

SISTEMUL DE PROGRAME MATHEMATICA.

Rezolvarea exercițiilor din Matematici

(Material didactic pentru începători)

1. Generalități

a) **Începutul lucrului.** În calculator este instalat corect sistemul **Mathematica**

Varianta 1. Poziția inițială: masa de lucru pe care este instalată pictograma Mathematica. Facem dublu clic pe pictograma Mathematica. Se lansează sistemul Matematica și apare fereastra **Untitled 1** și o paletă cu simboluri. Se poate de scris ce trebuie în această fereastră. Astfel se va începe un document. Dacă paleta nu apare, atunci ea poate fi instalată tastând: File, Paletes, 4.Basicinput.

Varianta 2. Poziția inițială: masa de lucru pe care nu este instalată pictograma Mathematica. Pentru a apela sistemul Mathematica tastăm: Start, Programs, Mathematica. Apare fereastra Untitled 1 și se poate de început lucrul cu acest sistem.

b) **Tipul documentelor.** Documentele în sistemul Mathematica sunt de tipul **notebook**. Ele conțin, în caz general, texte cu comentarii și celule care conțin formule matematice și rezultatele rezolvărilor problemelor în diferite forme, inclusiv tabele, matrice și grafice. Denumirile funcțiilor se aseamănă cu cele obișnuite și se încep cu literă majusculă: **Sin[x]**, **Save[eqn,x]**,...

c) **Rezolvarea unei probleme.** Pentru a rezolva o problemă trebuie de scris instrucțiunea respectivă și de tastat **Shift+Enter** (sau Enter de lângă cifre, din partea dreaptă). Se afișează

In[nr.d.r] :=instrucțiunea

Out[nr.d.r]=rezultatul.

În paranteze pătrate se conține numărul de rând al problemei care s-a rezolvat în documentul curent. Dacă instrucțiunea n-a fost scrisă corect, atunci se afișează indicații în privința greșelii și conținutul instrucțiunii.

d) **Finisarea lucrului.** Dacă după lucrul cu documentul dat pentru prima dată vrem să-l păstrăm, atunci tastăm : File, Save As (scriem numele dorit al documentului), Save. Astfel noul document se va salva în sistemul Mathematica. Dacă se lucrează cu un fișier vechi, atunci salvarea redacției noi a lui se efectuează prin tastările : File, Save. Documentul poate fi salvat și pe un careva disc în mod obișnuit.

e) **Utilizarea parantezelor.** Parantezele rotunde (și) se folosesc pentru a grupa expresii; parantezele pătrate [și] se folosesc pentru delimitarea argumentelor funcției, iar acoladele { și } se folosesc pentru delimitarea elementelor din listă.

f) **Observație.** Textul care urmează este scris în Microsoft Word. Pentru scrierea unor formule se folosește redactorul Equation și de aceea literele latine sunt scrise italic. Acest text poate fi scris direct în Mathematica, unde literele se scriu normal și în așa fel se afișează. Folosirea redactorului Microsoft Word face ca textul să fie scris mai compact.

2. Operații aritmetice și de calcul

În Sistemul de programe Mathematica se folosesc următoarele **notații**: **Pi** este notația numărului π ; **E** este notația numărului e ; **I** este notația numărului $i = \sqrt{-1}$; **Infinity** este notația lui ∞ ; **n!** este notația lui n factorial; **x + y** -- adunarea, **x - y** -- scăderea, **x/y** -- împărțirea, **x*y** sau **x y** -- înmulțirea (la înmulțire între x și y se pune sau semnul * sau spațiu liber), **-x** -- minus x , **x^y** -- ridicarea la putere x^y , **x = y** -- egalitate, **x > y** -- mai mare, **x < y** -- mai mic, **x >= y** -- mai mare sau (și) egal, **x <= y** -- mai mic sau (și) egal, **x! = y** -- x este diferit de y . Termenii se grupează cu ajutorul parantezelor rotunde. Se folosesc și notații obișnuite.

La rezolvarea problemelor de aritmetică și de calcul pot fi folosite și funcțiile ce urmează.

Plus[x,y,...,z] -- calculează suma $x+y+\dots+z$;

Times[x,y,...,z] -- calculează produsul $xy\dots z$;

Power[x,n] -- calculează expresia x^n ;

List[x₁,x₂,...,x_n] -- creează lista $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$;

Rule[a,b] -- efectuează substituția $a \rightarrow b$;

Set[a,b] -- atribuie lui a valoarea b ;

Prime[n] -- determină al n -lea număr prim;

FactorInteger[n] -- determină factorii primi ai numărului n și exponenții puterilor lor;

Max[x,y,...,z] -- determină cel mai mare număr din lista dată;

Min[x,y,...,z] -- determină cel mai mic număr din lista dată;

Abs[x] -- determină valoarea absolută a numărului real x și modulul numărului complex x .

....

Exemplul 2.1. Se dă o expresie aritmetică :

$$\frac{3^5(25+4)-52}{45+36}. \quad (2.1)$$

Se cere :a) să se determine valoarea exactă a acestei expresii ; b) să se determine o careva valoare aproximativă a expresiei date ; c) să se determine o valoare aproximativă care conține 10 cifre semnificative.

Rezolvare. a) Pentru a obține valoarea exactă a expresiei (2.1) procedăm astfel. Scriem această expresie cu ajutorul paletei în forma (2.1)

sau în forma $\frac{3^5(25+4)-52}{45+36}$ și tastăm Shift+Enter (sau Enter de lângă cifre). Se afișează :

$$\text{In}[1] := \frac{3^5(25+4)-52}{45+36}$$

$$\text{Out}[1]=\frac{6995}{81}.$$

b) Pentru a obține o valoare aproximativă scriem un punct după un număr (de exemplu 45.) din expresie. Acest număr va fi considerat aproximativ și rezultatul se va obține tot aproximativ. Deci scriem expresia dată în forma

: $\frac{3^5(25+4)-52}{45.+36}$ și tastăm Shift+Enter. Se afișează:

$$\text{In}[2] := \frac{3^5(25+4)-52}{45.+36}$$

$$\text{Out}[2]=86.358.$$

Altă variantă de rezolvare. Același rezultat se obține dacă scriem

$\frac{3^5(25+4)-52}{45+36} // N$ și tastăm Shift+Enter. Se afișează

$$\text{In}[3] := \frac{3^5(25+4)-52}{45+36} // N$$

$$\text{Out}[3]=86.358.$$

c) Scriem $N[\frac{3^5(25+4)-52}{45+36}, 10]$ și tastăm Shift+Enter. Se afișează

$$\text{In}[4] := \frac{3^5(25+4)-52}{45+36}$$

$$\text{Out}[4]=86.35802469.\Delta$$

Exemplul 2.2. Să se determine primul număr prim.

Rezolvare. Scriem: Prime[1] și tastăm Shift+Enter. Se afișează

In[4] := Prime[1]

Out[5]=2.Δ

Exemplul 2.3. Să se extragă rădăcina pătrată din primul număr prim (adică din doi): a) să se afișeze rezultatul cu 20 cifre semnificative; b) să se afișeze o valoare aproximativă arbitrară.

Rezolvare. a) Scriem $N[\sqrt{2},20]$ și tastăm Shift+Enter. Se afișează

In[6] := N[$\sqrt{2}$,20]

Out[6] =1,4142135623730950488.

b) Scriem $\sqrt{2} //N$ și tastăm Shift+Enter. Se afișează :

In[7] := $\sqrt{2} //N$

Out[7] =1,41421.Δ

Exemplul 2.4. Se dă expresia 59^{50} . Se cere : a) să se calculeze valoarea exactă a acestei expresii ; b) să se determine o valoare aproximativă cu 20 cifre semnificative ; c) să se determine o valoare aproximativă arbitrară.

Rezolvare. a) Scriem 59^{100} și tastăm Shift+Enter. Se afișează:

In[8] := 59^{50}

**Out[8] =348819360947527950510172346588429748447853806213639
14440454139574943350485761787882807001.**

b) Scriem $N[59^{50},20]$ și tastăm Shift+Enter. Se afișează:

In[9] := N[59^{50} ,20]

Out[9] = 3.488193609 $\times 10^{88}$.

c) Scriem $59^{50} //N$ și tastăm Shift+Enter. Se afișează:

In[10] := $59^{50} //N$

Out[10] = 3.48819 $\times 10^{88}$.Δ

Exerciții pentru lucrul individual

E.2.1. 1) Să se construiască o expresie care conține cele patru operații aritmetice, ridicarea la putere, fracții și paranteze. 2) Să se determine valoarea exactă a expresiei construite. 3) Să se determine o careva valoare aproximativă. 4) Să se determine o valoare aproximativă care conține 20 cifre semnificative.

E.2.2. Să se determine al n -lea număr prim, unde n este egal cu numărul variantei.

E.2.3. Fiind dat al n -lea număr prim (exercițiul E.2.1), se cere : 1) să se determine o careva valoare aproximativă a rădăcinii pătrate din acest număr; 2) să se determine valoarea aproximativă care conține 20 cifre semnificative a rădăcinii pătrate din acest număr.

E.2.4. Se dă expresia $(10+n)^{30}$, unde n este numărul variantei. Se cere : să se determine valoarea acestei expresii ;

3. Algebra elementară

Dăm câteva exemple de funcții care pot fi aplicate la rezolvarea exercițiilor din algebra elementară.

Solve[lhs==rhs,x] – rezolvă în raport cu variabila x ecuația $\text{lhs} = \text{rhs}$;

NSolve[lhs==rhs,x] – rezolvă numeric ecuația $\text{lhs} = \text{rhs}$ în raport cu variabila x ;

Solve[{lhs1==rhs1,lhs2==rhs2,...},{x,y,...}] – rezolvă în raport cu variabilele x, y, \dots sistemul* de ecuații $\text{lhs}_1=\text{rhs}_1, \text{lhs}_2=\text{rhs}_2, \dots$;

Reduce[inecuație,x] – rezolvă inecuația dată în raport cu variabila x ;

Factor[expresie] – dezvoltă în produs de factori expresia dată;**

Simplify[%] – reduce la o formă mai simplă expresia obținută în exercițiul precedent;

Simplify[expresie] – reduce la o formă mai simplă expresia dată;

Factor[polinom cu coeficienți întregi] – dezvoltă polinoame în produs de factori cu coeficienți întregi;

FactorList[polinom] – determină factorii polinomului și exponenții puterilor lor;

...

Exemplul 3.1. Să se rezolve ecuația $x^4 - x^3 - 8x^2 - 24x + 32 = 0$.

Rezolvare. Scriem $\text{Solve}[x^4 - x^3 - 8x^2 - 24x + 32 == 0, x]$ și tastăm Shift+Enter. Se afișează:

In[1] := Solve $[x^4 - x^3 - 8x^2 - 24x + 32 == 0, x]$

Out[1]={{x→-2-2i},{x→-2+2i},{x→1},{x→4}}.

S-au obținut patru soluții: $x_1 = -2-2i, x_2 = -2+2i, x_3 = 1, x_4 = 4$. Δ

Exemplul 3.2. Să se rezolve inecuația $(x+5)^4 + (x-1)^4 \leq 626$.

Rezolvare. Scriem $\text{Reduce}[(x+5)^4 + (x-1)^4 \leq 626, x]$ și tastăm Shift+Enter. Se afișează

In[2]:=Reduce $[(x+5)^4 + (x-1)^4 \leq 626, x]$

Out[2]= $-4 \leq x \leq 0$. Δ

Exemplul 3.3. Să se dezvolte în produs de factori cu coeficienți întregi expresia $x^{10} - 1$.

Rezolvare. Scriem $\text{Factor}[x^{10} - 1]$ și tastăm Shift+Enter. Se afișează

In[3] := Factor[$x^{10} - 1$]

Out[3] = $(-1+x)(1+x)(1-x+x^2-x^3+x^4)(1+x+x^2+x^3+x^4)$. Δ

Exemplul 3.4. Să se reducă la o formă mai simplă expresia obținută în exercițiul precedent.

Rezolvare. Scriem Simplify[%] și tastăm Shift+Enter. Se afișează

In[4] := Simplify[%]

Out[4] = $-1 + x^{10}$. Δ

Exemplul 3.5. Să se rezolve ecuația $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$: 1) exact; 2) numeric.

Rezolvare. 1) Scriem Solve[$x^3 + x^2 + x + 1 == 0, x$] și tastăm Shift+Enter. Se afișează

In[5] := Solve[$x^3 + x^2 + x + 1 == 0, x$]

Out[5] = $\{\{x \rightarrow -1\}, \{x \rightarrow -i\}, \{x \rightarrow i\}\}$.

S-a obținut o rădăcină reală și două rădăcini complexe conjugate.

2) Scriem NSolve[$x^3 + x^2 + x + 1 == 0, x$] și tastăm Shift+Enter. Se afișează

In[6] := NSolve[$x^3 + x^2 + x + 1 == 0, x$]

Out[6] = $\{\{x \rightarrow -1\}, \{x \rightarrow -7.1245 \times 10^{-19} + 1.i\}, \{x \rightarrow -7.1245 \times 10^{-19} - 1.i\}$.

Observăm că am primit rezultate diferite, dar care diferă foarte puțin unul de altul. Δ

Exerciții pentru lucrul individual

E.3.1. Să se dezvolte în produs de factori expresia $x^n - 1$, unde n este egal cu 10 plus numărul variantei.

4. Exerciții din algebra liniară

Matricele pot fi notate cu A, B, M, a, b, m, ... și ele nu trebuie notate cu C, D. O matrice se introduce în formă de listă, elementele căreia sunt liste care conțin elementele liniilor matricei date. De exemplu matricea

pătratică de ordinul trei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ se introduce în document

(fișier) astfel. Aflându-ne în fereastra acestui document, scriem $A := \{\{a_{11}, a_{12}, a_{13}\}, \{a_{21}, a_{22}, a_{23}\}, \{a_{31}, a_{32}, a_{33}\}\}$ și tastăm Shift+Enter. Se afișează

In[1] := A := $\{\{a_1, a_{12}, a_{13}\}, \{a_{21}, a_{22}, a_{23}\}, \{a_{31}, a_{32}, a_{33}\}\}$.

Astfel matricea A a fost introdusă și cu ea pot fi efectuate operațiile necesare. Dacă vrem ca matricea A să fie scrisă și în forma obișnuită, atunci scriem **MatrixForm[A]** și tastăm Shift+Enter. Se afișează **Out[1]//MatrixForm[A]=**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Printre funcțiile algebrei liniare sunt:

Det[A] – calculează determinantul matricei A și se afișează valoarea lui;

Dot[A,B] – calculează produsul matricelor A și B și se afișează rezultatul în formă de listă;

Inverse[A] – calculează inversa matricei A și o afișează în formă de listă;

Transpose[A] – calculează transpusa matricei A și o afișează în formă de listă ;

Eigenvalues[A] – calculează valorile proprii ale matricei A și le afișează în formă de listă;

Eigenvectors[A] – calculează vectorii proprii ai matricei A și îi afișează în formă de listă, elementele căreia sunt liste alcătuite din coordonatele vectorilor proprii;

Eigensystem[A] – calculează valorile proprii și vectorii proprii ai matricei A și îi afișează în formă de listă primul element al căreia este lista valorilor proprii iar celelalte elemente sunt liste alcătuite din coordonatele vectorilor proprii;

...

Dacă vrem ca matricele să fie afișate în forma obișnuită, atunci în instrucțiuni* în afară de funcția respectivă se introduce și **MatrixForm**. Exemplificăm acest caz.

MatrixForm[A.B] – afișează produsul AB al matricelor A și B în formă de matrice;

MatrixForm[A+B] – afișează în formă de matrice suma A+B a matricelor A și B;

MatrixForm[α*A] – afișează în formă de matrice produsul numărului α cu matricea A,

Transpose[A]//MatrixForm – afișează în formă de matrice transpusa matricei A,

Inverse[A]//MatrixForm – afișează în formă de matrice inversa matricei A,

...

Exemplul 4.1. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ și

numărul α , să se determine: 1) $A+B$; 2) $3A$; 3) AB ; 4) $\det A$; 5) A^{-1} ; 6) A^T .

Rezolvare. Introducem matricele A și B . Pentru aceasta scriem $A:=\{\{1,2,4\},\{5,1,2\},\{3,-1,1\}\}$, tastăm Shift+Enter și se afișează

In[1] :=A:={{1,2,4},{5,1,2},{3,-1,1}}.

Asemănător, scriem $B:=\{\{4,-1,2\},\{2,5,-3\},\{5,6,-2\}\}$, tastăm Shift+Enter și se afișează

In[2] :=B:={{4,-1,2},{2,5,-3},{5,6,-2}}.

Astfel, matricele A și B au fost introduse în document.

1) Pentru calculul sumei $A+B$ scriem $\text{MatrixForm}[A+B]$, tastăm Shift+Enter și se afișează

In[3] :=MatrixForm[A+B],

Out[3]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 6 \\ 7 & 6 & -1 \\ 8 & 5 & -1 \end{pmatrix},$$

2) Pentru a calcula produsul $3A$ scriem $\text{MatrixForm}[3*A]$, tastăm Shift+Enter și se afișează

In[4] :=MatrixForm[3*A],

Out[4]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 \\ 15 & 3 & 6 \\ 9 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

3) Pentru a calcula produsul AB scriem $\text{MatrixForm}[A.B]$, tastăm Shift+Enter și se afișează

In[5] :=MatrixForm[A.B],

Out[5]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 28 & 31 & -12 \\ 32 & 2 & 3 \\ 15 & -8 & 7 \end{pmatrix}.$$

4) Pentru a calcula determinantul matricei A scriem Det[A], tastăm Shift+Enter și se afișează

In[6] :=Det[A]

Out[6]=-27.

5) Pentru a determina inversa matricei A scriem Inverse[A]//MatrixForm, tastăm Shift+Enter și se afișează

In[7] :=Inverse[A]//MatrixForm

Out[7]=MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ -\frac{1}{27} & \frac{11}{27} & -\frac{2}{3} \\ \frac{8}{27} & -\frac{7}{27} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

6) Pentru a determina transpusa matricei A scriem Transpoze[A]//MatrixForm, tastăm Shift+Enter și se afișează

In[8] :=Transpoze[A]//MatrixForm

Out[8]=MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.\Delta$$

Observație. Se știe că înmulțirea numerelor se notează cu semnul *. Dacă încercăm să notăm înmulțirea matricelor cu același semn, atunci nu obținem produsul matricelor dar obținem o matrice elementele căreia sunt produsele elementelor respective ale matricelor date. Deci să fim atenți la notații !

Într-adevăr, dacă scriem MatrixForm[A*B] și tastăm Shift+Enter, atunci se afișează

In[9] :=MatrixForm[A*B]

Out[9]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 & 8 \\ 10 & 5 & -6 \\ 15 & -6 & -2 \end{pmatrix}.\Delta$$

Exemplul 4.2. Fiind dată matricea pătratică de ordinul trei $M = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, să se determine: 1) valorile proprii, 2) vectorii proprii,

3) valorile proprii și vectorii proprii.

Rezolvare. Introducem matricea M . Pentru aceasta scriem $M := \{\{-1, 3, -1\}, \{-3, 5, -1\}, \{-3, 3, 1\}\}$ și tastăm Shift+Enter. Se afișează

In[10]:=M:={{-1,3,-1},{-3,5,-1},{-3,3,1}}.

Deci matricea M s-a introdus în document.

1) Pentru a determina valorile proprii scriem Eigenvalues[M] și tastăm Shift+Enter. Se afișează

In[10]:=Eigenvalues[M]

Out[10]={2,2,1}.

2) Pentru a obține vectorii proprii scriem Eigenvectors[M] și tastăm Shift+Enter. Se afișează

In[11]:=Eigenvectors[M]

Out[11]={{-1,0,3},{1,1,0},{1,1,1}}.

3) Pentru a determina și valorile proprii și vectorii proprii scriem Eigensystem[M] și tastăm Shift+Enter. Se afișează

In[12]:=Eigensystem[M]

Out[12]={{2,2,1},{-1,0,3},{1,1,0},{1,1,1}}.Δ

Exemplul 4.3. Să se rezolve sistemul de ecuații liniare

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 7, \\ y_1 + y_2 - y_3 - y_4 = -1, \\ y_1 - y_2 = -1, \\ y_3 - y_4 = 2. \end{cases}$$

Rezolvare. Scriem Solve[{y₁+y₂+y₃+y₄==7, y₁+y₂-y₃-y₄==-1, y₁-y₂==-1, y₃-y₄==2}, {y₁,y₂,y₃,y₄}] și tastăm Shift+Enter. Se afișează

In[13]:= Solve[{y₁+y₂+y₃+y₄==7, y₁+y₂-y₃-y₄==-1, y₁-y₂==-1, y₃-y₄==2}, {y₁,y₂,y₃,y₄}]

Out[13]={{y₁→1,y₂→2,y₃→3,y₄→1}}.Δ

Exemplul 4.4. Să se rezolve sistemul de ecuații liniare

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 8, \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 9. \end{cases}$$

Rezolvare. Scriem `Solve[{2x1+3x2-x3==8, 5x1-2x2+2x3==6, x1+4x2-3x3==9},{x1,x2,x3}]` și tastăm Shift+Enter. Se afișează

In[13]:=Solve[{2x1+3x2-x3==8,5x1-2x2+2x3==6,x1+4x2-3x3==9},{x1,x2,x3}]

Out[13]={{x1→2,x2→1,x3→-1}}.

S-a obținut soluția $x_1=2, x_2=1, x_3=-1$. Δ

Exerciții pentru lucrul individual

E.4.1. Fiind date două matrice A și B și un număr α din Matematica I, ex. 4.6.1, pag.189, să se determine: 1) αA ; 2) $A+B$; 3) AB ; 4) $\det A$; 5) A^{-1} .

E.4.2. Să se rezolve sistemul de ecuații liniare din Matematica I, ex. 4.6.4, pag.197.

E.4.3. Să se determine valorile proprii și vectorii proprii ai matricei A din Matematica III, ex., 5.5.4, punctele 1 și 2, pag. 229.

5. Calcul diferențial și calcul integral al funcțiilor reale de o variabilă reală

În sistemul Mathematica funcțiile se notează asemănător cu notațiile obișnuite, prima literă fiind majusculă. Argumentele funcțiilor sunt delimitate cu paranteze pătratice [și]. Exemple:

Sin[x] este notația expresiei $\sin x$; **Cos[x]** – $\cos x$; **Tan[x]** – $\tan x$;

ArcSin[x] – $\arcsin x$; **Log[x]** – $\ln x$; **Log[b,x]** – $\log_b x$; **Exp[x]** – e^x ;

Sqrt[x] – rădăcina pătrată din x ;

a) Calculul limitelor. Printre funcțiile care pot fi aplicate la rezolvarea exercițiilor din acest punct sunt următoarele.

Limit[f,x→a] - calculează limita funcției $f(x)$ în punctul a ;

Limit[f,x→Infinity] - calculează limita funcției $f(x)$ când x tinde la infinit;

Limit[f,x→a,Direction→-a] - calculează limita la dreapta a funcției $f(x)$ în punctul a ;

Limit[f,x→a,Direction→+a] - calculează limita la stânga a funcției $f(x)$ în punctul a ;

...

Exemplul 5.1. Să se calculeze limitele: a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - e^{3x}}{\ln(1 + 4x)}$; b)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 3x - 2} \right)^{(2x+1)/(x-1)} ; \text{ c) } \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{1 + 3^{1/(x-1)}} ; \text{ d) } \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{1 + 3^{1/(x-1)}} .$$

Rezolvare. a) Scriem $\text{Limit}\left[\frac{\text{Cos}[2 * x] - E^{3 * x}}{\text{Log}[1 + 4 * x]}, x \rightarrow 0\right]$ și tastăm

Shift+Enter. Se afișează

$$\text{In}[1] := \text{Limit}\left[\frac{\text{Cos}[2 * x] - E^{3 * x}}{\text{Log}[1 + 4 * x]}, x \rightarrow 0\right]$$

$$\text{Out}[1] = -\frac{3}{4}.$$

b) Scriem $\text{Limit}\left[\left(\frac{x^2 + 2 * x - 1}{2 * x^2 - 3 * x - 2}\right)^{(2 * x + 1) / (x - 1)}, x \rightarrow \text{Infinity}\right]$ și tastăm

Shift+Enter. Se afișează

$$\text{In}[2] := \text{Limit}\left[\left(\frac{x^2 + 2 * x - 1}{2 * x^2 - 3 * x - 2}\right)^{(2 * x + 1) / (x - 1)}, x \rightarrow \text{Infinity}\right]$$

$$\text{Out}[2] = \frac{1}{4}.$$

c) Scriem $\text{Limit}\left[\frac{1}{1 + 3^{1/(x-1)}}, x \rightarrow 1, \text{Direction} \rightarrow -1\right]$ și tastăm

Shift+Enter. Se afișează

$$\text{In}[3] := \text{Limit}\left[\frac{1}{1 + 3^{1/(x-1)}}, x \rightarrow 1, \text{Direction} \rightarrow -1\right]$$

$$\text{Out}[3] = 0.$$

d) Scriem $\text{Limit}\left[\frac{1}{1 + 3^{1/(x-1)}}, x \rightarrow 1, \text{Direction} \rightarrow +1\right]$ și tastăm

Shift+Enter. Se afișează

$$\text{In}[4] := \text{Limit}\left[\frac{1}{1 + 3^{1/(x-1)}}, x \rightarrow 1, \text{Direction} \rightarrow +1\right]$$

$$\text{Out}[4] = 1. \Delta$$

b) Construcția liniilor și a graficelor funcțiilor reale de o variabilă reală. Se aplică funcțiile ce urmează.

Plot[f,{x,a,b}] – construiește graficul funcției $f(x)$, $a \leq x \leq b$;

Plot[{f₁,f₂,...},{x,a,b}] – construiește pe același desen graficele funcțiilor $f_1(x), f_2(x), \dots$, $a \leq x \leq b$;

ListPlot[{x₁,y₁},{x₂,y₂},...] – construiește punctele cu coordonatele carteziane $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$;

ParametricPlot[{f_x,f_y},{t,a,b}] – conctruiele linia dată prin ecuațiile parametrice $x=f_x(t)$, $y=f_y(t)$, $a \leq x \leq b$;

ParametricPlot[{f_x,f_y},{g_x,g_y},{t,a,b}] – conctruiele liniile date prin ecuațiile parametrice $x=f_x(t)$, $y=f_z(t)$, $a \leq x \leq b$, și $x=g_x(t)$, $y=g_y(t)$, $a \leq x \leq b$;

ParametricPlot3D[{f_x,f_y,f_z},{t,a,b}] – conctruiele linia din spațiul \mathbf{R}^3 dată prin ecuațiile parametrice $x=f_x(t)$, $y=f_y(t)$, $z=f_z(t)$, $a \leq x \leq b$;

...

Exemplul 5.2. Să se construiască liniile date prin ecuațiile:

$$a) f(x) = \frac{x^3 + 4x^2 - 2x + 1}{x + 3}, x \in [-1, 2]; \quad b) \begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t; \end{cases} t \in [0, 2\pi].$$

Rezolvare. a) Scriem

$$\text{Plot}\left[\frac{x^3 + 4x^2 - 2x + 1}{x + 3}, \{x, -1, 2\}\right] \text{Plot}\left[\{2\cos^3 t, 2\sin^3 t\}, \{t, 0, 2\pi\}\right]$$

și tastăm Shift+Enter. Se afișează

$$\text{In}[5]:=\text{Plot}\left[\frac{x^3 + 4x^2 - 2x + 1}{x + 3}, \{x, -1, 2\}\right]$$

Out[5]=desenul

b) Scriem $\text{Plot}\left[\{2\cos^3 t, 2\sin^3 t\}, \{t, 0, 2\pi\}\right]$ și tastăm Shift+Enter. Se afișează

$$\text{In}[6]:=\text{Plot}\left[\{2\cos^3 t, 2\sin^3 t\}, \{t, 0, 2\pi\}\right]$$

Out[6]=desenul

c) Calculul derivatei și al diferențialei. Se folosesc funcțiile:

D[f,x] – calculează derivata funcției f în raport cu variabila x ;

D[f,{x,n}] – calculează derivata de ordinul n a funcției f în raport cu variabila x ;

Dt[f] – calculează diferențiala funcției f ;

Exemplul 5.3. Se dă funcția $f(x) = \arctg(\ln x) + \ln(\arctg x)$. Să se calculeze: a) derivate df / dx ; b) derivata de ordinul doi d^2f / dx^2 ; c) diferențiala df .

Rezolvare. a) Scriem $\text{D}[\text{ArcTan}[\text{Log}[x]] + \text{Log}[\text{ArcTan}[x]], x]$ și tastăm Shift+Enter. Se afișează

$$\text{In}[7]:=\text{D}[\text{ArcTan}[\text{Log}[x]] + \text{Log}[\text{ArcTan}[x]], x]$$

$$\text{Out}[7]=\frac{1}{(1+x^2)\text{ArcTan}[x]} + \frac{1}{x(1+\text{Log}[x]^2)}$$

În această expresie $\text{Log}[x]^2$ înseamnă $\text{Log}^2 x$.

b) Scriem $D[\text{ArcTan}[\text{Log}[x]]+\text{Log}[\text{ArcTan}[x]],\{x,2\}]$ și tastăm Shift+Enter. Se afișează

In[8]:=D[ArcTan[Log[x]]+Log[ArcTan[x]],{x,2}]

$$\text{Out[8]}= -\frac{1}{(1+x^2)^2 \text{ArcTan}[x]^2} - \frac{2x}{(1+x^2)^2 \text{ArcTan}[x]} - \frac{2\text{Log}[x]}{x^2(1+\text{Log}[x]^2)^2} - \frac{1}{x^2(1+\text{Log}[x]^2)}.$$

c) Scriem $\text{Dt}[\text{ArcTan}[\text{Log}[x]]+\text{Log}[\text{ArcTan}[x]]]$ și tastăm Shift+Enter. Se afișează

In[9]:=Dt[ArcTan[Log[x]]+Log[ArcTan[x]]]

$$\text{Out[9]}= \frac{\text{Dt}[x]}{(1+x^2)\text{ArcTan}[x]} + \frac{\text{Dt}[x]}{x(1+\text{Log}[x]^2)}.$$

În expresia precedentă $\text{Dt}[x]$ înseamnă dx .

d) Calculul integralelor. Pot fi aplicate funcțiile ce urmează.

Integrate[f,x] – calculează primitiva (integrala nedefinită) a funcției $f(x)$;

Integrate[f,{x,a,b}] – calculează integrala definită a funcției $f(x)$ pe intervalul $[a,b]$, $a < b$;

Integrate[f,{x,a,Infinity}] - calculează integrala definită a funcției $f(x)$ pe intervalul $[a,\infty)$;

NIntegrate[f,{x,a,b}] - calculează numeric integrala definită a funcției $f(x)$ pe intervalul $[a,b]$;

...

Exemplul 5.4. Să se calculeze integralele nedefinite:

$$\text{a) } \int \frac{dx}{x^6 \sqrt{1+x^2}}, \text{ b) } \int \frac{x^5 + 4x^2 + 5x^3 - x^2 - 2x + 2}{x^3 - 1} dx.$$

Rezolvare. a) Scriem $\text{Integrate}[\frac{1}{x^6 \sqrt{1+x^2}}, x]$ și tastăm Shift+Enter.

Se afișează

In[10]:=Integrate[\frac{1}{x^6 \sqrt{1+x^2}}, x]

$$\text{Out[10]}= \frac{\sqrt{1+x^2}(3-4x^2+6x^4)}{15x^5}.$$

b) Scriem $\text{Integrate}\left[\frac{x^5 + 4x^4 + 5x^3 - x^2 - 2x + 2}{x^3 - 1}, x\right]$ și tastăm Shift+Enter. Se afișează

$$\text{In[11]}:=\text{Integrate}\left[\frac{x^5 + 4x^4 + 5x^3 - x^2 - 2x + 2}{x^3 - 1}, x\right]$$

Out[11]=

$$5x + 4x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{5}{\sqrt{3}} \text{ArcTan}\left[\frac{1+2x}{\sqrt{3}}\right] + 3\text{Log}[-1+x] - \frac{3}{2}\text{Log}[1+x+x^2].$$

Exemplul 5.5. Să se calculeze valoarea exactă a integralei definite

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx.$$

Rezolvare. Scriem $\text{Integrate}[\sqrt{1-x^2}, \{x, 0, 1\}]$ și tastăm Shift+Enter. Se afișează

$$\text{In[12]}:=\text{Integrate}[\sqrt{1-x^2}, \{x, 0, 1\}]$$

$$\text{Out[12]}=\frac{\pi}{4}.\Delta$$

Exemplul 5.6. Să se calculeze o valoare aproximativă a integralei definite $\int_0^1 \sqrt{1+x^3} dx$.

Rezolvare. Scriem $\text{NIntegrate}[\sqrt{1+x^3}, \{x, 0, 1\}]$ și tastăm Shift+Enter. Se afișează

$$\text{In[13]}:=\text{NIntegrate}[\sqrt{1+x^3}, \{x, 0, 1\}]$$

$$\text{Out[13]}=1.11145.\Delta$$

Exemplul 5.7. Să se calculeze integralele improprii

$$\text{a) } \int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx; \text{ b) } \int_1^{\infty} \ln \frac{e^{1/x} + 2}{3} dx.$$

Rezolvare. a) Scriem $\text{Integrate}\left[\frac{x^2}{1+x^4}, \{x, 0, \text{Infinity}\}\right]$ și tastăm Shift+Enter. Se afișează

$$\text{In[14]}:=\text{Integrate}\left[\frac{x^2}{1+x^4}, \{x, 0, \text{Infinity}\}\right]$$

$$\text{Out}[14] = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \cdot \Delta$$

b) Scriem $\int_1^{\infty} \ln\left[\frac{e^{1/x} + 2}{3}\right] dx$ și tastăm Shift+Enter. Se afișează

Integral of $\text{Log}\left[\frac{1}{3}(2 + e^{1/x})\right]$ does not converge on $\{1, \infty\}$.

$$\text{Out}[15] = \int_1^{\infty} \text{Log}\left[\frac{1}{3}(2 + e^{1/x})\right] dx.$$

Aceasta înseamnă că integrala dată n-a fost calculată. Δ

...

Exerciții pentru lucrul individual

E.5.1. Să se calculeze limitele din Matematica II, ex. 6.5.2, pag. 110.

E.5.2. Să se construiască, pe un interval $[a, b]$ ales potrivit, graficele funcțiilor date prin ecuații : 1) în coordonate carteziene rectangulare, care se află în Matematica II, ex. 7.10.6, pag. 202, 3) parametrice, care se află în Matematica III, ex. 3.16.1, pag. 159.

E.5.3. Sunt date funcțiile din Matematica II, ex. 7.10.1, pag. 191. 1) Să se calculeze derivatele de ordinul întâi ale funcțiilor a) și b). 2) Să se calculeze diferențiala funcției c). 3) Să se calculeze derivata de ordinul doi a funcției d).

E.5.4. Să se calculeze integralele nedefinite din Matematica II, ex. 8.6.5, pag. 240.

E.4.5. Fiind dată integrala definită din Matematica II, ex. 9.5.1, pag. 267, se cere: 1) să se determine valoarea exactă a acestei integrale; 2) să se determine o valoare aproximativă; 3) să se determine o valoare aproximativă, care conține 10 cifre semnificative.

Lucrare de laborator nr.1

*1.Exerciții din aritmetică

*1.1.1)Să se construiască o expresie aritmetică care conține cele patru operații aritmetice, ridicarea la putere, fracții și paranteze. 2)Să se determine valoarea exactă a expresiei construite. 3)Să se determine o careva valoare aproximativă. 4)Să se determine o valoare aproximativă care conține 20 cifre semnificative.

*1.2.Să se determine n - numere după virgulă ale lui π

*2.1.Exerciții din algebra elementară

*2.1.Să se dezvolte în produs de factori expresia x^n-1 , unde n este egal cu 10 plus numărul variantei.

*3.Exerciții din algebra liniară

*3.1.Fiind date două matrice A și B , a =data nașterii, b =luna nașterii, număr α =numărul de ordine din registru, să se determine : 1) αA ; 2) $A+B$; 3) AB ; 4) $\det A$; 5) A^{-1} .

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 2 \\ 4 & b & -3 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & a & 3 \\ 3 & 1 & b \end{pmatrix}$$

*3.2.Să se rezolve sistemul de ecuații liniare, n =numărul de ordine din registru

$$\begin{cases} nx + (2n - 1)y + (n - 5)z = n - 4 \\ x + 3ny - (7 - n)z = -2n - 5 \\ 2nx - (n + 2)y + (n - 3)z = 6n - 1 \end{cases}$$

*4.Calcul diferențial și integral al funcțiilor reale de o variabilă reală

*4.1.Să se calculeze limitele

$$\lim_{x \rightarrow n} \frac{x^2 + (1 - n)x - n}{x^2 - n^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{nx + 7}{nx + 8} \right)^{(n-15)x}$$

*4.2.Să se calculeze integralele

$$\int \sqrt{n - x^2} dx$$

$$\int_0^1 \frac{(n+1)x^3}{n+x^8} dx$$

*5.1. Să se construiască graficul funcțiilor :

$$f(x) = x^n - nx$$

$$f(x) = n \cos(x - n)$$

*5.2. Să se reprezinte grafic o suprafață cu ajutorul funcției Plot3D, folosind/inspirându-vă din exemplele din Help.

Numărul variantei coincide cu numărul de ordine din registru.

Lucrarea va fi prezentată în format .nb, redactând o pagină de titlu la început. Fișierul va fi denumit după exemplul : NumePrenumeGrupa.nb