sistemului automat reprezentat. Familia de traiectorii de fază determinate de variația condițiilor inițiale se numește *portret de fază* al sistemului automat.

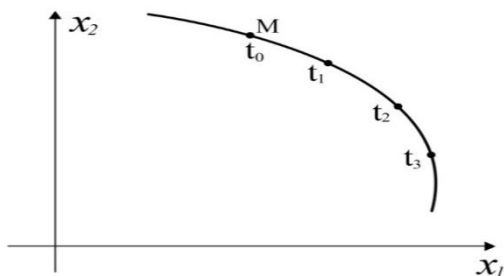


Fig. 1.1. Traietorie de fază

Desigur, analiza cu ajutorul planului fazelor este limitată la sisteme de ordinul unu și doi, deoarece derivatele de ordin superior nu pot fi reprezentate grafic, iar un sistem automat de ordin superior nu poate fi complet definit numai prin variabila de stare și prima ei derivată. Având în vedere că, în general, sistemele automate neliniare din multiple aplicații industriale pot fi approximate prin sisteme de ordinul doi, metoda își găsește o anumită aplicabilitate și la studierea acestora.

Se consideră sistemul automat neliniar de ordinul doi descris prin ecuația de forma:

$$\ddot{y} + f(\dot{y}, y)\dot{y} + g(\dot{y}, y)y = u, \quad (1.1)$$

unde y poate fi mărimea de ieșire a sistemului sau eroarea sistemului ε , u - mărimea de intrare, funcțiile f și g se consideră funcții analitice

(olomorfe).

Se consideră în (1.1) că variabila y este ieșirea sistemului.

Se introduc variabilele de stare:

$$y = x_1,$$

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y} = \frac{dx_1}{dt} = \dot{x}_1 = x_2, \quad (1.2)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y} = \frac{d^2x_1}{dt^2} = \dot{x}_2.$$

Se consideră că ecuația (1.1) admite o singură soluție pentru fiecare pereche de condiții inițiale $x_1(0)$, $x_2(0)$, care poate fi reprezentată printr-o traiectorie de fază unică în planul fazelor (x_1, x_2) .

Expresia (1.1) prin variabile de stare are forma:

$$\frac{dx_1}{dt} = \dot{x}_1 = x_2,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \dot{x}_2 = -f(x_1, x_2)x_2 - g(x_1, x_2)x_1 + u. \quad (1.3)$$

Împărțind ecuația a doua la prima din (1.3), se obține expresia:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -f(x_1, x_2) - \frac{g(x_1, x_2)x_1}{x_2} + \frac{u}{x_2}, \quad (1.4)$$

care este o ecuație diferențială din care s-a eliminat timpul și care descrie traiectoria de fază a sistemului.

Din expresiile (1.2)-(1.4) se obțin particularități importante ale planului fazelor cum ar fi:

1. Dacă funcțiile $f(x_1, x_2)x_2$ și $g(x_1, x_2)x_1$ sunt analitice, atunci soluția x_2 este unică în raport cu timpul t în planul (x_1, x_2) și este dictată de condițiile inițiale $x_1(0)$, $x_2(0)$ și de mărimea de intrare $u(t)$. Unicitatea soluțiilor (cu excepția punctelor singulare) în raport cu timpul t indică o traiectorie de fază pentru condițiile inițiale date și printr-un punct al planului fazelor trece o singură traiectorie de fază.

Dacă funcțiile f și g nu sunt analitice, atunci printr-un punct al planului trec mai multe traiectorii de fază. Asemenea puncte se numesc puncte *singulare* sau *critice* care caracterizează comportarea unui sistem automat liniar sau neliniar.

2. Pentru cazul când $dx_1/dt = \dot{x}_1 = x_2 > 0$ mărimea lui x_1 crește și se constată că în partea de sus a planului fazelor pentru timpul t în creștere punctul caracteristic se mișcă pe traiectoria de fază de la stânga la dreapta, iar în semiplanul de jos mișcarea se efectuează de la dreapta la stânga, deoarece $dx_1/dt = \dot{x}_1 = x_2 < 0$ și mărimea lui x_1 se micșorează.

3. În punctele $x_2 = 0$ și $f(x_1, x_2) \neq 0$, nu în punctele singulare ale axei absciselor, traiectoriile de fază intersectează axa absciselor sub un unghi drept de sus în jos în semiplanul din dreapta și de jos în sus în semiplanul din stânga.

4. În planul fazelor există puncte de echilibru atunci când expresiile $x_2 = 0, f(x_1, x_2) = 0$ care sunt puncte singulare pe axa absciselor și care pot fi stabile sau instabile.

În cazul sistemului automat liniar conservator, traiectoriile de fază au forma unor elipse ce corespund oscilațiilor neamortizate. Originea, în cazul dat, este un punct singular care nu aparține nici uneia din traiectorii, numit *centru*, asociat cu echilibrul *neutru*. În alte cazuri ale sistemelor automate liniare, traiectoriile de fază, proprii sistemelor instabile, sunt curbe deschise cu un singur punct singular – originea.

În cazul sistemelor neliniare, datorită particularităților acestora în comparație cu cele liniare, la reprezentarea funcționării lor în planul fazelor apar o serie de curbe speciale.

De exemplu, autooscilațiilor specifice sistemelor automate neliniare le corespund în planul fazelor tot elipse, reprezentând ciclurile-limită stabile sau instabile. Pentru un sistem automat neliniar în regim cu autooscilații stabile, ciclul-limită corespunzător este stabil. Pentru un răspuns ce caracterizează un sistem neliniar stabil în mic și instabil în mare, pentru care autooscilațiile sunt instabile, ciclul-limită este instabil. În funcție de comportarea sistemului neliniar, în planul fazelor pot exista și curbe deschise.

Tot în cazul sistemelor neliniare se mai întâlnesc și alte curbe

speciale în planul fazelor. Se presupune, de exemplu, că pentru abateri mici de la regimul staționar sistemul poate efectua autooscilații, care depind de condițiile inițiale, iar pentru abateri mari regimul sistemului este aperiodic instabil. În acest caz, în planul fazelor se obțin traiectorii de fază sub formă de elipse și hiperbole, delimitate de prezența unor puncte singulare tip *șa*.

1.3 Metoda funcției de descriere

Metoda funcției de descriere sau metoda liniarizării armonice se utilizează la liniarizarea neliniarităților în domeniul frecvențelor, aplicată unei clase largi de neliniarități și, în special, aplicată neliniarităților discontinue, pentru care liniarizarea bazată pe metoda dezvoltării în serii Taylor este inoperantă. Metoda funcției de descriere este utilă pentru SAN care funcționează cu autooscilații și permite determinarea relativ simplă a parametrilor autooscilațiilor amplitudinea A și pulsația ω [1, 2, 6-8, 10-16, 18].

Pentru neliniarități continue și sisteme neliniare cu mai multe neliniarități crește considerabil dificultatea calculului.

Pentru sisteme neliniare stabile, în care nu există autooscilații, metoda nu este eficientă, fiindcă oferă minimum de informații asupra calității sistemului.

Se consideră o structură a sistemului neliniar dată în figura 1.2, în cadrul căreia neliniaritățile sunt prezentate cu neliniaritatea echivalentă N , iar partea liniară se descrie de f.d.t. $H(s)$ care este stabilă sau cu astatism este dată în figura 1.2.

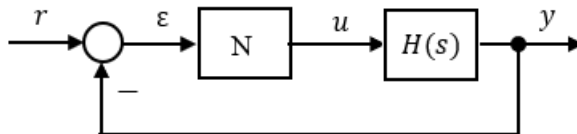


Fig. 1.2. Structura sistemului automat neliniar

Se consideră că partea liniară are o comportare de filtru trece-jos cu o pantă cel mult egală cu -40 dB/decadă în zona pulsației de tăiere, deci, permite trecerea numai a armonicilor fundamentale a semnalului

periodic $x(t)$ aplicat la intrarea acesteia și se exprimă prin relația [1, 8, 10, 16-18]:

$$|H(j\omega)| \gg |H(jk\omega)|, k = 2, 3, \dots \quad (1.5)$$

Descrierea sistemului neliniar se prezintă:

$$y = -H(s)x, \quad (1.6)$$

$$x = f(u).$$

Pentru a constata apariția autooscilațiilor în sistemul automat neliniar se presupune că la intrarea neliniarității N , prezentată cu caracteristică statică, se aplică semnalul armonic $u(t) = A\sin\omega t$, iar semnalul la ieșire $x(t) = f(u(t))$ conține spectrul de armonici x_1, x_2, x_3, \dots . Rezultă că semnalul de ieșire din neliniaritate este o funcție periodică, care se dezvoltă în serie Fourier și se descrie prin relația [1, 2, 8, 15, 16]:

$$x(t) = B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos k\omega t, \quad (1.7)$$

în care coeficienții seriei Fourier se calculează prin relațiile cunoscute:

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(A\sin\omega t) d(\omega t), \\ B_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A\sin\omega t) \sin k\omega t d(\omega t), \\ C_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A\sin\omega t) \cos k\omega t d(\omega t). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Pentru neliniaritățile simetrice cu originea planului coeficientul $B_0 = 0$ din (1.7).

În baza metodei liniarizării armonice se neglijează toate armonicele de frecvență superioară din dezvoltarea în serie Fourier (au

un efect neglijabil în cadrul sistemului), aproximând ieșirea elementului neliniar cu prima armonică prin relația:

$$x(t) = B_1 \sin \omega t + C_1 \cos \omega t. \quad (1.9)$$

Pentru a defini funcția de descriere, exprimăm valorile sinusului și cosinusului ca funcții ale valorii instantanee a semnalului de intrare $u(t) = A \sin \omega t$ și ca rezultat se obține:

$$\sin \omega t = u/A, \quad \cos \omega t = pu/(A\omega), \quad . \quad (1.10)$$

unde $p = d/dt$ este operatorul de derivare.

În expresia (1.9) înlocuim sinusul și cosinusul cu valorile lor din (1.10) și ca rezultat se obține:

$$x = \frac{B_1}{A} u + \frac{C_1}{A} \frac{pu}{\omega}. \quad (1.11)$$

Funcția de descriere a elementului neliniar se determină ca raportul mărimii de ieșire către mărimea de intrare:

$$N(A, p, \omega) = \frac{x}{u} = \frac{B_1}{A} + \frac{C_1 p}{A\omega}. \quad (1.12)$$

Dacă în relația (1.12) se introduc notațiile:

$$b(A) = B_1/A, \quad g(A) = C_1/A, \quad (1.13)$$

atunci se obține:

$$N(A, p, \omega) = b(A) + g(A)p/\omega, \quad (1.14)$$

unde $b(A)$ și $g(A)$ sunt coeficienții liniarizării armonice a elementului neliniar care au forma:

$$b = b(A) = \frac{B_1}{A} = \frac{1}{A\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin \omega t) \sin \omega t d(\omega t),$$

(1.15)

$$g = g(A) = \frac{c_1}{A} = \frac{1}{A\pi} \int_0^{2\pi} f(A\sin\omega t) \cos\omega t d(\omega t).$$

Expresia (1.9) cu însemnările (1.15) se prezintă astfel:

$$x(t) = A(b\sin\omega t + g\cos\omega t). \quad (1.16)$$

Pentru stabilirea unui formalism asemănător cu cel utilizat în metoda frecvențială în cazul sistemelor liniare, funcțiile trigonometrice sunt înlocuite prin funcții complexe, unde variabilele reale y, u, x sunt înlocuite prin valorile complexe cu aceiași parametri: amplitudine, frecvență și fază.

Expresia complexă a semnalului de intrare este:

$$u(t) = A \sin \omega t = A e^{j\omega t}. \quad (1.17)$$

Expresia complexă pentru (1.16) are forma:

$$x(t) = A(b\sin\omega t + jg\cos\omega t) = (b + jg)Ae^{j\omega t} = (b + jg)u(t), \quad (1.18)$$

unde $e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$.

Se introduce noțiunea de coeficient de transfer armonic sau funcția de descriere a elementului neliniar ca raportul mărimii de ieșire la cea de intrare a neliniarității din (1.18):

$$N(A) = \frac{x}{u} = b(A) + jg(A) = \sqrt{b^2 + g^2} e^{j\varphi_n} = h_n e^{j\varphi_n}, \quad (1.19)$$

unde $h_n = \sqrt{b^2 + g^2}$ este modulul care prezintă raportul amplitudinilor semnalului de ieșire x și a semnalului de intrare u , iar $\varphi_n = \arctg g/b$ este defazajul ieșirii x în raport cu intrarea u .

Expresia (1.11) în domeniul timpului când neliniaritatea depinde de mărimea de intrare și de derivata ei se prezintă astfel:

$$x(t) = \frac{B_1}{A} A\sin\omega t + \frac{C_1}{A\omega} \frac{d}{dt} (A\sin\omega t). \quad (1.20)$$

Dacă neliniaritatea depinde numai de mărimea de intrare $u(t)$ și nu depinde și de derivata ei, atunci coeficienții liniarizării armonice depind numai de amplitudinea A , dar nu depind de pulsația ω .

La elementele cu caracteristici univalente (univoce), fazele variabilelor de intrare și ieșire coincid (defazajul este zero) și componenta cosinusului dispare (este nulă), iar coeficientul $g = 0$ și $N(A) = b(A)$.

Pentru neliniarități liniare pe porțiuni coeficienții b și g se calculează relativ simplu. Pentru neliniarități de curbura approximate polinomial, coeficienții conțin funcții de tipul Γ , iar în cazul aproximării hiperbolice sau armonice, coeficienții b și g conțin funcții Bessel de speța I-a cu observația că atât partea reală, cât și partea imaginară depind de amplitudinea semnalului sinusoidal de la intrare. Partea imaginară a funcției de descriere apare numai pentru neliniarități de tip histerezis (neliniarități neunivoce). Cunoașterea funcției de descriere pentru un sistem neliniar permite analiza performanțelor sistemului prin metode cunoscute din analiza sistemelor liniare.

Rezultă că funcția de descriere este definită în raport cu amplitudinea intrării și parametrii caracteristici ai neliniarității, fiind preferată o formă normalizată a funcției de descriere în unele aplicații.

În anexa 3 sunt date exemple de caracteristici statice ale neliniarităților tipice și coeficienții lor de liniarizare armonică.

Metoda liniarizării armonice, fiind o metodă aproximativă, va conduce la obținerea performanțelor sistemelor neliniare cu un grad de precizie limitat. Cu cât partea liniară a sistemului are o comportare mai bună de filtru-trece jos, cu atât rezultatele obținute sunt mai aproape de valorile lor reale.

Dacă într-un sistem automat neliniar din figura 1.2 partea liniară este descrisă cu funcția de transfer echivalentă:

$$H(s) = \frac{C(s)}{D(s)}, \quad (1.21)$$

iar partea neliniară este descrisă prin funcția de descriere $N(A)$, atunci funcția de transfer a sistemului automat închis se definește în domeniul frecvențelor sub forma:

$$H(A, j\omega) = \frac{N(A)H(j\omega)}{1+N(A)H(j\omega)} = \frac{M(A, j\omega)}{L(A, j\omega)}. \quad (1.22)$$

Condiția pentru apariția autooscilațiilor în sistemul (1.22) se obține din ecuația caracteristică în forma standard a sistemului și se numește *ecuația bilanțului armonic*:

$$L(A, j\omega) = 1 + N(A)H(j\omega) = 1 + (b(A, \omega) + jg(A, \omega))H(j\omega) = 0. \quad (1.23)$$

Dacă în sistemul automat neliniar în formă standard există oscilații întreținute și acestea se aproximează la nivelul fundamentalei, atunci amplitudinea A și pulsația ω satisfac ecuația bilanțului armonic (1.23). Ecuația (1.23) poate fi analizată ca ecuație caracteristică cu coeficienții constanți și conține coeficienți care depind de soluția căutată.

În baza ecuației (1.23) există două metode de rezolvare a problemei de stabilitate a autooscilațiilor în sistemul liniarizat [1, 2, 8, 16-18]:

1. Metoda planului Mihailov (metoda algebrică).
2. Metoda planului Nyquist (metoda Goldfarb).

1.4 Metoda planului Mihailov (metoda algebrică)

Dacă înlocuim locul de transfer în (1.23) cu valoarea lui în forma raportului a două polinoame $C(j\omega)/D(j\omega)$ din (1.21), atunci se obține expresia:

$$L(A, j\omega) = D(j\omega) + (b(A, \omega) + jg(A, \omega))C(j\omega) = 0. \quad (1.24)$$

Expresia (1.24) poate fi egală cu zero numai în cazul când partea reală și cea imaginară în același timp vor fi egale cu zero. Prin urmare, expresia (1.24) se divizează într-un sistem din două ecuații alcătuite din partea reală și imaginară cu necunoscutele a și ω :

$$X(A, \omega) = \text{Re}L(A, j\omega) = 0, \quad (1.25)$$

$$Y(A, \omega) = \text{Im}L(A, j\omega) = 0.$$

În urma soluției sistemului de ecuații (1.25) se determină parametrii oscilațiilor obținute A_0 și ω_0 .

Stabilitatea soluțiilor periodice din (1.25) pot fi determinate în ipoteza că funcțiile $X(A, \omega)$ și $Y(A, \omega)$ sunt derivabile în raport cu parametrii A_0 și ω_0 din următoarea inegalitate:

$$S_0 = \left(\frac{\partial X(A, \omega)}{\partial A} \right)_{A_0} \left(\frac{\partial Y(A, \omega)}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} - \left(\frac{\partial X(A, \omega)}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} \left(\frac{\partial Y(A, \omega)}{\partial A} \right)_{A_0}. \quad (1.26)$$

Oscilația întreținută caracterizată prin perechea (A_0, ω_0) , soluția ecuațiilor (1.25), este limita stabilă dacă $S_0 > 0$, limită instabilă dacă $S_0 < 0$ și limită semistabilă dacă $S_0 = 0$.

Dacă $N(A)$ și $H(j\omega)$ sunt expresii complexe, atunci este dificil a găsi pe cale analitică soluțiile ecuațiilor (1.25). În aceste cazuri se utilizează metodele grafice.

1.5 Metoda planului Nyquist (metoda Goldfarb)

Din ecuația caracteristică a sistemului (1.23) se obține relația:

$$H(j\omega) = -\frac{1}{N(A)} = -G_N(A), \quad (1.27)$$

în care $G_N(A)$ se numește *locul de descriere invers negativ* sau *hodograful* elementului neliniar.

Prezentarea grafică a locului de transfer $H(j\omega)$ și a locului de transfer invers $G_N(A)$ în planul complex (fig. 1.3) permite determinarea parametrilor autooscilațiilor și verificarea stabilității sistemului automat neliniar, descris prin modelul liniarizat obținut prin metoda liniarizării armonice.

În figura 1.3 punctele 1 și 2 de intersecție a celor două locuri de transfer determină existența autooscilațiilor în sistem cu amplitudine și frecvență corespunzătoare cu (ω_1, A_1) și (ω_2, A_2) .

Din analiza autooscilațiilor existente în punctele 1 și 2 rezultă că

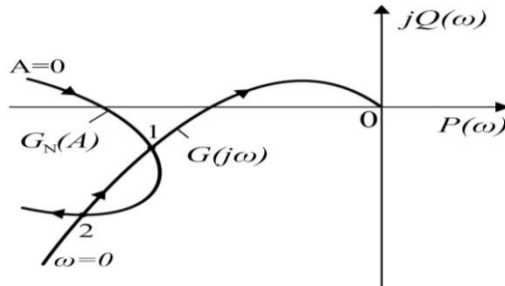


Fig. 1.3. Locurile de transfer ale sistemului neliniar în planul complex

punctul 1 corespunde unor autooscilații instabile, iar punctul 2 corespunde unor autooscilații stabile. În punctul 1 oscilațiile ce apar ca urmare a intersecției celor două locuri de transfer vor avea o amplitudine mai mare odată cu creșterea amplitudinii A semnalului sinusoidal. Prin creșterea amplitudinii A semnalului se intră în zona de instabilitate a sistemului automat neliniar.

Condiția necesară și suficientă ca un sistem automat neliniar să fie stabil (respectiv existența și stabilitatea soluțiilor periodice) constă în faptul ca locul de transfer invers negativ $G_N(A)$ să nu intersecteze locul de transfer al părții liniare $H(j\omega)$ al sistemului, impunându-se a fi plasat în stânga acestuia când este parcurs de la frecvențe joase spre frecvențe înalte.

1.6 Criteriul V.M. Popov de stabilitate absolută a sistemului neliniar

1. Cazul pentru partea liniară stabilă. Se consideră structura sistemului neliniar (fig. 1.2), alcătuită din partea liniară cu funcția de transfer $H(s) = C(s)/D(s)$ având toți polii în semiplanul stâng $Re p_i < 0$, deci, este stabilă, strict proprie și cu coeficientul de transfer $k_l = 1$, iar neliniaritatea $u = f(y)$ este de clasa $C_{(0,k)}$ sau $C_{(0,\infty)}$.

Criteriul de stabilitate absolută se formulează: sistemul neliniar este absolut stabil, dacă există un număr real q astfel încât are loc inegalitatea [1, 2, 6-8, 10, 11, 15, 16, 18]:

$$\operatorname{Re}[(1 + jq\omega)H(j\omega)] > -\frac{1}{k}, \omega \geq 0. \quad (1.28)$$

În inegalitatea (1.28) $k = k_N k_l$ este coeficientul de transfer al sistemului automat deschis ca produs al coeficienților de transfer al neliniarității k_N și al părții liniare k_l .

Criteriul Popov admite o remarcabilă interpretare grafică.

Pornind de la forma locului de transfer:

$$H(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) \quad (1.29)$$

inegalitatea (1.28) devine:

$$\operatorname{Re}H(j\omega) - q\omega \operatorname{Im}H(j\omega) = U(\omega) - q\omega V(\omega) > -\frac{1}{k}. \quad (1.30)$$

Se introduc notațiile în (1.30):

$$x = U(\omega), y = \omega V(\omega) \quad (1.31)$$

și se obține inegalitatea în forma:

$$x - qy > -\frac{1}{k}. \quad (1.32)$$

Relația (1.32) prezintă ecuația dreptei:

$$x - qy + \frac{1}{k} = 0, \quad (1.33)$$

numită *dreapta Popov*, care are panta $1/q$.

Dacă inegalitatea (1.31) are loc, atunci cu (1.33) ea devine:

$$x - qy + \frac{1}{k} > 0. \quad (1.34)$$

Se utilizează *locul de transfer modificat Popov* sau *hodograful modificat*, care prezintă curba definită parametric:

$$H^*(j\omega) = U(\omega) + j\omega V(\omega) = U^*(\omega) + jV^*(\omega). \quad (1.35)$$

Pentru expresia (1.35) se variază $\omega = 0 \cdots \infty$, se calculează funcțiile frecvențiale modificate $U^*(\omega)$ și $V^*(\omega)$, se construiește locul de transfer modificat, se determină punctul cu coordonatele $(-1/k, j0)$ pe semiaxa negativă a abscisei. Prin punctul $(-1/k, j0)$ se trasează dreapta Popov cu pantă arbitrară $1/q$.

Definiție: Pentru ca sistemul neliniar să fie absolut stabil este necesar și suficient să existe un astfel de număr q încât să se poată duce o dreaptă Popov prin punctul $(-1/k, j0)$ ca să lase hodograful modificat $H^*(j\omega)$ de aceeași parte a dreptei cu originea.

Se consideră că panta $1/q$ a dreptei este arbitrară.

În probleme în care se cere sectorul maxim de stabilitate, se duce dreapta Popov astfel, încât intersecția cu axa absciselor să fie cât mai aproape de origine.

Dacă nu se poate trasa dreapta Popov la locul de transfer modificat, atunci criteriul Popov nu se aplică și, rezultă că nu există informații și nu se poate afirma nimic despre stabilitatea absolută a sistemului neliniar.

2. Cazul când partea liniară este instabilă. Dacă partea liniară este instabilă ($Rep_i \geq 0$) sau neutră (conține element integrator), atunci criteriul Popov, prezentat în forma de mai sus, nu poate fi utilizat pentru studierea stabilității absolute a sistemului instabil. În aceste cazuri se aplică proceduri de transfigurare echivalentă a schemei bloc structurale a sistemului astfel ca partea liniară să devină stabilă. Această transformare se realizează prin introducerea în structura sistemului neliniar a două elemente dinamice ideale echivalente cu un coeficient de transfer r (valoare arbitrară) și cu semne diferite, aplicate la partea liniară în reacție negativă, iar la neliniaritate în conexiune paralelă cu semn negativ.

Schema structurală transformată a sistemului automat neliniar se dă în figura 1.4.

În urma transformărilor se modifică proprietățile interne ale părților liniare și neliniare ale sistemului.

Partea liniară a sistemului se stabilizează și funcția de transfer echivalentă se determină ca conexiune în reacție:

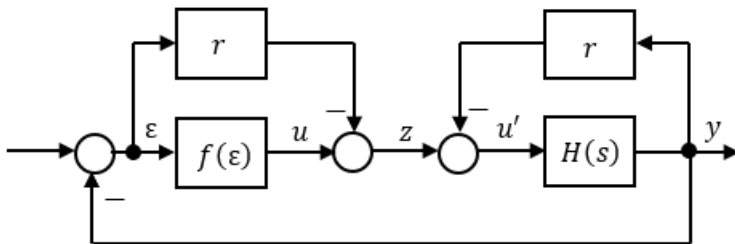


Fig. 1.4. Schema structurală transformată a sistemului neliniar

$$H_e(s) = \frac{H(s)}{1+rH(s)} = \frac{C_e(s)}{D_e(s)}. \quad (1.36)$$

Pentru neliniaritate se obține funcția neliniară echivalentă:

$$f_e(\varepsilon) = f(\varepsilon) - r\varepsilon. \quad (1.37)$$

În acest caz, neliniaritatea nu mai aparține sectorului $C_{(0,k)}$, dar aparține sectorului $C_{(r,k+r)}$.

În continuare, pentru această structură a sistemului modificat se aplica criteriul Popov de stabilitate absolută în formularea dată mai sus.

2 ANALIZA STABILITĂȚII SISTEMULUI AUTOMAT NELINIAR

2.1 Determinarea funcției de transfer a părții liniare a sistemului neliniar

Se consideră schema structurală a sistemului automat neliniar dată în figura 2.1, *a* cu elementele funcționale cu funcțiile de transfer: $H_1(s)$, $H_2(s)$, $H_3(s)$ sunt elemente cu inerție de ordinul unu, $H_4(s)$ – element derivator ideal, $H_5(s)$ - element ideal, iar $f(\varepsilon)$ – reprezintă caracteristica statică a elementului neliniar.

Procedura de transformare a schemei structurale a sistemului neliniar se efectuează pe etape.

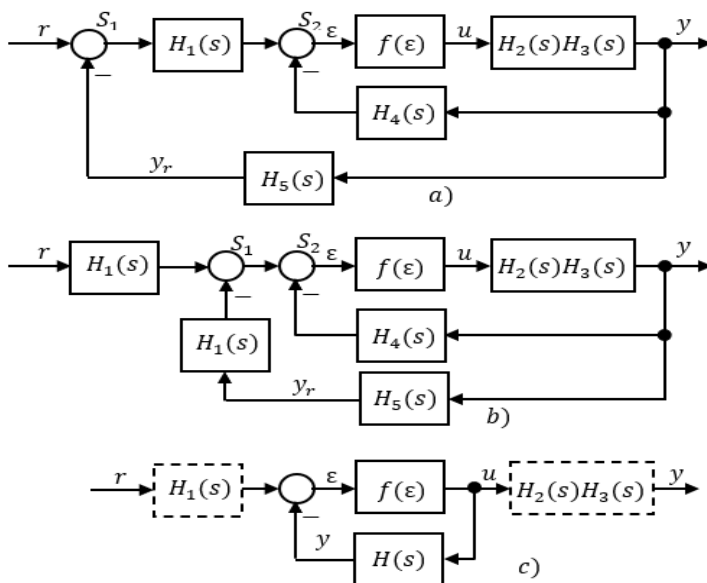


Fig. 2.1. Scheme structurale ale sistemului neliniar:
a) inițială, *b*) transformată, *c*) echivalentă

În prima etapă se deplasează f.d.t. $H_1(s)$ la stânga peste sumatorul S_1 și totodată se introduce și în canalul reacției sistemului. Ca

rezultat reacția sistemului este o conexiune paralelă a produsului f.d.t. $H_1(s)H_5(s)$ cu f.d.t. $H_4(s)$ din reacția locală (fig. 2.1, b) și funcția de transfer a reacției echivalente se prezintă în forma:

$$H'(s) = H_1(s)H_5(s) + H_4(s) = \frac{k_1k_5}{T_1s+1} + k_4s = \frac{k_4T_1s^2 + k_4s + k_1k_5}{T_1s+1}.$$

În etapa a doua se deplasează produsul $H_2(s)H_3(s)$ la dreapta peste nod și se introduce și în canalul de reacție al sistemului (fig. 2.1, c).

În acest mod, partea liniară se descrie de f.d.t. echivalentă și după unele transformări se obține expresia ca raportul a două polinoame:

$$\begin{aligned} H(s) &= H'(s)H_2(s)H_3(s) = [H_1(s)H_5(s) + H_4(s)]H_2(s)H_3(s) = \\ &= \frac{k_2k_3}{(T_2s+1)(T_3s+1)} \left(\frac{k_1k_5}{T_1s+1} + k_4s \right) = \frac{k_2k_3k_4T_1s^2 + k_2k_3k_4s + k_1k_2k_3k_5}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)} = \\ &= \frac{c_2s^2 + c_1s + c_0}{d_3s^3 + d_2s^2 + d_1s + d_0} = \frac{b_2s^2 + b_1s + b_0}{s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0} = \frac{B(s)}{A(s)}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

unde coeficienții $c_0, c_1, c_2, d_0, d_1, d_2, d_3$ sunt funcții de coeficienții de transfer și de constantele de timp inițiale ale elementelor sistemului:

$$c_0 = k_1k_2k_3k_5, \quad c_1 = k_2k_3k_4, \quad c_2 = k_2k_3k_4T_1,$$

$$d_0 = 1, \quad d_1 = T_1 + T_2 + T_3, \quad d_2 = T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3, \quad d_3 = T_1T_2T_3.$$

În (2.1) se impune condiția ca coeficientul $d_3 = 1$ și atunci toți coeficienții f.d.t. se împart la d_3 obținând forma finală a f.d.t. exprimată ca raportul polinoamelor $B(s)$ și $A(s)$ cu coeficienții:

$$b_2 = c_2/d_3, \quad b_1 = c_1/d_3, \quad b_0 = c_0/d_3,$$

$$a_3 = 1, \quad a_2 = d_2/d_3, \quad a_1 = d_1/d_3, \quad a_0 = d_0/d_3.$$

2.2 Ecuația diferențială și ecuațiile de stare ale sistemului neliniar

1. Structura sistemului automat cu elemente cu inerție. După transformarea schemei bloc structurale a sistemului automat neliniar, partea liniară dată de funcția de transfer (2.1) se descrie prin ecuația diferențială:

$$\ddot{y}(t) + a_2\dot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_2\ddot{u}(t) + b_1\dot{u}(t) + b_0u(t). \quad (2.2)$$

Pentru a obține ecuațiile de stare și traiectoria de fază ale sistemului automat de ordinul doi se anulează în elementul cu f.d.t. $H_1(s)$ constanta de timp $T_1 = 0$ din (2.1) și în ecuația (2.2) se vor anula coeficienții $b_2 = 0$, $a_3 = 0$ și ecuația ia forma:

$$\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_1\dot{u} + b_0u, \quad (2.3)$$

unde s-a admis coeficientul $a_2 = 1$. În cazul când coeficientul $a_2 \neq 1$, atunci toți coeficienții ecuației (2.3) se împart la a_2 .

Pentru a obține ecuațiile de stare și traiectoria de fază ale sistemului automat din (2.3) se parcurg etapele în modul următor:

1. Prima variabilă de stare este:

$$x_1 = y. \quad (2.4)$$

2. A doua variabilă de stare se alege în forma:

$$x_2 = \dot{x}_1 + \alpha u, \quad (2.5)$$

unde coeficientul α este necunoscut și are rolul de a neutraliza acțiunea mărimii derivatei \dot{u} din (2.3), care se va calcula în continuare.

3. Prima ecuație de stare a sistemului se determină din expresia (2.5) în forma:

$$\dot{x}_1 = x_2 - \alpha u. \quad (2.6)$$

4. Se calculează derivata a doua a expresiei (2.6):

$$\ddot{y} = \ddot{x}_1 = \dot{x}_2 - \alpha \dot{u}. \quad (2.7)$$

5. Expresia (2.3) cu (2.4)-(2.7) ia forma:

$$(\dot{x}_2 - \alpha \dot{u}) + a_1(x_2 - \alpha u) + a_0 x_1 = b_1 \dot{u} + b_0 u. \quad (2.8)$$

6. După unele transformări în (2.8) se determină a doua ecuație de stare în forma:

$$\dot{x}_2 = -a_0 x_1 - a_1 x_2 + \dot{u}(b_1 + \alpha) + u(b_0 + \alpha a_1). \quad (2.9)$$

7. Se impune condiția ca acțiunea componentei derivatei \dot{u} din (2.9) să se anuleze și se obține:

$$b_1 + \alpha = 0 \text{ sau } \alpha = -b_1. \quad (2.10)$$

8. Sistemul ecuațiilor de stare se prezintă din ecuațiile (2.5) și (2.9), cu anularea componentei derivatei \dot{u} din (2.8) cu condiția (2.10), în forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + b_1 u, \\ \dot{x}_2 &= -a_0 x_1 - a_1 x_2 + (b_0 - a_1 b_1) u, \\ y &= x_1, \end{aligned} \quad (2.11)$$

unde y este mărimea de ieșire.

Se prezintă sistemul de ecuații (2.11) în formă vector-matriceală:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{vmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 \\ b_0 - a_1 b_1 \end{vmatrix} u, \quad (2.12)$$

$$y = |1 \ 0| \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$$

sau în forma:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

unde

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{vmatrix}, \mathbf{b} = \begin{vmatrix} b_0 \\ b_0 - a_1 b_1 \end{vmatrix}, \mathbf{c}^T = |1 \ 0|.$$

Prin divizarea ecuației a doua la prima din sistemul (2.11) se determină ecuația traiectoriei de fază în forma:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-a_0 x_1 - a_1 x_2 + (b_0 - a_1 b_1)u}{x_2 + b_1 u}. \tag{2.14}$$

2. Structura sistemului automat conține element integrator.

În cazul când partea liniară a sistemului conține element integrator și elemente cu inerție, atunci ecuația diferențială a sistemului neliniar (2.3) are forma:

$$\ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) = b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t). \tag{2.15}$$

Efectuând calculele conform procedurii expuse mai sus pentru (2.15), se obține sistemul ecuațiilor de stare în forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + b_1 u, \\ \dot{x}_2 &= -a_1 x_2 + (b_0 - a_1 b_1)u, \end{aligned} \tag{2.16}$$

Pentru sistemul de ecuații (2.16) formă vector-matriceală este:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{vmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 \\ b_0 - a_1 b_1 \end{vmatrix} u, \quad (2.17)$$

$$y = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$$

sau în forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{bu},$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \quad (2.18)$$

unde

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a_1 \end{vmatrix}, \mathbf{b} = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_0 - a_1 b_1 \end{vmatrix}, \mathbf{c}^T = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Prin divizarea ecuației a doua la prima din sistemul (2.16) se determină ecuația traiectoriei de fază în forma:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-a_1 x_2 + (b_0 - a_1 b_1)u}{x_2 + b_1 u}. \quad (2.19)$$

2.3 Analiza stabilității sistemului neliniar în planul Mihailov

Partea liniară a sistemului este descrisă de f.d.t. (2.1):

$$\begin{aligned} H(s) &= [H_1(s)H_5(s) + H_4(s)]H_2(s)H_3(s) = \\ &= \frac{c_2 s^2 + c_1 s + c_0}{d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0} = \frac{C(s)}{D(s)}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

unde coeficienții din (2.20) se calculează după datele inițiale: $k_1 = 2$, $k_2 = 5$, $k_3 = 1$, $k_4 = 0.5$, $k_5 = 1$, $T_1 = 5$ s, $T_2 = 3$ s, $T_3 = 8$ s, $b = 0.2$, $c = 14$ și se obțin valorile numerice:

$$c_0 = k_1 k_2 k_3 k_5 = 2 * 5 * 1 * 1 = 10,$$

$$c_1 = k_2 k_3 k_4 = 5 * 1 * 0.5 = 2.5,$$

$$c_2 = k_2 k_3 k_4 T_1 = 2 * 1 * 0.5 * 5 = 5,$$

$$d_0 = 1,$$

$$d_1 = T_1 + T_2 + T_3 = 5 + 3 + 8 = 16,$$

$$d_2 = T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3 = 5 * 3 + 5 * 8 + 3 * 8 = 79,$$

$$d_3 = T_1 T_2 T_3 = 5 * 3 * 8 = 120.$$

Se consideră neliniaritatea 5 din tabelul A3.1 Anexa 3 dată în figura 2.2 și locul de transfer descris numai de partea reală cu relația:

$$N(A) = b(A) = \frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{A} + \frac{b}{A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} \right), \text{ cu } A \geq b, \quad (2.21)$$

$$b(A) = k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{c}{b}, \text{ pentru } A < b,$$

unde A este amplitudinea semnalului de intrare.

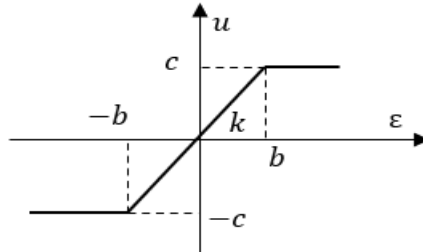


Fig. 2.2. Caracteristica statică a elementului neliniar

Pentru analiza stabilității sistemului liniarizat se consideră că asupra sistemului a acționat un semnal perturbator (modificarea condițiilor inițiale) și în sistem sunt posibile oscilații întreținute în jurul punctului de echilibru cu parametrii: amplitudinea A_0 și pulsația ω_0 .

Se determină ecuația caracteristică a sistemului liniarizat cu partea liniară descrisă de funcția de transfer (2.20) și elementul neliniar descris de relația (2.21):

$$\begin{aligned}
 L(A, s) &= 1 + N(A)H(s) = 1 + b(A) \frac{c_2 s^2 + c_1 s + c_0}{d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0} = \\
 &= d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0 + b(A)(c_2 s^2 + c_1 s + c_0) = \\
 &= d_3 s^3 + s^2(d_2 + c_2 b(A)) + s(d_1 + c_1 b(A)) + \\
 &+ (d_0 + c_0 b(A)) = 0.
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Pentru verificarea stabilității sistemului liniarizat cu ecuația caracteristică (2.22) se utilizează criteriul Hurwitz și pentru datele numerice inițiale ale părții liniare se calculează penultimul determinant:

$$\begin{aligned}
 \Delta_2 &= (d_2 + c_2 b(A))(d_1 + c_1 b(A)) - d_3(d_0 + c_0 b(A)) = \\
 &= c_1 c_2 b^2(A) + b(A)(c_1 d_2 + c_2 d_1 - c_0 d_3) + d_1 d_2 - d_0 d_3 = \\
 &= 12.5b^2(A) - 922.5b(A) + 1144 = 0.
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Se soluționează ecuația (2.23) și se determină valorile coeficientului liniarizării armonice $b_1(A) = 1.2617$, $b_2(A) = 72.5383$.

Din condițiile necesare de stabilitate, se calculează determinantul Δ_2 la valorile parametrilor date ale sistemului liniarizat și valorile lui $b(A) = 1,2617$ și $b(A) = 72.5383$ și se constată că sistemul automat va fi stabil pentru valorile lui $b(A) < 1,2617$ și $b(A) > 72.5383$

Analiza evoluției sistemului neliniar se efectuează după ecuația caracteristică a sistemului închis, numită și ecuația bilanțului armonic (1.23), dată în forma complexă de expresia:

$$L(A, j\omega) = 1 + N(A)H(j\omega) = 0.$$

În ecuația caracteristică se substituie funcțiile $N(A)$ și $H(j\omega)$ prin expresiile care descriu partea liniară (2.20) și partea neliniară (2.21) și, după unele transformări, expresia în domeniul frecvență se prezintă prin partea reală și imaginară în forma:

$$\begin{aligned} L(A, j\omega) &= 1 + b(A) \frac{c_2(j\omega)^2 + c_1j\omega + c_0}{d_3(j\omega)^3 + d_2(j\omega)^2 + d_1j\omega + d_0} = \\ &= d_3(j\omega)^3 + d_2(j\omega)^2 + d_1j\omega + d_0 + b(A)(c_2(j\omega)^2 + c_1j\omega + c_0) = \\ &= X(A, \omega) + jY(A, \omega) = 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Dacă ecuația caracteristică este egală cu zero, atunci partea reală și partea imaginară de asemenea sunt egale cu zero și se obține sistemul din două ecuații algebrice în care necunoscutele sunt parametrii autooscilațiilor amplitudinea A și pulsația ω :

$$\begin{aligned} X(A, \omega) &= -\omega^2(d_2 + c_2b(A)) + d_0 + c_0b(A) = 0, \\ Y(A, \omega) &= -d_3\omega^3 + d_1\omega + c_1\omega b(A) = \\ &= -d_3\omega^2 + d_1 + c_1b(A) = 0. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Din ecuația a doua se obține expresia pentru ω^2 :

$$\omega^2 = \frac{d_1 + c_1b(A)}{d_3} \quad (*)$$

și se substituie ω^2 în prima ecuație din (2.25) obținând:

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{d_1 + c_1b(A)}{d_3} \right) (d_2 + c_2b(A)) + d_0 + c_0b(A) = \\ & = -c_1c_2b^2(A) - b(A)(c_1d_2 + c_2d_1 - c_0d_3) + d_0d_3 - d_0d_2 = 0. \end{aligned}$$

Această ecuație algebrică pătratică pe necunoscuta $b(A)$ cu datele numerice se soluționează și se obțin două valori ale coeficientului de liniarizare armonică:

$$\begin{aligned}
 & -c_1c_2b^2(A) - b(A)(c_1d_2 + c_2d_1 - c_0d_3) + d_0d_3 - d_1d_2 = \\
 & = -2.5 \cdot 5b^2(A) - b(A)(2.5 \cdot 79 + 5 \cdot 16 - 10 \cdot 120) + \\
 & + 1 \cdot 120 - 16 \cdot 79 = -12.5b^2(A) + 922.5b(A) - 1144 = 0, \\
 & 12.5b^2(A) - 922.5b(A) + 1144 = 0, \\
 & b_1(A) = 1.2617, b_2(A) = 72.5383.
 \end{aligned}$$

Utilizând valorile lui $b_1(A) = 1.2617$ și $b_2(A) = 72.5383$, se calculează valorile lui ω din expresia (*) și se obține:

$$\omega_1^2 = \frac{d_1 + c_1b_1(A)}{d_3} = \frac{16 + 2.5 \cdot 1.2617}{120} = 0.1596 \text{ s}^{-2},$$

$$\omega_1 = 0.3995 \text{ s}^{-1},$$

$$\omega_2^2 = \frac{d_1 + c_1b_2(A)}{d_3} = \frac{16 + 2.5 \cdot 72.5383}{120} = 1.6445 \text{ s}^{-2},$$

$$\omega_2 = 1.2824 \text{ s}^{-1}.$$

Pentru verificarea stabilității autooscilațiilor se utilizează inegalitatea [1, 4, 8, 17]:

$$S_0 = \left(\frac{\partial X(A, \omega)}{\partial A} \right)_{A_0} \left(\frac{\partial Y(A, \omega)}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} - \left(\frac{\partial X(A, \omega)}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} \left(\frac{\partial Y(A, \omega)}{\partial A} \right)_{A_0} > 0. \quad (2.26)$$

Sistemul automat neliniar liniarizat va fi stabil dacă indicele $S_0 > 0$.

Se determină derivatele parțiale din sistemul de ecuații (2.25) și se calculează prin datele numerice:

$$\frac{\partial X(A,\omega)}{\partial A} = -\omega^2 c_2 \dot{b}(A) + c_0 \dot{b}(A) = \dot{b}(A)(-\omega^2 c_2 + c_0),$$

$$\frac{\partial X(A,\omega)}{\partial \omega} = -2\omega(d_2 + c_2 b(A)),$$

(2.27)

$$\frac{\partial Y(A,\omega)}{\partial A} = c_1 \omega \dot{b}(A),$$

$$\frac{\partial Y(A,\omega)}{\partial \omega} = -3d_3 \omega^2 + d_1 + c_1 b(A).$$

Se verifică inegalitatea (2.26) cu sistemul (2.27) și se obține:

$$\begin{aligned} S_0 &= \dot{b}(A)(-c_2 \omega^2 + c_0) * (-3d_3 \omega^2 + d_1 + c_1 b(A)) + \\ &+ 2c_1 \omega^2 \dot{b}(d_2 + c_2 b(A)) = \\ &= \dot{b}(A)[\omega^2(3c_2 d_3 \omega^2 + 2c_1 d_2 - 3c_0 d_3 - c_2 d_1 + c_1 c_2 b(A)) + \\ &+ c_0 d_1 + c_0 c_1 b(A)] > 0. \end{aligned}$$

Se calculează ultima expresie prin datele numerice:

$$S_0 = \dot{b}(A)[\omega^2(180\omega^2 - 3285 + 12.5b(A)) + 160 + 25b(A)] > 0.$$

La valorile numerice $\omega_1^2 = 0.1596$ și $b_1(A_1) = 1.2617$ indicele $S_0 = -445.3488$ sistemul va fi instabil, iar la valorile $\omega_2^2 = 1.6445$ și $b_2(A_2) = 72.5383$ indicele $S_0 = 4202.1683$ și în sistem se instalează oscilații stabile cu parametrii pulsația $\omega_1 = 0.3995 \text{ s}^{-1}$ și coeficientul liniarizării armonice $b_2(A_2) = 72.5383$.

Pentru determinarea valorii numerice a amplitudinii A_1 și A_2 se prezintă coeficientul de liniarizare armonică $b_1(A_1)$ și $b_2(A_2)$ ca ecuație algebrică pe variabila A_1 și respectiv pe A_2 :

$$b_1(A_1) = 1.2617 = \frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{A_1} + \frac{b}{A_1} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A_1^2}} \right),$$

$$b_2(A_2) = 72.5383 = \frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{A_2} + \frac{b}{A_2} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A_2^2}} \right).$$

Rezolvând aceste ecuații transcendente pe variabila A_1 și respectiv pe A_2 se obține valoarea numerică a amplitudinii A_1 și respectiv A_2 , dar care este o procedură dificilă.

Pentru structura sistemului automat cu neliniaritățile cu numărul 1, 2 și 6 din tabelul A3.1 Anexa 3 verificarea stabilității și determinarea parametrilor autooscilațiilor posibile în sistem va fi analogică - se va realiza procedura prezentată.

Ca exemplu se analizează stabilitatea sistemului neliniar cu neliniaritatea 2 care este un releu cu zonă de sensibilitate și saturație, care se descrie cu locul de transfer cu partea reală de forma:

$$N(A) = b(A) = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$$

Se prezintă ecuația caracteristică a sistemului neliniar:

$$\begin{aligned} L(A, j\omega) &= 1 + b(A) \frac{c_2(j\omega)^2 + c_1j\omega + c_0}{d_3(j\omega)^3 + d_2(j\omega)^2 + d_1j\omega + d_0} = \\ &= d_3(j\omega)^3 + d_2(j\omega)^2 + d_1j\omega + d_0 + b(A)c_2(j\omega)^2 + \\ &+ jb(A)c_1\omega + b(A)c_0 = -jd_3\omega^3 - d_2\omega^2 + jd_1\omega + d_0 - \\ &- b(A)c_2\omega^2 + jb(A)c_1\omega + b(A)c_0 = \\ &= (-d_2\omega^2 + d_0 - b(A)c_2\omega^2 + b(A)c_0) + \\ &+ j(-d_3\omega^3 + d_1\omega + b(A)c_1\omega) = X(A, \omega) + jY(A, \omega) = 0, \end{aligned}$$

unde partea reală și imaginară au forma:

$$\begin{aligned} X(A, \omega) &= -d_2\omega^2 + d_0 - b(A)c_2\omega^2 + b(A)c_0 = \\ &= -\omega^2(d_2 + b(A)c_2) + d_0 + b(A)c_0 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(A, \omega) &= -d_3\omega^3 + d_1\omega + b(A)c_1\omega = \\ -d_3\omega^3 + \omega(d_1 + b(A)c_1) &= -d_3\omega^2 + d_1 + b(A)c_1 = 0. \end{aligned}$$

Din prima și a doua ecuație se exprimă ω^2 :

$$\omega^2 = \frac{d_0 + b(A)c_0}{d_2 + b(A)c_2}, \quad \omega^2 = \frac{d_1 + b(A)c_1}{d_3}.$$

Aceste expresii se egalează și după unele transformări se obține o ecuație algebrică de gradul doi cu necunoscuta coeficientul $b(A)$:

$$\frac{d_0 + b(A)c_0}{d_2 + b(A)c_2} = \frac{d_1 + b(A)c_1}{d_3},$$

$$d_3(d_0 + b(A)c_0) = (d_2 + b(A)c_2)(d_1 + b(A)c_1),$$

$$\begin{aligned} d_3d_0 + d_3b(A)c_0 &= d_2d_1 + d_2b(A)c_1 + b(A)c_2d_1 + \\ &+ b^2(A)c_2c_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b^2(A)c_2c_1 + b(A)(d_2c_1 + c_2d_1 - d_3c_0) + d_2d_1 - d_3d_0 &= \\ = a_0x^2 + a_1x + a_2 &= 0, \end{aligned}$$

unde $x = b(A)$, $a_0 = c_2c_1$, $a_1 = d_2c_1 + c_2d_1 - d_3c_0$,
 $a_2 = d_2d_1 - d_3d_0$.

Ecuația pătratică se soluționează:

$$x_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0}.$$

Pentru ambele soluții se determină ecuațiile algebrice în raport cu amplitudinea A , care se soluționează:

$$x_1 = b_1(A) = b_1 = \frac{4c}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}},$$

$$x_2 = b_2(A) = b_2 = \frac{4c}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}}.$$

Se prezintă soluția pentru rădăcina $x_1 = b_1$, care se ridică la pătrat și se obține o ecuație algebrică de gradul 4:

$$\frac{b_1 \pi A}{4c} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}},$$

$$\left(\frac{b_1 \pi A}{4c}\right)^2 = \frac{A^2 - b^2}{A^2}, \quad \left(\frac{b_2 \pi A}{4c}\right)^2 = \frac{A^2 - b^2}{A^2},$$

$$\left(\frac{b_1 \pi}{4c}\right)^2 A^4 - A^2 + b^2 = n_0 z^2 - n_1 z + n_2 = 0,$$

unde $n_0 = \left(\frac{b_1 \pi}{4c}\right)^2$, $n_1 = 1$, $n_2 = b^2$, $z = A^2$.

Această ecuație pătratică se soluționează:

$$z_{1,2} = \frac{n_1 \pm \sqrt{n_1^2 - 4n_0 n_2}}{2n_0} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4n_0 n_2}}{2n_0}.$$

După valorile rădăcinilor z_1 și z_2 se determină valoarea amplitudinii: $z_1 = A^2$, $A_{1,2} = \pm \sqrt{z_1}$, $z_2 = A^2$, $A_{3,4} = \pm \sqrt{z_2}$.

Se admit numai rădăcinile pozitive ale amplitudinii A_1 și A_2 .

Se repetă aceeași procedură cu rădăcina $x_2 = b_2(A) = b_2$ și se determină valorile amplitudinii A_3 și A_4 .

Cunoscând valorile amplitudinilor A_1 , și A_3 , se calculează valorile pulsațiilor ω_1 , ω_2 , ω_3 și ω_4 după expresiile:

$$\omega^2 = \frac{d_0 + b(A)c_0}{d_2 + b(A)c_2} \Big|_{b(A)=b_1} = \frac{d_0 + b_1c_0}{d_2 + b_1c_2}, \omega_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{d_0 + b_1c_0}{d_2 + b_1c_2}},$$

$$\omega^2 = \frac{d_0 + b(A)c_0}{d_2 + b(A)c_2} \Big|_{b(A)=b_2} = \frac{d_0 + b_2c_0}{d_2 + b_2c_2}, \omega_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{d_0 + b_2c_0}{d_2 + b_2c_2}}.$$

Pentru rădăcinile ω_1 și ω_3 se admit numai valori pozitive.

Sistemul automat nelinier va avea două cicluri-limită cu parametrii (ω_1, A_1) și (ω_3, A_3) .

Pentru structura sistemului automat cu neliniaritățile cu numărul 3 și 4 din tabelul A3.1 Anexa 3 procedura de determinare a ecuației caracteristice a sistemului liniarizat și obținerea sistemului de ecuații din partea reală și partea imaginară este aceeași.

Ca exemplu se prezintă procedura de calcul a părții reale și imaginare a ecuației caracteristice a sistemului cu neliniaritatea cu numărul 4 din tabelul A3.1 Anexa 3, care este un releu cu zonă de insensibilitate și histerezis și se descrie cu locul de transfer cu partea reală și imaginară de forma:

$$\begin{aligned} N(A) &= b(A) - jg(A) = \\ &= \frac{2c}{\pi a} \left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} + \sqrt{1 - \frac{m^2 b^2}{a^2}} \right) - j \frac{2cb}{\pi a^2} (1 - m), m < 1, \end{aligned}$$

unde lui m i se atribuie o valoare arbitrară mai mică ca unu.

Se prezintă ecuația caracteristică a sistemului liniarizat și se calculează partea reală și imaginară:

$$L(A, j\omega) = 1 + (b(A) - jg(A)) \frac{c_2(j\omega)^2 + c_1j\omega + c_0}{d_3(j\omega)^3 + d_2(j\omega)^2 + d_1j\omega + d_0} =$$

$$\begin{aligned}
&= -d_2\omega^2 + d_0 - b(A)c_2\omega^2 + b(A)c_0 + g(A)c_1\omega + \\
&+ j(-d_3\omega^3 + g(A)c_2\omega^2 + d_1\omega + b(A)c_1\omega - g(A)c_0) = \\
&= X(A, \omega) + jY(A, \omega) = 0,
\end{aligned}$$

unde partea reală și imaginară au forma:

$$X(A, \omega) = -\omega^2(d_2 + b(A)c_2) + g(A)c_1\omega + d_0 + b(A)c_0 = 0,$$

$$Y(A, \omega) = -d_3\omega^3 + g(A)c_2\omega^2 + \omega(d_1 + b(A)c_1) - g(A)c_0 = 0.$$

Sistemul de ecuații obținut nu este posibil de soluționat analitic pentru a determina parametrii autooscilațiilor posibile în sistem.

2.4 Analiza stabilității sistemului neliniar în planul Nyquist

În acest caz, analiza stabilității sistemului neliniar de asemenea utilizează ecuația caracteristică a sistemului închis în domeniul pulsație prin locurile de transfer ale părții liniare și neliniarității (2.21) în forma standard care se numește și ecuația bilanțului armonic:

$$L(A, j\omega) = 1 + N(A)H(j\omega) = 0.$$

Din această ecuație se exprimă locul de transfer al părții liniare ca funcție de locul de transfer invers al neliniarității și se obține relația:

$$H(j\omega) = -\frac{1}{N(A)} = -G_N(A), \quad (2.28)$$

care este numită și metoda celor două locuri de transfer.

Soluționarea problemei se reduce la următoarele etape.

Din funcția de transfer (2.20) prin utilizarea substituției $s = j\omega$ se determină locul de transfer și după unele transformări se obține:

$$\begin{aligned}
H(j\omega) &= \frac{c_2(j\omega)^2 + c_1j\omega + c_0}{d_3(j\omega)^3 + d_2(j\omega)^2 + d_1j\omega + d_0} = \frac{-c_2\omega^2 + jc_1\omega + c_0}{-jd_3\omega^3 - d_2\omega^2 + jd_1\omega + d_0} = \\
&= \frac{(-c_2\omega^2 + c_0) + jc_1\omega}{(-d_2\omega^2 + d_0) + j(d_1\omega - d_3\omega^3)} \frac{(-d_2\omega^2 + d_0) - j(d_1\omega - d_3\omega^3)}{(-d_2\omega^2 + d_0) - j(d_1\omega - d_3\omega^3)} = \\
&= \frac{p_1\omega^4 - p_2\omega^2 + p_3}{b_1\omega^6 + b_2\omega^4 + b_3\omega^2 + b_4} - j \frac{q_1\omega^5 - q_2\omega^3 + q_3\omega}{b_1\omega^6 + b_2\omega^4 + b_3\omega^2 + b_4} = P(\omega) - jQ(\omega),
\end{aligned} \tag{2.29}$$

unde partea reală și imaginară au forma:

$$P(\omega) = \frac{p_1\omega^4 - p_2\omega^2 + p_3}{b_1\omega^6 + b_2\omega^4 + b_3\omega^2 + b_4}, \quad Q(\omega) = \frac{q_1\omega^5 - q_2\omega^3 + q_3\omega}{b_1\omega^6 + b_2\omega^4 + b_3\omega^2 + b_4},$$

iar coeficienții se determină după relațiile:

$$p_1 = c_2d_2 - c_1d_3, \quad p_2 = c_0d_2 + c_2d_0 - c_1d_1, \quad p_3 = c_0d_0;$$

$$q_1 = c_2d_3, \quad q_2 = c_0d_3 + c_2d_1 - c_1d_2, \quad q_3 = c_0d_1 + c_1d_0;$$

$$b_1 = d_3^2, \quad b_2 = d_2^2 - 2d_1d_3, \quad b_3 = d_1^2 - 2d_0d_2, \quad b_4 = d_0^2.$$

Se calculează coeficienții locului de transfer al părții liniare în baza coeficienților $c_0, c_1, c_2, d_0, d_1, d_2$ calculați în expresia (2.20):

$$p_1 = c_2d_2 - c_1d_3 = 5 * 79 - 2.5 * 120 = 395 - 300 = 95,$$

$$p_2 = c_0d_2 + c_2d_0 - c_1d_1 = 10 * 79 + 5 * 1 - 2.5 * 16 = 755,$$

$$p_3 = c_0d_0 = 10 * 1 = 10;$$

$$q_1 = c_2d_3 = 5 * 120 = 600,$$

$$q_2 = c_0d_3 + c_2d_1 - c_1d_2 =$$

$$= 10 * 120 + 5 * 16 - 2.5 * 79 = 1082.5,$$

$$q_3 = c_0 d_1 - c_1 d_0 = 10 * 16 - 2.5 * 1 = 157.5,$$

$$b_1 = d_3^2 = 120^2 = 14400,$$

$$b_2 = d_2^2 - 2d_1 d_3 = 79^2 - 2 * 16 * 120 = 2401,$$

$$b_3 = d_1^2 - 2d_0 d_2 = 256 - 2 * 1 * 79 = 98, b_4 = d_0^2 = 1.$$

Locul de transfer al părții liniare cu coeficienții numerici este:

$$H(j\omega) = \frac{95\omega^4 - 755\omega^2 + 10}{14400\omega^6 + 2401\omega^4 + 98\omega^2 + 1} - j \frac{600\omega^5 - 1082.5\omega^3 + 157.5\omega}{14400\omega^6 + 2401\omega^4 + 98\omega^2 + 1}.$$

Pentru a construi locul de transfer $H(j\omega)$ se variază pulsația $\omega = 0 \dots \infty$, se calculează pentru fiecare valoare a lui ω partea reală $P(\omega)$ și partea imaginară $Q(\omega)$ și datele se înscriu în tabelul 2.1.

Tabelul 2.1. Calculul locurilor de transfer ale sistemului liniarizat

ω	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	1	...	∞
$P(\omega)$	10	1.12	-2	-1.43	-0.78	-0.43	-0.04	...	-0
$-Q(\omega)$	0	0	2.38	0.49	0.14	0.10	0.02	...	-0
A	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.9	1	...	10
$b(A)$	70.04	54.19	42.65	34.69	29.01	19.55	17.22	...	1.78
$\frac{1}{b(A)}$	0.014	0.018	0.023	0.029	0.035	0.052	0.054	...	0.561

Se calculează coeficientul $b(A)$ și locul de transfer invers al neliniarității $G(A) = 1/b(A)$ modificând valoarea lui $A = 0 \dots \infty$ pentru partea liniară a caracteristicii statice a neliniarității cu valoarea lui $k = c/b = 14/0.2 = 70$ și rezultatele calcului se dau în tabelul 2.2.

Calculul poate fi realizat cu aplicarea diferitor pachete de programe MATLAB, KOPRAS etc.

În tabelul 2.2 prin semnul (*) s-a notat expresia coeficientului:

$$(*) = \left(\arcsin \frac{b}{A} + \frac{b}{A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} \right).$$

Tabelul 2.2. Calculul lui $b(A)$ și $G(A)$ ale neliniarității

Nr. crt.	A	$\frac{b}{A}$	$\frac{b^2}{A^2}$	$1 - \frac{b^2}{A^2}$	$\sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} = c$	$\frac{b}{A} C$	$\arcsin \frac{b}{A}$	(*)	$\frac{b(A)}{2k} = \frac{\pi}{\pi^*}$	$\frac{1}{b(A)}$
1	0.2	1	1	0	0	0	1,571	1,571	70,04	0,014
2	0.3	0.7	0.49	0.55	0.742	0.50	0.734	1.231	54.19	0.018
3	0.4	0.5	0.25	0.75	0.866	0.43	0.523	0.956	42.65	0.023
4	0.5	0.4	0.16	0.84	0.916	0.37	0.412	0.778	34.69	0.029
5	0.6	0.3	0.11	0.89	0.944	0.34	0.333	0.651	29.01	0.035
6	0.7	0.9	0.08	0.92	0.958	0.27	0.284	0.558	24.87	0.040
7	0.8	0.3	0.06	0.94	0.98	0.24	0.253	0.495	22.06	0.045
8	0.9	0.2	0.05	0.95	0.976	0.22	0.222	0.438	19.55	0.052
9	1	0.2	0.04	0.96	0.98	0.20	0.201	0.397	17.72	0.054
10	2	0.1	0.01	0.99	0.995	0.1	0.100	0.200	8.90	0.113
11	5	0.04	0.002	0.99	0.999	0.04	0.040	0.080	3.56	0.287
12	10	0.02	0.001	0.99	0.999	0.02	0.020	0.040	1.78	0.561

După datele din tabellele 2.1 și 2.2 se construiesc locurile de transfer ale părții liniare $H(j\omega)$ și ale neliniarității $G(A)$ în același plan, având în vedere însemnările sistemelor de coordonate, care se dau în figura 2.3. Locul de transfer $H(j\omega)$ trece prin cadranele 4-3-2, iar locul de transfer al neliniarității se suprapune pe semiaxa reală negativă, care începe din zero și tinde către $-\infty$. Punctul de intersecție al locurilor de transfer este pe semiaxa reală negativă cu coordonatele $(-0.84, j0)$.

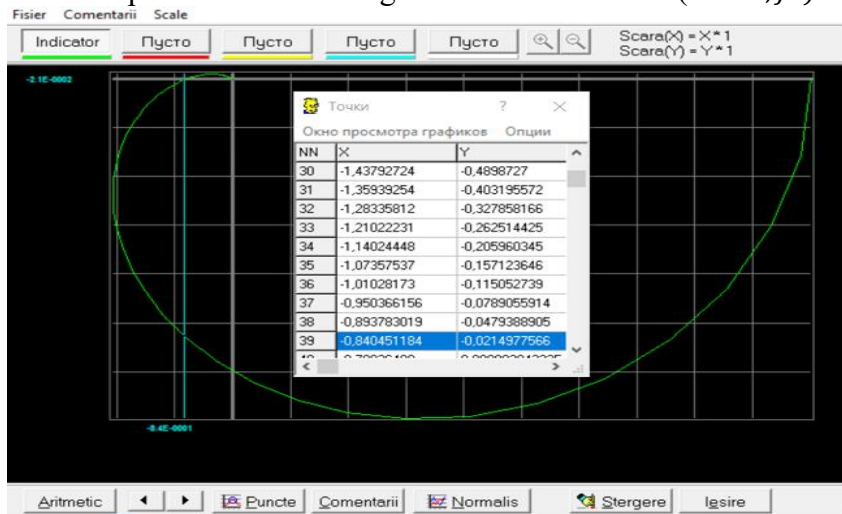


Fig. 2.3. Locurile de transfer ale părții liniare și ale neliniarității

Pentru neliniaritățile neunivoce numărul 3 și 4 din tabelul A3.1 Anexa 3 locul de transfer invers $G(A)$ este o funcție complexă și pentru a calcula și construi locul de transfer invers se aduce la forma:

$$\begin{aligned} G(A) &= -\frac{1}{N(A)} = -\frac{1}{b(A) - jg(A)} \frac{b(A) + jg(A)}{b(A) + jg(A)} = \\ &= -\frac{b(A)}{b^2(A) + g^2(A)} - j\frac{b(A)}{b^2(A) + g^2(A)} = -b'(A) - jg'(A), \end{aligned}$$

unde $b'(A) = \frac{b(A)}{b^2(A) + g^2(A)}$ este partea reală și $g'(A) = \frac{b(A)}{b^2(A) + g^2(A)}$ – partea imaginară.

2.5 Analiza stabilității absolute a sistemului neliniar după criteriul Popov

Pentru analiza stabilității absolute a sistemului neliniar cu aplicarea criteriului Popov se utilizează funcția de transfer a părții liniare (2.1), care este stabilă și se cere ca coeficientul de transfer a acesteia să fie unitar $k = 1$:

$$\begin{aligned} H(s) &= H'(s)H_2(s)H_3(s) = (H_1(s)H_5(s) + H_4(s))H_2(s)H_3(s) = \\ &= \frac{k_2k_3}{(T_2s+1)(T_3s+1)} \left(\frac{k_1k_5}{T_1s+1} + k_4s \right) = \frac{k_2k_3k_4T_1s^2 + k_2k_3k_4s + k_1k_2k_3k_5}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)} = \\ &= k_l \frac{c_2s^2 + c_1s + c_0}{d_3s^3 + d_2s^2 + d_1s + d_0} = \frac{C(s)}{D(s)}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

unde coeficienții au semnificația:

$$k_l = k_1k_2k_3k_5 = 2 * 5 * 1 * 1 = 10,$$

$$c'_0 = \frac{c_0}{k_l} = \frac{10}{10} = 1, \quad c'_1 = \frac{c_1}{k_l} = \frac{2.5}{10} = 0.25, \quad c'_2 = \frac{c_2}{k_l} = \frac{5}{10} = 0.5,$$

$$d_0 = 1, d_1 = T_1 + T_2 + T_3 = 5 + 3 + 8 = 16,$$

$$d_2 = T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3 = 5 * 3 + 5 * 8 + 3 * 8 = 79,$$

$$d_3 = T_1T_2T_3 = 5 * 3 * 8 = 120.$$

Coeficientul k_l este atribuit coeficientului de transfer al neliniarității.

Din expresia (2.30) se prezintă funcția de transfer a părții liniare cu coeficientul de transfer $k = 1$:

$$H(s) = \frac{c'_2s^2 + c'_1s + c'_0}{d_3s^3 + d_2s^2 + d_1s + d_0} = \frac{C_1(s)}{D(s)}. \quad (2.31)$$

Expresia (2.31) se transformă în domeniul pulsație, utilizând substituția $s = j\omega$ și se prezintă ca locul de transfer al părții liniare:

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{c'_2(j\omega)^2 + c'_1j\omega + c'_0}{d_3(j\omega)^3 + d_2(j\omega)^2 + d_1j\omega + d_0} = \frac{-c'_2\omega^2 + jc'_1\omega + c'_0}{-jd_3\omega^3 - d_2\omega^2 + jd_1\omega + d_0} = \\ &= \frac{(-c'_2\omega^2 + c'_0) + jc'_1\omega}{(d_0 - d_2\omega^2) + j(d_1\omega - d_3\omega^3)} \frac{(d_0 - d_2\omega^2) - j(d_1\omega - d_3\omega^3)}{(d_0 - d_2\omega^2) - j(d_1\omega - d_3\omega^3)} = \\ &= \frac{p_1\omega^4 - p_2\omega^2 + p_3}{b_1\omega^6 + b_2\omega^4 + b_3\omega^2 + b_4} - j \frac{q_1\omega^5 - q_2\omega^3 + q_3\omega}{b_1\omega^6 + b_2\omega^4 + b_3\omega^2 + b_4} = P(\omega) - jQ(\omega), \\ P(\omega) &= \frac{p_1\omega^4 - p_2\omega^2 + p_3}{b_1\omega^6 + b_2\omega^4 + b_3\omega^2 + b_4}, \quad Q(\omega) = \frac{q_1\omega^5 - q_2\omega^3 - q_3\omega}{b_1\omega^6 + b_2\omega^4 + b_3\omega^2 + b_4}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

unde coeficienții au semnificația și se calculează valorile numerice:

$$p_1 = c'_2d_2 - c'_1d_3 = 0.5 \cdot 79 - 0.25 \cdot 120 = 39.5 - 30 = 9.5,$$

$$p_2 = c'_0d_2 + c'_2d_0 - c'_1d_1 = 1 \cdot 79 + 0.5 \cdot 1 - 0.25 \cdot 16 = 74.5,$$

$$p_3 = c'_0d_0 = 1 \cdot 1 = 1,$$

$$q_1 = c'_2 d_3 = 0.5 \cdot 120 = 60,$$

$$q_2 = c'_0 d_3 + c'_1 d_2 + c'_2 d_1 =$$

$$= 1 \cdot 120 + 0.25 \cdot 79 + 0.5 \cdot 16 = 147.75,$$

$$q_3 = c'_0 d_1 + c'_1 d_0 = 1 \cdot 16 + 0.25 \cdot 1 = 16.25,$$

$$b_1 = d_3^2 = 120^2 = 14400,$$

$$b_2 = d_2^2 - 2d_1 d_3 = 79^2 - 2 \cdot 16 \cdot 120 = 2401,$$

$$b_3 = d_1^2 - 2d_0 d_2 = 16^2 - 2 \cdot 1 \cdot 79 = 98, \quad b_4 = d_0^2 = 1^2 = 1.$$

Se prezintă locul de transfer modificat al părții liniare, înmulțind numărătorul părții imaginare a expresiei (2.32) la ω și utilizând datele numerice ale coeficienților calculați se obține locul de transfer modificat:

$$\begin{aligned} H^*(j\omega) &= \frac{p_1 \omega^4 - p_2 \omega^2 + p_3}{b_1 \omega^6 + b_2 \omega^4 + b_3 \omega^2 + b_4} - j\omega \frac{q_1 \omega^5 - q_2 \omega^3 - q_3 \omega}{b_1 \omega^6 + b_2 \omega^4 + b_3 \omega^2 + b_4} = \\ &= \frac{p_1 \omega^4 - p_2 \omega^2 + p_3}{b_1 \omega^6 + b_2 \omega^4 + b_3 \omega^2 + b_4} - j \frac{q_1 \omega^6 - q_2 \omega^4 - q_3 \omega^2}{b_1 \omega^6 + b_2 \omega^4 + b_3 \omega^2 + b_4} = P(\omega) - jQ^*(\omega), \end{aligned} \quad (2.33)$$

care în formă numerică sunt:

$$P(\omega) = \frac{9,5\omega^4 - 74,5\omega^2 + 1}{14400\omega^6 + 2401\omega^4 + 98\omega^2 + 1}, \quad Q^*(\omega) = \frac{60\omega^6 - 147,75\omega^4 + 16,25\omega^2}{14400\omega^6 + 2401\omega^4 + 98\omega^2 + 1}.$$

Pentru a construi locul de transfer modificat $H^*(j\omega)$ se variază valoarea lui $\omega = 0 \cdots \infty$ și pentru fiecare valoare a lui ω se calculează valorile părții reale $P(\omega)$ și imaginare $Q^*(\omega)$ și datele obținute se introduc în tabelul 2.3, după care se construiește în scara respectivă locul de transfer al părții liniare modificate a sistemului nelinier.

Tabelul 2.3. Calculul locului de transfer modificat al părții liniare

ω	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	1
$P(\omega)$	1	0.109	0.043	-0.144	-0.079	-0.043	-0.004
$Q^*(\omega)$	0	-0.07	-0.04	-0.01	0.007	0.010	0.004

După datele din tabelul 2.3 se construiește locul de transfer modificat $H^*(j\omega)$ al părții liniare (fig. 2.4).

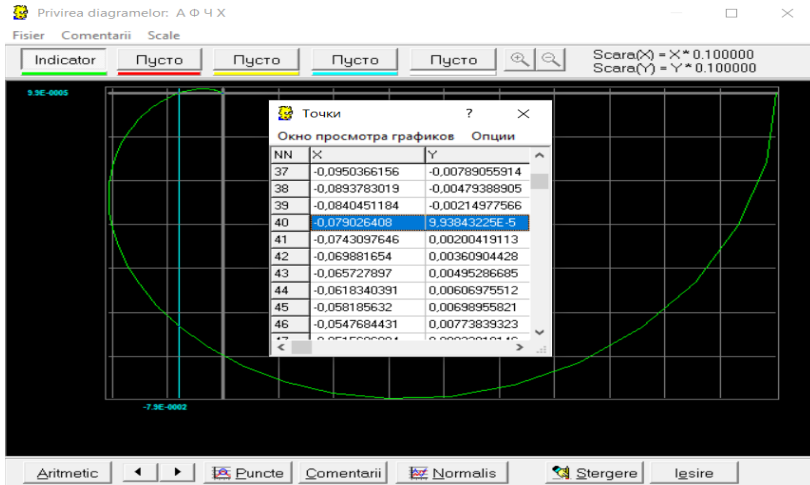


Fig. 2.4. Locul de transfer modificat al părții liniare

Se determină punctul de intersecție al locului de transfer modificat $H^*(j\omega)$ cu semiaxa reală negativă a absciselor. Pentru aceasta admitem $Q^*(\omega) = 0$ și se determină rădăcinile acestei ecuații:

$$Q^*(\omega) = 60\omega^6 - 147.75\omega^4 + 16.25\omega^2 = 0,$$

$$\omega_{1,2} = 0, \omega_{3,4} = \pm 1.532, \omega_{5,6} = \pm 0.3397.$$

Pentru valoarea lui $\omega = 0.3397$ se calculează valoarea părții reale:

$$P(\omega) = \frac{9.5\omega^4 - 75.5\omega^2 + 1}{144000\omega^6 + 2401\omega^4 + 98\omega^2 + 1} \Big|_{\omega=0.3397} = -0.1125.$$

Se determină coeficientul de transfer al sistemului deschis:

$$k = k_l k_n = 10 \cdot 70 = 700,$$

unde coeficientul neliniarității se determină după datele inițiale:

$$k_n = c/b = 14/0.2 = 70.$$

Etapa următoare constă în determinarea coeficientului:

$$k_0 = -1/k = -1/700 = -0.00143.$$

Pe semiaxa reală negativă se determină punctul critic al sistemului cu coordonatele $(-1/k, j0)$, care este situat la dreapta de punctul $(-0.1125, j0)$ de intersecție a locului de transfer modificat $H^*(j\omega)$ cu semiaxa reală negativă.

Astfel, se constată faptul că prin punctul critic cu coordonatele $(-1/k, j0)$ nu se poate duce o dreaptă Popov la curba $H^*(j\omega)$ astfel ca locul de transfer modificat al sistemului să fie situat la dreapta de dreapta Popov și rezultă că sistemul automat neliniar nu este absolut stabil.

2.6. Simularea și analiza stabilității și performanțelor sistemului neliniar

Se simulează sistemul automat neliniar după schema structurală din figura 2.5 cu datele numerice din tabelul 5.1 în pachetul KOPRAS [4], iar schema de simulare se dă în figura 2.5.

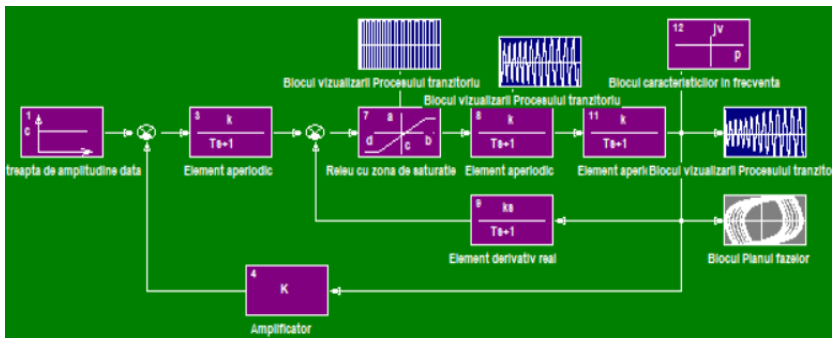
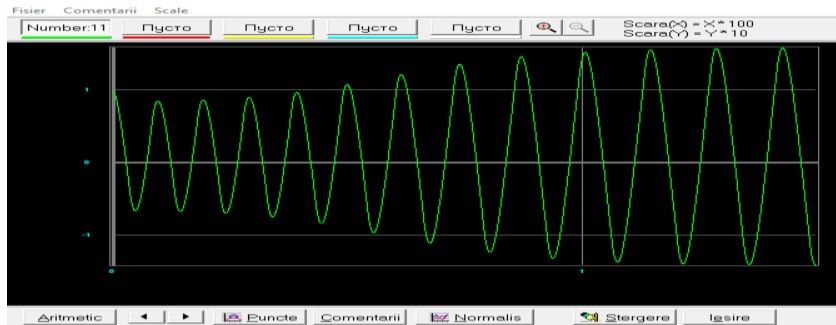
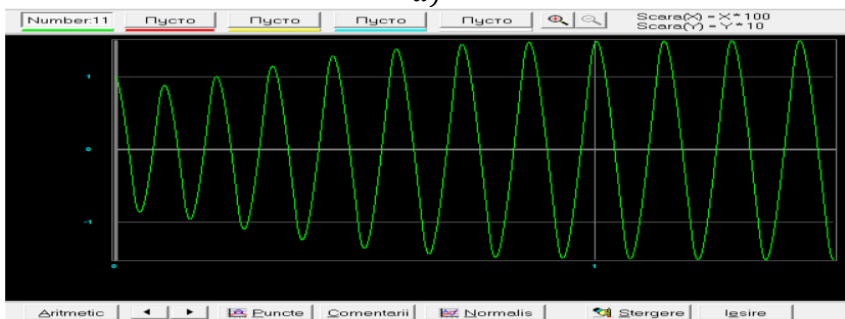


Fig. 2.5. Schema de simulare a sistemului neliniar în KOPRAS

Procesul tranzitoriu oscilant al sistemului la condițiile inițiale $x_{10} = 10$ și $x_{20} = -8$ ($r = 0$) este dat în fig. 2.6, *a* și la condițiile inițiale $x_{10} = 10$ și $x_{20} = -8$ ($r = 1(t)$) este dat în fig. 2.6, *b*.



a)



b)

Fig. 2.6. Procesele tranzitorii ale sistemului nelinier:

a) la condițiile inițiale $x_{10} = 10$ și $x_{20} = -8$, ($r(t) = 0$);

b) la condițiile inițiale $x_{10} = 10$ și $x_{20} = -8$ ($r(t) = 1(t)$).

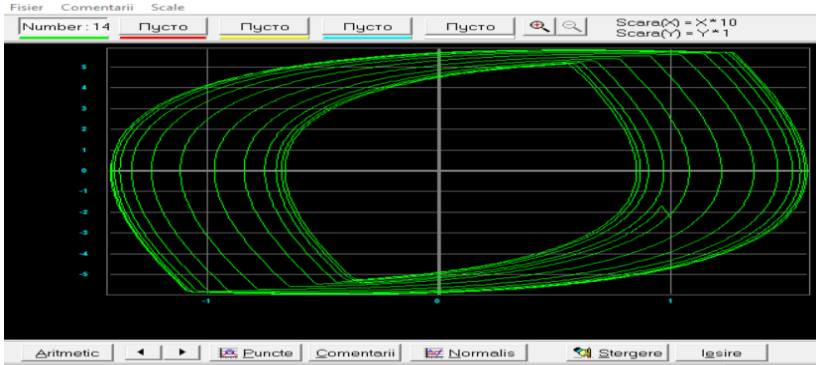
Traectoria de fază a sistemului automat nelinier la condițiile inițiale $x_{10} = 10$ și $x_{20} = -8$ este prezentată în figura 2.7, *a*, iar la condițiile inițiale $x_{10} = 18$ și $x_{20} = -20$ este dată în figura 2.7, *b*.

Analizând traiectoriile de fază și procesul tranzitoriu ale sistemului automat, se constată că în sistemul nelinier se stabilizează ciclul-limită stabil, deoarece traiectoriile de fază, care pornesc de la condițiile inițiale ($x_{10} = 10$ și $x_{20} = -8$) din interiorul ciclului-limită și din afara ciclului-limită ($x_{10} = 18$ și $x_{20} = -20$) converg la ciclul-

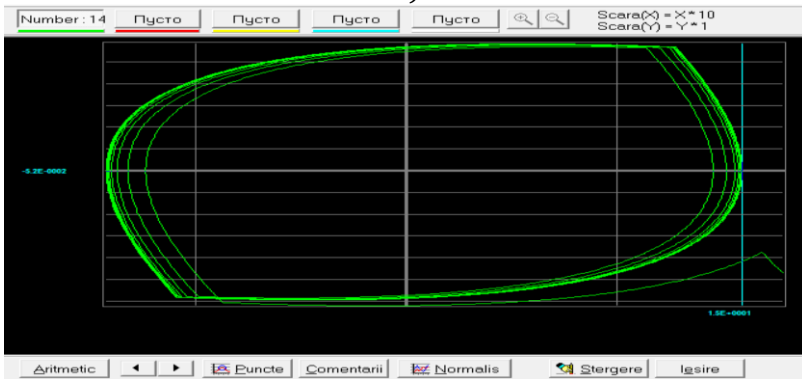
limită stabil. Procesul tranzitoriu al sistemului nelinier prezintă oscilații simetrice stabilizate cu perioada oscilațiilor $T = 14.1$ s și frecvența:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{23.14}{14.1} = 0.4454 \text{ s}^{-1}.$$

Parametrii oscilațiilor stabilizate sunt: amplitudinea pozitivă $A_1 = 14.9357$ și amplitudinea negativă $A_2 = -15.1298$.



a)



b)

Fig. 2.7. Traectoriile de fază ale sistemului automat nelinier:

a) la condițiile inițiale $x_{10} = 10$ și $x_{20} = -8$,

b) la condițiile inițiale $x_{10} = 18$ și $x_{20} = -20$

Timpul de stabilizare al oscilațiilor este $t_{st} = 70$ s la condițiile inițiale $x_{10} = 10$ și $x_{20} = -8$ (semnalul de intrare $r(t) = 0$), iar la

aplicarea semnalului de intrare $r(t) = 1(t)$ timpul de stabilizare al oscilațiilor crește până la $t_{st} = 105$ s (s-a mărit de 1.5 ori).

Ciclul-limită al traiectoriei de fază are parametrii amplitudinea $A = 15$ și pulsația $\omega = 0.4454$ s⁻¹.

2.7 Analiza stabilității sistemului neliniar cu element integrator

În discuție se ia structura sistemului automat neliniar din figura 2.1 cu elementele dinamice indicate, dar se substituie elementul cu inerție cu f.d.t. $H_3(s)$ cu un element integrator.

În structura sistemului se efectuează transformările respective ale părții liniare și se determină f.d.t. care va avea forma:

$$\begin{aligned}
 H(s) &= (H_1(s)H_5(s) + H_4(s))H_2(s)H_3(s) = \\
 &= \left(\frac{k_1k_5}{T_1s+1} + k_4s \right) \frac{k_2}{T_3s(T_2s+1)} = \frac{k_4T_1s^2+k_4s+k_1k_5}{T_1s+1} \frac{k}{s(T_2s+1)} = \\
 &= \frac{c_0s^2+c_1s^2+c_2}{s(T_1s+1)(T_2s+1)} = \frac{c_0s^2+c_1s^2+c_2}{d_0s^3+d_1s^2+sd_2} = \frac{C(s)}{SD(s)}, \tag{2.34}
 \end{aligned}$$

unde $k = k_2/T_3$, coeficienții $\overline{c_0}, \overline{c_2}$ sunt exprimați prin k, k_1, k_4, k_5 , iar coeficienții d_0, d_1, d_2 sunt exprimați prin constantele de timp T_1, T_2 .

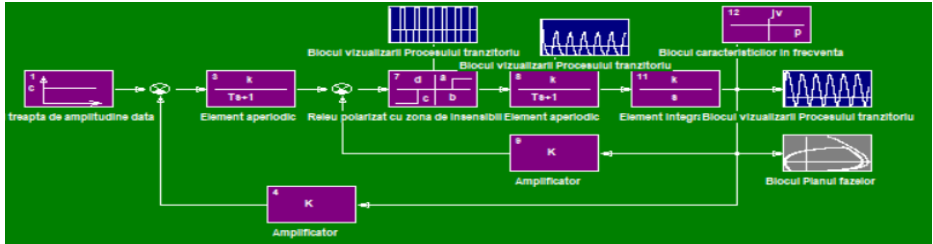
Pentru partea liniară cu f.d.t. (2.34) care conține element integrator și, deci este instabilă, nu poate fi aplicat criteriul de stabilitate absolută în forma prezentată. În acest caz, la partea liniară se aplică o reacție negativă rigidă cu un coeficient de transfer cu o valoare mică arbitrară $r > 0$ și se utilizează relația (1.36), determinând f.d.t. echivalentă $H_e(s)$ a părții liniare și relația (1.37) pentru transformarea neliniarității:

$$H_e(s) = \frac{H(s)}{1+rH(s)} = \frac{\frac{C(s)}{SD(s)}}{1+r\frac{C(s)}{SD(s)}} = \frac{C(s)}{SD(s)+rC(s)} = \frac{C_e(s)}{D_e(s)}, \tag{2.35}$$

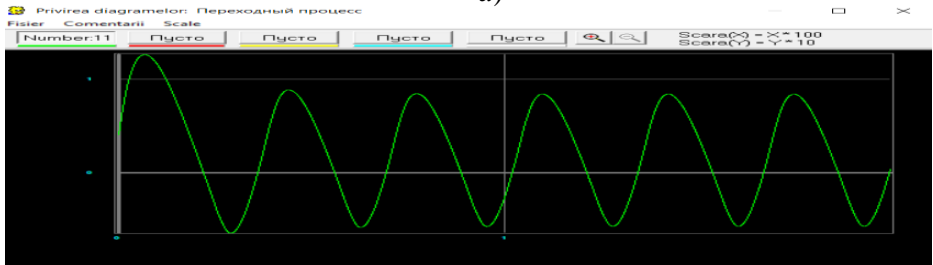
unde $C_e(s) = C(c)$ și $D_e(s) = D(s)$.

În continuare, pentru funcția de transfer echivalentă $H_e(s)$ se aplică procedura de verificare a stabilității absolute a sistemului automat neliniar după criteriului de stabilitate absolută Popov expusă mai sus.

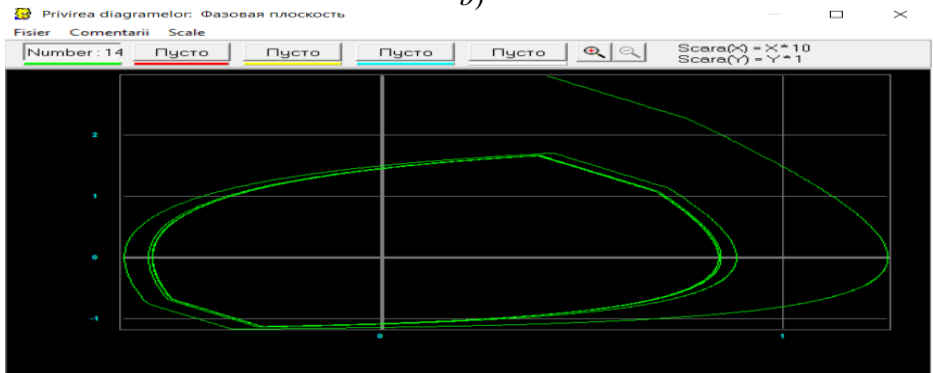
În fig. 2.8 se dă structura sistemului neliniar cu element integrator $a)$, procesul indicial $b)$ și traiectoria de fază $c)$.



a)



b)



c)

Fig. 2.3. Sistemul neliniar cu element integrator

3 SISTEME AUTOMATE CU EȘANTIONARE

3.1 Ecuația cu diferențe finite și ecuația recursivă a sistemului cu eșantionare

Sistemul automat discret este alcătuit din unul sau mai multe elemente discrete, la ieșirea cărora semnalul este prezentat în timp discret ca o succesiune de impulsuri și elemente continue liniare și/sau neliniare semnalele cărora sunt în timp continuu. Elementul discret este elementul la intrarea căruia se aplică semnalul continuu, iar la ieșirea lui se obține semnalul discret. Procedura de transformare a semnalului continuu $x(t)$ în semnal discret se numește *cuantizare* sau *discretizare* [1, 5-12, 14-17].

Discretizarea în domeniului timpului se numește eșantionare, care se realizează cu un element de eșantionare - eșantionatorul.

Operația de eșantionare transformă semnalul continuu $x(t)$ într-o succesiune de impulsuri ideale (tren de impulsuri) $x(kT)$, la care parametrii impulsului amplitudinea, durata sau perioada de eșantionare este funcție de amplitudinea semnalului de intrare continuu la momentele de eșantionare.

Succesiunea de impulsuri ideale, prin utilizarea elementului de reținere formează impulsuri dreptunghiulare pe durata perioadei de eșantionare cu durata impulsului $\tau_i = T$ și amplitudinea egală cu valoarea semnalului de intrare de la momentul de eșantionare și, în aceste cazuri, elementul de reținere se numește element de formare sau de memorare cu f.d.t. de forma:

$$H_{ER}(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-sT}). \quad (3.1)$$

Deoarece fixarea valorii instantanee a semnalului la nivel constant la ieșirea elementului de reținere (ER) pe durata impulsului $\tau_i = T$ poate fi tratată ca o operație de extrapolare cu polinom de ordin zero și atunci elementul ER se numește extrapolator de ordin zero sau element de reținere de ordin zero (EROZ).

Pentru descrierea dinamicii sistemului cu discretizare la acțiunea semnalelor externe se utilizează ecuația cu diferențe finite (care este un analog al ecuației diferențiale) de forma:

$$\begin{aligned} c_n \Delta^n x(k) + c_{n-1} \Delta^{n-1} x(k) + \dots + c_1 \Delta x(k) + c_0 x(k) = \\ = d_m \Delta^m u(k) + d_{m-1} \Delta^{m-1} u(k) + \dots + d_1 \Delta u(k) + d_0 u(k), \end{aligned} \quad (3.2)$$

unde $u(k)$ este o funcție discretă cunoscută (intrarea), $x(k)$ - funcția discretă calculată, care prezintă soluția ecuației cu diferențe finite, iar $\overline{c_0}, \overline{c_n}$ și $\overline{d_0}, \overline{d_m}$ sunt coeficienți constanți.

Operațiile cu ecuația cu diferențe finite sunt dificile și atunci se utilizează ecuația recursivă de forma:

$$\begin{aligned} a_n x(k+n) + a_{n-1} x(k+n-1) + \dots + a_1 x(k+1) + a_0 x(k) = \\ = b_m u(k+m) + b_{m-1} u(k+m-1) + \dots + b_1 u(k+1) + b_0 u(k), \end{aligned} \quad (3.3)$$

care permite a calcula valoarea lui $x(k)$ la momentele de timp $k \geq 0$ după valorile precedente cunoscute ale lui $u(k), u(k-1), \dots, u(m-1)$ și k valori precedente cunoscute ale lui $x(k-1), x(k-2), \dots, x(k-n)$, care prezintă condițiile inițiale. Coeficienții $\overline{a_0}, \overline{a_n}$ și $\overline{b_0}, \overline{b_m}$ din (3.3) se exprimă prin coeficienții $\overline{c_0}, \overline{c_n}$ și $\overline{d_0}, \overline{d_m}$.

3.2 Schema structurală și funcțiile de transfer ale sistemului cu eșantionare închis

Se consideră structura sistemului din în figura 3.1 cu elementele: eșantionatorul ideal EDI și fictiv (linia întreruptă la ieșire) cu perioada de eșantionare T , elementul de reținere cu f.d.t. $H_{ER}(s)$, partea liniară cu f.d.t. $H_1(s)$, în reacție este un element liniar cu f.d.t. $H_r(s)$ și asupra sistemului acționează semnalul de referință $r(t)$.

Partea liniară cu elementul de reținere sunt inseriate și se obține f.d.t. a conexiunii:

$$H_d(s) = H_{ER}(s)H_1(s). \quad (3.4)$$

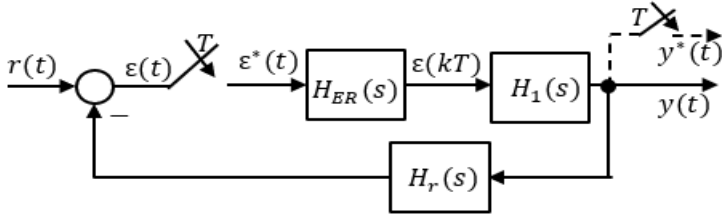


Fig. 3.1. Schema structurală a sistemului cu eșantionare închis

La intrarea eșantionatorului ideal acționează semnalul erorii:

$$\varepsilon(t) = r(t) - y_r(t) \quad (3.5)$$

sau în formă discretă și transformata z:

$$\varepsilon^*(t) = r^*(t) - y_r^*(t), \quad (3.6)$$

$$\varepsilon(z) = r(z) - y_r(z). \quad (3.7)$$

Se determină f.d.t. discretă a sistemului deschis (3.4) prin mărirea de ieșire în forma:

$$y(z) = Z\{H_d(s)\}\varepsilon(z) = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{H_1(s)}{s}\right\} \varepsilon(z) = H_d(z)\varepsilon(z),$$

$$\frac{y(z)}{\varepsilon(z)} = H_d(z) = \frac{C(z)}{D(z)}. \quad (3.8)$$

Se calculează semnalul reacției:

$$y_r(z) = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{H_1(s)H_r(s)}{s}\right\} \varepsilon(z) = H(z)\varepsilon(z). \quad (3.9)$$

Se determină mărirea de ieșire discretă a sistemului închis:

$$\begin{aligned}
y(z) &= H_d(z)\varepsilon(z) = H_d(z)(r(z) - y_r(z)) = \\
&= H_d(z)r(z) - H_d(z)y_r(z) = H_d(z)r(z) - H_d(z)H(z)\varepsilon(z) = \\
&= H_d(z)r(z) - H_d(z)H(z)\frac{y(z)}{H_d(z)} = H_d(z)r(z) - H(z)y(z) \quad (3.10)
\end{aligned}$$

sau după transformarea expresiei (3.10) se obține f.d.t. a sistemului închis în forma:

$$\begin{aligned}
y(z)(1 + H(z)) &= H_d(z)r(z), \\
y(z) &= \frac{H_d(z)}{1+H(z)}r(z) = \frac{\frac{z-1}{z}Z\left\{\frac{1}{s}(H_1(s))\right\}}{1+\frac{z-1}{z}Z\left\{\frac{1}{s}(H_1(s)H_r(s))\right\}}r(z) = H_0(z)r(z), \\
\frac{y(z)}{r(z)} &= H_0(z) = \frac{\frac{z-1}{z}Z\left\{\frac{1}{s}(H_1(s))\right\}}{1+\frac{z-1}{z}Z\left\{\frac{1}{s}(H_1(s)H_r(s))\right\}} = \frac{B(z)}{A(z)}. \quad (3.11)
\end{aligned}$$

Se determină f.d.t. discretă a erorii sistemului închis, pornind de la (3.7) și după unele transformări se obține:

$$\begin{aligned}
\varepsilon(z) &= r(z) - y_r(z) = r(z) - H(z)\varepsilon(z), \\
\varepsilon(z)(1 + H(z)) &= r(z), \\
\frac{\varepsilon(z)}{r(z)} &= H_\varepsilon(z) = \frac{1}{1+H(z)} = \frac{1}{1+\frac{z-1}{z}Z\left\{\frac{1}{s}(H_1(s)H_r(s))\right\}} = \frac{B_\varepsilon(z)}{A_\varepsilon(z)}. \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Dacă reacția este unitară $H_r(z) = 1$, atunci f.d.t. discretă a sistemului închis și a erorii vor avea formele:

$$H_0(z) = \frac{y(z)}{r(z)} = \frac{\frac{z-1}{z}Z\left\{\frac{1}{s}(H_1(s))\right\}}{1+\frac{z-1}{z}Z\left\{\frac{1}{s}(H_1(s)H_r(s))\right\}} = \frac{H_d(z)}{1+H(z)} = \frac{B(z)}{A(z)}, \quad (3.13)$$

$$H_{\varepsilon}(z) = \frac{\varepsilon(z)}{r(z)} = \frac{1}{1 + \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{1}{s} (H_1(s) H_r(s)) \right\}} = \frac{1}{1 + H(z)} = \frac{B_{\varepsilon}(z)}{A_{\varepsilon}(z)}. \quad (3.14)$$

Funcțiile de transfer (3.13) și (3.14) în transformata z se determină, calculând funcțiile de transfer din transformata Laplace s în transformata z aplicând tabelul A4.1 din Anexa 4.

3.3 Analiza stabilității sistemului automat cu eșantionare

Pentru analiza stabilității sistemului cu eșantionare se utilizează ecuația caracteristică în transformata z din (3.13) de forma:

$$A(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (3.15)$$

Pentru stabilitatea sistemului automat închis cu eșantionare este necesar și suficient ca toate rădăcinile ecuației caracteristice (3.15) după valoare absolută să fie mai mici ca unitate $|z_i| < 1$, iar în planul complex z al rădăcinilor toate rădăcinile ecuației caracteristice să fie alocate în interiorul cercului unitar cu centrul în origine [1, 6, 8-12, 14,16].

Dacă printre rădăcinile ecuației caracteristice (3.15) vor exista una sau mai multe rădăcini $|z_i| > 1$, atunci sistemul automat cu eșantionare este instabil.

Dacă printre rădăcinile ecuației caracteristice (3.15) vor exista una sau mai multe rădăcini $|z_i| = 1$, atunci sistemul automat cu eșantionare este la limită de stabilitate, iar în planul complex al rădăcinilor cercul unitar este limita de stabilitate a sistemului.

Pentru verificarea stabilității sistemului automat cu eșantionare după ecuația caracteristică (3.15) se pot utiliza criteriile algebrice de stabilitate Routh și Hurwitz. În tabelul 3.1 se dau condiții necesare și suficiente de stabilitate ale sistemului automat cu eșantionare conform criteriului Hurwitz, exprimate prin coeficienții inițiali ai ecuațiilor caracteristice de gradul 1, 2, 3, 4 ale sistemului cu eșantionare și determinanții respectivi [17].

3.4 Performanțele sistemului automat cu eșantionare

Pentru analiza performanțelor sistemului cu eșantionare se calculează din expresia (3.13) mărimea de ieșire în formă operațională

Tabelul 3.1. Condiții de stabilitate pentru sistemul discret

Gradul ecuației caracteristice n	Condiții de stabilitate
1	$A_0 = a_0 + a_1 > 0$ $A_1 = a_0 - a_1 > 0$
2	$A_0 = a_0 + a_1 + a_2 > 0$ $A_1 = a_0 - a_1 + a_2 > 0$ $A_3 = 2(a_0 - a_2) > 0$
3	$A_0 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 > 0$ $A_1 = 3(a_0 - a_3) + a_1 - a_2 > 0$ $A_2 = 3(a_0 + a_3) - a_1 - a_2 > 0$ $A_3 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 > 0$ $\Delta_2 = A_1 A_2 - A_0 A_3 > 0$
4	$A_0 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 > 0$ $A_1 = 4(a_0 - a_4) + 2(a_3 - a_1) > 0$ $A_2 = 6(a_0 + a_4) - 2a_2 > 0$ $A_3 = 4(a_0 - a_4) + 2(a_1 - a_3) > 0$ $A_4 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 > 0$ $\Delta_2 = A_1 A_2 - A_0 A_3 > 0$ $\Delta_3 = A_1 A_2 - A_0 A_3 = A_3 \Delta_2 - A_1^2 A_4 > 0$

în funcție de mărimea de intrare treaptă unitară discretă:

$$\begin{aligned}
 y(z) &= H_0(z)r(z) = \frac{B(z)}{A(z)}r(z) = \\
 &= \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_{m-1} z + b_m}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n} r(z), \quad m \leq n
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

sau în forma:

$$y(z)A(z) = B(z)r(z),$$

$$\begin{aligned} y(z)(a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_{n-1}z + a_n) = \\ = (b_0z^m + b_1z^{m-1} + \dots + b_{m-1}z + b_m)r(z). \end{aligned} \quad (3.17)$$

În expresia (3.17) se deschid parantezele și se obține expresia în operatori z cu avans:

$$\begin{aligned} a_0z^n y(z) + a_1z^{n-1}y(z) + \dots + a_{n-1}zy(z) + a_ny(z) = \\ = b_0z^m r(z) + b_1z^{m-1}r(z) + \dots + b_{m-1}zr(z) + b_m r(z). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Această formă nu este posibil de realizat și atunci se transformă în operatori cu întârziere z^{-1} , împărțind toți termenii din stânga și dreapta la a_0z^n și se obține forma care se realizează:

$$\begin{aligned} y(z) + \frac{1}{a_0}(a_1z^{-1}y(z) + \dots + a_{n-1}z^{-(n-1)}y(z) + a_nz^{-n}y(z)) = \\ = \frac{1}{a_0}(b_0z^{m-n}r(z) + b_1z^{(m-1-n)}r(z) + \dots + b_mz^{-n}r(z)). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Expresia (3.19) se transformă în domeniul timpului discret în ecuație cu recurență de forma:

$$\begin{aligned} y(kT) + \frac{1}{a_0}[a_1y((k-1)T) + \dots + a_ny((k-n)T)] = \\ = \frac{1}{a_0}[b_0r((k+m-n)T) + b_1r((k+m-1-n)T) + \dots + \\ + b_mr((k-n)T)]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Pentru a calcula mărimea curentă $y(kT)$ din (3.20) se împart toți

termenii expresiei la coeficientul a_0 și componentele mărimii de ieșire la pașii anteriori se trec în partea dreaptă cu inversarea semnului și se obține expresia de calcul în forma:

$$y(kT) = -\frac{1}{a_0} \sum_{i=1}^n a_i y((k-i)T) + \frac{1}{a_0} \sum_{i=0}^m b_i r((k-i)T). \quad (3.21)$$

Mărimea de ieșire discretă curentă $y(kT)$ se calculează cu valorile curente și anterioare ale mărimii de ieșire și ale mărimii de referință la pasul respectiv de eșantionare și prezintă procesul tranzitoriu al sistemului automat cu eșantionare.

Exemplul 3.1. Se dă f.d.t. discretă a sistemului închis cu coeficienții cunoscuți de forma:

$$H_0(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 z^3 + b_1 z^2 + b_2 z + b_3}{a_0 z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4}.$$

Se cere să se prezinte ecuația recursivă a sistemului.

Soluționare. Se determină expresia mărimii de ieșire în formă operațională:

$$H_0(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 z^3 + b_1 z^2 + b_2 z + b_3}{a_0 z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4} = \frac{y(z)}{r(z)},$$

$$y(z)(a_0 z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4) =$$

$$= r(z)(b_0 z^3 + b_1 z^2 + b_2 z + b_3),$$

$$a_0 z^4 y(z) + a_1 z^3 y(z) + a_2 z^2 y(z) + a_3 z y(z) + a_4 y(z) =$$

$$= b_0 z^3 r(z) + b_1 z^2 r(z) + b_2 z r(z) + b_3 r(z).$$

Ultima expresie se prezintă în operatori cu întârziere z^{-1} împărțind toți termenii din stânga și dreapta la termenul $a_0 z^4$ (astfel se obține coeficientul $a_0 = 1$):

$$y(z) + \frac{1}{a_0} [a_1 z^{-1} y(z) + a_2 z^{-2} y(z) + a_3 z^{-3} y(z) + a_4 z^{-4} y(z)] =$$

$$= \frac{1}{a_0} [b_0 z^{-1} r(z) + b_1 z^{-2} r(z) + b_2 z^{-3} r(z) + b_3 z^{-4} r(z)].$$

Această expresie se prezintă ca ecuație recurentă în domeniul timpului discret în forma:

$$\begin{aligned}
y(kT) = & -\frac{a_1}{a_0}y((k-1)T) - \frac{a_2}{a_0}y((k-2)T) - \\
& -\frac{a_3}{a_0}y((k-3)T) - \frac{a_4}{a_0}y((k-4)T) + \frac{b_0}{a_0}r((k-1)T) + \\
& + \frac{b_1}{a_0}r((k-2)T) + \frac{b_2}{a_0}r((k-3)T) + \frac{b_3}{a_0}r((k-4)T),
\end{aligned}$$

unde T este perioada de eșantionare care se determină în funcție de proprietățile de inerție ale obiectului de reglare.

După ecuația recurentă, pentru valorile $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ la valorile cunoscute ale parametrilor $\overline{a_0}, \overline{a_4}$ și $\overline{b_0}, \overline{b_3}$ și valorile cunoscute ale semnalului de intrare la momentele de eșantionare $r(0), r(1), r(2), r(3), r(4)$ se calculează valorile ordonatelor mărimii de ieșire la momentele de eșantionare $y(0), y(1), y(2), y(3), \dots$, după care se construiește procesul tranzitoriu al sistemului cu eșantionare. ■

4 ANALIZA SISTEMELOR AUTOMATE DISCRETE

4.1 Funcția de transfer a sistemului automat cu eșantionare închis

Pentru a determina modelul matematic al sistemului automat cu eșantionare în structura sistemului nelinier (fig. 2.1) se înlocuiește elementul nelinier cu un element de discretizare, care prezintă o conexiune serie a elementului ideal de discretizare (EID) cu elementul de reținere de ordinul zero (EROZ) cu f.d.t. $H_{ER}(s)$, obținându-se schema structurală a sistemului cu eșantionare dată în figura 4.1, a.

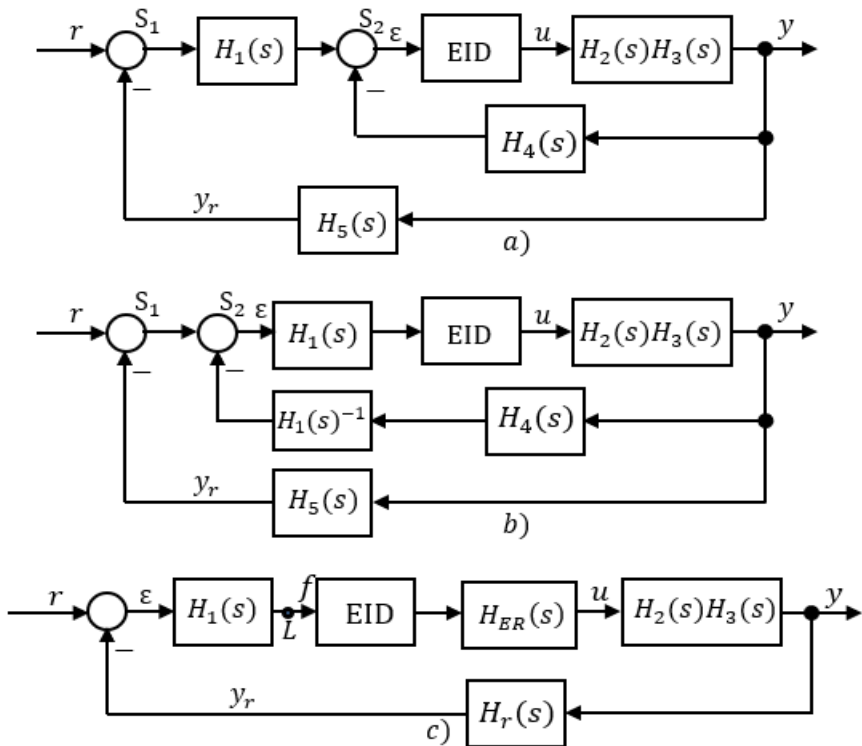


Fig. 4.1. Schema structurală transformată a sistemului cu eșantionare

Procedura de transformare a schemei structurale a sistemului se efectuează pe etape.

Se consideră structura sistemului cu eșantionare cu elementele dinamice cu f.d.t.: $H_1(s)$, $H_2(s)$, $H_3(s)$ care sunt elemente cu inerție de ordinul unu, $H_4(s)$ – element derivator ideal care realizează reacția locală, $H_5(s)$ – element ideal care realizează reacția sistemului, $H_{ER}(s)$ – elementul de reținere de ordinul zero și descrise de funcțiile de transfer:

$$H_1(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1}, H_2(s) = \frac{k_2}{T_2 s + 1}, H_3(s) = \frac{k_3}{T_3 s + 1}, H_4(s) = k_4 s,$$

$$H_5(s) = k_5, H_{ER}(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}, \quad (4.1)$$

unde coeficienții de transfer k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 și constantele de timp T_1, T_2, T_3 ale elementelor dinamice sunt aceiași ca și în structura sistemului nelinier, iar T este perioada de eșantionare.

Pentru a determina funcția de transfer a sistemului cu eșantionare se fac transfigurări în schema sistemului din figura 4.1, a transferându-se sumatorul S_2 de la ieșirea elementului cu f.d.t. $H_1(s)$ la intrarea lui și se introduce f.d.t. inversă $H_1^{-1}(s)$ în reacția locală cu f.d.t. $H_4(s)$.

Ca rezultat, reacția sistemului se prezintă ca conexiune paralelă a reacției locale cu f.d.t. $H_4(s)H_1^{-1}(s)$ și reacția sistemului cu f.d.t. $H_5(s)$ obținând f.d.t. a reacției echivalente a sistemului în forma:

$$H_r(s) = H_5(s) + H_4(s)H_1^{-1}(s) = k_5 + k_4 s \frac{T_1 s + 1}{k_1} =$$

$$= \frac{k_4 T_1 s^2 + k_4 s + k_1 k_5}{k_1}. \quad (4.2)$$

S-a obținut structura echivalentă a sistemului cu eșantionare dată în figura 4.1, b .

În cazul dat pentru determinarea f.d.t. discretă în transformata z a sistemului automat cu eșantionare este dificil, fiindcă f.d.t. discretă

echivalentă explicit nu poate fi calculată.

Eroarea sistemului automat discret închis se determină prin relația:

$$\varepsilon(s) = r(s) - y_r(s). \quad (4.3)$$

În acest scop se întrerupe circuitul pe canalul direct în punctul L înaintea elementului ideal de eșantionare și se calculează transformata z a semnalului de ieșire $f(z)$ a elementului cu f.d.t. $H_1(s)$, obținând expresia:

$$\begin{aligned} f(z) &= Z\{H_1(s)\varepsilon(s)\} = Z\{H_1(s)(r(s) - y_r(s))\} = \\ &= Z\{H_1(s)r(s) - H_1(s)H_{ER}(s)H_2(s)H_3(s)H_r(s)f(s)\} = \\ &= Z\{H_1(s)r(s)\} - Z\{H_{ER}(s)H_2(s)H_3(s)H_r(s)H_1(s)\}f(z) = \\ &= RH_1(z) - H_{ER}H_2H_3H_rH_1(z)f(z), \end{aligned} \quad (4.4)$$

unde s-a introdus noua variabilă transformata z cu substituția [1, 2]:

$$e^{Ts} = z. \quad (4.5)$$

Din (4.4) se calculează expresia semnalului $f(z)$:

$$f(z) = \frac{RH_1(z)}{1+H_{ER}H_2H_3H_rH_1(z)}. \quad (4.6)$$

Se determină transformata z a mărimii de ieșire a sistemului:

$$\begin{aligned} y(z) &= H_{ER}H_2H_3(z)f(z) = \frac{RH_1(z)}{1+H_{ER}H_2H_3H_rH_1(z)}H_{ER}H_2H_3(z) = \\ &= \frac{RH_1(z)H_{ER}H_2H_3(z)}{1+H_{ER}H_2H_3H_rH_1(z)} = \frac{B(z)}{1+A_1(z)} = \frac{B(z)}{A(z)}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

În expresia (4.7) se calculează transformata z de la componenta numărătorului și componenta numitorului respectiv.

Perioada de eșantionare se determină apelând la cea mai mică constantă de timp a elementelor cu inerție ale sistemului după relația:

$$T = 0.1 \min\{T_1, T_2, T_3\}. \quad (4.8)$$

Expresiile $B(z)$ și $A_1(z)$ din (4.7) sunt funcții de proprietățile elementelor din structura sistemului cu eșantionare din figura 4.1, *a*.

În continuare, pentru structura sistemului (fig. 4.1, *c*) se analizează modele de determinare a expresiilor $B(z)$ și $A_1(z)$ din (4.7) care pot exista la realizarea proiectului.

4.2 Determinarea polinomului $B(z)$ f.d.t. a sistemului

1. Determinarea polinomului $B(z)$ pentru modelul B1.

În continuare, pentru structura sistemului automat cu eșantionare (fig. 4.1, *a*) în funcție de proprietățile elementelor componente se prezintă calculul a două modele de determinare a polinomului $B(z)$ a sistemului, care nu depinde de f.d.t. $H_4(s)$ și $H_5(s)$.

Se determină polinomul $B(z)$ din (4.7) pentru modelul B1 când structura sistemului automat cu eșantionare, care conține trei elementele cu inerție de ordinul unu cu f.d.t. $H_1(s)$, $H_2(s)$, $H_3(s)$ și elementele ideale cu f.d.t. $H_4(s)$ și $H_5(s)$:

$$H_1(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1}, H_2(s) = \frac{k_2}{T_2 s + 1}, H_3(s) = \frac{k_3}{T_3 s + 1}, H_4(s) = k_4 s,$$

$$H_5(s) = k_5.$$

Se calculează polinomul $B(z)$ din (4.7) din transformata s în transformata z utilizând relațiile din tabelul A5.1 Anexa 5 pentru cazul când referința este treaptă unitară și, după unele transformări, se obține expresia finală:

$$B(z) = R H_1(z) H_{ER} H_2 H_3(z) =$$

$$\begin{aligned}
&= Z\{H_1(s)r(s)\} \cdot Z\{H_{ER}(s)H_2(s)H_3(s)\} = \\
&= Z\{H_1(s)r(s)\} \cdot Z\left\{\frac{1 - e^{-Ts}}{s} H_2(s)H_3(s)\right\} = \\
&= Z\{H_1(s)r(s)\} \cdot Z\left\{\frac{1-z^{-1}}{s} H_2(s)H_3(s)\right\} = \\
&= Z\left\{\frac{1}{s} \frac{k_1}{(T_1s+1)}\right\} \cdot \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{k_2k_3}{s(T_2s+1)(T_3s+1)}\right\} = \\
&= \frac{k_1(1-d_1)z}{(z-1)(z-d_1)} \cdot \frac{z-1}{z} \left\{\frac{k_2k_3z}{z-1} + \frac{k_2k_3T_2z}{(T_3-T_2)(z-d_2)} - \frac{k_2k_3T_3z}{(T_3-T_2)(z-d_3)}\right\} = \\
&= \frac{1}{(z-d_1)} \left\{\frac{k_1(1-d_1)k_2k_3z}{z-1} + \frac{k_1(1-d_1)k_2k_3T_2z}{(T_3-T_2)(z-d_2)} - \frac{k_1(1-d_1)k_2k_3T_3z}{(T_3-T_2)(z-d_3)}\right\} = \\
&= \frac{1}{z-d_1} \left\{\frac{c_0z}{z-1} + \frac{c_1z}{z-d_2} - \frac{c_2z}{z-d_3}\right\} = \\
&= \frac{c_0z(z-d_2)(z-d_3)+c_1z(z-1)(z-d_3)-c_2z(z-1)(z-d_2)}{(z-1)(z-d_1)(z-d_2)(z-d_3)} = \\
&= \frac{c_0(z-d_2)(z-d_3)+c_1(z-1)(z-d_3)-c_2(z-1)(z-d_2)}{(z-d_1)(z-d_2)(z-d_3)} \frac{z}{z-1} = \\
&= \frac{b_0z^2-b_1z+b_2}{z^3-m_1z^2+m_2z-m_3} r(z) = \frac{B_1(z)}{M(z)} r(z), \tag{4.9}
\end{aligned}$$

unde $r(z) = z/(z-1)$ prezintă semnalul de intrare treaptă unitară discretă, iar coeficienții $d_1, d_2, d_3, c_0, c_1, c_2, b_0, b_1, b_2, m_1, m_2, m_3$ au semnificația:

$$d_1 = e^{-T/T_1}, \quad d_2 = e^{-T/T_2}, \quad d_3 = e^{-T/T_3},$$

$$c_0 = k_1k_2k_3(1-d_1), \quad c_1 = \frac{k_1k_2k_3T_2(1-d_1)}{T_3-T_2}, \quad c_2 = \frac{k_1k_2k_3T_3(1-d_1)}{T_3-T_2},$$

$$b_0 = c_0 + c_1 - c_2,$$

$$b_1 = c_0(d_2 + d_3) + c_1(1 + d_3) - c_2(1 + d_2),$$

$$b_2 = c_0d_2d_3 + c_1d_3 - c_2d_2,$$

$$m_1 = d_1 + d_2 + d_3, m_2 = d_1d_2 + d_1d_3 + d_2d_3, m_3 = d_1d_2d_3.$$

Exemplul 4.1. Să se determine expresia lui $B(z)$ din (4.9) pentru modelul B1 cu datele numerice inițiale în cazul când structura sistemului cu eșantionare conține trei elemente cu inerție de ordinul unu cu f.d.t. $H_1(s)$, $H_2(s)$, $H_3(s)$, iar elementele cu f.d.t. $H_4(s)$ și $H_5(s)$ sunt elemente ideale:

$$H_1(s) = \frac{k_1}{T_1s+1} = \frac{2}{5s+1}, H_2(s) = \frac{k_2}{T_2s+1} = \frac{5}{3s+1},$$

$$H_3(s) = \frac{k_3}{T_3s+1} = \frac{0.5}{8s+1}, H_4(s) = k_4 = 0.4, H_5(s) = k_5 = 1.$$

Expresia $B(z)$ din (4.9) are forma:

$$\begin{aligned} B(z) &= RH_1(z)H_{ER}H_2H_3(z) = \\ &= Z \left\{ \frac{1}{s} \frac{k_1}{(T_1s+1)} \right\} \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{k_2k_3}{s(T_2s+1)(T_3s+1)} \right\} = \\ &= \frac{b_0z^2 - b_1z + b_2}{z^3 - m_1z^2 + m_2z - m_3} r(z) = \frac{B_1(z)}{M(z)} r(z). \end{aligned}$$

Soluționare:

1. Se calculează perioada de eșantionare după relația (4.8):

$$T = 0.1 \min\{T_1, T_2, T_3\} = 0.1 \min\{5, 3, 8\} = 0.1 \cdot 3 = 0.3 \text{ s.}$$

2. Pentru valorile numerice date ale parametrilor elementelor sistemului se determină valorile numerice ale coeficienților din (4.9):

$$d_1 = e^{-T/T_1} = e^{-0.3/5} = 0.9418,$$

$$d_2 = e^{-T/T_2} = e^{-0.3/3} = 0.9048,$$

$$d_3 = e^{-T/T_3} = e^{-0.3/8} = 0.9632,$$

$$c_0 = k_1 k_2 k_3 (1 - d_1) = 2 \cdot 5 \cdot 0.5 (1 - 0.9418) = 0.291,$$

$$c_1 = \frac{k_1 k_2 k_3 T_2 (1 - d_1)}{T_3 - T_2} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 0.5 \cdot 3 (1 - 0.9418)}{8 - 3} = \frac{0.873}{5} = 0.1746,$$

$$c_2 = \frac{k_1 k_2 k_3 T_3 (1 - d_1)}{T_3 - T_2} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 0.5 \cdot 8 (1 - 0.9418)}{8 - 3} = \frac{2.328}{5} = 0.4656,$$

$$b_0 = c_0 + c_1 - c_2 = 0.291 + 0.1746 - 0.4656 = 0,$$

$$\begin{aligned} b_1 &= c_0 (d_2 + d_3) + c_1 (1 + d_3) - c_2 (1 + d_2) = \\ &= 0.291 (0.9048 + 0.9632) + 0.1746 (1 + 0.9632) - \\ &- 0.4656 (1 + 0.9048) = -0.00051, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_2 &= c_0 d_2 d_3 + c_1 d_3 - c_2 d_2 = \\ &= 0.291 \cdot 0.9048 \cdot 0.9632 + 0.1746 \cdot 0.9632 - \\ &- 0.4656 \cdot 0.9048 = 0.0005, \end{aligned}$$

$$m_1 = d_1 + d_2 + d_3 = 0.9418 + 0.9048 + 0.9632 = 2.8098,$$

$$\begin{aligned} m_2 &= d_1 d_2 + d_1 d_3 + d_2 d_3 = \\ &= 0.9418 \cdot 0.9048 + 0.9418 \cdot 0.9632 + \\ &+ 0.9048 \cdot 0.9632 = 2.6307, \end{aligned}$$

$$m_3 = d_1 d_2 d_3 = 0.9418 \cdot 0.9048 \cdot 0.9632 = 0.8208.$$

Funcția de transfer discretă a polinomului $B(z)$ din (4.9) cu valori numerice respective este:

$$\begin{aligned} B(z) &= \frac{-b_1 z + b_2}{z^3 - m_1 z^2 + m_2 z - m_3} r(z) = \\ &= \frac{-0.00051z + 0.0005}{z^3 - 2.8098z^2 + 2.6307z - 0.8208} r(z) = \frac{B_1(z)}{M(z)} r(z). \blacksquare \end{aligned}$$

2. Determinarea polinomului $B(z)$ pentru modelul B2.

Se determină expresia polinomului $B(z)$ din (4.7) pentru modelul

B2 al structurii sistemului automat cu eșantionare cu două elemente cu inerție de ordinul unu cu f.d.t. $H_1(s)$, $H_2(s)$, elementul integrator cu f.d.t. $H_3(s)$, elementul cu f.d.t. $H_4(s)$ din reacția locală poate fi element ideal sau derivator și elementul cu f.d.t. $H_5(s)$ din reacția sistemului este element ideal:

$$H_1(s) = \frac{k_1}{T_1s+1}, H_2(s) = \frac{k_2}{T_2s+1}, H_3(s) = \frac{1}{T_3s} = \frac{k_3}{s}, H_4(s) = k_4,$$

$$H_5(s) = k_5.$$

Se calculează polinomul $B(z)$ din (4.7) din transformata s în transformata z utilizând relațiile din tabelul A5.1 Anexa 5 pentru cazul când referința este treaptă unitară discretă și, după unele transformări, se obține expresia finală:

$$\begin{aligned} B(z) &= RH_1(z)H_{ER}H_2H_3(z) = \\ &= Z\{H_1(s)r(s)\} \cdot Z\{H_{ER}(s)H_2(s)H_3(s)\} = \\ &= Z\left\{\frac{k_1}{s(T_1s+1)}\right\} \cdot Z\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s} \frac{k_2}{T_2s+1} \frac{k_3}{s}\right\} = \\ &= Z\left\{\frac{k_1}{s(T_1s+1)}\right\} \cdot Z\left\{\frac{1-z^{-1}}{s} \frac{k_2k_3}{s(T_2s+1)}\right\} = \\ &= Z\left\{\frac{k_1}{s(T_1s+1)}\right\} \cdot \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{k_2k_3}{s^2(T_2s+1)}\right\} = \\ &= \frac{k_1(1-d_1)z}{(z-1)(z-d_1)} \cdot \frac{z-1}{z} \left\{\frac{k_2k_3Tz}{(z-1)^2} - \frac{k_2k_3T_2(1-d_2)z}{(z-1)(z-d_2)}\right\} = \\ &= \frac{1}{(z-d_1)} \left\{\frac{k_1(1-d_1)k_2k_3Tz}{(z-1)^2} - \frac{k_1(1-d_1)k_2k_3T_2(1-d_2)z}{(z-1)(z-d_2)}\right\} = \\ &= \frac{1}{z-d_1} \left\{\frac{c_0z}{(z-1)^2} - \frac{c_1z}{(z-1)(z-d_2)}\right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{c_0 z(z-d_2) - c_1 z(z-1)}{(z-1)^2(z-d_1)(z-d_2)} = \frac{c_0(z-d_2) - c_1(z-1)}{(z-1)(z-d_1)(z-d_2)} \frac{z}{z-1} = \\
&= \frac{c_0(z-d_2) - c_1(z-1)}{(z-1)(z-d_1)(z-d_2)} \frac{z}{z-1} = \frac{b_1 z - b_2}{z^3 - m_1 z^2 + m_2 z - m_3} r(z) = \frac{B_1(z)}{M(z)} r(z), \quad (4.10)
\end{aligned}$$

unde $r(z) = z/(z-1)$ este semnalul de intrare treaptă unitară discretă, iar coeficienții $d_1, d_2, c_1, c_2, b_1, b_2, m_1, m_2, m_3$ au semnificația:

$$d_1 = e^{-T/T_1}, \quad d_2 = e^{-T/T_2},$$

$$c_0 = k_1(1-d_1)k_2k_3T, \quad c_1 = k_1(1-d_1)k_2k_3T_2(1-d_2),$$

$$\begin{aligned}
b_1 &= c_0 - c_1 = k_1(1-d_1)k_2k_3T - k_1(1-d_1)k_2k_3T_2(1-d_2) = \\
&= k_1(1-d_1)k_2k_3(T - T_2(1-d_2)),
\end{aligned}$$

$$b_2 = c_1 - c_0 d_2 =$$

$$= k_1(1-d_1)k_2k_3T_2(1-d_2) - k_1(1-d_1)k_2k_3T d_2 =$$

$$= k_1(1-d_1)k_2k_3(T_2(1-d_2) - T d_2),$$

$$m_1 = 1 + d_1 + d_2, \quad m_2 = d_1 d_2 + d_1 + d_2, \quad m_3 = d_1 d_2.$$

Exemplul 4.2. Să se calculeze expresia $B(z)$ din (4.10) pentru datele numerice ale structurii sistemului cu eșantionare care conține două elemente cu inerție de ordinul unu cu f.d.t. $H_1(s), H_2(s)$, elementul integrator cu f.d.t. $H_3(s)$, iar elementele cu f.d.t. $H_4(s)$ și $H_5(s)$ sunt elemente ideale:

$$H_1(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1} = \frac{2}{5s + 1}, \quad H_2(s) = \frac{k_2}{T_2 s + 1} = \frac{5}{3s + 1},$$

$$H_3(s) = \frac{1}{T_3 s} = \frac{k_3}{s} = \frac{1}{4s} = \frac{0.25}{s},$$

$$H_4(s) = k_4 = 0.4, \quad H_5(s) = k_5 = 1.$$

Expresia $B(z)$ din (4.10) are forma:

$$B(z) = RH_1(z)H_{ER}H_2H_3(z) = Z\left\{\frac{1}{s} \frac{k_1}{(T_1s+1)}\right\} \frac{z^{-1}}{z} Z\left\{\frac{k_2k_3}{s^2(T_2s+1)}\right\} =$$

$$= \frac{b_1z-b_2}{z^3-m_1z^2+m_2z-m_3} r(z) = \frac{B_1(z)}{M(z)} r(z).$$

Soluționare:

1. Se calculează perioada de eșantionare după relația (4.8):

$$T = 0.1 \min\{T_1, T_2\} = 0.1 \min\{5, 3\} = 0.1 \cdot 3 = 0.3 \text{ s.}$$

2. Pentru valorile numerice date ale parametrilor elementelor sistemului se determină valorile coeficienților din (4.10):

$$d_1 = e^{-T/T_1} = e^{-0.3/5} = 0.9418, \quad d_2 = e^{-T/T_2} = e^{-0.3/3} = 0.9048,$$

$$c_1 = k_1k_2k_3T(1 - d_1) =$$

$$= 2 \cdot 5 \cdot 0.25 \cdot 0.3(1 - 0.9418) = 0.0437,$$

$$c_2 = k_1k_2k_3T_2(1 - d_1)(1 - d_2) =$$

$$= 2 \cdot 5 \cdot 0.25 \cdot 3(1 - 0.9418)(1 - 0.9048) = 0.0416,$$

$$b_1 = c_1 - c_2 = 0.0437 - 0.0416 = 0.0021,$$

$$b_2 = c_2 - c_1d_2 = 0.0416 - 0.0437 \cdot 0.9048 = 0.0021,$$

$$m_1 = 1 + d_1 + d_2 = 1 + 0.9418 + 0.9048 = 2.8466,$$

$$m_2 = d_1d_2 + d_1 + d_2 =$$

$$= 0.9418 \cdot 0.9048 + 0.9418 + 0.9048 = 2.6987,$$

$$m_3 = d_1d_2 = 0.9418 \cdot 0.9048 = 0.8521.$$

Funcția de transfer discretă a polinomului $B(z)$ cu valori numerice este:

$$B(z) = \frac{b_1z-b_2}{z^3-m_1z^2+m_2z-m_3} r(z) = \frac{B_1(z)}{M(z)} r(z) =$$

$$= \frac{0.0021z-0.0021}{z^3-2.8466z^2+2.6987z-0.8521} r(z). \blacksquare$$

4.3 Calculul polinomului $A(z)$ f.d.t. a sistemului

În continuare, pentru structura sistemului automat cu eșantionare (fig. 4.1, *a*) în funcție de parametrii elementelor componente ale sistemului se prezintă 4 modele de calcul al polinomului $A(z)$ din (4.7).

1. Calculul polinomului $A(z)$ pentru modelul A1. În continuare, pentru structura sistemului automat cu eșantionare (fig. 4.1, *a*) în funcție de parametrii elementelor componente ale sistemului se prezintă 4 modele de calcul al polinomului $A(z)$ din (4.7).

Se determină expresia $A(z)$ din (4.7) pentru structura sistemului automat cu eșantionare, care conține trei elemente cu inerție de ordinul unu cu f.d.t. $H_1(s)$, $H_2(s)$, $H_3(s)$, elementul derivativ cu f.d.t. $H_4(s)$ și elementul ideal în reacția sistemului cu f.d.t. $H_5(s)$:

$$H_1(s) = \frac{k_1}{T_1s+1}, H_2(s) = \frac{k_2}{T_2s+1}, H_3(s) = \frac{k_2}{T_3s+1}, H_4(s) = k_4s,$$

$$H_5(s) = k_5.$$

1. Se exprimă $A_1(z)$ din (4.7) în transformata s și se obține relația:

$$\begin{aligned} A_1(z) &= H_{ER}H_2H_3H_rH_1(z) = \\ &= Z \left\{ \frac{1-e^{-Ts}}{s} \frac{k_2k_3}{(T_2s+1)(T_3s+1)} \frac{k_4T_1s^2+k_4s+k_1k_5}{k_1} \frac{k_1}{T_1s+1} \right\} = \\ &= (1 - z^{-1})Z \left\{ \frac{k_2k_3(k_4T_1s^2+k_4s+k_1k_5)}{s(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)} \right\} = \\ &= \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{k_2k_3k_4T_1s^2+k_2k_3k_4s+k_1k_2k_3k_5}{s(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)} \right\} = \\ &= \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{p_0s^2+p_1s+p_2}{s(q_0s^3+q_1s^2+q_2s+q_3)} \right\} = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{P(s)}{Q(s)} \right\} = \\ &= \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{P(s)}{sQ_1(s)} \right\} = \frac{z-1}{z} Z \{L(s)\}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

unde coeficienții se exprimă prin parametrii f.d.t. ale elementelor:

$$p_0 = k_2 k_3 k_4 T_1, p_1 = k_2 k_3 k_4, p_2 = k_1 k_2 k_3 k_5,$$

$$q_0 = T_1 T_2 T_3, q_1 = T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3,$$

$$q_2 = T_1 + T_2 + T_3, q_3 = 1.$$

2. Pentru polinomul caracteristic $Q(s)$ din (4.11) se determină rădăcinile:

$$\begin{aligned} Q(s) &= sQ_1(s) = s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1) = \\ &= s(q_0 s^3 + q_1 s^2 + q_2 s + q_3) = q_0 s^4 + q_1 s^3 + q_2 s^2 + q_3 s = 0, \\ s_1 &= 0, s_2 = -\frac{1}{T_1}, s_3 = -\frac{1}{T_2}, s_4 = -\frac{1}{T_3}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

3. Expresia $L(s)$ din (4.11) nu se poate determina după tabele în z și se prezintă în fracții elementare în s pentru polii simpli ai lui $L(s)$ din (4.12) în forma:

$$\begin{aligned} L(s) &= \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{p_0 s^2 + p_1 s + p_2}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)} = \frac{p_0 s^2 + p_1 s + p_2}{q_0 s^4 + q_1 s^3 + q_2 s^2 + q_3 s} = \\ &= \frac{c_1}{s - s_1} + \frac{c_2}{s - s_2} + \frac{c_3}{s - s_3} + \frac{c_4}{s - s_4} = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{T_1 s + 1} + \frac{c_3}{T_2 s + 1} + \frac{c_4}{T_3 s + 1}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

unde coeficienții necunoscuți c_1, c_2, c_3, c_4 reprezintă reziduurile funcției $L(s)$ în polii s_1, s_2, s_3, s_4 și se calculează prin relațiile:

$$c_i = \frac{P(s)}{\dot{Q}(s)} \Big|_{s=s_i}, \dot{Q}(s) = \frac{dQ(s)}{ds}, i = 1, 2, 3, 4. \quad (4.14)$$

4. În expresia (4.11) cu $L(s)$ din (4.13) pentru fiecare componentă în s din paranteza figurată din tabelul A5.1 Anexa 5 se

găsește corespondența în transformata z și, după unele transformări, se determină expresia $A_1(z)$ în forma:

$$\begin{aligned}
 A_1(z) &= \frac{z-1}{z} Z\{L(s)\} = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{T_1s+1} + \frac{c_3}{T_2s+1} + \frac{c_4}{T_3s+1}\right\} = \\
 &= \frac{z-1}{z} \left\{\frac{c_1z}{z-1} + \frac{c_2z}{T_1(z-e^{-T}/T_1)} + \frac{c_3z}{T_2(z-e^{-T}/T_2)} + \frac{c_4z}{T_3(z-e^{-T}/T_3)}\right\} = \\
 &= \frac{z-1}{z} \left\{\frac{c'_1z}{z-1} + \frac{c'_2z}{z-d_1} + \frac{c'_3z}{z-d_2} + \frac{c'_4z}{z-d_3}\right\} = \\
 &= \frac{c'_1(z-d_1)(z-d_2)(z-d_3) + c'_2(z-1)(z-d_2)(z-d_3) + c'_3(z-1)(z-d_1)(z-d_3) + c'_4(z-1)(z-d_1)(z-d_2)}{(z-d_1)(z-d_2)(z-d_3)} = \\
 &= \frac{v_0z^3 - v_1z^2 + v_2z - v_3}{z^3 - m_1z^2 + m_2z - m_3}, \tag{4.15}
 \end{aligned}$$

unde coeficienții au semnificația:

$$d_1 = e^{-T/T_1}, d_2 = e^{-T/T_2}, d_3 = e^{-T/T_3},$$

$$c'_1 = c_1, c'_2 = c_2/T_1, c'_3 = c_3/T_2, c'_4 = c_4/T_3,$$

$$v_0 = c'_1 + c'_2 + c'_3 + c'_4,$$

$$v_1 = c'_1(d_1 + d_2 + d_3) + c'_2(1 + d_2 + d_3) +$$

$$+ c'_3(1 + d_1 + d_3) + c'_4(1 + d_1 + d_2),$$

$$v_2 = c'_1(d_1d_2 + d_1d_3 + d_2d_3) + c'_2(d_2d_3 + d_2 + d_3) +$$

$$+ c'_3(d_1d_3 + d_1 + d_3) + c'_4(d_1d_2 + d_1 + d_2),$$

$$v_3 = c'_1d_1d_2d_3 + c'_2d_2d_3 + c'_3d_1d_3 + c'_4d_1d_2,$$

$$m_1 = d_1 + d_2 + d_3, m_2 = d_1d_2 + d_1d_3 + d_2d_3, m_3 = d_1d_2d_3.$$

Astfel, polinomul caracteristic $A(z)$ al sistemului discret din (4.7) se descrie de expresia:

$$\begin{aligned} A(z) &= 1 + A_1(z) = 1 + \frac{v_0 z^3 - v_1 z^2 + v_2 z - v_3}{z^3 - m_1 z^2 + m_2 z - m_3} = \\ &= \frac{v'_0 z^3 - v'_1 z^2 + v'_2 z - v'_3}{z^3 - m_1 z^2 + m_2 z - m_3} = \frac{V(z)}{M(z)}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

unde coeficienții numărătorului sunt:

$$v'_0 = 1 + v_0, v'_1 = m_1 + v_1, v'_2 = m_2 + v_2, v'_3 = m_3 + v_3.$$

Exemplul 4.3. Să se determine polinomul $A_1(z)$ din (4.11) pentru modelul A1 cu datele numerice ale sistemului cu eșantionare care conțin trei elemente cu inerție de ordinul unu cu f.d.t. $H_1(s)$, $H_2(s)$, $H_3(s)$, elementul derivator cu f.d.t. $H_4(s)$ și elementul ideal în reacția sistemului cu f.d.t. $H_5(s)$:

$$\begin{aligned} H_1(s) &= \frac{k_1}{T_1 s + 1} = \frac{2}{5s + 1}, H_2(s) = \frac{k_2}{T_2 s + 1} = \frac{5}{3s + 1}, \\ H_3(s) &= \frac{k_3}{T_3 s + 1} = \frac{0.5}{8s + 1}, H_4(s) = k_4 = 0.5s, H_5(s) = k_5 = 1. \end{aligned}$$

Rezolvare:

1. Se exprimă $A_1(z)$ din (4.7) în transformata s și se obține relația:

$$\begin{aligned} A_1(z) &= H_{ER} H_2 H_3 H_r H_1(z) = \\ &= Z \left\{ \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \frac{k_2 k_3}{(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)} \frac{k_4 T_1 s^2 + k_4 s + k_1 k_5}{k_1} \frac{k_1}{T_1 s + 1} \right\} = \\ &= (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{k_2 k_3 (k_4 T_1 s^2 + k_4 s + k_1 k_5)}{s (T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)} \right\} = \\ &= \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{k_2 k_3 k_4 T_1 s^2 + k_2 k_3 k_4 s + k_1 k_2 k_3 k_5}{s (T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)} \right\} = \\ &= \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{p_0 s^2 + p_1 s + p_2}{q_0 s^4 + q_1 s^3 + q_2 s^2 + q_3 s} \right\} = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{P(s)}{Q(s)} \right\} = \frac{z-1}{z} Z \{L(s)\}, \end{aligned}$$

unde coeficienții $L(s)$ se exprimă prin parametrii f.d.t.:

$$d_1 = e^{-T/T_1} = e^{-0.3/3} = 0.9048,$$

$$d_2 = e^{-T/T_2} = e^{-0.3/5} = 0.9418,$$

$$d_3 = e^{-T/T_3} = e^{-0.3/8} = 0.9632,$$

$$p_0 = k_2 k_3 k_4 T_1 = 5 \cdot 0.5 \cdot 0.5 \cdot 5 = 6.25,$$

$$p_1 = k_2 k_3 k_4 = 5 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 1.25,$$

$$p_2 = k_1 k_2 k_3 k_5 = 2 \cdot 5 \cdot 0.5 \cdot 1 = 5,$$

$$q_0 = T_1 T_2 T_3 = 5 \cdot 3 \cdot 8 = 120,$$

$$q_1 = T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3 = 5 \cdot 3 + 5 \cdot 8 + 3 \cdot 8 = 79,$$

$$q_2 = T_1 + T_2 + T_3 = 5 + 3 + 8 = 16, q_3 = 1.$$

2. Expresia $L(s)$ se dezvoltă în fracții elementare în s cu coeficienții necunoscuți:

$$\begin{aligned} L(s) &= \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{p_0 s^2 + p_1 s + p_2}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)} = \frac{p_0 s^2 + p_1 s + p_2}{q_0 s^4 + q_1 s^3 + q_2 s^2 + q_3 s} = \\ &= \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{T_1 s + 1} + \frac{c_3}{T_2 s + 1} + \frac{c_4}{T_3 s + 1}. \end{aligned}$$

3. Pentru polinomul caracteristic $Q(s)$ se determină rădăcinile:

$$\begin{aligned} Q(s) &= s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1) = \\ &= q_0 s^4 + q_1 s^3 + q_2 s^2 + q_3 s = 120s^4 + 79s^3 + 16s^2 + s = 0, \end{aligned}$$

$$s_1 = 0, s_2 = -\frac{1}{T_1} = -\frac{1}{5} = -0.2, s_3 = -\frac{1}{T_2} = -\frac{1}{3} = 0.3333,$$

$$s_4 = -\frac{1}{T_3} = -\frac{1}{8} = -0.125.$$

4. Se determină derivata polinomului $Q(s)$:

$$\begin{aligned} \dot{Q}(s) &= 4q_0 s^3 + 3q_1 s^2 + 2q_2 s + q_3 = \\ &= 480s^3 + 237s^2 + 32s + 1 = 0. \end{aligned}$$

5. Se determină valorile coeficienților necunoscuți c_1, c_2, c_3, c_4 ai dezvoltării în fracții elementare pentru polii simpli s_1, s_2, s_3, s_4 a lui $L(s)$, calculând raportul polinoamelor $L(s)$ pentru fiecare pol, substituind $s = s_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) după relațiile (4.14):

$$c_1 = \frac{P(s_1)}{Q'(s_1)} = \frac{p_0 s^2 + p_1 s + p_2}{4q_0 s^3 + 3q_1 s^2 + q_2 s + q_3} \Big|_{s=s_1} = \frac{6.25(0)^2 + 1.25(0) + 5}{480(0)^3 + 237(0)^2 + 32 \cdot 0 + 1} = 5,$$

$$c_2 = \frac{P(s_2)}{Q'(s_2)} = \frac{p_0 s^2 + p_1 s + p_2}{4q_0 s^3 + 3q_1 s^2 + q_2 s + q_3} \Big|_{s=s_2} =$$

$$= \frac{6.25(-0.2)^2 + 1.25(-0.2) + 5}{480(-0.2)^3 + 237(-0.2)^2 + 32(-0.2) + 1} = 20.8333,$$

$$c_3 = \frac{P(s_3)}{Q'(s_3)} = \frac{p_0 s^2 + p_1 s + p_2}{4q_0 s^3 + 3q_1 s^2 + q_2 s + q_3} \Big|_{s=s_3} =$$

$$= \frac{6.25(-0.3333)^2 + 1.25(-0.3333) + 5}{480(-0.3333)^3 + 237(-0.3333)^2 + 32(-0.3333) + 1} = -4.7543,$$

$$c_4 = \frac{P(s_4)}{Q'(s_4)} = \frac{p_0 s^2 + p_1 s + p_2}{4q_0 s^3 + 3q_1 s^2 + q_2 s + q_3} =$$

$$= \frac{6.25(-0.125)^2 + 1.25(-0.125) + 5}{480(-0.125)^3 + 237(-0.125)^2 + 32(-0.125) + 1} \Big|_{s=s_4} = -21.0810.$$

6. În expresia (4.11) cu $L(s)$ din (4.13) pentru fiecare componentă în s din paranteza figurată din tabelul A5.1 Anexa 5 se găsește corespondența în transformata z și, după unele transformări, se determină expresia $A_1(z)$ în forma:

$$A_1(z) = \frac{z-1}{z} Z\{L(s)\} = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{T_1 s + 1} + \frac{c_3}{T_2 s + 1} + \frac{c_4}{T_3 s + 1}\right\} =$$

$$= \frac{z-1}{z} \left\{\frac{c_1 z}{z-1} + \frac{c_2 z}{T_1(z-e^{-T/T_1})} + \frac{c_3 z}{T_2(z-e^{-T/T_2})} + \frac{c_4 z}{T_3(z-e^{-T/T_3})}\right\} =$$

$$= \frac{z-1}{z} \left\{\frac{c'_1 z}{z-1} + \frac{c'_2 z}{z-d_1} + \frac{c'_3 z}{z-d_2} + \frac{c'_4 z}{z-d_3}\right\} =$$

$$= \frac{c'_1(z-d_1)(z-d_2)(z-d_3) + c'_2(z-1)(z-d_2)(z-d_3) + c'_3(z-1)(z-d_1)(z-d_3) + c'_4(z-1)(z-d_1)(z-d_2)}{(z-d_1)(z-d_2)(z-d_3)} =$$

$$= \frac{v_0 z^3 - v_1 z^2 + v_2 z - v_3}{z^3 - m_1 z^2 + m_2 z - m_3}.$$

7. Se determină coeficienții din expresia $A_1(z)$:

$$c'_1 = c_1 = 5,$$

$$c'_2 = c_2/T_1 = 20.8333/5 = 4.1667,$$

$$c'_3 = c_3/T_2 = -4.7543/3 = -1.5848,$$

$$c'_4 = c_4/T_3 = -21.081/8 = -2.6351,$$

$$v_0 = c'_1 + c'_2 + c'_3 + c'_4 =$$

$$= 5 + 4.1667 - 1.5848 - 2.6351 = 4.9468,$$

$$v_1 = c'_1(d_1 + d_2 + d_3) + c'_2(1 + d_2 + d_3) + c'_3(1 + d_1 + d_3) +$$

$$+ c'_4(1 + d_1 + d_2) = 5(0.9418 + 0.9048 + 0.9632) +$$

$$+ 4.1667(1 + 0.9048 + 0.9632) - 1.5848(1 + 0.9418 +$$

$$+ 0.9632) - 2.6351(1 + 0.9418 + 0.9048) = 13.8942,$$

$$v_2 = c'_1(d_1d_2 + d_1d_3 + d_2d_3) + c'_2(d_2d_3 + d_2 + d_3) +$$

$$+ c'_3(d_1d_3 + d_1 + d_3) + c'_4(d_1d_2 + d_1 + d_2) =$$

$$= 5(0.9418 \cdot 0.9048 + 0.9418 \cdot 0.9632 + 0.9048 \cdot 0.9632) +$$

$$+ 4.1667(0.9048 \cdot 0.9632 + 0.9048 + 0.9632) -$$

$$- 1.5848(0.9418 \cdot 0.9632 + 0.9418 + 0.9632) -$$

$$- 2.6351(0.9418 \cdot 0.9048 + 0.9418 + 0.9048) = 13.0001,$$

$$v_3 = c'_1d_1d_2d_3 + c'_2d_2d_3 + c'_3d_1d_3 + c'_4d_1d_2 =$$

$$= 5 \cdot 0.9418 \cdot 0.9048 \cdot 0.9632 + 4.1667 \cdot 0.9048 \cdot 0.9632 -$$

$$- 1.5848 \cdot 0.9418 \cdot 0.9632 - 2.6351 \cdot 0.9418 \cdot 0.9048 = 4.2089,$$

$$m_1 = d_1 + d_2 + d_3 = 0.9418 + 0.9048 + 0.9632 = 2.8098,$$

$$m_2 = d_1d_2 + d_1d_3 + d_2d_3 =$$

$$\begin{aligned}
&= 0.9418 \cdot 0.9048 + 0.9418 \cdot 0.9632 + 0.9048 \cdot 0.9632 = \\
&= 0.8521 + 0.9071 + 0.8715 = 2.6307,
\end{aligned}$$

$$m_3 = d_1 d_2 d_3 = 0.9418 \cdot 0.9048 \cdot 0.9632 = 0.8208.$$

Astfel, polinomul $A_1(z)$ în formă numerică este:

$$\begin{aligned}
A_1(z) &= \frac{V(z)}{M(z)} = \frac{v_0 z^3 - v_1 z^2 + v_2 z - v_3}{z^3 - m_1 z^2 + m_2 z - m_3} = \\
&= \frac{4.9468z^3 - 13.8942z^2 + 13.0001z - 4.2089}{z^3 - 2.8098z^2 + 2.6307z - 0.8208}.
\end{aligned}$$

8. Polinomul caracteristic al sistemului cu eșantionare este:

$$\begin{aligned}
A(z) &= 1 + A_1(z) = 1 + \frac{V(z)}{M(z)} = \frac{v_0 z^3 - v_1 z^2 + v_2 z - v_3}{z^3 - m_1 z^2 + m_2 z - m_3} = \\
&= 1 + \frac{4.9468z^3 - 13.8942z^2 + 13.0001z - 4.2089}{z^3 - 2.8098z^2 + 2.6307z - 0.8208} = \\
&= \frac{5.9468z^3 - 16.704z^2 + 15.6308z - 4.9293}{z^3 - 2.8098z^2 + 2.6307z - 0.8208}. \blacksquare
\end{aligned}$$

2. Calculul polinomului $A(z)$ pentru modelul A2. Se determină expresia $A(z)$ din (4.7) pentru structura sistemului automat cu eșantionare, care conține trei elemente cu inerție de ordinul unu cu f.d.t. $H_1(s)$, $H_2(s)$, $H_3(s)$, elementul ideal cu f.d.t. $H_4(s)$ și elementul ideal în reacția sistemului cu f.d.t. $H_5(s)$:

$$H_1(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1}, H_2(s) = \frac{k_2}{T_2 s + 1}, H_3(s) = \frac{k_3}{T_3 s + 1}, H_4(s) = k_4,$$

$$H_5(s) = k_5.$$

1. Se calculează $A_1(z)$ din (4.7) în transformata s și, după unele transformări, se obține expresia:

$$A_1(z) = H_{ER} H_2 H_3 H_r H_1(z) =$$

$$\begin{aligned}
&= Z \left\{ \frac{1-e^{-Ts}}{s} \frac{k_2 k_3}{(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)} \frac{k_4 T_1 s + k_4 + k_1 k_5}{k_1} \frac{k_1}{T_1 s + 1} \right\} = \\
&= \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{k_2 k_3 k_4 T_1 s + k_1 k_2 k_3 k_5 + k_2 k_3 k_4}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)} \right\} = \\
&= \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{p_0 s + p_1}{q_0 s^4 + q_1 s^3 + q_2 s^2 + q_3 s} \right\} = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{P(s)}{Q(s)} \right\} = \frac{z-1}{z} Z \{L(s)\}, \quad (4.17)
\end{aligned}$$

unde coeficienții se exprimă prin parametrii f.d.t. ai sistemului:

$$p_0 = k_2 k_3 k_4 T_1, \quad p_1 = k_1 k_2 k_3 k_5 + k_2 k_3 k_4,$$

$$q_0 = T_1 T_2 T_3, \quad q_1 = T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3, \quad q_2 = T_1 + T_2 + T_3, \quad q_3 = 1.$$

2. Pentru polinomul caracteristic $Q(s)$ din (4.17) se determină rădăcinile:

$$\begin{aligned}
Q(s) &= s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1) = \\
&= q_0 s^4 + q_1 s^3 + q_2 s^2 + q_3 s = 0, \\
s_1 &= 0, \quad s_2 = -\frac{1}{T_1}, \quad s_3 = -\frac{1}{T_2}, \quad s_4 = -\frac{1}{T_3}. \quad (4.18)
\end{aligned}$$

3. Expresia $L(s)$ din (4.17) nu se calculează după tabele în z ce se prezintă în fracții elementare în s pentru cazul cu un pol egal cu zero și trei poli simpli ai lui $L(s)$ din (4.18) în forma:

$$\begin{aligned}
L(s) &= \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{p_0 s + p_1}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)} = \frac{p_0 s + p_1}{q_0 s^4 + q_1 s^3 + q_2 s^2 + q_3 s} = \\
&= \frac{c_1}{s-s_1} + \frac{c_2}{s-s_2} + \frac{c_3}{s-s_3} + \frac{c_4}{s-s_4} = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{T_1 s + 1} + \frac{c_3}{T_2 s + 1} + \frac{c_4}{T_3 s + 1}, \quad (4.19)
\end{aligned}$$

unde coeficienții necunoscuți c_1, c_2, c_3, c_4 ai dezvoltării în fracții elementare, care reprezintă reziduurile funcției $L(s)$ în poli $s_1, s_2, s_3,$

s_4 , se calculează prin relațiile:

$$c_i = \frac{P(s)}{\dot{Q}(s)} \Big|_{s=s_i}, \dot{Q}(s) = \frac{dQ(s)}{ds}, i = \overline{1,4}. \quad (4.20)$$

4. În expresia (4.17) cu $L(s)$ din (4.19) cu coeficienții calculați cu (4.20) pentru fiecare componentă în s din paranteza figurată din tabelul A5.1 Anexa 5 se găsește corespondența în transformata z și expresia $A_1(z)$ se calculează prin relația (4.15).

3. Calculul polinomului $A(z)$ pentru modelul A3. Se determină expresia $A(z)$ din (4.7) pentru structura sistemului automat cu eșantionare, care conține două elemente cu inerție de ordinul unu cu f.d.t. $H_1(s)$, $H_2(s)$, elementul integrator cu f.d.t. $H_3(s)$, elementul derivator cu f.d.t. $H_4(s)$ în reacția sistemului:

$$H_1(s) = \frac{k_1}{T_1s+1}, H_2(s) = \frac{k_2}{T_2s+1}, H_3(s) = \frac{1}{T_3s}, H_4(s) = k_4s,$$

$$H_5(s) = k_5.$$

Se determină expresia $A_1(z)$ în transformata s , care nu poate fi calculată după tabele în z și se dezvoltă în fracții elementare în s cu coeficienții necunoscuți c_1, c_2, c_3, c_4 în forma:

$$\begin{aligned} A_1(z) &= H_{ER}H_2H_3H_4H_5(z) = \\ &= Z \left\{ \frac{1-e^{-Ts}}{s} \frac{k_2}{T_3s(T_2s+1)} \frac{k_4T_1s^2+k_4s+k_1k_5}{k_1} \frac{k_1}{T_1s+1} \right\} = \\ &= Z \left\{ \frac{1-e^{-Ts}}{s} \frac{k_2k_3}{s(T_2s+1)} \frac{k_4T_1s^2+k_4s+k_1k_5}{(T_1s+1)} \right\} = \\ &= \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{k_2k_3k_4T_1s^2+k_2k_3k_4s+k_1k_2k_3k_5}{s^2(T_1s+1)(T_2s+1)} \right\} = \\ &= \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{p_0s^2+p_1s+p_2}{s^2(q_0s^2+q_1s+q_2)} \right\} = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{P(s)}{Q(s)} \right\} = \frac{z-1}{z} Z \{L(s)\} = \end{aligned}$$

$$= \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s^2} + \frac{c_3}{T_1s+1} + \frac{c_4}{T_2s+1} \right\}, \quad (4.21)$$

iar coeficienții se exprimă prin parametrii f.d.t. ale sistemului:

$$p_0 = k_2k_3k_4T_1, p_1 = k_2k_3k_4, p_2 = k_1k_2k_3k_5,$$

$$q_0 = T_1T_2, q_1 = T_1 + T_2, q_2 = 1.$$

Pentru determinarea coeficienților necunoscuți c_1, c_2, c_3, c_4 din (4.21) paranteza figurată se aplică metoda dezvoltării în fracții elementare în s și se obține:

$$\begin{aligned} \frac{p_0s^2+p_1s+p_2}{s^2(T_1s+1)(T_2s+1)} &= \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s^2} + \frac{c_3}{T_1s+1} + \frac{c_4}{T_2s+1} = \\ &= \frac{s^3(c_2T_1T_2+c_3T_2+c_4T_1)+s^2(c_1T_1T_2+c_2(T_1+T_2)+c_3+c_4)+s(c_1(T_1+T_2)+c_2)+c_1}{s^2(T_1s+1)(T_2s+1)}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

din care se egalează coeficienții de pe lângă aceleași grade ale lui s din partea stângă și partea dreaptă ale numărătorului și se obține un sistem de ecuații algebrice de forma:

$$s^3: c_2T_1T_2 + c_3T_2 + c_4T_1 = 0,$$

$$s^2: c_1T_1T_2 + c_2(T_1 + T_2) + c_3 + c_4 = p_0, \quad (4.23)$$

$$s: c_1(T_1 + T_2) + c_2 = p_1,$$

$$s^0: c_1 = p_2,$$

care se soluționează și se obțin valorile coeficienților c_1, c_2, c_3, c_4 .

În expresia (4.21) pentru fiecare componentă în s din paranteza figurată din tabelul A5.1 Anexa 5 se găsește corespondența în

transformata z și, după unele transformări, se determină expresia $A_1(z)$ în forma:

$$\begin{aligned}
 A_1(z) &= \frac{z-1}{z} Z\{L(s)\} = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{c_1}{s^2} + \frac{c_2}{s} + \frac{c_3}{T_1s+1} + \frac{c_4}{T_2s+1}\right\} = \\
 &= \frac{z-1}{z} \left\{\frac{c_1Tz}{(z-1)^2} + \frac{c_2z}{z-1} + \frac{c_3z}{T_1(z-e^{-T/T_1})} + \frac{c_4z}{T_2(z-e^{-T/T_2})}\right\} = \\
 &= \frac{z-1}{z} \left\{\frac{c'_2z}{(z-1)^2} + \frac{c'_1z}{z-1} + \frac{c'_3z}{z-d_1} + \frac{c'_4z}{z-d_2}\right\} = \\
 &= \frac{c'_1(z-d_1)(z-d_2) + c'_2(z-1)(z-d_1)(z-d_2) + c'_3(z-1)^2(z-d_2) + c'_4(z-1)^2(z-d_1)}{(z-1)(z-d_1)(z-d_2)} = \\
 &= \frac{v_0z^3 - v_1z^2 + v_2z - v_3}{z^3 - m_1z^2 + m_2z - m_3}, \tag{4.24}
 \end{aligned}$$

unde coeficienții au semnificația:

$$d_1 = e^{-T/T_1}, d_2 = e^{-T/T_2},$$

$$c'_1 = c_1T, c'_2 = c_2, c'_3 = c_3/T_1, c'_4 = c_4/T_2,$$

$$v_0 = c'_1 + c'_3 + c'_4,$$

$$v_1 = -c'_1 + c'_2(1 + d_1 + d_2) + c'_3(2 + d_2) + c'_4(2 + d_1),$$

$$v_2 = -c'_1(d_1 + d_2) + c'_2(d_1d_2 + d_1 + d_2) +$$

$$+ c'_3(1 + 2d_2) + c'_4(1 + 2d_1),$$

$$v_3 = -c'_1d_1d_2 + c'_2d_1d_2 + c'_3d_2 + c'_4d_1,$$

$$m_1 = 1 + d_1 + d_2, m_2 = d_1d_2 + d_1 + d_2, m_3 = d_1d_2.$$

Astfel, polinomul caracteristic $A(z)$ al sistemului discret din (4.21) se descrie cu expresia:

$$\begin{aligned}
A(z) &= 1 + A_1(z) = 1 + \frac{v_0 z^3 - v_1 z^2 + v_2 z - v_3}{z^3 - m_1 z^2 + m_2 z - m_3} = \\
&= \frac{v'_0 z^3 - v'_1 z^2 + v'_2 z - v'_3}{z^3 - m_1 z^2 + m_2 z - m_3} = \frac{V(z)}{M(z)},
\end{aligned} \tag{4.25}$$

unde coeficienții se descriu prin relațiile:

$$v'_0 = 1 + v_0, v'_1 = m_1 + v_1, v'_2 = m_2 + v_2, v'_3 = m_3 + v_3.$$

Exemplul 4.4. Să se determine expresia $A_1(z)$ din (4.21) pentru cazul modelului A3 când structura sistemului cu eșantionare conține două elemente cu inerție de ordinul unu cu f.d.t. $H_1(s)$, $H_2(s)$, elementul integrator cu f.d.t. $H_3(s)$, elementul derivator cu f.d.t. $H_4(s)$ și elementul ideal cu f.d.t. $H_5(s)$ din reacția sistemului:

$$H_1(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1} = \frac{2}{5s + 1}, H_2(s) = \frac{k_2}{T_2 s + 1} = \frac{5}{3s + 1},$$

$$H_3(s) = \frac{1}{T_3 s} = \frac{k_3}{s} = \frac{1}{4s} = \frac{0.25}{s},$$

$$H_4(s) = k_4 = 0.4s, H_5(s) = k_5 = 1, T = 0.3 \text{ s.}$$

1. Pentru cazul dat expresia $A_1(z)$ conform relațiilor (4.21)-(4.24) se dezvoltă în fracții elementare cu coeficienții necunoscuți c_1, c_2, c_3, c_4 și pentru fiecare fracție în transformata s după tabelul A5.1 Anexa 5 se găsește componenta corespunzătoare în transformata z și după unele transformări se aduce la forma finală:

$$\begin{aligned}
A_1(z) &= H_{ER} H_2 H_3 H_4 H_5(z) = \\
&= \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{k_2 k_3 k_4 T_1 s^2 + k_2 k_3 k_4 s + k_1 k_2 k_3 k_5}{s^2 (T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \right\} = \\
&= \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{p_0 s^2 + p_1 s + p_2}{s^2 (T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \right\} = \frac{z-1}{z} Z \{L(s)\} = \\
&= \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{c_1}{s^2} + \frac{c_2}{s} + \frac{c_3}{T_1 s + 1} + \frac{c_4}{T_2 s + 1} \right\} = \tag{*} \\
&= \frac{z-1}{z} \left\{ \frac{c_1 T z}{(z-1)^2} + \frac{c_2 z}{z-1} + \frac{c_3 z}{T_1 (z - e^{-T/T_1})} + \frac{c_4 z}{T_2 (z - e^{-T/T_2})} \right\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{z-1}{z} \left\{ \frac{c'_2 z}{(z-1)^2} + \frac{c'_1 z}{z-1} + \frac{c'_3 z}{z-d_1} + \frac{c'_4 z}{z-d_2} \right\} = \\
&= \frac{c'_1(z-d_1)(z-d_2) + c'_2(z-1)(z-d_1)(z-d_2) + c'_3(z-1)^2(z-d_2) + c'_4(z-1)^2(z-d_1)}{(z-1)(z-d_1)(z-d_2)} = \\
&= \frac{v_0 z^3 - v_1 z^2 + v_2 z - v_3}{z^3 - m_1 z^2 + m_2 z - m_3}.
\end{aligned}$$

2. Se calculează coeficienții p_0, p_1, p_2 exprimați prin parametrii sistemului:

$$p_0 = k_2 k_3 k_4 T_1 = 5 \cdot 0.25 \cdot 0.4 \cdot 5 = 2.5,$$

$$p_1 = k_2 k_3 k_4 = 5 \cdot 0.25 \cdot 0.4 = 0.5,$$

$$p_2 = k_1 k_2 k_3 k_5 = 2 \cdot 5 \cdot 0.25 \cdot 1 = 2.5,$$

$$q_0 = T_1 T_2 = 5 \cdot 3 = 15, \quad q_1 = T_1 + T_2 = 5 + 3 = 8, \quad q_2 = 1.$$

3. Pentru determinarea coeficienților necunoscuți c_1, c_2, c_3, c_4 s-a obținut sistemul de ecuații algebrice (4.23) de forma:

$$s^3: c_2 T_1 T_2 + c_3 T_2 + c_4 T_1 = 15c_2 + 3c_3 + 5c_4 = 0,$$

$$s^2: c_1 T_1 T_2 + c_2 (T_1 + T_2) + c_3 + c_4 =$$

$$= 15c_1 + 8c_2 + c_3 + c_4 = 2.5, \quad (**)$$

$$s: c_1 (T_1 + T_2) + c_2 = 8c_1 + c_2 = 0.5,$$

$$s^0: c_1 = 2.5.$$

4. Sistemul de ecuații algebrice ca o formă canonică se rezolvă prin metoda substituiri sau prin formulele Kramer și s-au obținut valorile coeficienților:

$$c_1 = 2.5, \quad c_2 = -19.5, \quad c_3 = 156.25, \quad c_4 = -35.25.$$

Pentru aplicarea formulelor Kramer din sistemul de ecuații algebrice (**) se construiește determinantul sistemului de forma:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 15 & 3 & 5 \\ 15 & 8 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Se calculează determinanții particulari $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ substituind succesiv coloanele 1, 2, 3, 4 cu coloana formată din coeficienții cunoscuți din partea dreaptă a sistemului de ecuații algebrice:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 15 & 3 & 5 \\ 2.5 & 8 & 1 & 1 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 2.5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 5 \\ 15 & 2.5 & 1 & 1 \\ 8 & 0.5 & 0 & 0 \\ 1 & 2.5 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 15 & 0 & 5 \\ 15 & 8 & 2.5 & 1 \\ 8 & 1 & 0.5 & 0 \\ 1 & 0 & 2.5 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 0 & 15 & 3 & 0 \\ 15 & 8 & 1 & 2.5 \\ 8 & 1 & 0 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 & 2.5 \end{vmatrix}.$$

Coefficienții $\overline{c_1}, \overline{c_4}$ se calculează cu rapoartele determinanților:

$$c_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad c_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad c_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad c_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta}.$$

5. Se calculează valorile coeficienților expresiei lui $A_1(z)$ din (**):

$$d_1 = e^{-T/T_1} = e^{-0.3/5} = 0.9418, \quad d_2 = e^{-T/T_2} = e^{-0.3/3} = 0.9048,$$

$$c'_1 = c_1 T = 2.5 \cdot 0.3 = 0.6, \quad c'_2 = c_2 = -19.5,$$

$$c'_3 = \frac{c_3}{T_1} = \frac{156.25}{5} = 31.25, \quad c'_4 = \frac{c_4}{T_2} = -\frac{35.25}{3} = -11.75,$$

$$v_0 = c'_1 + c'_3 + c'_4 = -19.5 + 31.25 - 11.75 = 0,$$

$$v_1 = -c'_1 + c'_2(1 + d_1 + d_2) + c'_3(2 + d_2) + c'_4(2 + d_1) =$$

$$= -0.6 - 19.5(1 + 0.9418 + 0.9048) +$$

$$+ 31.25(2 + 0.9048) - 11.75(2 + 0.9418) = 0.1002,$$

$$v_2 = -c'_1(d_1 + d_2) + c'_2(d_1 d_2 + d_1 + d_2) + (1 + 2d_2) + c'_4(1 + 2d_1) =$$

$$= -0.6(0.9418 + 0.9048) - 19.5(0.9418 \cdot 0.9048 +$$

$$+0.9418 + 0.9048) + 31.25(1 + 2 \cdot 0.9048) -$$

$$-11.75(1 + 2 \cdot 0.9418) = 0.1844,$$

$$v_3 = -c'_1 d_1 d_2 + c'_2 d_1 d_2 + c'_3 d_2 + c'_4 d_1 =$$

$$= -0.6 \cdot 0.9418 \cdot 0.9048 - 19.5 \cdot 0.9418 \cdot 0.9048 +$$

$$+31.25 \cdot 0.9048 - 11.75 \cdot 0.9418 = 0.0809,$$

$$m_1 = 1 + d_1 + d_2 = 1 + 0.9418 + 0.9048 = 2.8466,$$

$$m_2 = d_1 d_2 + d_1 + d_2 = 0.9418 \cdot 0.9048 + 0.9418 +$$

$$+0.9048 = 2.6987,$$

$$m_3 = d_1 d_2 = 0.9418 \cdot 0.9048 = 0.8521.$$

Astfel, polinomul caracteristic $A(z)$ al sistemului discret din (4.21) se descrie prin expresia:

$$A(z) = 1 + A_1(z) = 1 + \frac{v_0 z^3 - v_1 z^2 + v_2 z - v_3}{z^3 - m_1 z^2 + m_2 z - m_3} = \frac{v'_0 z^3 - v'_1 z^2 + v'_2 z - v'_3}{z^3 - m_1 z^2 + m_2 z - m_3} = \frac{V(z)}{M(z)}, \quad (4.25)$$

unde coeficienții se descriu prin relațiile:

$$v'_0 = 1 + v_0 = 1 + 0 = 1,$$

$$v'_1 = m_1 + v_1 = 2.8466 + 0.1002 = 2.9468,$$

$$v'_2 = m_2 + v_2 = 2.6987 + 0.1844 = 2.8831,$$

$$v'_3 = m_3 + v_3 = 0.8521 + 0.0809 = 0.9330.$$

Astfel, polinomul caracteristic $A(z)$ al sistemului discret din (4.7) cu modelul A2 se descrie prin expresia:

$$\begin{aligned} A(z) &= \frac{V(z)}{M(z)} = 1 + A_1(z) = 1 + \frac{v_0 z^3 - v_1 z^2 + v_2 z - v_3}{z^3 - m_1 z^2 + m_2 z - m_3} = \\ &= \frac{v'_0 z^3 - v'_1 z^2 + v'_2 z - v'_3}{z^3 - m_1 z^2 + m_2 z - m_3} = \frac{z^3 - 2.94684z^2 + 2.8831z - 0.9330}{z^3 - 2.8466z^2 + 2.6987z - 0.8521}. \blacksquare \end{aligned}$$

4. Calculul polinomului $A(z)$ pentru modelul A4. Se determină expresia $A(z)$ pentru modelul A4 din (4.21) pentru structura sistemului automat cu eșantionare, care conține două elemente cu inerție de ordinul unu cu f.d.t. $H_1(s)$, $H_2(s)$, elementul integrator cu f.d.t. $H_3(s)$, elementul ideal cu f.d.t. $H_4(s)$ și elementul ideal în reacția sistemului cu f.d.t. $H_5(s)$:

$$H_1(s) = \frac{k_1}{T_1s+1}, H_2(s) = \frac{k_2}{T_2s+1}, H_3(s) = \frac{1}{T_3s}, H_4(s) = k_4,$$

$$H_5(s) = k_5.$$

1. Se calculează $A_1(z)$ din (4.7) din transformata s în transformata z utilizând relațiile din rândul 21 din tabelul A5.1 Anexa 5 și, după unele transformări, se obține expresia finală:

$$\begin{aligned} A_1(z) &= H_{ER}H_2H_3H_rH_1(z) = \\ &= Z \left\{ \frac{1-e^{-Ts}}{s} \frac{k_2}{T_3s(T_2s+1)} \frac{k_4T_1s+k_4+k_1k_5}{k_1} \frac{k_1}{T_1s+1} \right\} = \\ &= Z \left\{ \frac{1-e^{-Ts}}{s} \frac{k_2k_3}{s(T_2s+1)} \frac{k_4T_1s+k_4+k_1k_5}{T_1s+1} \right\} = \\ &= \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{k_2k_3k_4T_1s+k_2k_3k_4+k_1k_2k_3k_5}{s^2(T_1s+1)(T_2s+1)} \right\} = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{k(T_0s+1)}{s^2(T_1s+1)(T_2s+1)} \right\} = \\ &= \frac{z-1}{z} k \left[\frac{Tz}{(z-1)^2} + \frac{(T_0-T_1-T_2)z}{z-1} - \frac{(T_1-T_0)z}{(T_2/T_1-1)(z-d_1)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(T_2-T_0)z}{(T_1/T_2-1)(z-d_2)} \right] = \frac{z-1}{z} \left[\frac{c_1z}{(z-1)^2} + \frac{c_2z}{z-1} - \frac{c_3z}{z-d_1} - \frac{c_4z}{z-d_2} \right] = \\ &= \frac{c_1(z-d_1)(z-d_2)+c_2(z-1)(z-d_1)(z-d_2)-c_3(z-1)^2(z-d_2)-c_4(z-1)^2(z-d_1)}{(z-1)(z-d_1)(z-d_2)} = \\ &= \frac{v_0z^3-v_1z^2+v_2z-v_3}{z^3-m_1z^2+m_2z-m_3} = \frac{V(z)}{M(z)}, \end{aligned} \tag{4.26}$$

unde coeficienții se exprimă prin parametrii f.d.t. ai sistemului:

$$k = k_2 k_3 (k_4 + k_1 k_5), T_0 = \frac{k_4 T_1}{k_4 + k_1 k_5},$$

$$d_1 = e^{-T/T_1}, d_2 = e^{-T/T_2},$$

$$c_1 = kT, c_2 = k(T_0 - T_1 - T_2), c_3 = \frac{k(T_1 - T_0)}{((T_2/T_1) - 1)}, c_4 = \frac{k(T_2 - T_0)}{((T_1/T_2) - 1)},$$

$$v_0 = c_1 + c_2 - c_3 - c_4,$$

$$v_1 = c_1 - c_2(1 + d_1 + d_2) + c_3(2 + d_2) + c_4(2 + d_1),$$

$$v_2 = -c_1(d_1 + d_2) + c_2(d_1 d_2 + d_1 + d_2) - \\ -c_3(1 + 2d_2) - c_4(1 + 2d_1),$$

$$v_3 = c_1 d_1 d_2 - c_2 d_1 d_2 + c_3 d_2 + c_4 d_1,$$

$$m_1 = 1 + d_1 + d_2, m_2 = d_1 d_2 + d_1 + d_2, m_3 = d_1 d_2.$$

Exemplul 4.5. Să se determine expresia $A_1(z)$ din (4.26) pentru cazul modelului A4 când structura sistemului cu eșantionare conține două elemente cu inerție de ordinul unu cu f.d.t. $H_1(s)$, $H_2(s)$, elementul integrator cu f.d.t. $H_3(s)$, elementul ideal cu f.d.t. $H_4(s)$ și elementul ideal cu f.d.t. $H_5(s)$ din reacția sistemului:

$$H_1(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1} = \frac{2}{5s + 1}, H_2(s) = \frac{k_2}{T_2 s + 1} = \frac{5}{3s + 1},$$

$$H_3(s) = \frac{1}{T_3 s} = \frac{k_3}{s} = \frac{1}{4s} = \frac{0.25}{s},$$

$$H_4(s) = k_4 = 0.4, H_5(s) = k_5 = 1, T = 0.3 \text{ s.}$$

Rezolvare:

1. Expresia $A_1(z)$ din (4.26) în transformata z este:

$$A_1(z) = H_{ER} H_2 H_3 H_4 H_5 H_1(z) =$$

$$\begin{aligned}
&= Z \left\{ \frac{1-e^{-Ts}}{s} \frac{k_2}{T_3 s(T_2 s+1)} \frac{k_4 T_1 s+k_4+k_1 k_5}{k_1} \frac{k_1}{T_1 s+1} \right\} = \\
&= Z \left\{ \frac{1-e^{-Ts}}{s} \frac{k_2 k_3}{s(T_2 s+1)} \frac{k_4 T_1 s+k_4+k_1 k_5}{T_1 s+1} \right\} = \\
&= \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{k_2 k_3 k_4 T_1 s+k_2 k_3 k_4+k_1 k_2 k_3 k_5}{s^2 (T_1 s+1)(T_2 s+1)} \right\} = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{k(T_0 s+1)}{s^2 (T_1 s+1)(T_2 s+1)} \right\} = \\
&= \frac{z-1}{z} k \left[\frac{Tz}{(z-1)^2} + \frac{(T_0-T_1-T_2)z}{z-1} - \frac{(T_1-T_0)z}{((T_2/T_1)-1)(z-d_1)} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{(T_2-T_0)z}{((T_1/T_2)-1)(z-d_2)} \right] = \frac{z-1}{z} \left[\frac{c_1 z}{(z-1)^2} + \frac{c_2 z}{z-1} - \frac{c_3 z}{z-d_1} - \frac{c_4 z}{z-d_2} \right] = \\
&= \frac{c_1(z-d_1)(z-d_2)+c_2(z-1)(z-d_1)(z-d_2)-c_3(z-1)^2(z-d_2)-c_4(z-1)^2(z-d_1)}{(z-1)(z-d_1)(z-d_2)} = \\
&= \frac{v_0 z^3 - v_1 z^2 + v_2 z - v_3}{z^3 - m_1 z^2 + m_2 z - m_3} = \frac{V(z)}{M(z)}.
\end{aligned}$$

2. Se calculează valorile numerice ale coeficienților exprimați prin parametrii f.d.t. ale sistemului:

$$k = k_2 k_3 (k_4 + k_1 k_5) = 5 \cdot 0.25(0.4 + 2 \cdot 1) = 3,$$

$$T_0 = \frac{k_4 T_1}{k_4 + k_1 k_5} = \frac{0.4 \cdot 5}{0.4 + 2 \cdot 1} = 0.8333,$$

$$d_1 = e^{-T/T_1} = e^{-0.3/5} = 0.9418,$$

$$d_2 = e^{-T/T_2} = e^{-0.3/3} = 0.9048,$$

$$c_1 = kT = 3 \cdot 0.3 = 0.9,$$

$$c_2 = k(T_0 - T_1 - T_2) = 3(0.8333 - 5 - 3) = -21.5001,$$

$$c_3 = \frac{k(T_1 - T_0)}{((T_2/T_1) - 1)} = \frac{3(5 - 0.8333)}{((3/5) - 1)} = \frac{12.5001}{-0.4} = -31.25,$$

$$c_4 = \frac{k(T_2 - T_0)}{((T_1/T_2) - 1)} = \frac{3(3 - 0.8333)}{((5/3) - 1)} = \frac{6.5001}{0.6667} = 9.7497,$$

$$v_0 = c_2 - c_3 - c_4 = -21.5001 + 31.25 - 9.7496 = 0.0003,$$

$$\begin{aligned}
v_1 &= c_1 - c_2(1 + d_1 + d_2) + c_3(2 + d_2) + c_4(2 + d_1) = \\
&= 0.9 + 21.5001(1 + 0.9418 + 0.9048) - \\
&-31.25(2 + 0.9048) + 9.7497(2 + 0.9418) = 0.0089, \\
v_2 &= -c_1(d_1 + d_2) + c_2(d_1d_2 + d_1 + d_2) + \\
&-c_3(1 + 2d_2) - c_4(1 + 2d_1) = -0.9(0.9418 + 0.9048) - \\
&-21.5001(0.9418 \cdot 0.9048 + 0.9418 + 0.9048) + \\
&+31.25(1 + 2 \cdot 0.9048) - 9.7497(1 + 2 \cdot 0.9418) = 0.0007, \\
v_3 &= c_1d_1d_2 - c_2d_1d_2 + c_3d_2 + c_4d_1 = \\
&= 0.9 \cdot 0.9418 \cdot 0.9048 + 21.5001 \cdot 0.9418 \cdot 0.9048 - \\
&-31.25 \cdot 0.9048 + 9.7497 \cdot 0.9418 = 0.7669 + 18.3211 - \\
&-28.275 + 9.1822 = -0.0048, \\
m_1 &= 1 + d_1 + d_2 = 1 + 0.9418 + 0.9048 = 2.8466, \\
m_2 &= d_1d_2 + d_1 + d_2 = \\
&= 0.9418 \cdot 0.9048 + 0.9418 + 0.9048 = 2.6987, \\
m_3 &= d_1d_2 = 0.9418 \cdot 0.9048 = 0.8521.
\end{aligned}$$

Astfel, polinomul caracteristic $A(z)$ al sistemului discret din (4.7) se descrie de expresia:

$$\begin{aligned}
A(z) &= \frac{V(z)}{M(z)} = 1 + A_1(z) = 1 + \frac{v_0z^3 - v_1z^2 + v_2z - v_3}{z^3 - m_1z^2 + m_2z - m_3} = \\
&= \frac{v_0'z^3 - v_1'z^2 + v_2'z - v_3'}{z^3 - m_1z^2 + m_2z - m_3} = 1 + \frac{0.0003z^3 - 0.0089z^2 + 0.0007z + 0.0048}{z^3 - 2.8466z^2 + 2.6987z - 0.8521} = \\
&= \frac{1.0003z^3 - 2.8555z^2 + 2.6994z - 0.8473}{z^3 - 2.8466z^2 + 2.6987z - 0.8521},
\end{aligned}$$

unde coeficienții numărătorului sunt:

$$v'_0 = 1 + v_0 = 1 + 0.0003 = 1.0003,$$

$$v'_1 = m_1 + v_1 = 2.8466 + 0.0089 = 2.8555,$$

$$v'_2 = m_2 + v_2 = 2.6987 + 0.0007 = 2.6994,$$

$$v'_3 = m_3 + v_3 = 0.8521 - 0.0048 = 0.8473. \blacksquare$$

4.4 Determinarea funcției de transfer a sistemului automat cu eșantionare închis

În continuare, se determină forma operațională discretă a mărimii de ieșire a sistemului închis din (4.7) pentru polinomul $B(z)$ din exemplul B1 și polinomul $A_1(z)$ din exemplul A3 și se obține forma operațională a ieșirii sistemului:

$$\begin{aligned} y(z) &= \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{B(z)}{1+A_1(z)} = \frac{B_1(z)/M(z)}{1+V(z)/M(z)} r(z) = \\ &= \frac{B_1(z)}{M(z)+V(z)} r(z) = H_0(z)r(z). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Din (4.27) se determină f.d.t. normată a sistemului discret închis în forma:

$$\begin{aligned} H_0(z) &= \frac{y(z)}{r(z)} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_1z-b_2}{a_0z^3-a_1z^2+a_2z-a_3} = \\ &= \frac{0.00051z-0.0005}{5.9468z^3-16.704z^2+15.6308z-4.9293} = \\ &= \frac{0.00008576z-0.000084}{z^3-2.8089z^2+2.6284z-0.8289}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

unde coeficienții sunt:

$$b_1 = 0.00051, b_2 = -0.0005,$$

$$a_0 = 1 + v_0 = 1 + 4.9468 = 5.9468,$$

$$a_1 = m_1 + v_1 = 2,8098 + 13.8942 = 16.704,$$

$$a_2 = m_2 + v_2 = 2.6987 + 13.0001 = 15.6308,$$

$$a_3 = m_3 + v_3 = 0.8208 + 4.1085 = 4.9293.$$

4.5 Analiza stabilității sistemului automat cu eșantionare

Analiza stabilității sistemului automat cu eșantionare se efectuează pentru sistemul închis, utilizând ecuația caracteristică $A(z)$ a sistemului din expresia f.d.t. discretă (4.14):

$$\begin{aligned} A(z) &= a_0 z^3 - a_1 z^2 + a_2 z - a_3 = \\ &= 5.9468z^3 - 16.704z^2 + 15.6308z - 4.9293 = 0. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Pentru verificarea stabilității sistemului cu eșantionare se utilizează metodele de rezolvare a ecuației algebrice de gradul trei, criteriile de stabilitate algebrice sau frecvențiale.

Se analizează stabilitatea sistemului cu eșantionare după inegalitățile alcătuite din coeficienții ecuației caracteristice de gradul trei (4.19), pentru care condițiile necesare și suficiente de stabilitate ale sistemului cer ca aceste inegalități și determinantul de gradul doi să fie mai mari ca zero:

$$A_0 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 > 0,$$

$$A_1 = 3(a_0 - a_3) + a_1 - a_2 > 0,$$

$$A_2 = 3(a_0 + a_3) - a_1 - a_2 > 0,$$

$$A_3 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 > 0,$$

$$\Delta_2 = A_1 A_2 - A_0 A_3 > 0.$$

Se verifică stabilitatea conform sistemului de inegalități:

$$\begin{aligned}
 A_0 &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = \\
 &= 5.9468 - 16.704 + 15.6308 - 4.9293 = \\
 &= 21.5776 - 21.6333 = -0.0557 < 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_1 &= a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = \\
 &= 5.9468 + 16.704 + 15.6308 + 4.9293 = 43.2109 > 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_2 &= 3(a_0 - a_3) + a_1 - a_2 = \\
 &= 3(5.9468 + 4.9293) - 16.704 - 15.6308 = \\
 &= 32.6283 - 32.3348 = 0.2931 > 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_3 &= 3(a_0 + a_3) - a_1 - a_2 = \\
 &= 3(5.9468 - 4.9293) + 16.704 - 15.6308 = \\
 &= 3.0525 + 1.0732 = 4.1257 > 0.
 \end{aligned}$$

Se calculează determinantul de gradul doi:

$$\Delta_2 = A_1 A_2 - A_0 A_3 = 43.2109 \cdot 0.2931 + 0.0557 \cdot 4.1257 > 0.$$

Sistemul automat cu eșantionare la valorile date ale coeficienților ecuației caracteristice a sistemului și perioadei de eșantionare calculată este instabil, fiindcă prima inegalitate este negativă, iar celelalte inegalități sunt pozitive.

4.6 Performanțele sistemului automat cu eșantionare

Pentru determinarea performanțelor sistemului automat discret structura inițială a sistemului din figura 4.1, a pentru datele numerice și cu perioada de eșantionare calculată $T = 0.3$ s se simulează, folosind

pachetul de programe KOPRAS (fig. 4.2), se aplică semnalul treaptă unitară și se ridică procesul tranzitoriu dat în figura 4.3 și se determină performanțele, admitând eroarea sistemului $\varepsilon = \pm 5\%$ (0.004665) din valoarea staționară $h_{st} = 0.0933$. Procesul indicial al sistemului este aperiodic și timpul de creștere este egal cu timpul de reglare $t_c = t_r = = 40.03$ s.

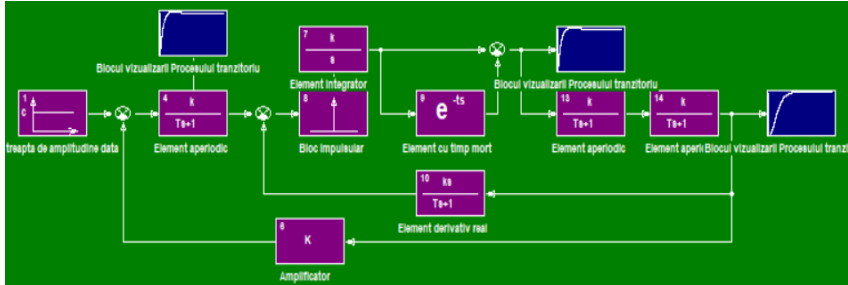


Fig. 4.2. Schema structurală a sistemului automat cu eșantionare simulată în pachetul KOPRAS

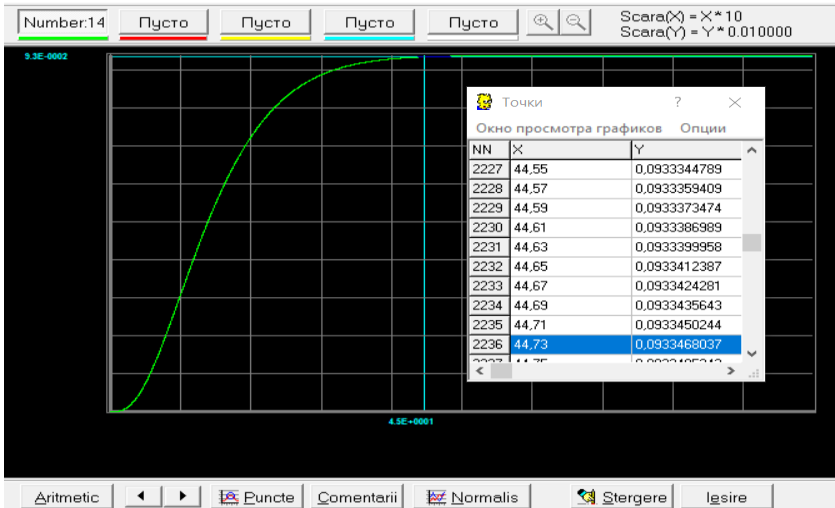


Fig. 4.3. Procesul indicial al sistemului automat cu eșantionare

5 DESCRIEREA SARCINII PROIECTULUI DE CURS

5.1 Sarcina proiectului de curs

1. Pentru schema bloc structurală a sistemului automat neliniar dată în figura 5.1, caracteristica statică a elementului neliniar și parametrii părții liniare și neliniare se vor efectua următoarele etape:

1.1. Construiți schema bloc funcțională a sistemului automat neliniar conform temei proiectului, pornind de la procesul tehnic sau tehnologic ca obiect de reglare, alegeți și dimensionați elementele funcționale ale sistemului automat pentru procesul dat.

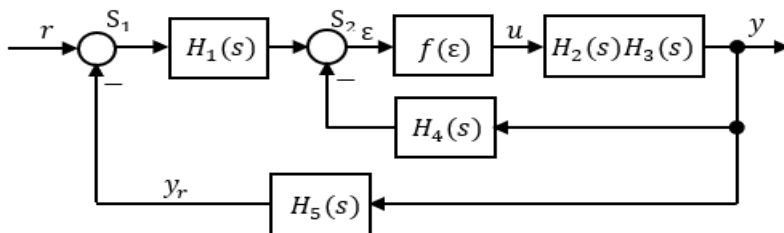


Fig. 5.1. Schema structurală a sistemului automat neliniar

1.2. Descrieți funcționarea sistemului automat neliniar.

1.3. Conform datelor numerice, prezentați descrierea matematică a sistemului automat neliniar.

1.4. Substituiți neliniaritatea cu un element liniar cu coeficientul de transfer k și verificați stabilitatea sistemului liniar. Dacă sistemul liniar este instabil, alegeți valoarea unui parametru (coeficient de transfer sau constanta de timp) astfel, încât sistemul să devină stabil.

1.5. Determinați stabilitatea sistemului automat neliniar utilizând următoarele metode: planul fazelor, metoda funcției de descriere (metodele aproximative: în planul Mihailov (metoda algebrică), în planul Nyquist (metoda Goldfarb), metoda criteriului Popov de stabilitate absolută. Calculați și determinați stabilitatea sistemului automat neliniar, dacă există puncte de echilibru cu sau fără oscilații, determinați parametrii oscilațiilor posibile în sistemul neliniar și stabilitatea lor conform metodelor.

1.6. Determinați performanțele sistemului automat neliniar, aplicând semnalul de referință treaptă unitară.

1.7. Determinați parametrii oscilațiilor forțate dacă la intrarea sistemului neliniar acționează un semnal armonic $x(t) = A \sin \omega t$ (parametrii A și ω conform datelor variantei din tabelul A2.1 Anexa 2).

2. În structura sistemului automat neliniar înlocuiți elementul neliniar cu un element real cu eșantionare și efectuați etapele de calcul:

2.1. Prezentați descrierea matematică a sistemului automat cu eșantionare.

2.2. Studiați stabilitatea sistemului automat cu eșantionare, utilizând criteriile algebrice de stabilitate.

2.3. Determinați procesul indicial al sistemului cu eșantionare la semnalul de referință treaptă unitară și semnal rampă unitară și determinați performanțele sistemului.

Concluzii.

Bibliografie.

5.2 Variante de teme pentru proiectare

1. Sistem de reglare automată a rotațiilor motorului de curent continuu [7, 10, 11, 18].

2. Sistem de reglare automată a rotațiilor motorului asincron [7, 11, 14, 15, 17].

3. Sistem de reglare automată a rotațiilor motorului Diesel (cu ardere internă) [7, 14, 17].

4. Sistem de reglare automată a rotațiilor turbinei [7, 14, 17].

5. Sistem de reglare automată a tensiunii generatorului de curent continuu [7, 11, 17].

6. Sistem de reglare automată a nivelului în recipient [10, 14, 17].

7. Sistem de reglare automată a presiunii în recipient [14, 17].

8. Sistem de reglare automată a temperaturii în cuptor industrial [10, 14, 17].

9. Sistem de reglare automată a cursului aparatului de zbor (avion) [7, 15, 17].

10. Sistem de reglare automată a cursului de navigare a navei maritime [15, 16].

11. Sistem de poziționare (urmărire) automată cu releu [10, 14, 17].

5.3 Indicații metodice privind realizarea proiectului

1. Alegerea variantei și parametrilor pentru sistemul automat neliniar se efectuează conform datelor din tabelul A2.1 Anexa 2, iar numărul variantei va corespunde cu numărul din registrul grupei academice sub care studentul este înregistrat.

2. În etapa de elaborare a schemei funcționale, pornind de la procesul tehnic (tehnologic), determinați mărimea de intrare și mărimea de ieșire a modelului matematic al obiectului de reglare. După mărimea de ieșire se alege și se dimensionează traductorul, iar după mărimea de intrare se alege și se dimensionează elementul de execuție (elementul de acționare).

3. Pentru determinarea modelului matematic al sistemului automat neliniar utilizați punctele respective din Ghid, unde sunt date exemple de calcul.

4. La utilizarea metodei planului fazelor coeficientul de transfer în reacția locală $k_4 = 0$ și constanta de timp $T_3 = 0$ pentru toate variantele și determinați ecuația diferențială a traiectoriei de fază a sistemului.

5. La analiza stabilității sistemului automat neliniar prin metodele indicate utilizați procedura de simulare a sistemului și obțineți traiectoriile de fază și procesele tranzitorii, după care determinați stabilitatea sistemului.

6. Pentru determinarea performanțelor sistemului neliniar utilizați procedura de simulare, aplicând la intrare semnalul treaptă unitară și rampă unitară și ridicați procesul indicial, după care determinați performanțele sistemului.

7. Pentru determinarea parametrilor oscilațiilor forțate posibile în sistemul neliniar, utilizați procedura de simulare.

8. Pentru determinarea modelului matematic al sistemului cu eșantionare în Ghid sunt analizate câteva tipuri de modele în dependență de structura sistemului și parametrii elementelor componente ale sistemului cu utilizarea procedurilor respective:

1) pentru polinomul numărătorului $B(z)$ al funcției de transfer discretă se dau două tipuri de modele B1 și B2;

2) pentru polinomul numitorului $A(z)$ al funcției de transfer discretă se dau 4 tipuri de modele A1, A2, A3, A4.

La analiza sistemului automat cu eșantionare perioada de eșantionare se alege din condiția $T = 0.1 \min\{T_i\}$, $i = \overline{1,3}$, unde T_i sunt constantele de timp ale elementelor cu inerție.

9. La analiza stabilității sistemului automat cu eșantionare, în Ghid este dat exemplul de calcul.

10. Pentru determinarea performanțelor sistemului automat cu eșantionare, utilizați procedura de simulare, aplicând la intrare semnal treaptă unitară și ridicați procesul indicial, după care determinați performanțele sistemului.

11. În concluzii dați aprecieri rezultatelor obținute la analiza stabilității și performanțelor sistemului neliniar și cu eșantionare.

12. Pentru sursele de literatură utilizate în proiect, se alcătuieste lista lor în ordinea alfabetică completată conform cerințelor, indicând numărul 1, 2, 3... (vezi Ghidul). În textul proiectului la locul respectiv, pentru sursele utilizate, vor fi indicate în paranteze pătrate numărul curent al sursei (de ex. [1], [3], [11] etc.).

Exemplul 5.1. Pentru calculul numeric se dau datele inițiale din tabelul 5.1 cu indicarea variantei 8, care este procesul tehnologic de reglare a temperaturii în cuptorul industrial, iar neliniaritatea este caracteristica statică cu saturație nr. 5 din tabelul A3.1 Anexa 3 și parametrii numerici pentru elementele respective ale sistemului.

Tabelul 5.1. Datele inițiale la proiectare

Nr. var.	Element neliniar	Valorile parametrilor elementelor sistemului automat											
		$H_1(s)$ elem. cu inerție		$H_2(s)$ elem. cu inerție		$H_3(s)$ element integrat./ el. iner.*		$H_4(s)$ el. ideal/ el. ideal deriv.*	$H_5(s)$ elem. ideal	Elem. neliniar		Semnal armonic	
		k_1	T_1	k_2	T_2	k_3	T_3	k_4	k_5	b	c	A	ω
8	5	2	5	5	3	1	8	0.5	1	0.2	14	9	5

Pornind de la schema structurală a sistemului (fig. 5.1), datele inițiale din tabelul A2.1 Anexa 2 se cere de efectuat:

1. Să se construiască schema de principiu a sistemului neliniar de reglare automată a temperaturii în cuptorul industrial.
2. Să se construiască schema bloc funcțională a sistemului neliniar de reglare automată a temperaturii în cuptorul industrial.
3. Să se construiască schema bloc structurală a sistemului neliniar de reglare automată a temperaturii în cuptorul industrial.
4. Să se descrie modul de funcționare al sistemului neliniar de reglare automată a temperaturii în cuptorul industrial.

Soluționare.

1. Pentru alegerea traductorului de temperatură se consideră temperatura stabilizată în cuptor $150\text{ }^{\circ}\text{C}$ cu precizia $\pm 5\%$ ($7.5\text{ }^{\circ}\text{C}$). Se alege traductorul de tipul termometru rezistiv [3].

2. În continuare se construiește schema de principiu a sistemului automat dată în figura 5.2.

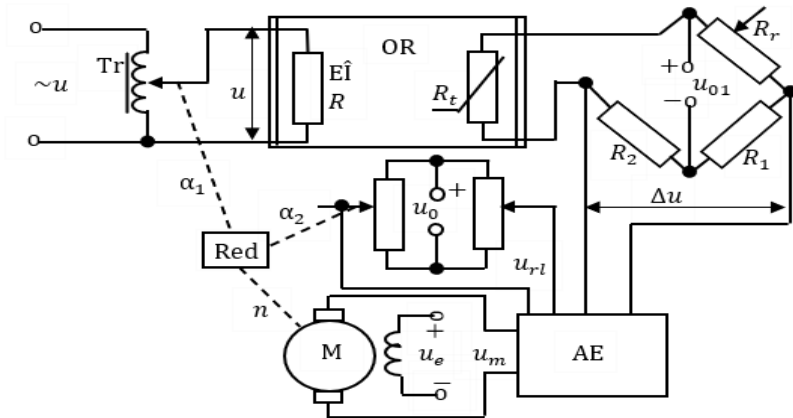


Fig. 5.2. Schema de principiu electrică a sistemului neliniar de reglare automată a temperaturii în cuptorul industrial

Elementele funcționale sunt: cuptorul industrial ca obiect de automatizare OR; traductorul de temperatură termometru rezistiv R_t ; elementul de comparare este puntea alcătuită din rezistențele R_r, R_1, R_2 , în care se conectează termometru rezistiv R_t ; element de amplificare AE este un amplificator electronic care prezintă neliniaritatea cu zonă de insensibilitate și saturație; motorul de curent continuu M cu excitație separată este elementul de acționare; reductorul Red transformă rotațiile în deplasarea cursorului transformatorului Tr, care este organul de reglare; elementul de încălzire EÎ degajează cantitatea de căldură în cuptor; puntea cu sursa de alimentare u_0 realizează reacția locală.

3. Temperatura care se cere a fi stabilizată în cuptor se dă de cursorul rezistenței R_r și puntea se dezechilibrează și la ieșire ei se obține semnalul Δu , care se transmite amplificatorului A. La ieșirea amplificatorului se obține tensiunea u_m care se aplică la circuitul rotoric al motorului M și arborele lui se rotește, acționând reductorul Red, care deplasează cursorul transformatorului Tr mărind tensiunea u aplicată elementului de încălzire EÎ. Cantitatea de căldură produsă de elementul de încălzire EÎ ridică temperatura în cuptor, care introduce cantitatea de căldură în cuptor. Termometrul R_t percepe temperatura în cuptor și puntea se echilibrează, micșorând tensiunea $\Delta u = 0$ și se deconectează motorul.

Astfel, în cuptor s-a stabilit temperatura dată. Pentru a asigura o funcționare mai rapidă a canalului cu elementele amplificatorului AE, motorul M și reductorul Red se utilizează o reacție locală prezentată de puntea a doua cu tensiunea reacției locale u_{rl} aplicată amplificatorului.

După schema de principiu electrică a sistemului automat (fig. 5.2) și modul de funcționare s-au construit schema bloc funcțională a sistemului (fig. 5.3, a) și schema bloc structurală (fig. 5.3, b).■

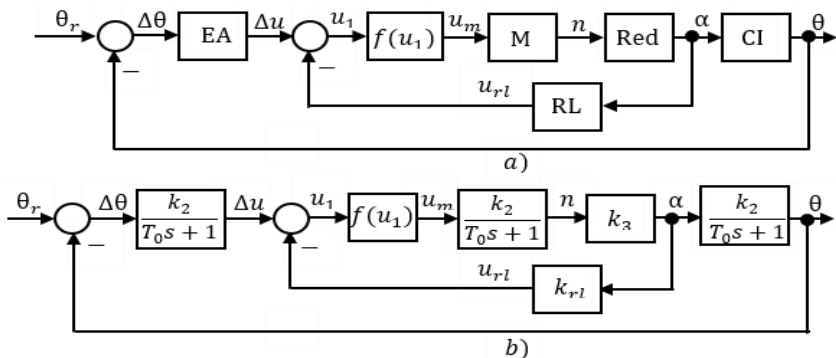


Fig. 5.3. Schema bloc funcțională a) și structurală b) a sistemului de reglare automată a temperaturii în cuptorul industrial cu termometru rezistiv

5.4 Cerințe privind perfectarea proiectului de curs

Obiectivele proiectului de curs sunt sistematizarea și aprofundarea cunoștințelor teoretice și aplicative prin analiza modului de funcționare al sistemului automat neliniar și sistemului cu eșantionare, efectuarea calculului pentru analiza stabilității și performanțelor sistemului neliniar și sistemului cu eșantionare.

Proiectul de curs este alcătuit din **nota explicativă** și **partea grafică**. Nota explicativă va conține 20-25 pagini formatul A4 (210x297

mm) culese la calculator, font Times New Roman cu mărimea caracterului 12-14 puncte în alfabetul limbii române. O pagină de text a lucrării va avea 30-32 de rânduri imprimate la 1.5 linii, iar fiecare rând va conține 70-75 semne, inclusiv spațiile dintre cuvinte.

Textul lucrării, tabelele, schemele etc. se vor încadra în pagină cu formatul: din stânga 30 mm, din dreapta 15 mm, de sus 20 mm și de jos 20 mm. Textul memoriului va fi alineat către marginile din stânga și dreapta, iar toate alineatele vor începe cu un spațiu *tab* (12,5 mm - șapte caractere) din stânga. Textul în notă se scrie de la persoana întâia plural. Partea grafică se prezintă după necesitate din contextul lucrării.

Titlurile capitolelor se scriu cu font TNR, 12-14 puncte, cu majuscule **Bold** cu aliniere centrală, numerotate cu cifre arabe 1, 2, ... fără punct după cifră și fără cuvântul capitol, iar titlurile subcapitolelor cu font TNR, 12-14 puncte, **Bold**, aliniat la stânga și numerotate 1.1, 1.2, 2.1 etc. fără punct după ultima cifră și fără cuvântul subcapitol; titlurile punctelor subcapitolelor cu font TNR, 12 puncte, **Bold+Italic**, aliniat la stânga și numerotate 1.1.1, 2.1.1.1 etc. Capitolele încep din pagină nouă.

Partea grafică se prezintă din figuri (scheme bloc, scheme structurale, scheme de principiu, diagrame, programe, funcții de timp, funcții frecvențiale, fotografii etc.) și sub figură se inserează numărul și titlul aliniat central, **Bold** (numai fig. și numărul fig., iar titlul ordinar) cu 11 puncte alcătuit din două cifre, unde prima cifră indică capitolul, iar a doua – numărul figurii în capitol: fig. 1.1, fig. 2.3 etc.

Tabelele se numerotează cu două cifre urmate de titlu, **Bold** cu 11 puncte, care se inserează deasupra tabelului și se aliniază central, unde prima cifră indică capitolul, iar a doua – numărul tabelului în capitol: tabelul 1.1, tabelul 2.3 etc. Textul din celulele tabelului se scriu cu font TNR, 11 puncte cu spațiere între rânduri cu o linie. Prima linie a tabelului care indică denumirile coloanelor se scrie **Bold** cu 11 puncte, aliniat central.

În nota explicativă anexele se prezintă în ordine crescătoare - Anexa 1, Anexa 2, Anexa 3, fiecare anexă începe din pagină nouă și are un titlu, **Bold**, care se amplasează deasupra anexei, aliniat la stânga. În anexe formulele, tabelele și figurile, dacă sunt mai mult de una, se numerotează luând în considerare numărul anexei: exemple - figura A1.1 (figura 1 din Anexa 1, (A1.3) – formula 3 din Anexa 1, tabelul A1.2 – tabelul 2 din anexa 1 etc.).

Toate paginile notei se numerotează de la foaia de titlu (pe care nu se imprimă cifra 1) până la ultima, inserând numărul în subsolul paginii cu aliniere centrală.

Sucesiunea materialelor expuse în notă se recomandă a fi prezentate în ordinea următoare: Foaia de titlu (Anexa 1), Cuprinsul, Sarcina la proiect (Anexa 5), Introducere, Conținutul proiectului (divizat în capitole, puncte și subpuncte etc.), Încheiere (concluzii), Bibliografie, Anexe.

Proiectul de curs trebuie executat până în săptămâna a 14-a și prezentat conducătorului pentru verificare, după care se anunță ziua susținerii proiectului în prezența comisiei.

În fig. 1 se prezintă structura unui sistem de conducere cu procesul termic în cuptor industrial.

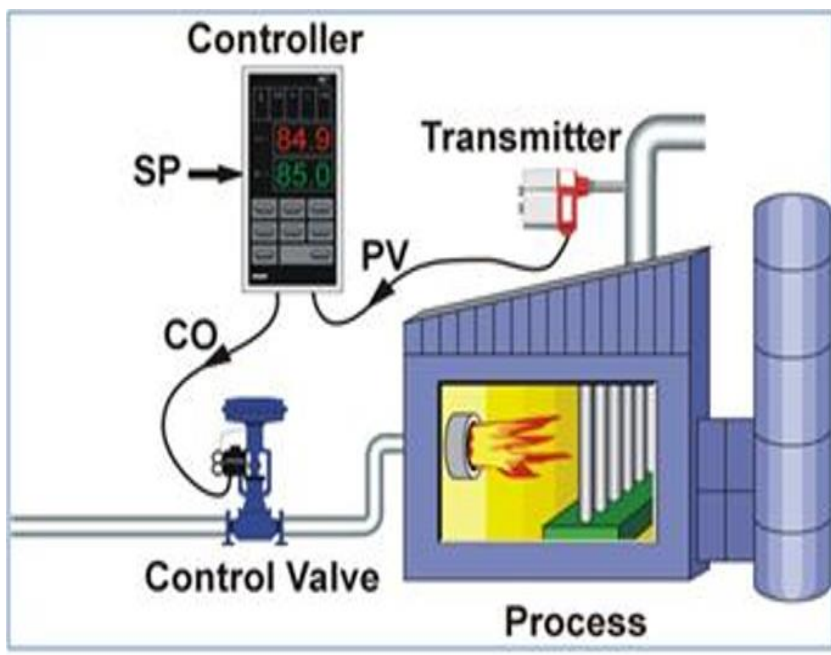


Fig. 1. Structura sistemului de conducere cu procesul termic în cuptor industrial

BIBLIOGRAFIE

1. *Automatica*. Coord. I. DUMITRACHE. București: Editura Academiei Române, 2009, V. 1, 961 p. ISBN 978-973-27-1883-4.
2. BELEA, C. *Automatica neliniară*. București: EDP, 1983, 440p.
3. COJUHARI, Irina, IZVOREANU, B. *Modelare și identificare. Ghid pentru proiectarea de curs*. Chișinău, 2015, 120 p. ISBN 978-9975-45-376-9.
4. BALABANOV, A.A. *KOPRAS. Tehnika komputernogo modelirovania avtomaticheskikh sistem*. Ch.: TUM, 2004, T.1, 390 s. ISBN 9975-9771-4-8.
5. GAIDUK, A.R. *Teoria avtomaticheskogo upravlenia*. M.: Vyssh. shkola, 2010, 415 s. ISBN 978-5-06-006055-3.
6. DYNNIKOV, A.I. *Tzifrovye sistemy upravlenia*. M.: МФТИ, 2006, 196 s. ISBN 5-7417-0151-5.
7. IVASHCHENKO, N.N. *Avtomaticheskoe regulirovanie*. M.: Mashinostroenie, 1978, 736 s.
8. KIM, D.P. *Teoria avtomaticheskogo upravlenia*. T.2. *Mnogomernye, nelineinye, optimalinye i adaptivnye sistemy*. M.: ФИЗМАТЛИТ, 2004, 464 s. ISBN 5-9221-0534-5.
9. KIM, D.P., DIMITRIEVA, N.D. *Sbornik zadach po teorii avtomaticheskogo upravlenia. Lineinye sistemy*. M.: ФИЗМАТЛИТ, 2007, 168 s. ISBN 978-5-9221-0873-7.
10. LUKAS, V.A. *Teoria avtomaticheskogo upravlenia*. M.: Nedra, 1990, 416 s. ISBN 5-247-01027-2.
11. *Metody klassicheskoi i sovremennoi teorii avtomaticheskogo upravlenia*. T. 1. *Matematicheskie modeli, dinamicheskie haracteristiki i analiz sistem avtomaticheskogo upravlenia*. Pod. red. K.A. PUPKOVA, N.D. EGUPOVA. M.: Izd-vo MGTU im. N. E. BAUMANA, 2004, 656 s. ISBN 5-7038-2189-4.
12. PANTELEEV, A.V., BORTAKOVSKII, A.S. *Teoria upravlenia v primerah i zadachah*. M.: Vyssh. shkola, 2003, 583 s. ISBN 5-06-004136-0.
13. POPOV, E.P. *Prikladnaia teoria protzessov upravlenia v nelineinyh sistemah*. M.: Nauka, 1973, 584 s.
14. *Sbornik zadach po teorii avtomaticheskogo regulirovania i*

upravlenia. Pod red. V.A. BESEKERSKOGO. M.: Nauka, 1978, 512 s.

15. *Teoria avtomaticheskogo upravlenia. Nelineinye sistemy upravlenia pri sluchainykh vozdeistvieah*. Pod red. A.V. Netushila. M.: Vyssh. shkola, 1983, 432 s.

16. *Teoria avtomaticheskogo upravlenia*. Pod red. V.B. IAKOVLEVA. M.: Vyssh. shkola, 2005, 567s. ISBN 5-06-004096-8.

17. TOPCHEEV, Iu. I., TZYPLEAKOV, A.P. *Zadachnik po teorii avtomaticheskogo regulirovania*. M.: Mashinostroenie, 1977, 592 s.

18. VOICU, M. *Introducere în automatică*. Iași: Editura Dosoftei, 1998, 237 p. ISBN 973-9135-60-9.

ANEXE

Anexa 1

Foaia de titlu (model)
Ministerul Educației, Culturii și Cercetării
al Republicii Moldova

Universitatea Tehnică a Moldovei
Facultatea Calculatoare, Informatică și Microelectronică
Departamentul Ingineria Software și Automatică
Programul de studii Automatică și Informatică

PROIECT DE CURS
la disciplina Teoria sistemelor automate
cu tema (denumirea temei)

A efectuat	Nume, prenume, student gr. 00-000
A verificat	Nume, prenume cadrul didactic, titlul șt.-didactic, titlul șt.

Chișinău, 2021

Variante de date inițiale pentru proiectul de curs

Tabelul A2.1. Date inițiale ale sistemului automat

Nr. var.	Nr. tem./ nr. elem. nelin.	Valorile parametrilor elementelor sistemului automat												
		$H_1(s)$ elem. inerție		$H_2(s)$ element inerție		$H_3(s)$ element integrat./ el. inert.*		$H_4(s)$ elem. ideal/ ideal deriv.*	$H_5(s)$ elem. ideal	Elem. neliniar		Semnal armon.		
		k_1	T_1	k_2	T_2	k_3	T_3	k_4	k_5	b	c	A	ω	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
1	1/6	8	3	0,5	3	1	2,0	5/0	0,1	0,2	7	6	4	
2	2/5	9	4	0,4	4	0,4	0,3	0/0,6	0,4	0,3	9	7	5	
3	3/4	7	5	0,3	5	0,6	0,5	0,7/0	0,3	0,5	8	8	6	
4	4/3	6	6	0,2	6	0,8	0,6	8/0	0,2	0,6	7	9	7	
5	5/2	5	7	0,1	5	1	7,0	0/0,9	0,1	0,4	8	5	8	
6	6/1	4	8	0,2	4	0,8	0,8	0/0,8	0,2	0,2	5	9	9	
7	7/6	3	9	0,3	3	0,7	0,9	7/0	0,3	0,7	6	8	8	
8	8/5	4	10	0,5	2	0,6	0,8	0/0,6	0,4	0,6	7	7	7	
9	9/4	5	9	0,5	3	1	9,0	5/0	0,3	0,7	8	6	8	
10	10/3	6	8	0,3	4	0,4	0,6	0,4	0,2	0,3	9	5	7	
11	11/2	7	7	0,5	5	0,3	0,5	3/0	0,3	0,5	8	6	6	
12	10/1	8	6	0,4	6	1	4,0	0/0,5	0,4	0,2	7	7	5	
13	9/2	9	5	0,5	5	0,3	0,3	0/0,6	0,5	0,8	6	8	4	
14	8/3	8	7	0,6	4	0,2	0,4	7/0	0,4	0,6	5	9	6	
15	7/4	7	3	0,7	3	1	5,0	0/0,8	0,3	0,5	4	8	7	
16	6/5	6	2	0,8	2	0,2	0,6	0/0,7	0,2	0,4	3	7	8	
17	5/6	5	3	0,7	3	0,3	0,7	6/0	0,1	0,3	4	6	9	
18	4/1	3	4	0,6	4	0,4	0,8	0/0,5	0,2	0,3	5	7	5	
19	3/2	4	5	0,5	5	0,5	0,4	0/0,4	0,3	0,3	6	8	6	
20	2/3	5	3	0,4	3	1	6,0	3/0	0,4	0,4	7	9	8	
21	1/4	6	4	0,3	4	0,7	0,4	0/0,4	0,3	0,5	6	8	7	
22	11/5	9	5	0,2	5	0,8	0,3	5/0	0,2	0,4	5	7	8	
23	10/6	8	6	0,1	4	0,6	0,2	0/0,6	0,1	0,7	4	6	9	
24	9/5	7	7	0,2	3	0,8	0,3	7/0	0,2	0,6	6	7	5	
25	8/4	6	8	0,3	2	1	3,0	0/0,8	0,3	0,4	7	8	6	

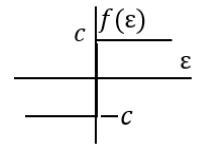
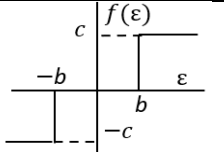
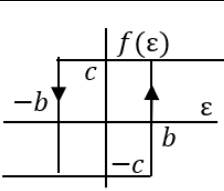
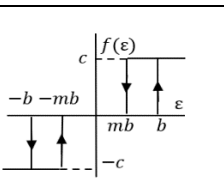
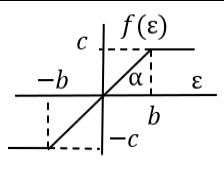
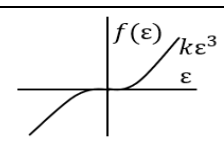
NOTĂ*:

1. Funcția de transfer $H_3(s)$ pentru variantele 1, 5, 9, 12, 15, 20, 25 va fi element integrator cu f.d.t. $H_3(s) = 1/(T_3s) = k_3/s$, iar în rest este element cu inerție.

2. Funcția de transfer $H_4(s)$ pentru variantele 1, 4, 7, 9, 11, 14, 17, 20, 22, 24, 27 va fi element ideal, iar în rest este element derivativ ideal.

Tipuri de neliniarități

Tabelul A3.1. Caracteristici statice ale neliniarităților

Nr. crt.	Caracteristica statică	Coeficienții liniarizării armonice	
		$b(a)$	$g(a)$
1		$\frac{4c}{\pi a}$	-
2		$\frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$, cu $a \geq b$	-
3		$\frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$, cu $a \geq b$	$-\frac{4cb}{\pi a^2}$, cu $a \geq b$
4		$\frac{2c}{\pi a} \left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} + \sqrt{1 - \frac{m^2 b^2}{a^2}} \right)$ cu $a \geq b$, $-1 \leq m \leq 1$	$-\frac{2cb}{\pi a^2} (1 - m)$, cu $a \geq b$
5		$\frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{a} + \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right)$, cu $a \geq b$, $k = \text{tga}$	-
6		$\frac{3ka^2}{4}$	-

Notă:

1. Amplitudinea semnalului de intrare a elementului neliniar $a = A$.

2. Caracteristicile statice sunt numite:

1. Releu ideal.

2. Releu cu zonă de sensibilitate și saturație.

3. Releu activ (cu histerezis).

4. Releu cu zonă de sensibilitate și histerezis.

5. Releu cu saturație.

6. Parabolă impară.

3. Pentru caracteristica de tip parabolă nesimetrică $f(\varepsilon) = k\varepsilon^3$ la valoarea puterii $n = 1$ coeficientul liniarizării armonice $b(a) = k > 0$, iar pentru $n = 5$ $b(a) = \frac{15ka^4}{24}$.

Semnale în timp și imaginea lor

Tabelul A4.1. Semnale de timp continuu și discret și imaginea Laplace s și transformata z

Nr crt	Denumirea funcției	Timp continuu		Timp discret	
		Original $s f(t)$	Imaginea $H(s)$	Original $f(kT)$	Imaginea $H(z)$
1	Delta impuls	$\delta(t)$	1	$\delta(kT)$	$z^{-0} = 1$
2	Treaptă unitară	$1(t)$	$\frac{1}{s}$	$1(kT)$	$\frac{z}{z-1}$
3	Funcție rampă	t	$\frac{1}{s^2}$	kT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
4	Funcție pătratică	t^2	$\frac{2!}{s^3}$	$(kT)^2$	$\frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$
5	Funcție polinomială	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\frac{1}{n-1} (kT)^{n-1}$	$\frac{1}{n-1} \frac{T^{n-1} z(z+1)}{(z-1)^n}$
6	Exponențială	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$	$e^{\alpha kT}$	$\frac{z}{z+e^{\alpha T}}$
7	Exponențială	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$e^{-\alpha kT}$	$\frac{z}{z-d}, d = e^{-\alpha T}$
8	Sinusoidă	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\sin \omega kT$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
9	Cosinusoidă	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos \omega kT$	$\frac{z^2 - z \cos \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
10	Produsul exponentei cu sinusoidă	$e^{-\alpha t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}$	$e^{-\alpha kT} \sin \omega kT$	$\frac{z d \sin \omega T}{z^2 - 2z d \cos \omega T + d^2}$
11	Produsul exponentei cu cosinusoidă	$e^{-\alpha t} \cos \omega t$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}$	$e^{-\alpha kT} \cos \omega kT$	$\frac{z d \cos \omega T}{z^2 - 2z d \cos \omega T + d^2}$

Funcții de transfer pentru elemente dinamice

Tabelul A5.1. Funcții de transfer pentru elemente dinamice în transformata Laplace s și în transformata z

Nr. crt.	$H(s)$	$H(z)$
1	2	3
1	k	k
2	$\frac{k}{s}$	$\frac{kz}{z-1}$
3	$\frac{k}{s^2}$	$\frac{kTz}{(z-1)^2}$
4	$\frac{k}{T_0s+1}$	$\frac{k}{T_0} \frac{z}{z-e^{-T/T_0}}$
5	$\frac{k}{s(T_0s+1)}$	$\frac{k(1-e^{-T/T_0})z}{(z-1)(z-e^{-T/T_0})}$
6	$\frac{k}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$	$\frac{k(e^{-T/T_1}-e^{-T/T_2})}{T_1-T_2} \frac{z}{(z-e^{-T/T_1})(z-e^{-T/T_2})}$
7	$\frac{k}{(T_0s+1)^2}$	$\frac{kTe^{-T/T_0}}{T_0^2} \frac{z}{(z-e^{-T/T_0})^2}$
8	$\frac{k}{s^2(T_0s+1)}$	$k \left[\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{T_0(1-e^{-T/T_0})z}{(z-1)(z-e^{-T/T_0})} \right]$
9	$\frac{k}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$	$k \left[\frac{z}{z-1} + \frac{T_1}{T_2-T_1} \frac{z}{z-e^{-T/T_1}} - \frac{T_2}{T_2-T_1} \frac{z}{z-e^{-T/T_2}} \right]$
10	$\frac{k}{s^2(T_1s+1)(T_2s+1)}$	$k \left[\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{(T_1+T_2)z}{z-1} - \frac{T_1^2}{T_1-T_2} \frac{z}{z-e^{-T/T_1}} + \frac{T_2^2}{T_2-T_1} \frac{z}{z-e^{-T/T_2}} \right]$

1	2	3
11	$\frac{k}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)(T_3s + 1)}$	$k \left[\frac{T_1}{(T_1 - T_2)(T_1 - T_3)} \frac{z}{z - e^{-T/T_1}} + \frac{T_2}{(T_2 - T_1)(T_2 - T_3)} \frac{z}{z - e^{-T/T_2}} + \frac{T_3}{(T_3 - T_1)(T_3 - T_2)} \frac{z}{z - e^{-T/T_3}} \right]$
12	$\frac{k}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)(T_3s + 1)}$	$k \left[\frac{z}{z - 1} - \frac{T_1^2}{(T_1 - T_2)(T_1 - T_3)} \frac{z}{z - e^{-T/T_1}} - \frac{T_2^2}{(T_2 - T_1)(T_2 - T_3)} \frac{z}{z - e^{-T/T_2}} - \frac{T_3^2}{(T_3 - T_1)(T_3 - T_2)} \frac{z}{z - e^{-T/T_3}} \right]$
13	$\frac{k}{s^2(T_1s + 1)(T_2s + 1)(T_3s + 1)}$	$k \left[\frac{Tz}{(z+1)^2} - \frac{(T_1+T_2+T_3)z}{z-1} + \frac{T_1^3}{(T_1 - T_2)(T_1 - T_3)} \frac{z}{z - e^{-T/T_1}} + \frac{T_2^3}{(T_2 - T_1)(T_2 - T_3)} \frac{z}{z - e^{-T/T_2}} + \frac{T_3^3}{(T_3 - T_1)(T_3 - T_2)} \frac{z}{z - e^{-T/T_3}} \right]$
14	$\frac{k(T_0s + 1)}{s}$	$\frac{k(T_0s + 1)(z - T_0/(T_0 - 1))}{z - 1}$
15	$\frac{k(T_0s + 1)}{s^2}$	$\frac{kT_0z(T_0s + 1)(z + T/T_0) - 1}{(z - 1)^2}$
16	$\frac{k(T_1s + 1)}{T_2s + 1}$	$\frac{k}{T_2} \left[T_1 + (1 - T_1/T_2) \frac{z}{z - e^{-T/T_2}} \right]$
17	$\frac{k(T_1s + 1)}{s(T_2s + 1)}$	$\frac{kT_1}{T_2} \frac{z(z + (T_3/T_2))(1 - e^{-T/T_2}) - 1}{z - e^{-T/T_1}}$
18	$\frac{k(T_3s + 1)}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$	$\frac{k}{T_1 - T_2} \left[\frac{(1 - (T_3/T_1))z}{z - e^{-T/T_1}} + \frac{((T_3/T_2) - 1)z}{z - e^{-T/T_2}} \right]$

1	2	3
19	$\frac{k(T_3s + 1)}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$	$k\left[\frac{Tz}{(z-1)^2} + \frac{(T_1 - T_3)z}{(T_2 - T_1)(z - e^{-T/T_1})} + \frac{(T_2 - T_3)z}{(T_1 - T_2)(z - e^{-T/T_2})}\right]$
20	$\frac{k(T_1s + 1)}{s^2(T_2s + 1)}$	$k\left[\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{(T_1 - T_2)(1 - e^{-T/T_1})z}{(z-1)(z - e^{-T/T_1})}\right]$
21	$\frac{k(T_3s + 1)}{s^2(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$	$k\left[\frac{Tz}{(z-1)^2} + \frac{(T_3 - T_1 - T_2)z}{z-1} - \frac{(T_1 - T_3)z}{((T_2/T_1) - 1)(z - e^{-T/T_1})} - \frac{(T_2 - T_3)z}{((T_1/T_2) - 1)(z - e^{-T/T_2})}\right]$
22	$\frac{k}{T_1^2s^2 + 2\xi T_1s + 1}$	$\frac{kze^{-\xi T/T_1} \sin\left(\frac{T}{T_1}\sqrt{1-\xi^2}\right)}{T_1\sqrt{1-\xi^2}[z^2 - 2ze^{-\xi T/T_1} \cos\left(\frac{T}{T_1}\sqrt{1-\xi^2}\right) + e^{-2\xi T/T_1}]}$

Sarcina individuală pentru proiect

Tabelul A6.1. Sarcina individuală pentru proiect a studentului (nume, prenume, gr.)

Nr. var.	Nr. temei/nr. elem. nelin.	Valorile parametrilor elementelor sistemului automat													
		$H_1(s)$ element inerție		$H_2(s)$ element inerție		$H_3(s)$ element integrat./el. iner.*		$H_4(s)$ el. ideal/el. ideal deriv.*		$H_5(s)$ elem. ideal		Elem. nelin.		Semnal armonic	
		k_1	T_1	k_2	T_2	k_3	T_3	k_4		k_5		b	c	A	ω

Tabelul A6.2. Grafic de elaborare a capitolelor proiectului de curs

Nr. crt.	Denumirea etapei de realizare	Termen de realizare
1	Construirea schemei de principiu a sistemului automat neliniar	Săptămânile 1-3
2	Descrierea matematică a sistemului neliniar	Săptămânile 4-5
3	Analiza stabilității sistemului neliniar	Săptămânile 6-7
4	Aprecierea performanțelor sistemului neliniar	Săptămâna a 8-a
5	Descrierea matematică a sistemului automat cu eșantionare	Săptămânile 9-11
6	Analiza stabilității sistemului cu eșantionare	Săptămâna a 12-a
7	Aprecierea performanțelor sistemului cu eșantionare	Săptămâna a 13-a
8	Prezentarea și susținerea proiectului de curs	Săptămâna a 14-a-15-a

Data primirii sarcinii _____ Semnătura studentului _____

Teoria sistemelor automate
Ghid pentru proiectarea de curs

Autor: B. Izvoreanu

Redactor E. Balan

Bun de tipar 22.11.21	Formatul 60x84 1/16
Hârtie ofset. Tipar RISO	Tirajul 50 ex.
Coli de tipar 7,75	Comanda nr. 95

2004, UTM, Chişinău, bd. Ştefan cel Mare şi Sfânt, 168
Editura "Tehnica-UTM"
2045, Chişinău, str. Studenţilor, 9/9