PLANUL ŞI DREAPTA ÎN SPAŢIU. DIVERSE ECUAŢII. POZIŢIA RECIPROCĂ A DREPTEI ŞI PLANULUI

1. Dreapta este dată prin ecuaţiile ei generale

$$\begin{cases} x - y + 2z + 4 = 0, \\ 3x + y - 5z - 8 = 0. \end{cases}$$

Să se scrie ecuaţia canonică a dreptei.

► Calculăm produsul vectorial al vectorilor normali $\vec{n}_1 = (1, -1, 2)$ şi $\vec{n}_2 = (3, 1, -5)$:

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + 11\vec{j} + 4\vec{k}$$

Considerăm o valoare arbitrară a variabilei z, de exemplu $z = 0$, şi din sistemul de ecuaţii dat calculăm $x = 1$, $y = 5$. Astfel, punctul $M_0(1,\ 5,\ 0)$ aparţine dreptei date şi cum vectorul $\vec{s} = (3, 11, 4)$ este coliniar cu dreapta, obţinem ecuaţia ei canonică

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{11} = \frac{z}{4}. \blacktriangleleft$$

2. Fie punctele $A_1(4,\ 7,\ 8)$, $A_2(-1,\ 13,\ 0)$, $A_3(2,\ 4,\ 9)$, $A_4(1,\ 8,\ 9)$. Să se scrie ecuaţia

1) planului $A_1A_2A_3$,

2) dreptei A_1A_2,

3) dreptei A_4M perpendiculară pe planul $A_1A_2A_3$,

4) dreptei A_4N paralelă la dreapta A_1A_2;

5) să se caculeze sinusul unghiului format de dreapta A_1A_4 şi planul $A_1A_2A_3$;

6) cosinusul unghiului format de planul de coordonate Oxy şi planul $A_1A_2A_3$;

► a) Ecuaţia planului ce trece prin punctele A_1, A_2, A_3 este următoarea

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-7 & z-8 \\ -5 & 6 & -8 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

adică $6x - 7y - 9z + 97 = 0$;

b) Ecuaţia dreptei ce trece prin două puncte A_1 şi A_2 este următoarea

$$\frac{x-4}{5} = \frac{y-7}{-6} = \frac{z-8}{8};$$

c) Dreapta A_4M este perpendiculară planului $A_1A_2A_3$, deci în calitate de vector director $\vec{s}$ se poate lua vectorul normal $\vec{n} = (6,\ -7,\ -9)$ la planul $A_1A_2A_3$. Prin urmare ecuaţia dreptei A_4M este următoarea

$$\frac{x-1}{6} = \frac{y-8}{-7} = \frac{z-9}{-9};$$

d) Cum dreapta A_4N este paralelă la dreapta A_1A_2, atunci vectorii lor directori $\vec{s}_1$ şi $\vec{s}_2$ se pot considera egali $\vec{s}_1 = \vec{s}_2 = (5,\ -6,\ 8)$. Deci

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-8}{-6} = \frac{z-9}{8};$$

e) Sinusul unghiului format de dreapta A_1A_2 şi planul $A_1A_2A_3$ se calculează in modul următor

$$\sin\varphi = \frac{|6\cdot 5 + (-7)\cdot(-6) + (-9)\cdot 8|}{\sqrt{6^2+(-7)^2+(-9)^2}\cdot\sqrt{5^2+(-6)^2+8^2}} = \frac{42}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{166}} \approx 0,8;$$

f) Unghiul format de planul de coordonate Oxy şi planul $A_1A_2A_3$ este nu altceva decât unghiul dintre vectorii $\vec{n}_1$ şi $\vec{n}_2$. Astfel,

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|} = \frac{0\cdot 6 + 0\cdot(-7) + 1\cdot(-9)}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{6^2+(-7)^2+(-9)^2}} = \frac{-9}{\sqrt{166}} \approx -0,7. \quad ◀$$

3. Să se scrie ecuaţia planului căruia îi aparţin punctele $M(4,\ 3,\ 1)$ şi $N(-2,\ 0,\ -1)$ şi este paralel la dreapta ce trece prin punctele $A(1,\ 1,\ -1)$ şi $B(-3,\ 1,\ 0)$.

▶ Ecuaţia dreptei AB :

$$\frac{x-1}{-4} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+1}{1}.$$

Ecuaţia planului ce trece prin punctul $M(4,\ 3,\ 1)$ este de următoarea formă

$$a(x-4) + b(y-3) + c(-1-1) = 0.$$

Cum punctul $N(-2,\ 0,\ -1)$ aparţine acestui plan, avem

$$a(-2-4) + b(0-3) + c(-1-1) = 0 \quad \text{sau} \quad 6a + 3b + 2c = 0.$$

De pe altă parte,

$$-4a + 0b + 1c = 0 \quad \text{sau} \quad 4a - c = 0,$$

datorită faptului că planului îi aparţine dreapta AB, obţinem

$$\begin{cases} 6a + 3b + 2c = 0, \\ 4a \qquad\quad - c = 0, \end{cases}$$

de unde $c = 4A$, $B = -\dfrac{14}{3}$, şi înlocuind în ecuaţia planului, obţinem

$$a(x-4) - \frac{14}{3}(y-3) + 4a(z-1) = 0.$$

Se poate lua $a = 1$ şi prin urmare

$$3(x-4) - 14(y-3) + 12(z-1) = 0. \; ◀$$

4. Să se afle coordonatele punctului M_2, simetric punctului $M_1(6,\,-4,\,-2)$ faţă de planul $x+y+z-3=0$.

► Dreapta ce trece prin punctele M_1M_2 este perpendiculară planului dat şi, deci, ecuaţiile ei scrisă în formă parametrică sunt următoarele

$$\begin{cases} x = & 6+t, \\ y = & -4+t, \\ z = & -2+t. \end{cases}$$

Ecuaţiile dreptei şi ecuaţia planului formează un sistem din care, rezolvându-l, aflăm punctul de intersecţie $M(7,\,-3,\,-1)$ a planului cu dreapta. Cum punctul M împarte segmentul M_1M_2, în două părti egal, avem

$$7 = \frac{6+x_2}{2},$$

$$-3 = \frac{-4+y_2}{2},$$

$$-1 = \frac{-2+z_2}{2},$$

de unde rezultă coordonatele punctului M_2: $x_2 = 8$, $y_2 = -2$, $z_2 = 0$. ◄