LUCRAREA DE LABORATOR Nr. 6
TEMA: PROBABILITĂȚI II.

1. SCOPUL LUCRĂRII:

Studiul și calculul probabilităților.

2. PREZENTAREA LUCRĂRII:

Exercițiile se rezolvă utilizând softul matematic Wolfram Mathematica.

Numărul variantei ***n*** coincide cu numărul dvs. în registrul profesorului.

1. Să se perfecteze o foaie de titlu în stil obișnuit, folosind instrumentele de tehnoredactare din Wolfram Mathematica, cu indicarea disciplinei, numelui, grupei, facultății, specialității și numărului variantei.

2. Să se efectueze un Page Break

3. În continuare, se scrie condiția exercițiului (format text) și rezolvarea acestuia(format input).

4. Se salvează fișierul cu extensia .nb cu numele fișierului: NumePrenume.grupa.nb

Lucrarea se prezintă în cadrul orei de laborator și se plasează pe platforma ELSE.

3. SARCINA DE BAZĂ

1. Este dată repartiţia v.a. de tip discret ξ:

$$\xi : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{pmatrix}$$

(datele numerice se conţin pe variante după enunţul exerciţiului). Se cere: 1) să se introducă în Sistemul Mathematica repartiţia v.a.d. ξ; 2) funcţia de repartiţie şi graficul ei; 3) probabilitatea ca ξ va lua valori din intervalul [1; 4); 4) valoarea medie; 5) dispersia; 6) abaterea medie pătratică; 7) momentele iniţiale de ordine până la 4 inclusiv; 8) momentele centrate de ordine până la 4 inclusiv; 9) asimetria; 10) excesul.

1) x_1=–1, x_2=0, x_3=2, x_4=3, p_1=0,1, p_2=0,5, p_3=0,4, p_4=0,2;
2) x_1=0, x_2=1, x_3=7, x_4=3, p_1=0,6, p_2=0,2, p_3=0,1, p_4=0,1;
3) x_1=–2, x_2=–1, x_3=0, x_4=1, p_1=0,2, p_2=0,4, p_3=0,3, p_4=0,1;
4) x_1=1, x_2=2, x_3=5, x_4=6, p_1=0,1, p_2=0,5, p_3=0,3, p_4=0,1;
5) x_1=2, x_2=3, x_3=4, x_4=3, p_1=0,1, p_2=0,2, p_3=0,3, p_4=0,4;
6) x_1=1, x_2=3, x_3=4, x_4=5, p_1=0,2, p_2=0,6, p_3=0,1, p_4=0,1;
7) x_1=2, x_2=4, x_3=5, x_4=6, p_1=0,1, p_2=0,4, p_3=0,4, p_4=0,1;
8) x_1=–1, x_2=0, x_3=1, x_4=2, p_1=0,4, p_2=0,1, p_3=0,3, p_4=0,2;
9) x_1=–2, x_2=–1, x_3=0, x_4=1, p_1=0,1, p_2=0,2, p_3=0,1, p_4=0,6;
10) x_1=0, x_2=1, x_3=2, x_4=3, p_1=0,6, p_2=0,1, p_3=0,2, p_4=0,1;
11) x_1=1, x_2=2, x_3=4, x_4=5, p_1=0,1, p_2=06, p_3=0,2, p_4=0,1;
12) x_1=2, x_2=3, x_3=5, x_4=7, p_1=0,1, p_2=0,4, p_3=0,3, p_4=0,2;
13) x_1=3, x_2=4, x_3=5, x_4=6, p_1=0,1, p_2=0,5, p_3=0,3, p_4=0,1;
14) x_1=1, x_2=3, x_3=4, x_4=5, p_1=0,2, p_2=0,6, p_3=0,1, p_4=0,1;
15) x_1=2, x_2=4, x_3=5, x_4=6, p_1=0,1, p_2=0,6, p_3=0,2, p_4=0,1;
16) x_1=0, x_2=1, x_3=3, x_4=4, p_1=0,5, p_2=0,3, p_3=0,1, p_4=0,1;
17) x_1=–2, x_2=–1, x_3=0, x_4=2, p_1=0,1, p_2=0,4, p_3=0,3, p_4=0,2;
18) x_1=–1, x_2=0, x_3=1, x_4=2, p_1=0,1, p_2=0,5, p_3=0,3, p_4=0,1;
19) x_1=0, x_2=1, x_3=2, x_4=3, p_1=0,1, p_2=0,6, p_3=0,2, p_4=0,1;
20) x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4=5, p_1=0,2, p_2=0,5, p_3=0,1, p_4=0,2;
21) x_1=–1, x_2=0, x_3=1, x_4=2, p_1=0,2, p_2=0,4, p_3=0,3, p_4=0,1;
22) x_1=–2, x_2=–1, x_3=0, x_4=2, p_1=0,3, p_2=0,1, p_3=0,4, p_4=0,2;
23) x_1=0, x_2=1, x_3=3, x_4=4, p_1=0,1, p_2=0,3, p_3=0,4, p_4=0,2;
24) x_1=1, x_2=3, x_3=5, x_4=7, p_1=0,2, p_2=0,1, p_3=0,3, p_4=0,4;
25) x_1=2, x_2=3, x_3=4, x_4=5, p_1=0,4, p_2=0,2, p_3=0,1, p_4=0,3;
26) x_1=0, x_2=2, x_3=3, x_4=5, p_1=0,3, p_2=0,4, p_3=0,2, p_4=0,1;

27) $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=5$, $p_1=0{,}2$, $p_2=0{,}3$, $p_3=0{,}4$, $p_4=0{,}1$;
28) $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=5$, $x_4=6$, $p_1=0{,}3$, $p_2=0{,}4$, $p_3=0{,}1$, $p_4=0{,}2$;
29) $x_1=1$, $x_2=4$, $x_3=5$, $x_4=6$, $p_1=0{,}4$, $p_2=0{,}1$, $p_3=0{,}2$, $p_4=0{,}3$;
30) $x_1=1$, $x_2=3$, $x_3=4$, $x_4=5$, $p_1=0{,}1$, $p_2=0{,}2$, $p_3=0{,}3$, $p_4=0{,}4$.

2. Presupunem că probabilitatea statistică că un copil nou născut să fie băiat este egală cu 0.51. Se cere: 1) să se determine repartiţia v.a. ξ care reprezintă numărul de băieţi printre 1000 de copii noi născuţi; 2) să se calculeze probabilitatea că printre 1000 de copii noi născuţi numărul băieţilor va fi cuprims între $300+k$ şi $500+k$, unde k este numărul variantei.

3. Numărul ξ de particule alfa emise de un gram de substanţă radioactivă într-o secundă este o v.a.d. cu repartiţia Poisson cu parametrul a, unde a este numărul mediu de particule alfa emise într-o secundă. 1) Să se determine seria de repartiţie a v.a.d. ξ. 2) Să se calculeze probabilităţile evenimentelor: A = {*într-o secundă vor fi emise nu mai mult de două particule alfa*} şi B = {*într-o secundă vor fi emise cinci particule alfa*}, C = {*într-o secundă vor fi emise mai mult de zece particule alfa*}. Care este numărul de particule alfa care corespunde celei mai mari probabilităţi? Să se considere că $a=1+0{,}25n$, unde n este numărul variantei.

4. Să se scrie legea de repartiţie a variabilei aleatoare ξ care reprezintă numărul de aruncări nereuşite ale unui zar până la prima apariţie a numărului 4. Să se calculeze probabilitatea că numarul aruncărilor nereuşite va varia între $5+k$ si $15+k$, unde k este numărul variantei..

5. V.a.c. ξ este definită de densitatea sa de repartiţie $f(x)$. Să se determine: 1) reprezentarea v.a.c. ξ în Sistemul Mathematica; 2) linia de repartiţie; 3) funcţia de repartiţie $F(x)$ şi graficul ei, 4) valoarea ei medie; 5) dispersia; 6) abaterea medie pătratică; 7) coeficientul de variaţie; 8) momentele iniţiale de ordinele până la 4 inclusiv, 9) momentele centrale de ordinele până la 4 inclusiv; 10) asimetria; 11) excesul; 12) probabilitatea ca ξ va lua valori din prima jumătate a intervalului de valori posibile. Funcţia $f(x)$ este dată pe variante.

1) $f(x)=\begin{cases}(x-1)/2, & x\in[1,3],\\ 0, & x\notin[1,3];\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}2(x-1)/9, & x\in[1,4],\\ 0, & x\notin[1,4];\end{cases}$

1) $f(x)=\begin{cases}(x-1)/2, & x\in[1,3],\\ 0, & x\notin[1,3];\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}2(x-1)/9, & x\in[1,4],\\ 0, & x\notin[1,4];\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases}2x-2, & x\in[1,2],\\ 0, & x\notin[1,2];\end{cases}$ 4) $f(x)=\begin{cases}(x-1)/8, & x\in[1,5],\\ 0, & x\notin[1,5];\end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases}2(x-1)/25, & x\in[1,6],\\ 0, & x\notin[1,6];\end{cases}$ 6) $f(x)=\begin{cases}(x-1)/18, & x\in[1,7],\\ 0, & x\notin[1,7];\end{cases}$ 7)

$f(x)=\begin{cases}2(x-1)/49, & x\in[1,8],\\ 0, & x\notin[1,8];\end{cases}$ 8) $f(x)=\begin{cases}2(x-2), & x\in[2,3],\\ 0, & x\notin[2,3];\end{cases}$ 9) $f(x)=\begin{cases}(x-2)/2, & x\in[2,4],\\ 0, & x\notin[2,4];\end{cases}$

10) $f(x)=\begin{cases}2(x-2)/9, & x\in[2,5],\\ 0, & x\notin[2,5];\end{cases}$ 11) $f(x)=\begin{cases}(x-2)/8, & x\in[2,6],\\ 0, & x\notin[2,6];\end{cases}$ 12)

$f(x)=\begin{cases}2(x-2)/25, & x\in[2,7],\\ 0, & x\notin[2,7];\end{cases}$

13) $f(x)=\begin{cases}(x-2)/18, & x\in[2,8],\\ 0, & x\notin[2,8];\end{cases}$ 14) $f(x)=\begin{cases}2(x-2)/49, & x\in[2,9],\\ 0, & x\notin[2,9];\end{cases}$

15) $f(x)=\begin{cases}2x-6, & x\in[3,4],\\ 0, & x\notin[3,4];\end{cases}$ 16) $f(x)=\begin{cases}(x-3)/2, & x\in[3,5],\\ 0, & x\notin[3,5];\end{cases}$ 17) $f(x)=\begin{cases}2(x-3)/9, & x\in[3,6],\\ 0, & x\notin[3,6];\end{cases}$ 18) $f(x)=\begin{cases}(x-3)/8, x\in[3,7],\\ 0, \quad x\notin[3,7];\end{cases}$ 19) $f(x)=\begin{cases}2(x-3)/25, x\in[3,8],\\ 0, \quad x\notin[3,8];\end{cases}$ 20) $f(x)=\begin{cases}(x-3)/18, x\in[3,9],\\ 0, \quad x\notin[3,9];\end{cases}$

21) $f(x)=\begin{cases}(2-x)/2, & x\in[0,2],\\ 0, & x\notin[0,2];\end{cases}$ 22) $f(x)=\begin{cases}(4-x)/8, & x\in[0,4],\\ 0, & x\notin[0,4];\end{cases}$ 23) $f(x)=\begin{cases}(6-x)/18, & x\in[0,6],\\ 0, & x\notin[0,6];\end{cases}$ 24) $f(x)=\begin{cases}(8-x)/32, & x\in[0,8],\\ 0, & x\notin[0,8];\end{cases}$

25) $f(x)=\begin{cases}(10-x)/50, & x\in[0,10],\\ 0, & x\notin[0,10];\end{cases}$ 26) $f(x)=\begin{cases}2(1-x), & x\in[0,1],\\ 0, & x\notin[0,1];\end{cases}$

27) $f(x)=\begin{cases}2(3-x)/9, & x\in[0,3],\\ 0, & x\notin[0,3];\end{cases}$ 28) $f(x)=\begin{cases}2(5-x)/25, & x\in[0,5],\\ 0, & x\notin[0,5];\end{cases}$

29) $f(x)=\begin{cases}2(7-x)/49, & x\in[0,7],\\ 0, & x\notin[0,7];\end{cases}$ 30) $f(x)=\begin{cases}2(9-x)/81, & x\in[0,9],\\ 0, & x\notin[0,9].\end{cases}$

6.V.a. ξ are repartiţia normală cu valoarea medie m şi cu abaterea medie pătratică σ. 1) să se instaleze pachetul de programe **Statistics`NormalDistribution`** ; 2) să se definească (introducă) v.a.c. dată ; 3) să se definească (determine) densitatea de repartiţie ; 4) să se construiască linia de repartiţie ; 5) să se definească (determine) funcţia de repartiţie ; 6) să se construiască graficul funcţiei de repartiţie ; 7) să se construiască pe acelaşi desen graficele densităţii de repartiţie şi al funcţiei de repartiţie ; 8) să se construiască pe acelaşi desen gfaficele densităţii de repartiţie şi al funcţiei de repartiţie astfel, ca grosimea graficului densităţii de repartiţie să fie egală cu 0,5 din grosimea standard, iar grosimea graficului funcţiei de repartiţie să fie egală cu 0,9 din grosimea standard; 9) Să se calculeze probabilitatea ca ξ să ia valori din intervalul $[\alpha, \beta]$. Valorile lui m, σ, α şi β sunt date pe variante.

1)m=3, σ=2, α=2, β=8; 2)m=4, σ=2, α=2, β=7; 3)m=5, σ=2, α=2, β=6; 4)m=6, σ=2, α=4, β=9; 5)m=7, σ=2, α=4, β=8; 6)m=9, σ=2, α=6, β=9; 7)m=9, σ=2, α=7, β=12; 8)m=3, σ=3, α=2, β=5; 9)m=4, σ=3, α=2, β=7; 10)m=5, σ=3, α=4, β=7; 11)m=6, σ=3, α=4, β=9; 12)m=7, σ=3, α=6, β=9; 13)m=8, σ=3, α=5, β=9; 14)m=9, σ=3, α=7, β=10; 15)m=5, σ=4, α=4, β=8; 16)m=6, σ=4, α=4, β=9; 17)m=7, σ=4, α=5, β=8; 18)m=8, σ=4, α=5, β=9; 19)m=9, σ=4, α=7, β=10; 20)m=6, σ=5, α=4, β=7; 21)m=7, σ=5, α=4, β=9; 22)m=8, σ=5, α=5, β=9; 23)m=8, σ=5, α=6, β=9; 24)m=8, σ=5, α=7, β=9; 25)m=2, σ=2, α=1, β=3; 26)m=3, σ=2, α=1, β=4; 27)m=4, σ=2, α=1, β=5; 28)m=4, σ=3, α=2, β=5; 29)m=5, σ=2, α=1, β=6; 30)m=6, σ=3, α=2, β=8.

7. Înălţimea unui bărbat este o v.a. cu repartiţia normală. Presupunem că această repartiţie are parametrii $m=175+(-1)^n/n$ cm şi $\sigma=6-(-1)^n/n$ cm. Să se formeze programul de confictionate a costumelor bărbăteşti pentru o fabrică de confecţii care se referă la asigurarea cu costume a bărbaţilor, înălţimile cărora aparţin intervalelor: [150, 155), [155, 160), [160, 165), [165, 170), [170, 175), [175, 180), [180, 185), [185, 190), [190, 195), [195, 200], n fiind numarul variantei, $n=1,2,\ldots 30$.

8. Presupunem că o convorbire telefonică durează în medie 5 minute şi este o v.a. ξ de repartiţie exponenţială. 1) Să se introducă în Sistemul Mathematica d.r. a v.a.c. ξ. 2) Să se determine funcţia de repartiţie şi să se construiască graficul ei. 3) Dacă vă apropriaţi de o cabină telefonică imediat după ce o persoană a întrat în ea atunci care este probabilitatea că o să aşteptaţi nu mai mult de $2+n/3$ minute, unde n este numărul variantei, $n=1,2,\ldots,30$?

9. Un autobuz circulă regulat cu intervalul 30 minute. 1) Să se scrie în Sistemul Mathematica d.r. a v.a.c. ξ care reprezintă durata aşteptării autobuzului de către un pasager care soseste în staţie într-un moment aleator de timp. 2) Să se construiască linia de repartiţie. 3) Să se determine f.r.e şi să se construiască graficul ei. 4) Care este probabilitatea că, sosind în staţie, pasagerul va aştepta autobuzul nu mai mult de $10+n/2$ minute, unde numărul n coincide cu numărul variantei.

10. Cantitatea anuală de precipitaţii atmosferice are repartiţie normală. Presupunem că anual, cantitatea de precipitaţii într-o anumită regiune este o v.a. aleatoare de repartiţie normală de parametrii $m = 500$ (mm) şi $\sigma = 150$. Care este probabilitatea că în anul viitor cantitatea de precipitaţii va fi cuprinsă între $400+5n$ şi $500+5n$, unde n este numărul variantei. Dacă considerăm că un an este secetos când cantitatea de precipitaţii nu depăşeşte 300 mm, atunci care este probabilitatea că doi din viitorii zece ani vor fi secetoşi?

3. Variabile aleatoare

3.1. Introducere

În acest capitol se conţine o expunere succintă a rezultatelor din Teoria probabilităţilor ce se referă la **variabile aleatoare,** exemple de probleme rezolvate la această temă, dar şi o listă de probleme propuse spre rezolvare.

Vizavi de Sistemul Mathematica, vom aplica, în afară de funcţiile definite anterior, şi funcţiile **Condition** (notată şi cu /;), **Clear.**

F[x_]:=0/;x<0;F[x_]:=1/;x≥0; înseamnă că funcţiei $F(x)$ i se atrubuie valoarea 0 cu condiţia că $x<0$ şi valoarea 1 cu condiţia că $x\geq 0$;

Clear[F,f,m,…] înseamnă că funcţiile sau parametrii F, f, m,... se eliberează (se curăţă) de valorile atribuite lor anterior.

În Sistemul Mathematica sunt încorporate pachete de programe specializate în rezolvarea problemelor din diferite domenii ale Matematicii. În acest Capitol se va folosi pachetul **Statistics`NormalDistribution`**. Când lucrăm cu un document în Sistemul Mathematica, acest pachet poate fi instalat cu ajutorul instrucţiunii

<<**Statistics`NormalDistribution`**.

Dacă se doreşte trasarea graficului funcţiei $f(x)$ definită pe segmentul [a,b] prin intermediul unei linii de grosime standard, atunci se poate folosi funcţia

Plot[f,{x,a,b}]

Atunci, când se doreşte trasarea graficului funcţiei $f(x)$ definite pe segmentul [a,b] prin intermediul unei linii de o anumită grosime, se poate folosi funcţia **Plot[f,{x,a,b},PlotStyle→Hue[k]],** unde k este raportul dintre grosimea dorită a graficului şi grosimea standard.

Când dorim să construim, pe un singur desen, graficele mai multor fincţii f_1, f_2, ... definite pe segmentul [a,b], atunci putem folosi funcţia

Plot[{f_1,f_2,…,},{x,a,b}]. Dacă vrem să construim pe un singur desen graficele fincţiilor f_1, f_2, ... definite pe segmentul [a,b], folosind linii de diferite grosimi şi culori, atunci putem utiliza funcţia

Plot[{f_1,f_2,…},{x,a,b},PlotStyle→{Hue[k_1],Hue[k_2],…}].

3.2. Noţiune de variabilă aleatoare. Funcţia de repartiţie

3.2.1. Definiţia variabilei aleatoare (v.a)

În majoritatea cazurilor rezultatele înregistrate într-un experiment aleator reprezintă nişte valori numerice ale unei mărimi care depind de evenimentele elementare în acest experiment. Această marime se va numi variabilă aleatoare. Aceasta este, ca atare, o variabilă (o funcţie) care depinde de rezultatul posibil într-un experiment aleator (ce posedă Proprietatea Regularităţtii Statistice), ceea ce înseamna ca valoarea ei nu poate fi anticipată cu certitudine înainte de efectuarea experimentului. Vom da definiţia matematică a variabilei aleatoare.

Definiţie. Fie $(\Omega, \mathscr{F}, \boldsymbol{P})$ un câmp de probabilitate, atunci vom numi *variabilă aleatoare (v.a.)* definită pe acest câmp orice funcţie $\xi : \Omega \to \mathbf{R}$ care verifică condiţia

$$\{\, \omega\in\Omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathscr{F} \text{ pentru orice } x\in\mathbf{R}\,. \qquad (3.1)$$

Observaţie. Dacă suntem în cazul discret, i.e., în cazul când spaţiul de evenimente elementare Ω este o mulţime finită sau, cel mult, nu-mărabilă, atunci câmpul (familia) de evenimente aleatoare $\mathscr{F}$ coin-cide cu familia tuturor submulţimilor din Ω. Prin urmare, în acest caz, putem numi variabilă aleatoare orice functie $\xi : \Omega \to \mathbf{R}$, deoarece în caz discret condiţia că $\{\, \omega\in\Omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathscr{F}$ pentru orice $x\in\mathbf{R}$ are loc automat**.**

Evenimentul care figurează în condiţia (3.1) se notează, pe scurt, astfel: $\{\omega:\xi(\omega) < x\}$, sau $\{\xi < x\}$, sau $(\xi < x)$. Mărimea $\xi(\omega)$ se numeşte valoare a variabilei aleatoare ξ. Din condiţia (3.1) rezultă că pentru orice $x\in\mathbf{R}$ putem găsi probabilitatea evenimentului aleator $(\xi<x)$.

În calitate de exemple de v.a. întâlnite în practică putem lua: suma de puncte apărute la aruncarea unui zar de două ori, durata funcţionării unui dispozitiv electronic, numărul de particule alfa emise de o substanţă radioactivă într-o unitate de timp, cantitatea anuală de precipitaţii atmosferice într-o anumită regiune, numărul de apeluri telefonice înregistrate pe parcursul a 24 de ore la o statie de ajutor medical, numărul de accidente auto înregistrate pe parcursul unui anumit interval de timp etc., etc.

3.2.2. Proprietăţi ale variabilei aleatoare

a) Dacă ξ este o variabilă aleatoare, atunci pentru orice $a\in\mathbf{R}$ şi $b\in\mathbf{R}$ sunt evenimente aleatoare şi, prin urmare, sunt definite probabilităţile lor pentru$\{\xi > a\}$, $\{\xi \geq a\}$,$\{\xi = a\}$, $\{a \leq \xi < b\}$, $\{b<\xi \leq a\}$, etc.

b) Fie (Ω, K, P) un câmp de probabilitate, $a\in\mathbf{R}$, $\xi:\Omega\to\mathbf{R}$ şi $\eta:\Omega\to\mathbf{R}$ sunt variabile aleatoare. Atunci sunt variabile aleatoare şi funcţiile: 1) $a\xi$; 2) ξ^k, $k = 1, 2,...$; 3) $\xi-\eta$; 4) $\xi+\eta$; 5) $\xi\cdot\eta$; 6) $1/\eta$ dacă $\eta(\omega) \neq 0$, $\forall\omega\in\Omega$; 7) ξ/η dacă $\eta(\omega) \neq 0$, $\forall\omega\in\Omega$; 8) $\xi\pm a$.

În genere, dacă avem un şir finit de v.a. definite pe unul şi acelaşi câmp de probabilitate, atunci v.a. va fi şi orice funcţie de aceste variabile, în caz că aceasta este funcţie continua. De exemplu, suma de v.a., diferenta lor, produsul lor, minimumul sau maximumul de aceste variabile, etc., vor fi v.a.

3.2.3. Funcţia de repartiţie (distribuţie) a variabilei aleatoare

Definiţie. Fie $(\Omega, \mathscr{F}, \boldsymbol{P})$ un câmp de probabilitate şi $\xi : \Omega\to\mathbf{R}$ o variabilă aleatoare. Funcţia $F : \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definită prin relaţia

$$F(x) = P(\xi < x), \text{ pentru orice } x\in\mathbf{R}, \tag{3.2}$$

se numeşte *funcţie de repartiţie* (f.r.) a v.a. ξ.

Teoremă (*Proprietăţile caracteristice ale f.r.*)

Dacă F(x) este o f.r. a unei v.a., atunci au loc următoarele proprietăţi:

1) F(x) este monoton nedescrescătoare), i.e., $F(x_1) \leq F(x_2)$ de îndată ce $x_1 \leq x_2$;

*2) F(x) este continuă la stânga pentru orice $x\in$**R**, i.e., pentru orice şir monoton crescator de valori x_n care tinde la x, atunci când n tinde la $+\infty$, şirul corespunzător de valori $F(x_n)$ are drept limită valoarea F(x), fapt ce se notează, pe scurt, $F(x-0)=F(x)$;*

3) $F(+\infty) = 1$ şi $F(-\infty)=0$.

Observaţie. Proprietăţile 1)-3) sunt caracteristice numai si numai funcţiilor de repartiţie în sensul că, are loc şi reciproca acestei teoreme, conform căreia: ***pentru orice funcţie** $F : \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ **ce posedă proprietăţile 1)-3) putem construi (neunivoc) un câmp de probabilitate** $(\Omega, \mathscr{F}, \boldsymbol{P})$ **şi o v.a.** ξ **definită pe el, astfel încât funcţtia ei de repartiţtie coincide cu** F.*

Propoziţie (*Formule de calcul ale probabilităţilor pe baza f.r.*) *Fie ξ o v.a. cu f.r. F(x). Atunci pentru orice $a\leq b$, $a,b\in$**R**, au loc următoarele formule:*

a) $\boldsymbol{P}(a \leq \xi < b) = F(b) - F(a)$;

b) $\boldsymbol{P}(\xi\geq a) = 1 - F(a)$;

c) $\boldsymbol{P}(\xi= a)=F(a+0) - F(a)$, *prin F(a+0) fiind notată* ***limita la dreapta*** *a funcţiei F în punctul a;*

d) $\boldsymbol{P}(a \leq \xi \leq b) = F(b+a) - F(a)$;

e) $\boldsymbol{P}(a<\xi <b) = F(b) - F(a+0)$;

f) $\boldsymbol{P}(a<\xi \leq b) = F(b+0) - F(a+0)$.

Observaţie. Din formula *c)* rezultă că pentru acele v.a. a caror f.r. este continuă, $\boldsymbol{P}(\xi= a)=0$ pentru orice numar real *a,* deorece în acest caz $F(a+0) = F(a)$.

3.2.4. Exemple

Exemplul 1. Considerăm v.a. ξ cu f.r. dată de formula:

$$F(x) = \begin{cases} 1-e^{-2x}, & x>0, \\ 0, & x\leq 0. \end{cases}$$

1) Să se definească această funcţie de repartiţie în Sistemul Mathematica. 2) Să se construiască graficul funcţiei $F(x)$.

3) Să se calculeze probabilitatea evenimentului $(0 \leq \xi < 1)$.

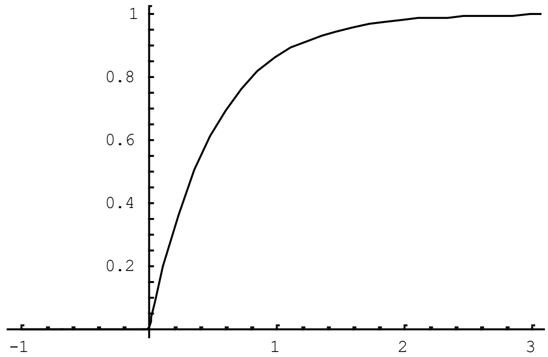
4) Să se calculeze probabilitatea evenimentului $(\xi \geq 2)$.

Rezolvare. 1) Definim funcţia $F(x)$ în Sistemul Mathematica cu ajutorul operatorului **Condition**, notat şi cu /;.

In[1]:=F[x_]:=0/;x≤0;F[x_]:=1–Exp[–2*x]/;x>0;

2) Pentru construcţia graficului funcţiei F(x) folosim fincţia **Plot**.

In[2]:=Plot[F[x],{x,–1,5}]



Out[2]=Graphics

3) Aplicăm formula *a)* din Propoziţie.

In[3]:=N[F[1]−F[0]]

Out[3]=0.86465

Am obţinut $P(0\le\xi<1)=0{,}86465$.

4) Pentru calculul probabilităţi folosim formula *b)* din Propoziţie.

In[4]:=N[1−F[2]]

Out[4]=0.0183156

Am obţinut $P(\xi\ge 2) = 0{,}0183156$.

Rezolvarea problemei s-a terminat, dar, deoarece la rezolvarea problemei următoare se va folosi, din nou, notaţia *F(x)*, curăţim conţinutul ei, ce corespunde problemei rezolvate mai sus, apelând la operatorul **Clear**.

In[5]:=Clear[F].

3.3. Variabile aleatorii. de tip discret şi Caracteristicile numerice ale acestora

În Teoria Probabilităţilor sunt studiate 3 tipuri de v.a.: discrete, (absolut) continue si singulare. Înteresante din punct de vedere ale aplicaţiilor fiind doar primele două.

3.3.1. Definiţia variabilei aleatoare de tip discret

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ un câmp de probabilitate şi $\xi : \Omega\to\mathbf{R}$ o v.a.

Definiţie. Variabila ξ se numeşte *variabilă aleatoare de tip discret* dacă mulţimea valorilor posibile ale acesteia este finită sau infinită, cel mult numerabilă.

Drept exemple de v.a. de tip discret putem lua numarul de steme apărute la aruncarea unei monede de *n* ori, numărul de puncte apărute la aruncarea unui zar o singură dată, numărul de apeluri telefonice inregistrate la Urgenţa Medicală pe parcursul a 24 de ore, numărul de erori descoperite în urma compilării unui soft etc.,etc.

3.3.2. Repartiţia (distribuţia) probabilistă a variabilei aleatoare de tip discret

Fie ξ o v.a. de tip discret definită pe câmpul de probabilitate $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$, adică aceasta ia, în calitate de valori posibile, valori din mulimea $\mathcal{X}=\{x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots\}$, unde $x_1<x_2<\ldots<x_n<\ldots$. După cum am văzut, indiferent de tipul v.a., aceasta poate fi definită şi prin intermediul funcţiei ei de repartiţie *F(x),* dar în caz discret mai există o modalitate echivalentă de a defini v.a. şi anume, cu ajutorul noţiunii de repartiţie a v.a.

Definiţie. Vom numi ***repartiţie probabilistă*** *(simplu, repartiţie)* a v.a. ξ setul de perechi ordonate $\{(x_i,p_i)\}_{i\ge1}$ sau tabloul de forma

$$\xi : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n & \ldots \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n & \ldots \end{pmatrix},$$

unde $p_i= P(\xi = x_i) \ge 0$, $i \ge 1$, $\Sigma_{i\ge1}\, p_i =1$. (3.3)

Următoarea afirmaţie arată că, în caz discret, ***f.r. şi repartiţia v.a.*** ξ ***sunt două forme echivalente de modelare matematică (probabilistă) a ei***.

Propoziţie. *F.r. şi repartiţia unei v.a.* ξ *de tip discret sunt legate între ele conform urmatoarelor formule:*

a) $F(x)=\sum_{x_j<x} p_j$; (3.4)

b) mulţimea de valori posibile a v.a. ξ este dată de

$\mathcal{X}=\{x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots\} = \{x\in\mathbf{R} : F(x+0)-F(x)>0\}$ *iar probabiltăţile*

$p_i = P(\xi = x_i) = F(x+0)-F(x),\ i \geq 1.$ (3.5)

Concluzie. Din această propoziţie rezultă că f.r. şi repartiţia unei v.a. de tip discret sunt *două forme echivalente de modelare probabilistă ce descriu legea care guvernează comportamentul probabilist al v.a.*. Mai mult, o v.a. de tip discret este definită, dacă se cunoaşte legea ei de repartiţie: sau sub formă de funcţie de repartiţie, sau sub formă de repartiţie.

3.3.3. Caracteristice numerice ale variabilei aleatoare de tip discret

Cunoaşterea legităţii de repartiţie (f.r. sau repartiţia) a unei v. a. o putem considera o cunoaştere exaustivă (completă) a acesteia din punct de vedere al comportamentului ei probabilist. Însă, uneori, în dependenţă de scopul urmărit, este de ajuns să cunoaştem doar careva valori numerice ce caracterizează sumar v.a. dată. Astfel de valori se numesc *caracteristici numerice*.

Printre caracteristicile numerice care joacă rolul de *parametri de poziţie sau parametri ai tendinţei centrale se enumără valoarea medie şi modul(moda).*

1) Valoarea medie.

Definiţie. Vom numi ***valoare medie*** a unei v.a. discrete ξ date de repartiţia (3.3) numărul

$M\xi = \Sigma_{i\geq 1} x_i p_i$. (3.6)

Observaţie. În cazul când multimea de valori posibile a v.a. este finită suma din partea dreaptă a formulei (3.6) este o sumă finită. Dar dacă multimea de valori posibile a v.a. este infinit numărabilă, atunci vom spune ca ***valoarea medie $M\xi$ există dacă seria numerică $\Sigma_{i\geq 1} x_i p_i$ converge absolut**, adica $\Sigma_{i\geq 1} |x_i| p_i <+\infty$.* Valoarea medie a v.a. $M\xi$ a variabilei aleatoare ξ se mai notează m_ξ sau $E\xi$.

Dacă numărul de experimente repetate în care sunt vizate valorile v.a. ξ este destul de mare, atunci media aritmetică a valorilor observate este aproximativ egală cu valoarea ei medie. În aceasta constă sensul valorii medii.

Propozitia 1. (***Proprietăţile valorii medii***). *Valoarea medie posedă următoarele proprietăţi:*

1. *Daca v.a. ξ ia valori nenegative cu probabilitatea* 1, *atunci $M\xi\geq 0$ şi $M\xi=0$ dacă si numai dacă v.a. ξ ia vloarea 0 cu probabilitatea* 1;
2. *Dacă există valorile medii ale v.a. ξ, η, atunci există si valoarea medie a v.a. $a\xi+\beta\eta$ si $M(a\xi+\beta\eta)= aM\xi+ bM\eta$ pentru orice numere reale a si b;*
3. *Dacă există valoarea medie a v.a. ξ, atuni $|M\xi|\leq M|\xi|$;*
4. *Daca există valorile medii ale v.a. ξ, η şi aceste v.a. sunt independente în sensul ca $P(\xi=x, \eta=y)$, pentru orice x si y din mulţimile de valori posibile ale v.a. respective, atunci exista si valoarea medie a produsului $\xi\cdot\eta$ si $M\xi\cdot\eta=M\xi\cdot M\eta$.*

Următoarea propozitie ne arată cum poate fi calculată valoarea medie a unei functii de v.a.d. ξ atunci cand se cunoaşte doar repartiţia lui ξ.

Propozitie (*Formula de transport*). *Daca v.a.d. ξ este dată de repartitia* (3.3) şi *f(x) este o functie continuă definită pe multimea numerelor reale, astfel incat v.a. $\eta=f(\xi)$ posedă valoare medie, atunci $M\eta=Mf(\xi)=\Sigma_{i\geq 1} f(x_i)p_i$.*

2) Modul. Se numeşte *mod* (modă) a unei v.a.de tip discret acea valoare posibilă a acesteia, careia îi corespunde probabilitatea maximă..

Modul variabilei aleatoare ξ se notează cu $Mo[\xi]$. Din definiţia modului rezultă că

$$Mo[\xi] = x_{j_0}\text{, unde } p_{j_0} = \max_{1\leq j\leq n}\{p_j\}. \qquad (3.7)$$

3) Variabile aleatoare centrate. Dispersia (varianţa). Abaterea medie pătratică. Fie ξ o variabilă aleatoare cu valoarea medie m_ξ. Expresia

$$\xi^o = \xi - m_\xi \qquad (3.8)$$

se numeşte *variabilă aleatoare centrată*. Valoarea medie a variabilei aleatoare centrate este nulă.

Definiţia 1. Se numeşte *dispersie (varianţă)* a variabilei aleatoare ξ valoarea medie a pătratului variabilei aleatoare centrate ξ^o. Dispersia variabilei aleatoare ξ se notează cu $D\xi$, sau D_ξ, sau Varξ. Din definiţia dispersiei rezultă că

$$D\xi = M(\xi^o)^2= M(\xi - m_\xi)^2. \qquad (3.9)$$

Formula de calcul a dispersiei variabilei aleatoare de tip discret este:

$$D\xi = \sum_{j=1}^{n} (x_j - m_\xi)^2 p_j \ . \qquad (3.10)$$

In caz general,

$$D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2 \qquad (3.11)$$

Raţiunea introducerii noţiunii de dispersie rezidă în faptul că aceasta caracterizează *gradul de dispersare (împrăştiere)* a valorilor posibile ale unei v. a. în raport cu valoarea ei medie. Mai exact, cu cat dispersia este mai mică cu atât această impraştiere este mai mică şi invers.

Definiţia 2. Se numeşte *abatere medie pătratică sau abatere standard* a unei v.a. rădăcina pătrată din dispersia ei. Abaterea medie pătratică a variabilei aleatoare ξ se notează cu $\sigma[\xi]$ sau σ_ξ. Din definiţie rezultă că

$$\sigma[\xi] = \sqrt{D\xi} \ . \qquad (3.12)$$

Observatie. În aplicaţii, pentru a caracteriza gradul de imprăstiere a valorilor v.a. cercetate în raport cu valoarea ei medie, este mai usor să operăm cu abaterea medie pătratică, deoarece aceasta se exprimă în aceleaşi unitaţi de masura ca şi v.a. şi valoarea ei medie.

Propozitia 2. (***Proprietăţile dispersiei***). *Dispersia posedă următoarele proprietăţi:*

1. *Dacă dispersia v.a. ξ există, , atunci $\mathbf{D}\xi \geq 0$ şi $\mathbf{D}\xi = 0$ dacă si numai dacă v.a. ξ ia valoarea $\mathbf{M}\xi$ cu probabilitatea* 1;
2. *Dacă există dispersia v.a. ξ, atunci există şi dispersia v.a. $a\xi+b$ si $\mathbf{D}(a\xi+b)= a^2\, \mathbf{D}\xi$ pentru orice numere reale a si b;*
3. *Dacă există dispersiile v.a. ξ, η, atunci există şi dispersia v.a. $\xi+\eta$ si $\mathbf{D}(\xi\pm\eta)= \mathbf{M}\xi+\mathbf{M}\eta\pm 2\mathbf{M}(\xi-\mathbf{M}\xi)(\eta-\mathbf{M}\eta)$;*
4. *Dacă există dispersiile v.a. ξ, η şi aceste v.a. sunt independente în sensul ca $\mathbf{P}(\xi=a, \eta=b)$, pentru orice a şi b din multimile de valori posibile ale v.a. respective, atunci există şi dispersia v.a. $\xi+\eta$ şi $\mathbf{D}(\xi+\eta)=\mathbf{D}\xi+\mathbf{D}\eta$.*

Definiţie. Se numeste *covarianţă* a v.a. ξ,η numarul $\mathrm{cov}(\xi,\eta)=\mathbf{M}(\xi-\mathbf{M}\xi)(\eta-\mathbf{M}\eta)$.

Observaţie. Proprietăţile 3 şi 4 ale dispersiei arată că $\mathrm{cov}(\xi,\eta)=0$, atunci când v.a. ξ,η sunt independente.

1) Momente iniţiale.

Definiţie. Se numeşte *moment iniţial de ordinul s* al unei v.a. valoarea medie a acestei v.a. luată la puterea *s*. Momentul iniţial de ordinul *s* al v.a. ξ se notează cu $\alpha_s[\xi]$. Din definiţia momentelor iniţiale rezultă că:

$$\alpha_s[\xi] = M\xi^s,\ s = 1, 2,... \qquad (3.13)$$

iar *formula de calcul a momentului iniţial de ordinul s al unei v.a.de tip discret* este

$$\alpha_s[\xi] = \sum_{j\geq 1} x_j^s p_j,\ \mathrm{s} = 1, 2,... \qquad (3.14)$$

Observăm că valoarea medie coincide cu momentul iniţial de ordinul întâi.

2) Momente centrate.

Definiţie. Se numeşte *moment centrat* (sau *central*) *de ordinul s* al unei v.a. valoarea medie a puterii *s* a variabilei centrate respective. Momentul centrat de ordinul *s* al v.a. ξ se notează cu $\mu_s[\xi]$. Din definiţie rezultă că

$$\mu_s[\xi] = M(\xi^o)^s,\ \mathrm{s} = 1, 2,... \qquad (3.15)$$

Formula de calcul a momentului centrat de ordinul s al unei v.a.de tip discret are forma

$$\mu_s[\xi] = \sum_{j\geq 1} (x_j - m_\xi)^s p_j\ ,\ s = 1, 2,... \qquad (3.16)$$

Au loc egalităţile $\mu_1[\xi] = 0$, $\mu_2[\xi] = D\xi$.

Relaţiile duntre momentele centrate şi cele iniţiale sunt:

1) $\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$;

2) $\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3$;

3) $\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_3\alpha_1 + 6\alpha_2\alpha_1^2 - 3\alpha_1^4$.

5) Asimetria.

Definiţie. Se numeşte *asimetrie* (*coeficient de asimetrie*) al v.a. ξ numărul notat cu S_k şi dat de egalitatea

$$S_k[\xi] = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \ . \qquad (3.17)$$

6) Excesul.

Definiţie. Se numeşte *exces* al v.a. ξ numărul notat cu ε sau $Ex[\xi]$ şi definit prin egalitatea

$$Ex[\xi]=\frac{\mu_4}{\sigma^4}-3. \qquad (3.18)$$

3.3.5. Exemple de determinare a funcţiei de repartiţie şi de calcul al valorilor caracteristice ale unei v.a.de tip discret.

Exemplul 2. Se dă v.a.de tip discret cu repartiţia

$$\xi:\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 7 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix}. \qquad (3.19)$$

Se cere: 1) să se definească (să se introducă) în Sistemul Mathematica v.a. ξ; 2) să se determine funcţia ei de repartiţie $F(x)$; 3) să se introducă funcţia de repartiţie în Sistemul Mathematica; 4) să se construiască graficul funcţiei $F(x)$; 5) să se calculeze probabilitatea ca v.a. ξ va lua valori din intervalul [3, 8).

Rezolvare. 1) Introducem repartiţia v.a. ξ sub formă de listă cu două linii, elementele căreia sunt elementele liniilor matricei (3.19).

In[6]:=p={{0,2,5,7},{0.3,0.4,0.1,0.2}}

Scriem **p** în forma matriceală cu ajutorul funcţiei **MatrixForm**.

In[7]:=MatrixForm[p]

Out[7]= $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 7 \\ 0.3 & 0.4 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}$

2)Aplicând formula (3.4), găsim funcţia de repartiţie

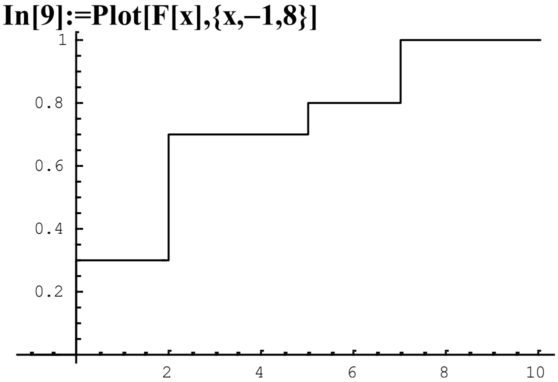
$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ 0{,}3, & 0<x\le 2, \\ 0{,}7, & 2<x\le 5, \\ 0{,}8, & 5<x\le 7, \\ 1, & x>7. \end{cases}$$

3) Introducem funcţia F(x) în Sistemul Mathematica cu ajutorul funcţiei **Condition**, notată şi cu **/;**.

In[8]:=F[x_]:=0/;x≤0;F[x_]:=0.3/;0<x≤2;F[x_]:=0.7/;2<x≤5;F[x_]:=0.8/;5<x≤7;F[x_]:=1/;7<x;

4) Construim graficul funcţiei de repartiţie cu ajutorul funcţiei **Plot**.

In[9]:=Plot[F[x],{x,–1,8}]



Out[9]=Graphics;

5) Folosim formula *a)* din Propoziţie, vezi punctul 3.2.3 al acestui capitol:

In[10]:=P(3≤ξ<8)=F[8]–F[3]

Out[10]=0.3

Rezolvarea exerciţiului s-a terminat. Cum funcţia de repartiţie $F(x)$ din acest exerciţiu nu se foloseşte în exerciţiile ce urmează, dar notaţia se foloseşte, trebuie să scoatem definiţia ei din Sistem. Matricea **p** mai rămâne în Sistem, deoarece ea se va folosi la rezolvarea exerciţiului următor. **In[10]:=Clear[F].**

Exerciţiul 3. Fiind dată aceeasi v.a. ξ cu repartiţia (3.19), să se calculeze: 1) valoarea medie; 2) dispersia; 3) abaterea medie pătratică; 4) momentele iniţiale de ordine până la 4 inclusiv; 5) momentele centrate de ordine până la 4 inclusiv; 6) asimetria; 7) excesul.

Rezolvare. 1) Calculăm valoarea medie cu ajutorul formulei (3.6).

In[11]:= $m_\xi=\sum_{j=1}^{4} p[[1,j]]p[[2,j]]$

Out[11]=2.7

Am obţinut m_ξ=2,7. Aici **p[i,j]** este notaţia elementului p_{ij} al matricei **p**.

2) Determinăm dispersia conform formulei (3.12).

In[12]:= $D\xi = \sum_{j=1}^{4}((p[[1,j]] - m_{\xi})\text{^}2)p[[2,j]]$

Out[12]=6.61

Am obţinut $D\xi$=6,61.

3) Aplicăm formula (3.13).

In[13]:= $\sigma_{\xi} = \sqrt{D\xi}$

Out[13]=2.57099

Am obţinut σ_{ξ}=2,57099.

4) Pentru calculul momentelor iniţiale folosim formulele (3.14).

In[14]:= $\alpha_1 = \sum_{j=1}^{4}((p[[1,j]])\text{^}1)p[[2,j]]$

Out[14]=2.7

In[15]:= $\alpha_2 = \sum_{j=1}^{4}((p[[1,j]])\text{^}2)p[[2,j]]$

Out[15]=13.9

In[16]:= $\alpha_3 = \sum_{j=1}^{4}((p[[1,j]])\text{^}3)p[[2,j]]$

Out[16]=84.3

In[17]:= $\alpha_4 = \sum_{j=1}^{4}((p[[1,j]])\text{^}4)p[[2,j]]$

Out[17]=549.1

Am obţinut α_1=2,7; α_2=13,9; α_3=84,3; α_4=549,1.

5) Calculăm momentele centrate conform formulelor (3.16).

In[18]:= $\mu_1 = \sum_{j=1}^{4}((p[[1,j]] - m_{\xi})\text{^}1)p[[2,j]]$

Out[18]= $\mathbf{-1.11022\times10^{-16}}$

Se ştie că $\mu_1 = 0$. Aici am obţinut un număr foarte aproape, dar totuşi diferit de zero. Aceasta se întâmplă uneori când se operează cu numere aproximative. După rotunjire se obţine aceeaşi valoare 0.

In[19]:= $\mu_2 = \sum_{j=1}^{4}((p[[1,j]] - m_{\xi})\text{^}2)p[[2,j]]$

Out[19]=6.61

In[20]:= $\mu_3 = \sum_{j=1}^{4}((p[[1,j]] - m_{\xi})\text{^}3)p[[2,j]]$

Out[20]=11.076

In[21]:= $\mu_4 = \sum_{j=1}^{4}((p[[1,j]] - m_{\xi})\text{^}4)p[[2,j]]$

Out[21]=87.2137

Am obţinut μ_1=0; μ_2=6,61; μ_3=11;076, μ_4=87,2137.

6) Calculăm asimetria conform formulei (3.17).

In[22]:=Sk[ξ]= μ_3/σ^3

Out[22]=0.65175

7) Calculăm excesul conform formulei (3.18).

In[22]:=Ex[ξ]= $\mu_4/\sigma^4 - 3$

Out[22]=–1.0039

Rezolvarea exerciţiului s-a terminat. Eliberăm parametrii de valorile atribuite în acest exerciţiu.

In[23]:=Clear[p, m_{ξ}**,** D_{ξ}**,** σ_{ξ}**,** $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$**,** μ_1,μ_2,μ_3,μ_4**,Sk[ξ],Ex[ξ]].**

3.4. Repartiţii (modele probabiliste) uzuale (clasice) in caz discret

3.4.1. Funcţia generatoare a variabilei aleatoare

În caz discret este comod uneori ca probabilităţile sau caracteristicile numerice ale unei v.a. ce poate lua valori din multimea numerelor naturale, inclusiv 0, să fie calculate cu ajutorul unei funcţii numite *funcţie generatoare* .

Fie că variabila aleatoare ξ are repartiţia

$$\xi:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & k & \dots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \dots & p_k & \dots \end{pmatrix} \qquad (3.20)$$

Definiţie.Se numeşte *funcţie generatoare* a v.a. (20) funcţia $\varphi(z)$ definită prin egalitatea

$$\varphi(z)=\sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k \quad , \qquad (3.21)$$

unde z este un parametru, care ia valori din intervalul (0;1].

În cazul când v.a. ξ ia valori dintr-o mulţime finită de valori, atunci în expresia (3.21) coeficienţii p_k, începând cu un anume indice, sunt egali cu zero. Se demonstrează că

$$\alpha_1[\xi] = M\xi = \varphi'(1). \qquad (3.22)$$

$$\alpha_2[\xi] = \varphi''(1) + \varphi'(1). \qquad (3.23)$$

$$\alpha_3[\xi] = \varphi'''(1) + 3\varphi''(1) + \varphi'(1). \qquad (3.24)$$

$$D\xi = \varphi''(1) + \varphi'(1) - [\varphi'(1)]^2. \qquad (3.25)$$

3.4.2. Repartiţiile uniformă, Bernoulli şi binomială

Definiţie. Vom spune că v.a. ξ este *repartizată uniform (de tip discret)* dacă valorile posibile ale ei sunt *0, 1, 2, ..., n*, iar probabilităţile acestor valori sunt date de formula:

$$p_k = P(\xi = k) = 1/(n+1),, k = 0,1,2,..., n., \qquad (3.26).$$

Mai exista si varianta de repartitie uniforma trunchiată în zero, adică valorile posibile ale v.a. sunt 1,2,…,n, iar $p_k = P(\xi = k) = 1/n, k = 0,1,2,..., n.,$ (3.26[1]).

Observaţie. Repartiţia uniformă dată de formulele (3.26) sau (3.26[1]) modelează din punct de vedere matematic alegerea la intâmplare a unui element dintr-o multime de elemente numerotate *0,1,2,...,n* sau *1,2,...,n*, respectiv.

Definiţie. Vom spune că v.a. ξ este *repartizată binomial* cu parametri n şi p dacă valorile posibile ale ei sunt 0, 1, 2, ..., n, iar probabilităţile acestor valori sunt date de formula:

$$p_k = P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, 0 < p < 1, k = 0,1,2,..., n., \qquad (3.26).$$

In particular, *atunci când n=1, repartiţia Binomială se numeşte repartiţie Bernoulli*.

O repartiţie binomială de parametri n şi p se notează cu $Bi(n,p)$. Din definiţie rezultă că o v.a. repartizata binomial sau Bernoulli poate fi dată, respectiv, sub forma:

$$\xi:\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots & n \\ C_n^0 p^0 q^{n-0} & C_n^1 p^1 q^{n-1} & \dots & C_n^k p^k q^{n-k} & \dots & C_n^n p^n q^0 \end{pmatrix}, \ (3.27)$$

$$\xi:\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}. \qquad (3.28)$$

Observaţie. Repartiţia binomială modelează, din punct de vedere matematic, numărul total ξ de „succese ”în n probe Bernoulli cu una şi aceeaşi probabilitate p a „succesului ”în fiecare probă.

Folosind funcţia generatoare se deduc următoarele formule:

$$M\xi = \alpha_1[\xi] = np, \qquad (3.29)$$

$$D\xi = npq, \qquad (3.30)$$

$$\sigma[\xi] = \sqrt{npq} \ . \qquad (31)$$

Dacă $np-q$ este număr întreg, atunci valoarea maximă a probabilităţii $P_n(k)$ se atinge pentru două valori ale lui k: $k_0 = np-q$ şi $k_0' = np-q+1 = np+p$. Dacă $np-q$ este un număr fracţionar, atunci valoarea maximă a probabilităţii $P_n(k)$ se atinge în punctul $k_0 = [np-q]+1$, unde $[np-q]$ este partea întreagă a numărului $np-q$.

Exemplul 4. Un eveniment aleator A, convenţional numit „succes” poate apărea într-un experiment aleatoar cu probabilitatea p = 0,3. Se efectuează 1000 de repetări independente ale acestui experiment. Se cere: 1) să se scrie repartiţia variabilei aleatoare ξ care reprezintă numărul total de apariţii ale evenimentului *A*; 2) sa se calculeze $Mo[\xi]$, 3) $M\xi$, 4) $D\xi$, 5) $\sigma[\xi]$, 6) $P(250\le\xi\le350)$.

Rezolvare. 1) V.a. ξ poate lua una din valorile: 0, 1, 2,…, 1000. Probabilităţile acestor valori se calculează conform formulei Bernoulli. Deci v.a. ξ are repartiţia

$$p_k = P(\xi = k) = P_{1000}(k) = C_{1000}^k (0{,}3)^k (0{,}7)^{1000-k}, \ k = 0, 1, 2, \ldots, 1000.$$

2) Cum $np-q = 1000\cdot0{,}3-0{,}7 = 299{,}3$ este un număr fracţionar, rezultă că modul, adică valoarea posibilă care corespunde celei mai mari probabilităţi este: $Mo[\xi] = [299{,}3]+1 = 299+1 = 300$.

3) $M\xi = np = 1000\cdot0{,}3 = 300$.

4) $D\xi = npq = 1000\cdot0{,}3\cdot0{,}7 = 210$.

5) $\sigma[\xi] = \sqrt{npq} = \sqrt{210}$.

6) Calculăm probabilitatea cerută

$$P(250 \le \xi \le 350) = \sum_{k=250}^{350} C_{1000}^k (0{,}3)^k (0{,}7)^{1000-k}$$

cu ajutorul Sistemului Mathematica.

In[24]:= $\mathrm{N}\left[\sum_{k=250}^{350} \frac{(1000!)*((0.3)\wedge k)*((0.7)\wedge(1000-k))}{(k!)*((1000-k))!}\right]$

Out[24]=0.999509

Am obţinut $P(250\le\xi\le350)=0{,}999509$.

3.4.3. Repartiţia Poisson

Definiţia 1. Vom spune că v.a. ξ are *repartiţia Poisson cu parametrul a*, $a > 0$, dacă ea poate lua în calitate de valori posibile una din valorile 0, 1, ..., *k*,..., probabilităţile cărora sunt date de formula

$$p_k = P(\xi = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \ k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (3.32)$$

unde *a* este un parametru real pozitiv.

Repartiţia Poisson de parametru *a* se notează cu *Poisson*(*a*). Din definiţie rezultă că o v.a. ξ cu repartiţia Poisson(a) poate fi scrisă în forma

$$\xi: \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & k & \ldots \\ \frac{a^0}{0!}e^{-a} & \frac{a^1}{1!}e^{-a} & \ldots & \frac{a^k}{k!}e^{-a} & \ldots \end{pmatrix}. \qquad (3.33)$$

Dacă numerele *n* şi *k* sunt relativ mari şi $npq < 9$, atunci repartiţia binomială de parametrii *n* şi *p* poate fi aproximată cu ajutorul repartiţiei Poisson de parametru $a = np$.

Folosind funcţia generatoare, obţinem că:

$$M\xi = D\xi = a; \ \sigma[\xi] = \sqrt{a}. \qquad (3.34)$$

Dacă *a* este număr întreg, atunci p_k îşi atinge valoarea maximă pentru $k_0 = a$ şi $k_0 = a-1$. Dacă a este fracţionar, atunci $Mo[\xi]=[a]+1$.

Definiţia 2. Se numeşte *flux de evenimente* un şir de evenimente aleatoare, care se produc în momente aleatoare de timp. Un flux de evenimente se numeşte *flux Poisson* dacă el are proprietăţile:

a) este staţionar, adică probabilitatea că într-un anume interval de timp se vor realiza exact *k* evenimente depinde numai de numărul *k* şi de lungimea (durata) intervalului de timp şi nu depinde de începutul lui;

b) probabilitatea realizării a *k* evenimente într-un anume interval de timp nu depinde de numărul de evenimente care s-au realizat înainte de începerea acestui interval;

c) realizarea a două sau mai multe evenimente într-un interval mic de timp are, practic, probabilitate nulă.

Numărul mediu de evenimente dintr-un flux Poisson care se realizează într-o unitate de timp se numeşte *intensitate a fluxului*. Vom nota intensitatea fluxului cu *a.* Atunci are loc următoarea

Propoziţie. *Numărul de realizări ale evenimentelor din fluxul Poisson în t unităţi de timp este o v.a. cu repartiţia*

$$P_t(k) = \frac{(at)^k}{k!} e^{-at}, \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Pentru $t = 1$ din formula precedentă se obţine repartiţia Poisson.

Observaţie. Repartiţia Poisson modelează, din punct de vedere matematic, comportamentul probabilistic al:

1)numărului de particule α (alfa) emise de o substanţă radioactivă într-un anumit interval de timp;
2)numărului de automobile care vin la o staţie de alimentare cu benzină într-o unitate de timp;
3)numărului de clienţi care se adresează la un oficiu poştal într-o zi;
4)numărului de apeluri la un post telefonic într-o unitate de timp;
5)numărului de erori de programare comise de un programator intr-un soft de o anumită lungime;
6)numărului de bacterii descoperite într-o picătură de apă;
7)numărului de erori de tipar care se conţin pe o pagină (sau un grup de pagini) dintr-o carte;
8)numărului de 3 gemeni noi născuţi în decurs de un an în careva ţară;
9)numărului de oameni dintr-o anumită ţară care au depăşit vârsta de 100 de ani;
10)numărului de cutremure de pământ care au loc într-o regiune seismică într-o unitate de timp;
11)numărului de accidente rutiere produse într-un oraş, într-o unitate de timp;
12)numărului de decese printre asiguraţii unei companii de asigurare într-o unitate de timp etc., etc.

Exemplul 5. Numărul mediu de solicitări de taxi recepţionate la un dispecerat într-un minut este egal cu 2. Să se calculeze probabilităţile evenimentelor: A = {*în decursul unui minut va fi recepţionată o singură solicitare*}, B = {*în decursul unui minut vor fi recepţionate nu mai mult de 2 solicitări*}, C = {*în decurs de 1 minut vor fi recepţionate mai mult de 2 solicitări*}.

Rezolvare. Variabila aleatoare ξ care reprezintă numărul de solicitări de taxi într-un minut are repartiţia Poisson de parametru $a = 2$. Această variabilă aleatoare are repartiţia

$$p_k = P(\xi = k) = \frac{2^k}{k!}e^{-2},\ k = 0, 1, 2,\dots \qquad (3.35)$$

1) Cum $P(A) = P(\xi = 1) = \frac{2^1}{1!}e^{-2}$ avem:

In[25]:=N[$\frac{2^1}{1!}e^{-2}$]

Out[25]=0.270671;

2) Cum $P(B) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2)$ din (3.35) avem:

In[26]:=N[$\frac{2^0}{0!}e^{-2} + \frac{2^1}{1!}e^{-2} + \frac{2^2}{2!}e^{-2}$]

Out[26]=0.676676

3) Cum $P(C) = 1 - P(B)$, avem :

In[27]:=N[1–0.676676]

Out[27]=0.323224

Am obţinut $P(A)$=0,270671, $P(B)$=0,676676, $P(C)$=0,323224.

3.4.4. Repartiţia geometrică

Definiţie. Vom spune că o variabilă aleatoare ξ are *repartiţia geometrică* de parametru p, dacă valorile posibile ale ei sunt 0, 1, 2,…, k,.. şi probabilităţile lor sunt date de formula

$$p_k = P(\xi = k) = q^k p,\ 0 < p < 1,\ q = 1-p,\ k = 0, 1, 2,\dots \qquad (3.36)$$

În caz că repartiţia este dată de formula

$$p_k = P(\xi = k) = q^{k-1} p,\ 0 < p < 1,\ q = 1-p,\ k = 1, 2,\dots \qquad (3.37)$$

v.a. ξ se numeşte geometric repartizată trunchiată în zero.

De exemplu, repartiţia (3.36) poate fi scrisă în următoarea formă matriceală:

$$\xi : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & k & \dots \\ p & pq & pq^2 & \dots & pq^k & \dots \end{pmatrix}.$$

Observaţie. Repartiţia geometrică (3.36) modelează, din punct de vedere matematic, numărul total ξ ***de „insuccese "*** înregistrate în experimentul ce constă în repetarea uneia şi aceleiaşi probe Bernoulli (cu probabilitatea p a „succesului "în fiecare probă) până la prima apariţie a „succesului" . Prin analogie, repartiţia geometrică trunchiată în zero (3.37) modeleaza, din punct de vedere matematic, numărul total ξ ***de probe*** (încercări) efectuate în experimentul ce constă în repetarea uneia şi aceleiaşi probe Bernoulli (cu probabilitatea p a în fiecare probă) până la prima aparitie a „succesului"

Cu ajutorul funcţiei generatoare obţinem, de exemplu, *pentru repartiţia geometrică* că:

$$M\xi = 1\ /p \quad D\xi = q/p^2, \quad \sigma[\xi] = \sqrt{q}/p. \qquad (3.38)$$

Analogic, pentru repartiţia geometrică trunchiată în zero

$$M[\xi] = q/p, \ D[\xi] = q/p^2. \qquad (3.39)$$

Exemplul 6. Într-o urnă se conţin 2 bile albe şi 8 bile negre. Se extrage succesiv câte o bilă, cu întoarcere, până la prima apariţie a unei bile albe. Să se determine: 1) repartiţia v.a. ξ care reprezintă numărul de extrageri până la prima apariţie a unei bile albe; 2) $M\xi$; 3) $D\xi$; 4) numărul minim m de extrageri , suficient pentru a afirma, cu probabilitatea 0.7, că pentru extragerea unei bile albe vor fi necesare, mai putin de m extrageri.

Rezolvare. 1) Notăm cu A evenimentul care constă în apariţia unei bile albe la o extragere şi cu N evenimentul care constă în extragerea unei bile negre. Evident că $N = \overline{A}$. Cum în urnă sunt 2 bile albe şi 8 bile negre, rezultă că $P(A) = 0,2$ şi $P(N) = P(\overline{A}) = 1-0,2 = 0,8$.

Pentru ca bila albă să apară prima dată la prima extragere este echivalent cu faptul ca v.a ξ să ia valoarea 1. Probabilitatea acestui eveniment este egală cu $p_1 = P(A) = 0,2$. Evenimentul ca bila albă să apară prima dată la extragerea a doua este echivalent cu faptul ca v.a. ξ să ia valoarea 2. Probabilitatea acestui eveniment este egală cu $p_2 = P(\xi=2) = P(\overline{A} \cap A) = P(\overline{A})P(A) = 0,8\cdot 0,2 = 0,16$. În general, pentru ca bila albă să apară prima dată la prima extragerea cu numarul k este echivalent cu faptul ca v.a ξ să ia valoarea k. Probabilitatea acestui eveniment este egală cu

$$p_k = P(\xi=k) = P(\underbrace{\overline{A} \cap ... \cap \overline{A}}_{k-1 \quad ori} \cap A) = 0,2\cdot(0,8)^{k-1}, \ k = 1, 2, \dots$$

Deci variabila aleatoare ξ are o repartiţie geometrică trunchiata în zero cu parametrul $p = 0,2$.

2) Conform formulei (3.39) avem: $M[\xi] = 1/0,2 = 5$.

3) Din a doua formulă (3.39) obţinem:

$$D[\xi] = (1-0,2)/(0,2)^2 = 20.$$

4) Determinăm numărul m din condiţia

$$0,2 + 0,2\cdot 0,8 + \dots + 0,2\cdot(0,8)^{m-1} > 0,7.$$

Această inecuaţie se reduce la inecuaţia $m > \log_{0,8}0,3$.

Aici aplicăm Sistemul Mathematica.

In[28]:=N[Log[0.8,0.3]]

Out[28]=5.3955

Obţinem $m = 6$.

3.4.5. Repartiţia hipergeometrică

Definiţie. Vom spune că o variabilă aleatoare ξ are o repartiţie hipergeometrică de parametri a, b, n dacă aceasta poate lua una din valorile 0, 1, 2, …, min$\{a, n\}$ cu probabilităţile

$$p_k = P(\xi = k) = \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}, \ k = 0, 1, 2, \dots, \min\{a,n\}. \qquad (3.40)$$

Se demonstrează că

$$M[\xi] = na/(a+b). \qquad (3.41)$$

Repartiţia hipergeometrică apare, de exemplu, în experimentul care constă în extragerea fără întoarcere a bilelor dintr-o urnă care conţine bile de două culori.

3.5. Variabile aleatoare de tip (absolut) continuu şi caracteristicele lor numerice

3.5.1. Noţiune de variabilă aleatoare de tip (absolut) continuu

Se numeşte *v.a.de tip (absolut) continuu* (v.a.c.) o variabilă aleatoare, a carei mulţime de valori posibile reprezintă un interval de numere reale şi funcţia de repartiţie este continuă în intervalul $(-\infty; \infty)$, dar şi derivabilă, cu exceptia poate că, de o mulţime finită sau infinita cel mult numărabilă de puncte de pe acest interval.

3.5.2. Exemple de variabile aleatoare continue

1) Durata funcţionării unui aparat electric este o variabilă aleatoare continuă care poate lua valori din intervalul $[0; \infty)$.

2) Fie că se măsoară lungimea unui obiect sau rezistenţa unei linii electrice cu un aparat de măsurare astfel încât rezultatul măsurării se rotunjeşte până la un număr întreg. Atunci eroarea de rotunjire este o v.a.c. care ia valori din intervalul $(-1; 1)$.

3) Cantitatea anuală de precipitaţii atmosferice în careva regiune este o variabilă aleatoare continuă care ia valori din intervalul $[0; \infty)$.

3.5.3. Funcţia de repartiţie

Funcţia de repartiţie pentru orice variabilă aleatoare a fost definită în unul din paragrafele precedente. Pentru comoditate amintim aici definiţia şi proprietăţile acestei funcţii.

Se numeşte *funcţie de repartiţie* a variabilei aleatoare ξ funcţia $F:\mathbf{R}\to[0,1]$ definită prin egalitatea

$$F(x) = P(\xi < x). \tag{3.42}$$

*Funcţia de repartiţie are următoarele **proprietăţi caracteristice**:*

1) $F(+\infty) = 1$, $F(-\infty) = 0$;

2) $F(x)$ *este o funcţie nedescrescătoare*;

3) $F(x)$ *este continuă la stânga în orice punct* $x\in\mathbf{R}$.

Din formulele de calcul ale probabilitatilor în baza f.r. deducem ca:

$$P(a \le \xi < b) = F(b) - F(a). \tag{3.43}$$

$$P(\xi = a) = 0. \tag{3.44}$$

$$P(a \le \xi < b) = P(a < \xi < b) = P(a < \xi \le b) = P(a \le \xi \le b). \tag{3.45}$$

3.5.4. Densitatea de repartiţie şi proprietăţile acesteia

Definiţie. Vom numi *densitate de repartiţie (d.r.) a v.a.c.* ξ cu f.r. $F(x)$ funcţia $f(x)$ definită prin egalitatea

$$f(x) = F'(x). \tag{3.46}$$

Din definiţie rezultă că f.r. *F(x)* a unei v.a.c. poate fi exprimata prin d.r. *f(x)* a acestei v.a ca fiind

$$F(x) = P(\xi < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

În concluzie, $P(a \le \xi \le b) = \int_a^b f(x)dx$. (3.46[1])

Densitatea de repartiţie este o formă alternativă a *legii de repartiţie* a unei variabile aleatoare continue, echivalenta f.r., în sensul că dacă cunoastem una din aceste forme putem restabili cealalată formă. Prima formă a acestei legi este funcţia de repartiţie. Asadar, v.a.c. este determinată dacă este dată f.r. sau densitatea de repartiţie a acesteia.

Graficul d.r. a unei v.a.c. se numeşte *curbă* sau *linia ei de repartiţie* .

D. r. a v.a.c. are proprietăţile menţionate în următoarea

Propoziţie. *Dacă f(x) este d.r. a v.a.c.* ξ, *atunci*:

1) $f(x) \ge 0,\ \forall x\in\mathbf{R}$; (3.47)

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$; (3.48)

3) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. (3.49)

3.5.5. Caracteristici numerice ale variabilei aleatoare continue

Definitie. Vom numi *valoare a v.a.c.* ξ cu d.r. $f(x)$ numărul $M[\xi]$ (care se notează şi cu m_ξ) definit prin egalitatea

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx, \tag{3.50}$$

cu condiţia ca integrala $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)dx < +\infty$, în caz contrar vom spune ca *v.a.c.* ξ nu poseda valoare medie.

Remarcă. Toate proprietăţile valorii medii enunţate în cazul v.a. de tip discret sunt valabile şi pentru v.a.c.

Se numeşte *modul* al v.a.c. numărul, notat cu $x_0=Mo[\xi]$, pentru care densitatea de repartiţie $f(x)$ ia valoarea maximală. Dacă numărul acesta este unic, atunci repartitia se numeste unimodala, in caz contrar se numeste multimodală.

Se numeşte *mediană* a variabilei aleatoare ξ numărul, notat cu x_m (sau $Me[\xi]$), care verifică condiţia

$$P(\xi < x_m) = P(\xi > x_m) = 1/2. \qquad (3.51)$$

Condiţia (3.51) este echivalentă cu condiţia

$$\int_{-\infty}^{x_m} f(x)dx = 1/2. \qquad (3.52)$$

Ecuaţia (3.52), în raport cu variabila x_m, poate fi aplicată la determinarea medianei.

Folosind noţiunea de valoare medie, ca şi în cazul unei variabile aleatoare de tip discret, se introduc noţiunile de dispersie, abatere medie pătratică, momente iniţiale şi momente centrate. Condiţia lor de existenţă este similară cu conditia de existenţă a valorii medii. Scriem aici numai formulele de calcul ale lor.

Formula de calcul a dispersiei

$$D[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_\xi)^2 f(x)dx\,. \qquad (3.53)$$

Formula de calcul a abaterii medii pătratice

$$\sigma[\xi] = \sqrt{D\xi}\,. \qquad (3.54)$$

Formula de calcul a momentelor iniţiale

$$\alpha_s[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} x^s f(x)dx\,,\ s = 1, 2,... \qquad (3.55)$$

Formula de calcul a momentelor centrate

$$\mu_s[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_\xi)^s f(x)dx\,,\ s = 1, 2,... \qquad (3.56)$$

Remarcă. Proprietăţile dispersiei v.a.c sunt aceleasi ca şi în cazul v.a. de tip discret. Relaţiile dintre momentele iniţiale şi cele centrate pentru v.a.de tip continuu sunt la fel ca şi în cazul v.a. de tip discret.

Fie ξ o v.a., care poate lua numai valori nenegative, dar cu valoare medie nenulă. Se numeşte *coeficient de variaţie* a acestei variabile aleatoare numărul v definit prin egalitatea

$$v = \sigma_\xi/m_\xi. \qquad (3.57)$$

Se numeşte *coeficient de asimetrie* (sau *asimetrie*) a variabilei aleatoare ξ mărimea, notată cu Sk, definită prin egalitatea

$$Sk[\xi] = \mu_3/\sigma^3. \qquad (3.58)$$

Se numeşte *exces* al variabilei aleatoare ξ mărimea, notată cu ε sau Ex, definită prin egalitatea

$$Ex[\xi] = \mu_4/\sigma^4 - 3. \qquad (3.59)$$

3.5.6. Exemple

Exemplul 7. Variabila aleatoare ξ este definită prin d.r.

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)/18, & x \in [2;8], \\ 0, & x \notin [2;8] \end{cases}$$

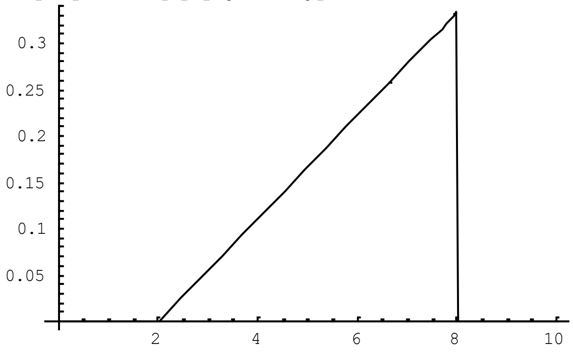
Să se găsească: 1) linia de repartiţie; 2) probabilitatea ca ξ să ia valori din intervalul inchis [5; 10]; 3) f.r. şi graficul ei; 4) valoarea ei medie; 5) dispersia; 6) abaterea medie pătratică; 7) momentele iniţiale de ordinele *1,2,3 si 4*; 8) momentele centrate de ordinele *1,2,3 şi 4*; 9) coeficientul de asimetrie; 10) excesul; 11) coeficientul de variaţie.

Rezolvare. 1) Introducem densitstea de repartiţie în Sistemul Mathematica.

In[30]:=f[x_]:=0/;x<2;f[x_]:=(x–2)/18/;2≤x≤8;f[x_]=0/;x>8;

Construim linia de repartiţie, adică graficul funcţiei f(x).

In[31]:=Plot[f[x],{x,0,10}]



Out[31] Graphics.

2) Calculăm probabilitatea cerută conform formulei (3.47).

In[32]:=NIntegrate[f[x],{x,5,8}]

Out[32]=0.75.

3) Determinăm f.r. Cum toate valorile posibile ale v.a.c. ξ aparţin segmentului [2,8], rezultă că $F(x)=0$, $x<2$, şi $F(x)=1$, $x>8$. Determinăm această funcţie pe segmentului [2,x] folosind formula (3.49).

In[33]:=F1[x]=$\int_2^x \frac{t-2}{18}dt$

Out[33]=$\frac{1}{9}-\frac{x}{9}+\frac{x^2}{36}$

Deci funcţia de repartiţie este

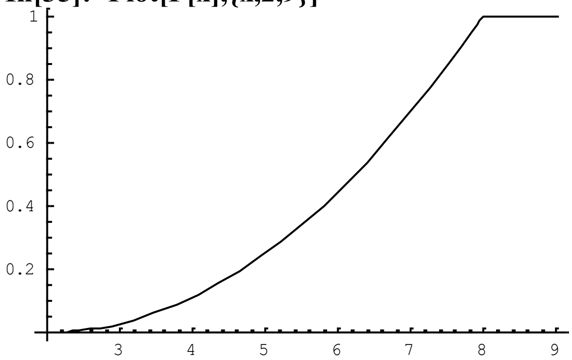
$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \frac{1}{9}-\frac{x}{9}+\frac{x^2}{36}, & 2\le x\le 8, \\ 1, & x>8. \end{cases}$$

Introducem această funcţie în Sistemul Mathematica.

In[34]:=F[x_]:=0/;x<0;F[x_]:=$\frac{1}{9}-\frac{x}{9}+\frac{x^2}{36}$**/;2≤x≤8/;F[x_]:=1/;x>8;**

Construim graficul funcţiei $F(x)$ cu ajutorul funcţiei **Plot**.

In[35]:=Plot[F[x],{x,2,9}]



Out[35]=Graphics.

4) Calculăm valoarea medie folosind formula (3.50). Avem

In[36]:=m$_\xi$**=NIntegrate[x*f[x],{x,2,8}]**

Out[36]=6.

Am obţinut $m_\xi=6$.

5) Calculăm dispersia conform formulei (3.53).

In[37]:=N[$\int_2^8 (x-m_\xi)^2 f(x)dx$**]**

Out[37]=2.

6) Calculăm abaterea medie pătratică σ_ξ conform formulei (3.54).

In[38]:=σ_ξ**=** $\sqrt{2}$

Out[38]=1.41421.

7) Momentul iniţial α_1 coincide cu speranţa matematică şi deci $\alpha_1[\xi] = m_\xi = 6$. Găsim celelalte momente iniţiale conform formulei (3.55).

In[39]:=N[$\int_2^8 x^2 f(x)dx$**]**

Out[39]=38

In[40]:=N[$\int_2^8 x^3 f(x)dx$**]**

Out[40]=250.4

In[41]:=N[$\int_2^8 x^4 f(x)dx$**]**

Out[41]=1699.2

Am obţinut α_1=6, α_2=38, α_3=250,4, α_4=1699,2.

7) Momentul centrat de ordinul 1 este egal cu zero pentru orice v.a.:
$\mu_1 = 0$. Momentul centrat de ordinul doi coincide cu dispersia şi deci $\mu_2 = D_\xi = 2$. Calculăm momentele μ_3 şi μ_4 folosind formulele (3.55).

In[42]:=μ3=N[$\int_2^8 (x-m_\xi)^3 f(x)dx$ **]**

Out[42]=–1.6

In[43]:=μ4=N[$\int_2^8 (x-m_\xi)^4 f(x)dx$ **]**

Out[43]=9.6

Am obţinut $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 2$, $\mu_3 = -1{,}6$, $\mu_4 = 9{,}6$.

9) Calculăm coeficientul de asimetrie conform formulei (3.58):

In[44]:=Sk[ξ]=μ3/(σξ)³

Out[44]=–0.565685

10) Folosim formula de calcul al excesului (3.59).

In[45]:=Ex[ξ]=μ4/(σξ)⁴–3

Out[45]=–0.6.

11)Calculăm coeficientul de variaţie conform formulei (3.57).

In[46]:=vξ=σξ/mξ

Out[46]=0.235702

Rezolvarea exerciţiului s-a terminat. Scoatem valorile parametrilor din acest exerciţiu.

In[47} :=Clear[f,F,mξ,σξ,μ1, μ2, μ3, μ4,Sk[ξ],Ex[ξ],vξ].

3.6. Modele probabiliste (repartiţii) te tip (absolut) continue (uzuale) clasice

3.6.1. Repartiţia uniformă

Vom spune că v.a.c. ξ are *repartiţie uniformă* pe segmentul [*a*, *b*], dacă densitatea ei de repartiţie are forma

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a), & x \in [a;b], \\ 0, & x \notin [a;b]. \end{cases} \quad (3.60)$$

În calitate de *exemplu de variabilă aleatoare cu repartiţia uniformă* poate servi durata aşteptării autobuzului care vine la staţie peste fiecare 5 minute, în cazul când pasagerul vine la staţie într-un moment aleator de timp (independent de orarul circulaţiei autobuzului).

Folosind formula (3.49), determinăm funcţia de repartiţie $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ (x-a)/(b-a), & a \le x \le b, \\ 1, & x > b. \end{cases} \quad (3.61)$$

Valoarea medie este $m_\xi = (b-a)/2$, iar *dispersia* este $D_\xi = (b-a)^2/12$. Repartiţia uniformă nu are *mod*. *Mediana* este egală cu $(b+a)/2$.

În particular, atunci cand *a=0, b=1,* avem *repartitia uniformă* pe segmentul *[0,1]*. Orice limbaj de programare evoluat (C++, Java, etc.) conţine funcţia *random* cu ajutorul căreia putem simula valori ale unei v.a. uniform repartizate pe *[0,1]*.

Remarcă. Asa cum repartitia uniformă pe *[0,1]* modelează, din punct de vedere matematic, experimentul imaginar, ce constă în aruncarea la întâmplare a unui punct pe segmentul *[0,1]*, tot asa repartiţia uniformă pe *[a,b]* modelează matematic experimentul imaginar cu aruncarea la întamplare a unui punct pe segmentul *[a,b]*. Are loc urmatoarea

Propoziţie. *Dacă v.a. ξ este uniform repartizată pe segmentul [a,b] , atunci v.a. η= (ξ-a) / (b-a) este uniform repartizată pe [0,1]. Dimpotrivă, dacă v.a. η este uniform repartizată pe [0,1], atunci v.a. ξ =(b-a)η+a este uniform repartizată pe [a,b].*

Exemplul 8. Un troleibuz soseşte în staţie peste fiecare 5 minute. Care este probabilitatea că un pasager, care vine în staţie într-un moment aleator de timp, va aştepta troleibuzul cel mult 2 minute (evenimentul *A*)?

Rezolvare. D.r. a v.a. ξ, care reprezintă durata aşteptării troleibuzului, este

$$f(x)=\begin{cases}1/5, & x\in[0;5],\\ 0, & x\notin[0;5].\end{cases}$$

In[48]:= $P(0\le\xi\le 2)=\int_0^2(1/5)dx$

Out[48[=2/5

Am obţinut $P(A)$=2/5.

3.6.2. Repartiţia exponenţială

Vom spune că o v.a.c. ξ are *repartiţie exponenţială* de parametrul λ, λ>0, dacă densitatea ei de repartiţie are forma

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases} \tag{3.62}$$

Funcţia de repartiţie este

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases} \tag{3.63}$$

Folosind f.r., obţinem probabilitatea că o v.a. cu repartiţie exponenţială să ia valori din intervalul închis [*a*; *b*], 0 < *a* < *b* coincide cu:

$$P(a<\xi<b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}.$$

Au loc egalităţile:

$$M[\xi]=1/\lambda.\ D[\xi]=1/\lambda^2;\ \ \sigma[\xi]=1/\lambda. \tag{3.64}$$

Un exemplu de v.a. care are repartiţie exponenţială de parametru λ este durata vietii unui calculator. Funcţia

$$R(x)=1-F(x)=e^{-\lambda x},\ x\ge 0 \tag{3.65}$$

se numeşte *funcţie de fiabilitate* a aparatului şi valoarea ei în punctul *x* reprezintă probabilitatea că aparatul să funcţioneze fără refuz *x* unităţi de timp. Or, funcţia de fiabilitate este, prin definiţie, funcţia

$$R(x)=1-F(x),\ x\ge 0.$$

Această repartiţie poseda o propretate remarcabilă redata în:

Propoziţie *(Proprietatea lipsei „memoriei”).* *Dacă v.a. ξ este exponenţial repartizată cu parametrul λ, λ>0, atunci are loc proprietatea „lipsei memoriei” în sensul că probabilitatea condiţionata*

$$\boldsymbol{P(\xi<t+h/\xi\ge t)}=\ F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda h}, & h>0,\\ 0, & h\le 0.\end{cases}$$

Exemplul 9. Fie că durata funcţionării fără a iesi din functiune a unui PC este o variabilă aleatoare ξ care are repartiţie exponenţială de paramertul λ = 0,001. Să se determine: 1) d.r.; 2) f.r.; 3) fiabilitatea; 4) valoarea medie şi dispersia; 5) probabilitatea ca PC-ul să funcţioneze fără refuz cel puţin 2000 de ore (evenimentul *A*).

Rezolvare. 1) Cum λ = 0,001, din (3.62) rezultă că densitatea de repartiţie a variabilei aleatoare ξ este

$$f(x)=\begin{cases}0{,}001e^{-0{,}001x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

2) Conform formulei (3.63), funcţia de repartiţie este

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-0{,}001x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

3) Din (3.65) rezultă că funcţia de fiabilitate este

$$R(x) = e^{-0{,}001x},\ x \geq 0.$$

4) Din (3.64) rezultă că valoarea medie este $M[\xi] = 1/0{,}001 = 1000$, iar dispersia este $D[\xi] = 1/(0{,}001)^2 = 1000000$.

5) Folosim formula (3.65).

In[49]:=P(ξ>2000)=N[e$^{-0.001*2000}$]

Out[49]=0.135335

Am obţinut $P(A)$=0,135335.

3.6.3. Repartiţia normală

Vom spune că v.a.c. ξ are *repartiţie normală*, dacă d.r. este de forma

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (3.66)$$

unde m şi $\sigma > 0$ sunt valori constante reale, numite *parametri* ai repartiţiei normale.

Atunci când $m=0$ şi $\sigma=1$ repartiţia se mai numeste normală standard cu parametrii 0 şi 1. In acest caz functia de repartitie coincide cu

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2} dt.$$

Exemple de v.a.c. de repartiţie normală sunt: cantitatea anuală de precipitaţii atmosferice dintr-o anumită regiune, eroarea care se obţine la măsurarea unei mărimi cu un aparat cu gradaţii, înălţimea unui bărbat luat la întamplare.

Linia repartiţiei normale poartă denumirea de *linia lui Causs*. **Propozitie.** *F.r. a v.a ξ normal repartizate cu parametrii m şi σ coincide cu*

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right), \qquad (3.67)$$

unde Φ(x) este funcţia Laplace care se defineşte prin egalitatea

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt, \qquad (3.68)$$

şi reprezintă f.r. a unei v.a. repartizată normal standard cu parametrii 0,1.

Cu alte cuvinte *Φ(x)*, fiind f.r. a unei v.a. normal standard repartizate cu parametrii 0 şi 1, au loc egalităţile:

$$m_\xi = m,\ D_\xi = \sigma^2,\ \sigma_\xi = \sigma, \qquad (3.69)$$

$$P(\alpha \leq \xi \leq \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right). \qquad (3.70)$$

Exemplul 10. Presupunem că, anual, cantitatea de precipitaţii atmosferice dintr-o anumita regiune este o v.a.c. cu repartiţie normală de parametri m = 400 mm şi σ = 100 mm. Să se calculeze probabilitatea că la anul viitor cantitatea de precipitaţii atmosferice va întrece 500 mm (evenimentul A).

Rezolvare. Densitatea de repartiţie este

$$f(x) = \frac{1}{100\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-400)^2}{2(100)^2}}.$$

Folosim formula (3.46^1).

In[50]:=N[$\int_{500}^{\infty} \frac{1}{100\sqrt{2\pi}} e^{-(x-400)^2/(2*100^2)} dx$ **]**

Out[50]=0.158655

Am obţinut $P(A)$=0,158655.

Sistemul Mathematica contine un pachet de programe dedicat repartiţiei normale. Acest pachet poate fi înstalat cu agutorul funcţiei **<<Statistics`NormalDistribution`.** Dăm un exemplu de utilizare a acestui pachet.

Exemplul 11. Fie ξ o v.a.c. cu repartiţie normală de parametri m=3 şi σ=2. Se cere: 1) să se instaleze pachetul de programe **Statistics`NormalDistribution`** ; 2) să se definească (introducă) v.a.c. dată ; 3) să se determine d.r. ; 4) să se construiască linia de repartiţie ; 5) să se determine f.r.; 6) să se construiască graficul f.r.; 7) să se construiască, pe acelaşi desen, graficele d.r. şi a f.r.; 8) să se construiască pe acelaşi desen graficele d.r. a f.r. astfel, ca grosimea graficului densităţii de repartiţie să fie egală cu 0,5 din grosimea standard, iar grosimea graficului funcţiei de repartiţie să fie egală cu 0,9 din grosimea standard.

Rezolvare. 1) Ne aflăm (lucrăm cu un document) în Sistemul Mathematica. Instalăm pachetul cerut de programe.

Statistics`NormalDistribution`

1) Definim v.a.c. dată ξ de repartiţie normală şi îi dăm numele **rn**.
2)

```
In[21]:= rn = NormalDistribution[3, 2]
Out[21]= NormalDistribution[3, 2]
```

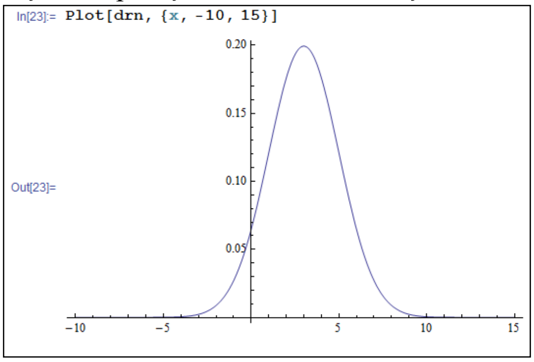
3) Definim densitatea de repartiţie şi îi dăm numele **drn**.
4)

```
In[22]:= drn = PDF[rn, x]
```

Out[22]= $\dfrac{e^{-\frac{1}{8}(-3+x)^2}}{2\sqrt{2\pi}}$

4) Construim graficul densităţii de repartiţie drn folosind funcţia Plot.

```
In[23]:= Plot[drn, {x, -10, 15}]
```



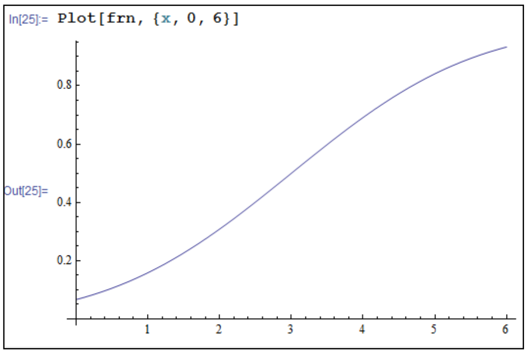
5) Definim funcţia de repartiţie şi îi dăm numele **frn**.

```
In[24]:= frn = CDF[rn, x]
```

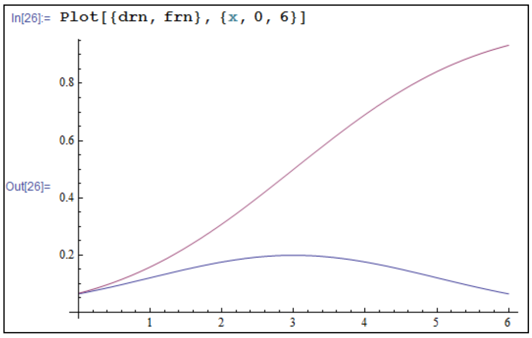
Out[24]= $\frac{1}{2}\,\mathrm{Erfc}\left[\frac{3-x}{2\sqrt{2}}\right]$

Aici funcţia Erf este următoarea

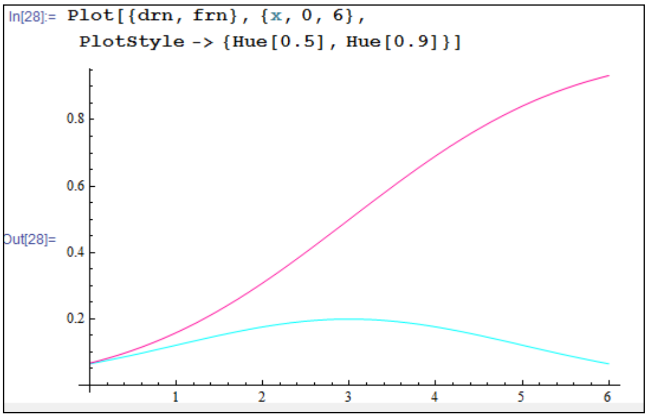
```
In[25]:= Plot[frn, {x, 0, 6}]
```



6)Construim graficul funcţiei de repartiţie.



7) Construim pe acelaşi desen graficul densităţii de repartiţie cu grosimea egală cu 0,5 din grosimea standard şi graficul funcţiei de repartiţie cu grosimea egală cu 0,9 din grosimea standard



Pe ecran apare graficul densităţii de repartiţie de culoare albastră şi graficul funcţiei de repartiţie de culoate roşie.

Rezolvarea exerciţiului s-a terminat. Rămune să scoatem valorile parametrilor.

```
In[29]:= Clear[rn, drn, frn]
```

3.6.4. Repartiţia gamma

Se spune că v.a. continuă ξ are *repartiţia gamma* de parametri a şi b, dacă densitatea de repartiţie a ei este

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{a-1}e^{-x/b}}{b^a\Gamma(a)}, & a>0,\ b>0, \quad x\geq 0,\\ 0, \quad x<0,\end{cases} \tag{3.71}$$

unde Γ este funcţia gamma, care se defineşte prin egalitatea

$$\Gamma(a)=\int_0^{\infty} t^{a-1}e^{-t}dt.$$

Au loc egalităţile $M\xi = ba$, $D\xi = b^2a$, $\sigma[\xi]=b\sqrt{a}$.

3.6.5. Repartiţia hi-pătrat (χ^2)

Se spune că variabila aleatoare continuă ξ are repartiţie hi-pătrat (χ^2) de parametri r şi σ dacă are densitatea de repartiţie

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{r/2-1}e^{-x/(2\sigma^2)}}{2^{r/2}\sigma^r\Gamma(r/2)}, & \sigma>0, r\in N, \quad x\geq 0,\\ 0, \quad x<0.\end{cases} \tag{3.72}$$

Repartiţia hi-pătrat este un caz particular al repartiţiei gamma: funcţia (3.72) se obţine din (3.71) pentru $a = r/2$ şi $b = 2\sigma^2$. Folosind rezultatele punctului precedent, deducem că pentru o variabilă aleatoare ξ cu repartiţia hi-pătrat (3.71) avem:

$$M\xi = r\sigma^2,\ \ D\xi = 2r\sigma^4,\ \ \sigma[\xi] = \sigma\sqrt{2r}\ .$$

Se demonstrează că dacă $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_r$ sunt variabile aleatoare cu repartiţie normală de parametri $m = 0$ şi $\sigma = 1$, atunci variabila aleatoare

$$\xi = \xi_1^2 + \xi_2^2 + ... + \xi_r^2$$

are repartiţie hi-pătrat de parametri $\sigma = 1$ şi r.