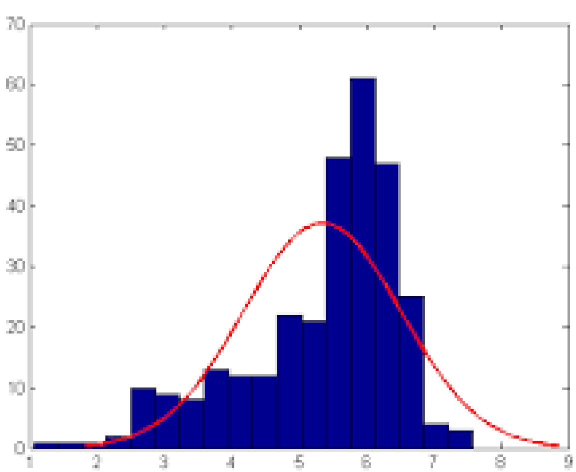
Alexei Leahu, Ion Pârţachi

PROBABILITĂŢI, STATISTICĂ

(Prin exemple şi probleme propuse)

Partea II. ELEMENTE DE STATISTICĂ DESCRIPTIVĂ ŞI MATEMATICĂ



Chişinău

CUPRINS

6. Noţiuni de bază din Statistica Descriptivă şi Statistica Matematică

6.1. Statistica Descriptivă: prezentare generală

In liceu am avut posibilitatea sa facem cunoştinta cu acea parte a Statisticii care se numeste Statistica Descriptivă. De acolo am aflat ca

Statistica Descriptivă (analiza exploratorie a datelor sau analiza primară a datelor) *studiază metodele de colectare, organizare, prelucrare, şi prezentare a datelor statistice într-o formă cât mai compactă şi propice analizei şi interpretării acestor date.*

Prezentarea vizează, de regulă, *datele in formă numerică* pentru a putea folosi din plin posibilităţile calculatoarelor moderne.

Datele statistice reprezintă *rezultatele măsurătorilor sau observaţiilor făcute asupra unui fenomen/experient aleator*, dar *pentru care este valabil Principiul Regularităţii Statistice.*

6.2. Populaţie statistică, eşantion de volum n, caracteristici statistice (v.a.)

Statistica modernă, mai ales acea parte a ei care se numeşte *Statistica Matematică* , bazându-se esenţial pe realizările ştiinţelor matematice, foloseşte din plin *Teoria probabilităţilor.* Ca sa ne convingem, vom trece in revista cateva noţiuni de bază din Statistica Descriptivă şi vom preciza care este echivalentul lor in Teoria Probabilităţilor si Statistica Matematică (TP&SM). Este vorba de notiunile de *populaţie statistică, unitati statistice, eşantion (selectie) de volum n si caracteristică statistica.*

Astfel, prin **populaţie (colectivitate) statistică** in Statistica Descriptivă se înţelege *orice mulţime Ω nevidă de elemente (obiecte, indivizi, etc.) supusă cercetării cu condiţia că aceste elemente să fie omogene în raport cu una şi aceeşi proprietate sau caracteristică.* In TP&SM aceasta noţiune este modelată, din punct de vedere matematic, de noţiunea de *spaţiu de evenimente elementare* Ω. Elementele $\omega \in \Omega$ in Statistica Descriptiva se numesc *unităţi* ale populaţiei statistice Ω,iar in TP&SM se mai numesc *evenimente elementare.*

Exemplu de populaţie statistica. $\Omega = \{\omega \mid \omega-$*specialist în domeniul IT, angajat în sfera bugetară a Republicii Moldova*$\}$.

Denumirea de populaţie statistică din Statistica Descriptiva este convenţională şi provine din faptul că, iniţial, statistica avea de-a face cu studiul populaţiilor de persoane. Unităţile unei populaţii, interesante din punct de vedere statistic, sunt considerate, conform definiţiei populaţiei statistice, *omogene* în raport cu acea proprietate sau caracteristică care prezintă interes din punct de vedere al cercetării. O cercetare exhaustivă a unei populaţii statistice în raport cu una sau mai multe caracteristici date se numeşte *recensământ*. Realizarea practică a unui recensământ este, de regulă, extrem de costisitoare, de aceea cercetarea se limitează doar la o parte a acestei populaţii numita *esantion de volum n*.

Mai exact, *orice submulţime finită şi ordonata A de elemente/unităţi extrase dintr-o populaţie statistică* Ω se numeşte *eşantion* sau *selectie*. În cazul când $card(A) = n$ spunem că eşantionul este de *volum n*. Mai mult, vom spune că *eşantionul A este reprezentativ pentru populaţia statistică* Ω dacă volumul său n este suficient de mare iar unităţile numerite în eşantion sunt selectate aleator.

Remarcă. Eşantionul poate fi rezultatul unei selectii cu sau fara repetare, dar reprezentativitatea lui este OBLIGATOTRIE!

Ca şi în Statistica Descriptiva, în TP&SM, interes din punct de vedere a cercetării prezintă, de regulă, **nu** unitătile statistice, ca atare, ci *carectiristicile* unităţilor incluse în eşantion, apelând in directă legatură cu aceasta la noţiunea de *variabilă aleatoare* ce reprezintă echivalentul matematic al noţiunii de caracteristică statistică din Statistica Descriptiva. Astfel, înloc de *caracteristică statistică sau variabilă statistică* asociată unei populaţii, prin care în Statistica Descriptivă se inţelege orice însuşire, trăsătură sau proprietate caracteristică tuturor unităţilor populaţiei date, în TP&SM se are în vedere noţiunea de variabilă aleatoare.

Exemplu de caracteristici statistice (v.a.). Considerăm în calitate de populaţie statistică mulţimea $\Omega = \{\omega \mid \omega-$*specialist în domeniul IT, angajat în sfera bugetară a Republicii Moldova*$\}$. Atunci caracteristici statistice sau v.a. (unidimensionale) vor fi următoarele aplicaţii definite pe Ω cu valori în mulţimea numerelor reale: X- mărimea salariului, Y- vechimea în muncă, Z - vârsta, etc., unui angajat ales la întâmplare din Ω. Dealtfel, vectorii (X, Y) sau (X, Y, Z) pot fi trataţi ca v.a. multidimensionale.

6.3. Obiectul de studiu al Statisticii Matematice şi legătura cu Teoria Probabilităţilor

Din p.6.2. vedem că, în Statistica Descriptivă şi în TP&SM, v.a. reprezintă o aplicatie univoca definita pe Ω cu valori in multimea de valori posibile a acestei caracteristici. Deoarece datele statistice de natură calitativă/categorială/nenumerică sunt, de regulă, transformate in date numerice pentru a putea fi prelucrate cu calculatorul, putem considera că mulţimea de valori posibile ale unei caracteristici statistice/variabile aleatoare este o multime numerica. Astfel, in Statistica Matematică, noţiunea de eşantion sau selecţie de volum n de observaţii făcute asupra v.a. X, adică $(x_1, x_2, ..., x_n) \sim X$, este privita ca fiind un set de n realizări independente ale uneia si aceleiaşi v.a X. Se mai spune ca $(x_1, x_2, ..., x_n) \sim X$ reprezintă un *eşantion de volum n dintr-o populaţie statistică a v.a.* X. Aici putem, in funcţie de scopul urmărit, adopta oricare din următoarele doua puncte de vedere.

Din punctul de vedere al **Observatorului/ experimentatorului** $(x_1, x_2,$ $..., x_n)$ pot fi privite ca ***realizări (numere) concrete ale v.a.*** X**,** iar din punctul de vedere al **Matematicianului** $(x_1, x_2, ..., x_n)$ pot fi privite ca ***variabile aleatoare independente, identic repartizate (v.a.i.i.r.) ca şi v.a.*** X**.** Punctul de vedere al Matematicianului are drept la existenţă măcar şi pentru faptul că o eşantionare/selectare repetată a setului de date $(x_1, x_2, ..., x_n)$ se va solda de fiecare data cu valori diferite, deoarece acestea reprezintă realizări (independente) ale v.a. X. In continuarie vor fi adoptate ambele puncte de vedere in funcţie de situaţie, dar, si intr-un caz si in altul, scopul urmărit va fi aflarea f.d. F_X a v.a. X sau a parametrilor ei, daca aceasta devine o functie cunoscuta deindata ce se cunosc valorile exacte ale parametrilor de care depinde ea (de exemplu, cum e cazul tuturor distribuţiilor uzuale studiate in cap.4 al cursului de Probabilităţi).

Insfârşit, putem spune ca **TP&SM au acelaşi obiect de studiu**: *modelele matematice ale fenomenelor (experimentelor aleatoare) ce posedă proprietatea Regularităţii Statistice.* Cu toate acestea, Statistica Matematică se deosebeşte, totusi, de Teoria Probabilităţilor prin faptul ca problemele ei sunt, intr-un fel, inverse în raport cu cele din Teoria Probabilităţilor. Astfel, in Teoria Probabilităţilor, modelul (repartiţia) probabilistă a unei v.a. X este cunoscuta *apriori,* ceea ce permite calcularea probabilităţii ca v.a. X va lua, de exemplu, valoarea x. Dimpotrivă, in Statistica Matematică sunt cunoscute, *aposteriori,* realizarile (valorile observate experimental) $x_1, x_2, ..., x_n$ ale unei v.a. X, punându-se problema reconstituirii (fie şi cu aproximare), in aceasta baza, a modelului ei probabilist. In acest sens se spune, pe buna dreptate ca, Statistica (inclusiv Statistica Matematica) *studiază partea ca să* *cunoaştem intregul.*

Exemplu (*Două probleme: una din TP şi alta din SM*).

Problemă din Teoria Probabilităţilor. Presupunem că este cunoscută proporţia p, $0 < p < 1$, a tuturor IT-iştilor din sfera bugetară a Republicii Moldova care au absolvit studii masterale. Atunci, conform Teoriei Probabilităţilor, putem calcula, de exemplu, probabilitatea evenimentului A_k={ *alegând la întâmplare, cu repetare, n IT-şti din sfera bugetară vom depista exact k IT-şti cu studii masterale absolvite*}, $k = \overline{0,n}$, folosind distribuţia probabilista Binomiala cu parametrii n si p, adica $P(A_k) = \mathbb{C}_n^k p^k (1-p)^{(n-k)}$.

Problemă din Statistica Matematică. Dimpotriva, presupunem ca **nu** este cunoscută proporţia p a tuturor IT-iştilor din sfera bugetară a Republicii Moldova care au studii masterale. În schimb, cunoaştem că, alegând la întâmplare, cu repetare, n IT-şti din sfera bugetară am depistat exact k IT-şti cu studii masterale absolvite, unde $k = \overline{0,n}$. Atunci, folosind Statistica Matematică, în baza Legii Numerelor Mari din Teoria Probabilităţilor, putem spune ca daca n este suficient de mare, atunci $p \simeq k/n$. Mai mult, metodele ce ţin de Statistica Matematică pot garanta o anumită exactitate a acestei aproximări a lui p în funcţie de valoarea lui n, dar şi în dependenţă de probabilitatea de incredere pe care ne-o dorim.

Fie $(x_1, x_2, ..., x_n) \sim X$ un *esantion sau o selectie de volum n* dintr-o populatie satatistică a v.a. X guvernată de f.d. F_X necunoscută, i.e., $(x_1, x_2, ..., x_n) \sim X : F_X$ =?. Daca se stie cum arată în forma ei exterioară F_X si se mai ştie că F_X este o funcţie ce depinde de un parametru θ, $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$, adica $F_X(x) = F_X(x, \theta)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, valoarea adevarată a lui θ fiind necunoscuta, spunem ca *avem de a face cu un caz parametric*, in caz contrar spunem ca *avem de a face cu un caz neparametric.* In continuare ne vom referi, cu precadere, la cazul parametric, adica $F_X(x) = F_X(x, \theta)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, θ, $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$, θ =?.

Remarcă: Modelul probabilist necunoscut poate fi, înloc de f.d., considerat distribuţia probabilista, daca v.a. cercetată este de tip discret sau densitatea ei de distribuţie, daca aceasta este de tip (absolut) continuu, fiecare din aceste modele, fiind (aşa cum am arătat în TP) echivalente cu f.d. ca modalitate de descriere a modelului probabilist.

Exemple de modele probabiliste parametrice. *a)* Caz discret: $X \sim U\{0, 1, ..., N\}$, N=$\theta \in \Theta$=$\{1, 2, ...\} \subseteq \mathbb{R}$; $X \sim Bernoulli(p)$, p=$\theta \in \Theta$=$(0,1) \subseteq \mathbb{R}$; $X \sim Bi(n,p)$, (n,p)=θ=$(\theta_1,\ \theta_2) \in \Theta$=$\{1,2,...\} \times (0,1) \subseteq \mathbb{R}^2$; $X \sim$

$Poisson(\lambda)$, $\lambda=\theta \in \Theta=(0,+\infty) \subseteq \mathbb{R}$; $X \sim Geom(p)$, $p=\theta \in \Theta=(0,1) \subseteq \mathbb{R}$;

b) Caz (absolut) continuu: $X \sim U[a,b]$, $(a,b)=\theta=(\theta_1,\ \theta_2) \in \Theta=\{(\theta_1,\theta_2) : -\infty < \theta_1 < \theta_2 < +\infty\} \subseteq \mathbb{R}^2$; $X \sim \exp\{\lambda\}$, $\lambda=\theta \in \Theta=(0,+\infty) \subseteq \mathbb{R}$; $X \sim N(m,\sigma)$, $(m,\sigma)=\theta=(\theta_1,\ \theta_2) \in \Theta=\mathbb{R}\times(0,+\infty) \subseteq \mathbb{R}^2$; $X \sim \chi^2(n)$, $n=\theta \in \Theta=\{1,2,...\} \subseteq \mathbb{R}$; $X \sim T(n)$ sau $Student(n)$, $n=\theta \in \Theta=\{1,2,...\} \subseteq \mathbb{R}$.

6.4. Statistici, estimatori, estimatori punctuali nedeplasati, consistenti si eficienţi. Caracteristici de selecţie si proprietăţile lor

Definiţia 1. Functia $f(\ x_1, x_2, ..., x_n)$ se numeste *statistica* daca aceasta, privita ca functie de v.a. $x_1, x_2, ..., x_n$, este, la randul ei, o v.a..

Orice problema de Statistica Matematica se reduce, in fond, la cercetarea statisticilor ca functii de v.a. $x_1, x_2, ..., x_n$. Drept exemplu de statistici putem lua indicatorii statistici in Economie.

Daca dorim sa estimăm (evaluăm) f.d. a v.a. X sau orice altă mărime legată de ea, atunci *o statistică* f devine *estimator* iar valoarea ei concreta $f(\ x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$,devine *estimaţie.* Deoarece valoarea $f(\ x_1, x_2, ..., x_n)$ poate fi interpretată dret un punct pe axa numerelor reale, estimatorii (estimaţiile) de acest tip se mai numesc *estimatori (estimaţii) punctuali (punctuale).*

Consideram estimatorul f pentru parametrul necunoscut θ, parametru cunoaşterea caruia face cunoscuta, exhaustiv, f.r. a v.a X.

Definiţia 2. Vom spune că f este un *estimator nedeplasat* pentru parametrul θ dacă valoarea medie a acestuia, calculata in presupunerea ca $(x_1, x_2, ..., x_n)$ reprezinta o selectie de volum n din populatia statistica a v.a. X guvernata de f.d. $F_X(x,\theta)$, coincide chiar cu valoarea lui θ, i.e.,

$$\mathbb{E}_\theta f(x_1, x_2, ..., x_n) = \theta,\ \forall\theta, \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k.$$

Definiţia 3. Vom spune că f este un *estimator consistent* pentru parametrul θ daca

$$\mathbf{P}(|f(x_1, x_2, ..., x_n) - \theta| \le \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1,\ \forall\varepsilon > 0.$$

Definiţia 4. Vom spune că f este un *estimator eficient* pentru parametrul θ daca acesta este un estimator nedeplasat si in plus acesta are dispersia cea mai mica printre toţi estimatorii nedeplasaţi ai lui θ.

Definiţia 5. Vom numi *distribuţie (repartiţie) de selectie construită in baza eşantionului* $(x_1, x_2, ..., x_n) \sim X$ repartiţia

$$\hat{X} : \begin{pmatrix} x'_{(1)} & x'_{(2)} & \dots & x'_{(k)} \\ n_{1/}n & n_{2/}n & \dots & n_{k/}n \end{pmatrix},$$

unde $x'_{(1)}\ \ x'_{(2)}\ \ \dots\ \ x'_{(k)}$ sunt valorile şirului variational de valori distincte (valorile distincte ale eşantionului scrise in ordine crescatoare), iar n_i frecventa absoluta cu care valoarea $x'_{(i)}$ se intalneste in esantion, $i = \overline{1,k}$, $k \leq n$.

Un interes aparte pentru analiza mai avansată a datelor satistice îl prezintă media, dispersia si f.d. de selectie (functia empirica de distribuţie), adica:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{n} x'_{(i)},$$

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{n} \left(x'_{(i)} - \bar{x}\right)^2 ,$$

si

$$\begin{aligned} \hat{F}_n(x_1, x_2, \dots, x_n; x) &= \frac{\textit{numărul de valori observate } x_i : x_i \leq x}{\textit{numărul total de valori}} = \\ &= \frac{card\{x_i \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \mid x_i \leq x\}}{n} = \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_{(-\infty,x]}(x_i),\ \textit{pentru orice } x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

respectiv.

Remarcă. Calculele directe, bazate pe distribuţia de selectie privită ca o distribuţie probabilistă a unei v.a. de tip discret, mai exact a v.a. $\hat{X}$, arată că valoarea medie, dispersia si f.d. a v.a. $\hat{X}$ coincid cu media, dispersia si f.d. de selecţie (functia empirică de distribuţie) respectiv, adică

$$\mathbb{E}\hat{X} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{n} x'_{(i)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x},$$

$$\begin{aligned}\mathbb{D}\hat{X} &= \mathbb{E}\left(\hat{X}-\mathbb{E}\hat{X}\right)^2=\mathbb{E}\left(\hat{X}-\bar{x}\right)^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{n}\left(x'_{(i)}-\bar{x}\right)^2= \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2=S^2,\end{aligned}$$

şi

$$F_{\hat{X}}(x)=\sum_{i:x'_{(i)}\leq x}\frac{n_i}{n}=\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{n}I_{(-\infty,x]}(x'_{(i)})=\hat{F}_n(x_1,x_2,\ldots,x_n;x),$$

fapt care justifică denumirea de *caracteristici numerice de selectie*. Mai mult, dat fiind faptul că media, dispersia si f.d. de selecţie (functia empirică de distribuţie) sunt noţiuni la care se aplică Teoria Probabilităţilor rezultă că aceste carectiristici posedă aceleaşi proprietaţi, respectiv, ca şi valoarea medie dispersia şi funcţia de distribuţie a v.a. X cercetate.

Exemplul 1. Pentru a evalua rata zilnică $p{=}\theta\in\Theta{=}(0,1)\subseteq\mathbb{R}$ a ieşirii din funcţiune a calculatoarelor, adică a probabilităţii ieşirii din funcţiune a unui calculator ales la întâmplare, la Universitatea Tehnica a fost iniţiat un sondaj. Pentru 100 de calculatoare alese la întâmplare au fost înregistrate urmatoarele date statistice centralizate în urmatorul eşantion de volum $n=100$:

$(x_1,x_2,\ldots,x_{100}){=}(0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,1,$
$0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,$
$0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,$
$0,0,0,0,0,0){\sim}\,X:Bernoulli(\theta),\theta\in\Theta{=}(0,1)\subseteq\mathbb{R},\theta=?$

Drept rezultat, distribuţia de selecţie, media, dispersia de selecţie şi funcţia empirică de distribuţie sunt, respectiv, urmatoarele:

$$\hat{X}:\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0.93 & 0.07\end{pmatrix},$$

$\mathbb{E}\hat{X}{=}\bar{x}{=}0.07$, $\mathbb{D}\hat{X}{=}S^2{=}0.93\cdot 0.07=0.065\,1$ şi

$$F_{\hat{X}}(x)=\hat{F}_{100}(x_1,x_2,\ldots,x_{100};x)=0.93\cdot I_{(-\infty,x]}(0)+0.07\cdot I_{(-\infty,x]}(1).$$

Deoarece media, dispersia si f.d. de selecţie, ca funcţii de $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ sunt v.a., cu alte cuvinte, conform definiţiei, sunt statistici, prin urmare, sunt estimatori ale căror proprietăţi sunt expuse în următoarea

Teoremă (*Proprietăţile caracteristicilor numerice de selecţie*). *a) Media de selectie* $\bar{x}$ *este un estimator nedeplasat si consistent pentru valoarea medie teoretică* $\mathbb{E}X$ *a v.a.* X, *deîndată ce aceasta din urmă există;*

b) Dispersia de selecţie este un estimator deplasat, mai exact

$$\mathbb{E}S^2 = \frac{n-1}{n}\mathbb{D}X,$$

dar consistent, pentru dispersia teoretică $\mathbb{D}X$ *a v.a.* X,*deîndată ce aceasta din urmă există;*

c) Funcţia empirică de distribuţie $F_{\hat{X}}(x)$ *este un estimator nedeplasat si consistent pentu functia teoretica de distribuţie* $F(x)$ *a v.a.* X, *în plus există dispersia* $\mathbb{D}F_{\hat{X}}(x) = \frac{1}{n}F(x)[1-F(x)]$, *pentru orice* x fixat, $x \in \mathbb{R}$.

Din punctul *b)* rezultă că statistica

$$s^2 = \frac{n}{n-1}S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}n_i\left(x'_{(i)} - \bar{x}\right)^2$$

reprezintă un estimator nedeplasat pentru $\mathbb{D}X$, fapt ce explică înlocuirea lui S^2 cu s^2 in aplicatii practice. Insa, pentru n suficient de mare, S^2 si s^2 se egaleaza valoric, asa ca s^2 devine util, îndeosebi, pentru eşantioane de volum mic.

Propozitia următoare scoate în evidenţă cateva exemple de estimatori eficienţi.

Propozitie. *a) Dacă eşantionul* $(x_1, x_2, ..., x_n) \sim X$, *unde* X *este o v.a. distribuită Poisson cu parametrul* $\theta \in \Theta = (0, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$, θ *fiind necunoscut, atunci media de selecţie* $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$, *reprezintă un estimator eficient pentru parametrul* θ, *acesta având cea mai mică dispersie egală cu* $\mathbb{D}\overline{x} = \theta/n$;

b) Dacă eşantionul $(x_1, x_2, ..., x_n) \sim X$, *unde* X *este o v.a. distribuită Bernoulli cu parametrul* $\theta \in \Theta = (0, 1) \subseteq \mathbb{R}$, θ *fiind necunoscut, atunci media de selecţie* $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$, *reprezintă un estimator eficient pentru parametrul* θ, *acesta având cea mai mică dispersie egală cu* $\mathbb{D}\overline{x} = \theta(1-\theta)/n$.

c) Dacă eşantionul $(x_1, x_2, ..., x_n) \sim X$, *unde* X *este o v.a. distribuită Normal cu media* $\theta \in \mathbb{R}$ *si dispersia* σ^2, θ *fiind necunoscut iar dispersia* σ^2 *fiind cunoscută, atunci media de selectie* $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$, *reprezintă un estimator eficient pentru parametrul* θ, *acesta având cea mai mică dispersie egală cu* $\mathbb{D}\overline{x} = \sigma^2/n$.

6.5. Estimatori punctuali de verosimilitate maximă

Estimatorii de forma $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ mai sunt numiţi şi *estimatori punctuali* deoarece valorile acestei functii sunt numere reale, adica puncte pe dreapta numerelor reale. Una din cele mai răspândite metode de estimare punctuală este metoda ce are la bază

Principiul Verosimilităţii Maxime. *Dacă într-un experiment aleator* $\mathcal{E}$ *s-a produs evenimentul aleator* A*, aceasta înseamnă că s-a produs evenimentul cu probabilitatea cea mai mare.*

Un exemplu tipic de aplicare a acestui Principiu poate fi regăsit în interpretarea soluţiilor furnizate de modelele probabiliste versus situaţiile reale.

Exemplul 1 (*Verificarea unei ipoteze statistice*). Un profesor de la Universitatea Cornell (SUA) a fost amendat de douăsprezece ori pentru parcare neregulamentară, pe timp de noapte, a autoturismului sau, toate aceste amenzi nimerind în ziua de marţi sau joi. Ar fi fost oare justificată arendarea unui garaj anume in aceste zile?

Soluţie. Prima ipoteză firească ar fi că aceste amenzi se distribuie întâmplător pe zilele săptămânii. În presupunerea că acestă ipoteză este adevărată, putem calcula, folosind probabilitatea clasică, probabilitatea evenimentului A=$\{$*cele 12 amenzi vor nimeri in ziua de marţi sau joi*$\}$. Cum cele 12 amenzi se pot distribui pe cele 7 zile în 7^{12} modalităţi, din care doar 2^{12} modalităţi favorizează evenimentul nefericit în cauză, rezultă că

$$P(A) = \frac{2^{12}}{7^{12}} \approx 0.0000003.$$

Concluzie: reeşind din Principiul Verosimilităţii Maxime, dat fiind faptul că probabiliatea evenimentului A este foarte mică, ipoteza noastră nu este plauzibilă, prin urmare se justifcă arendarea unui garaj, anume in zilele de marţi şi joi, poliţia acţionând, mai degraba, după un sistem ce nu corespunde ipotezei că aceste amenzi se distribuie întâmplător pe zilele săptămânii.

Pentru a valorifica Principiul Verosimilităţii Maxime într-o metodă de obţinere a estimatorilor punctuali, presupunem că $\mathcal{X}$ este o populatie statistică a v.a. X, cu alte cuvinte $\mathcal{X}$ este mulţimea de valori posibile a v.a. X care este o v. a. cu distribuţia sau densitatea de probabilitate $f(x;\theta)$, θ fiind un parametru necunoscut. Cu alte cuvinte: $f(x;\theta) = P_\theta(X = x)$, pentru orice $x \in \mathcal{X}$ în caz discret, sau $f(x;\theta)$ coincide cu d. d. a v.a. X cu valori din $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}$.

Cazul fiind parametric cunoaştem doar forma matematică a funcţiei $f(x;\theta)$. De exemplu, dacă ştim că X este o v.a. distribuită normal cu media $\theta_1 \in \mathbb{R}$ şi abaterea standard $\theta_2 \in (0,+\infty)$ neunoscute, atunci $f(x;\theta) = \frac{1}{\theta_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\theta_1)^2}{2\theta_2^2}}$, $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty)$, $\theta = (\theta_1, \theta_2) =?$

Definiţia 1. Vom numi *funcţie de verosimilitate* determinată în baza eşantionului $(x_1, x_2, ..., x_n) \sim X : f(x;\theta)$, $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$, θ fiind necunoscut, funcţia $L(x_1, x_2, ..., x_n;\theta) = f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)...f(x_n;\theta)$.

Remarca 1. Conform definiţiei de mai sus, $x_1, x_2, ..., x_n$ fiind valori ale v.a. i.i.d. $X_1, X_2, ..., X_n$ ca şi v.a. X, rezultă că funcţia de verosimilitate coincide cu distribuţia probabilistă în ansamblu

$$P_\theta(X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} P_\theta(X_i = x_i),$$

în caz discret sau cu d.d. în ansamblu

$$f(x_1, x_2, ..., x_n;\theta) = f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)...f(x_n;\theta),$$

în caz (absolut) continuu. Deci, $L(x_1, x_2, ..., x_n;\theta)$ în caz discret sau

$$L(x_1, x_2, ..., x_n;\theta)dx_1dx_2...dx_n = P(x_1 < X_1 \leq x_1 + dx_1, ..., x_n < X_n \leq x_n + dx_n)$$

în caz (absolut) continuu, sunt probabilităţi ale unor evenimente care s-au produs. Conform Principiul Verosimilităţii Maxime este firesc sa luăm în calitate de estimator $\overset{\wedge}{\theta}$ a parametrului necunoscut θ acea funcţie $\overset{\wedge}{\theta} = \overset{\wedge}{\theta}(x_1, x_2, ..., x_n)$ care, pentru orice eşantion $(x_1, x_2, ..., x_n)$, maximizează *funcţia de verosimilitate* $L(x_1, x_2, ..., x_n;\theta)$. De aici şi

Definiţia 2. Vom numi *estimator de verosimilitate maximă (e.v.m.)* a parametrului necunoscut θ funcţia $\overset{\wedge}{\theta} = \overset{\wedge}{\theta}(x_1, x_2, ..., x_n)$ cu proprietatea că

$$L(x_1, x_2, ..., x_n;\overset{\wedge}{\theta}) = \max_{\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k} L(x_1, x_2, ..., x_n;\theta)$$

pentru orice eşantion $(x_1, x_2, ..., x_n) \sim X$. Pentru valorile concrete ale eşantionului $(x_1, x_2, ..., x_n) \sim X$, valoarea $\overset{\wedge}{\theta} = \overset{\wedge}{\theta}(x_1, x_2, ..., x_n)$ se numeşte *estimaţie de verosimilitate maximă* a parametrului θ.

Remarca 2. Dat fiind faptul că funcţia $\ln x$ este o funcţie strict monoton crescătoare putem spune că, a gasi estimatorul de verosimilitate maximă este echivalent cu a găsi acea funcţie $\overset{\wedge}{\theta} = \overset{\wedge}{\theta}(x_1, x_2, ..., x_n)$ cu proprietatea că

$$\ln L(x_1, x_2, ..., x_n; \overset{\wedge}{\theta}) = \max_{\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k} \ln L(x_1, x_2, ..., x_n; \theta)$$

pentru orice eşantion $(x_1, x_2, ..., x_n) \sim X$. Or, Metoda Verosimilităţii Maxime rezidă în aflarea punctului maxim $\overset{\wedge}{\theta}$ pentru funcţia $L(x_1, x_2, ..., x_n; \theta)$, privită ca functie de variabila $\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_k) \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$, algoritmul presupunând, atunci când funcţia de verosimiliate este derivabilă faţă de θ,conform rezultatelor din Analiza Matematică, rezolvarea urmatorului sistem de k ecuaţii cu k necunoscute:

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, ..., x_n; \theta)}{\partial \theta_i} = 0,\ i = \overline{1, k},$$

sau a sistemului echivalent acestuia

$$\frac{\partial \ln L(x_1, x_2, ..., x_n; \theta)}{\partial \theta_i} = 0,\ i = \overline{1, k}.$$

Acestea din urmă se numesc *ecuaţiile verosimilităţii maxime* pentru funcţia de verosimilitate sau logaritmul funcţiei de verosimilitate respectiv.

Vom implementa, drept exemple, această metodă pentru a obţine estimatori de verosimilitatea maximă pentru parametrii necunoscuţi în cazul unor modele probabiliste uzuale (clasice).

Exemplul 2. Presupunem că eşantionul $(x_1, x_2, ..., x_n)$ vizează o v.a. $X \sim Poisson(\theta)$, $\theta > 0$, dar θ este necunoscut.

Atunci funcţia de verosimilitate

$$L(x_1, x_2, ..., x_n; \theta) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\theta^{x_k}}{x_k!} e^{-\theta} = \theta^{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k} \cdot e^{-n\theta} \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k!},$$

ceea ce înseamnă că

$$\ln L(x_1, x_2, ..., x_n; \theta) = -n\theta + (\sum_{k=1}^{n} x_k) \ln \theta + \ln \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k!},$$

şi ecuaţia verosimilităţii maxime are forma

$$\frac{dL(x_1, x_2, ..., x_n; \theta)}{d\theta} = -n + \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k}{\theta} = 0.$$

De unde găsim că estimatorul de verosimilitate maximă

$$\overset{\wedge}{\theta} = \overset{\wedge}{\theta}(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \overline{x}.$$

Remarca 3. Conform propoziţiei din p. 6.2. şi rezultatului din exemplul 2, deducem că, atunci când $X \sim Poisson(\theta)$, media de selectie $\overline{x}$ este un estimator eficient pentru parametrul θ, estimator ce coincide cu e.v.m. a acestui parametru. De fapt aceasta este o consecinţă a afirmaţiei din

Propoziţia 1 (*Rao-Kramer*). *Daca pentru eşantionul* $(x_1, x_2, ..., x_n) \sim X$, *unde* X *este o v.a. cu d.d.* $f(x; \theta)$, *ce depinde de un parametru necunoscut* $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$ *există un estimator eficient* $\overset{\wedge}{\theta} = \overset{\wedge}{\theta}(x_1, x_2, ..., x_n)$ *pentru* θ, *atunci estimatorul eficient este, totodată, şi e.v.m. cu dispersia*

$$\mathbb{D}\overset{\wedge}{\theta}(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{1}{\mathbb{E}_\theta\left(\frac{dL(x_1, x_2, ..., x_n; \theta)}{d\theta}\right)^2}.$$

Remarca 4. Un e.v.m. nu întotdeauna este şi estimator nedeplasat, prin urmare un e.v.m. nu întotdeauna este şi estimator eficient. Aducem, în acest sens

Exemplul 2. Considerăm eşantionul $(x_1, x_2, ..., x_n) \sim X$, unde v.a. X reprezintă durata vieţii unui dispozitiv electronic, adică $X \sim \theta \exp\{-\theta x\} I_{[0+\infty)}(x)$, $\theta \in (0, +\infty)$, θ fiind necunoscut. Funcţia corespunzătoare de verosimilitate

$$L(x_1, x_2, ..., x_n; \theta) = \prod_{k=1}^{n} \theta e^{-\theta x_k} = \theta^n e^{-\theta(x_1 + x_2 + ... + x_k)},$$

iar ecuaţia de verosimilitate este

$$\theta^{n-1} e^{-\theta(x_1 + x_2 + ... + x_k)}[n - (x_1 + x_2 + ... + x_k)] = 0.$$

De unde deducem că e.v.m.

$$\overset{\wedge}{\theta} = \overset{\wedge}{\theta}(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{n}{(x_1 + x_2 + ... + x_k)} = \frac{1}{\overline{x}}.$$

Cu toate că $\frac{1}{\overline{x}}$nu este un estimator nedeplast pentru parametrul θ, observăm că $\overline{x}$ este, totuşi, un estimator nedeplasat pentre $\frac{1}{\theta}$.

Exemplul 3. Fie $(x_1, x_2, ..., x_n)$ un eşantion dintr-o populaţie statistică a v.a. X distribuită normal ce reprezintă gradul de umplere automata a unei sticle de lapte de 1 litru pe o bandă rulantă de îmbuteliere, cu alte cuvinte, v.a. X este normal distribuită cu media θ_1 şi dispersia θ_1^2, $(\theta_1, \theta_1^2) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$, ambii parametri fiind necunoscuţi. Să se determine e.v.m. pentru media si dispersia gradului de umplere.

Soluţie. Funcţia de verosimilitate

$$L(x_1, x_2, ..., x_n; \theta_1, \theta_2^2) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\theta_2\sqrt{2\pi}} \exp[-\frac{(x_k - \theta_1)^2}{2\theta_2^2}] =$$

$$= \frac{1}{(2\pi\theta_2^2)^{\frac{n}{2}}} \exp[-\frac{1}{2\theta_2^2} \sum_{k=1}^{n} (x_k - \theta_1)^2],$$

deci

$$\ln L(x_1, x_2, ..., x_n; \theta_1, \theta_2^2) = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \theta_2^2 - \frac{1}{2\theta_2^2} \sum_{k=1}^{n} (x_k - \theta_1)^2.$$

Atunci ecuaţiile verosimilităţii sunt următoarele:

$$\frac{\partial \ln L(x_1, x_2, ..., x_n; \theta_1, \theta_2^2)}{\partial \theta_1} = \frac{1}{\theta_2^2} \sum_{k=1}^{n} (x_k - \theta_1) = 0,$$

$$\frac{\partial \ln L(x_1, x_2, ..., x_n; \theta_1, \theta_2^2)}{\partial \theta_2^2} = -\frac{n}{2\theta_2^2} + \frac{1}{2\theta_2^4} \sum_{k=1}^{n} (x_k - \theta_1)^2.$$

Acestea dau soluţiile $\overset{\wedge}{\theta}_1 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k = \overline{x}$, $\overset{\wedge}{\theta}{}_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x})^2 = S^2$, prin urmare e.v.m. pentru medie şi dispersie este dat de media si respectiv dispersia de selectie. Dacă media de selecţie este un estimator nedeplasat, apoi dispersia de selectie nu este (vezi proprietăţile ei din paragraful anterior). Or, în cazul nostru e.v.m. $(\overset{\wedge}{\theta}_1, \overset{\wedge}{\theta}{}_2^2)$, privit ca estimator pentru parmetrul vectorial (θ_1, θ_2^2) nu este eficient.

Remarca 5. Algoritmul de aflare a e.v.m. nu presupune, în mod obligatoriu, utilizarea ecuaţiilor de verosimilitate.

Exemplul 4. În controlul calităţii unui lot de piese de volum N, numărul N fiind cunoscut, se pune problema determinării unui estimator de verosimilitate maximă a numărului θ de piese defecte, având la bază un eşantion de volum n de piese extrase la întâmplare, fără repetare, eşantion în care s-au depistat exact x piese defecte.

Soluţie. Cum numărul X de piese defecte depistate într-un eşantion de volum n extrase la întâmplare, fără repetare dintr-un lot de N piese, din care θ sunt defecte, este o v.a. distribuită $Hypergeom(N, \theta, n)$, rezultă că funcţia de verosimilitate este

$$L(x;\theta) = \frac{\mathbb{C}_{\theta}^{x}\mathbb{C}_{N-\theta}^{n-x}}{\mathbb{C}_{N}^{n}},\ unde\ \theta \in \{0, 1, 2, ..., N\}, \theta =?$$

În acest caz vom găsi e.v.m. $\overset{\wedge}{\theta}(x)$ nemijlocit din condiţia

$$L(x;\overset{\wedge}{\theta}) = \max_{\theta\in\{0,1,2,...,N\}} L(x;\theta) = \max_{\theta\in\{0,1,2,...,N\}} \frac{\mathbb{C}_{\theta}^{x}\mathbb{C}_{N-\theta}^{n-x}}{\mathbb{C}_{N}^{n}}.$$

Pentru aceasta observăm că

$$\frac{L(x;\theta)}{L(x;\theta-1)} = \frac{\frac{\theta!}{x!(\theta-x)1}\frac{(N-\theta)!}{(n-x)!(N-\theta-(n-x))!}}{\frac{(\theta-1)!}{x!(\theta-x-1)!}\frac{(N-\theta+1)!}{(n-x)!(N-\theta-(n-x)+1)!}} = \frac{\theta(N-\theta-(n-x)+1)}{(\theta-x)(N-\theta+1)}.$$

Or, $L(x;\theta)/L(x;\theta-1) \geq 1$ deîndată ce $\theta(N-\theta-(n-x)+1) \geq (\theta-x)(N-\theta+1)$, sau dupa simplificări, deîndată ce $\theta \leq n^{-1}x(N+1)$. Aceasta înseamnă, de fapt, că funcţia de verosimilitate creşte odată cu creşterea lui θ, dar atâta timp cât $\theta \leq n^{-1}x(N+1)$. Prin urmare e.v.m. coincide $\overset{\wedge}{\theta}(x)$ cu cel mai mare întreg $\theta \leq n^{-1}x(N+1)$, adică cu partea întreagă: $\overset{\wedge}{\theta}(x)$=$[n^{-1}x(N+1)]$. De exemplu, pentru $N = 10000$ piese, $n = 500$ piese incluse în eşantion, $x = 50$ piese depistate ca fiind defecte, găsim că estimaţia de verosimilitate maximă a numărului de piese defecte în întreg lotul este egală cu $\overset{\wedge}{\theta}(50)$=$[500^{-1} \cdot 50 \cdot 10001] = [1000.1] = 1000$.

Exemplul 5. Considerăm $(x_1, x_2, ..., x_n)$ un eşantion de volum n ce reprezintă rezultatele unor măsurători bazate pe scala Rockwell a durităţii X a oţelului produs de un anumit produs, X fiind o v.a. uniform distribuită pe $[\theta_1, \theta_2]$, unde

$$\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \Theta = \{(x, y) \in (0, +\infty) \times (0, +\infty) : x < y\}, \theta =?$$

Să se determine un e.v.m. pentru graniţa de jos θ_1 şi graniţa de sus θ_2 pentru duritatea admisibilă a oţelului produs.

Soluţie. Funcţia de verosimilitate este

$$L(x_1, x_2, ..., x_n; \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{(\theta_2 - \theta_1)} \prod_{k=1}^{n} I_{[\theta_1,\theta_2]}(x_i) =$$

$$= \frac{1}{(\theta_2 - \theta_1)} I_{[\theta_1,+\infty)}(\min_{1\leq i\leq n} x_i) \cdot I_{(0,\theta_2]}(\max_{1\leq i\leq n} x_i).$$

Pentru maximizarea acestei funcţii, ca funcţie de $(\theta_1, \theta_2) \in \Theta$, observăm că aceasta ea valoarea cea mai mare atunci cand $(\theta_2 - \theta_1)$ ia valoarea cea mică posibilă, dar concomiutent cu aceasta să fie respectată condiţia

$$\prod_{k=1}^{n} I_{[\theta_1,\theta_2]}(x_i) = I_{[\theta_1,+\infty)}(\min_{1\leq i\leq n} x_i) \cdot I_{(0,\theta_2]}(\max_{1\leq i\leq n} x_i) = 1.$$

E clar că acestor condiţii satisface $\overset{\wedge}{\theta}_1(x_1, x_2, ..., x_n) = \min\limits_{1\leq i\leq n} x_i$ şi $\overset{\wedge}{\theta}_2(x_1, x_2, ..., x_n) = \max\limits_{1\leq i\leq n} x_i$, $\overset{\wedge}{\theta} = (\overset{\wedge}{\theta}_1, \overset{\wedge}{\theta}_2)$ reprezentând, astfel, e.v.m. pentru parametrul vectorial θ.

7. Estimatori de interval (intervale de confidenţă sau de încredere)

7.1. Întroducere

Considerentul principal care conduce la necesitatea găsirii unei alternative la estimatorul punctual $\overset{\wedge}{\theta} = \overset{\wedge}{\theta}(x_1, x_2, ..., x_n)$ pentru parametrul necunoscut θ este următorul. Cel putin în caz (absolut) continuu, probabilitatea $P(\overset{\wedge}{\theta}(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv \theta) = 0$, cu alte cuvinte nu este deloc sigur a estima că θ este egal exact cu $\overset{\wedge}{\theta}$. În plus, deşi estimaţia punctuală a unui parametru θ, necunoscut la nivelul unei populaţii constituie o informaţie în legătură cu populaţia în cauză, aceasta nu poate fi utilizată fără a avea o imagine şi asupra mărimii probabilistice a erorii de estimare. De aceea se impune noţiunea de estimator de interval.

7.2. Definiţia noţiunii de estimator de interval

Fie $(x_1, x_2, ..., x_n) \sim X : F_X(x, \theta)$, $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$, $\theta = ?$, $X \in \mathfrak{X}$.

Definiţia 1. Vom numi *estimator de interval (interval de confidenţă sau de încredere) pentru parametrul* θ intervalul $(\underline{\theta}(x_1, x_2, ..., x_n), \bar{\theta}(x_1, x_2, ..., x_n))$ cu proprietatile

$$\underline{\theta}(x_1, x_2, ..., x_n) \leq \bar{\theta}(x_1, x_2, ..., x_n),\ \forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathfrak{X}^n,$$

$$\mathbf{P}(\underline{\theta}(x_1, x_2, ..., x_n) \leq \theta \leq \bar{\theta}(x_1, x_2, ..., x_n) = 1 - \alpha,$$

unde $\alpha \in (0, 1)$ *este dat.* Valoarea $1-\alpha$ se numeste *probabilitate de încredere, iar* α *prag de semnificaţie.*

Remarca 1. Adoptând punctul de vedere al Matematicianului,

$$\underline{\theta}(x_1, x_2, ..., x_n) \text{ şi } \bar{\theta}(x_1, x_2, ..., x_n)$$

pot fi privite ca v.a., prin urmare evenimentul aleator $\{\underline{\theta}(x_1, x_2, ..., x_n) \leq \theta \leq \bar{\theta}(x_1, x_2, ..., x_n)\}$ coincide cu evenimentul $A = \{$*intervalul aleator* $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ *acoperă valoarea adevărată a parametrului necunoscut* $\theta\}$. În cazul cand $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$, $k > 1$, intervalul de incredere devine *domeniu (regiune de incredere)*. Din definiţia 1 rezultă că, afirmând că intervalul (domeniul) de încredere acoperă valoarea necunoscuta θ, putem comite o eroare de probabilitate α.Faptul că

$$(\underline{\theta}(x_1, x_2, ..., x_n),\ \bar{\theta}(x_1, x_2, ..., x_n))$$

este un interval de incredere pentru parametrul θ cu probabilitatea de incredere $1 - \alpha$ admite, conform Principiului Regularităţii Statistice (sau Legii Numerelor Mari), urmatoarea interpretare: *efectuând un numari suficient de mare de esantionari de acelasi volum n dintr-o populatie statistica a v.a.* $X : F_X(x, \theta)$, $\theta \in \Theta \subseteq R$, $\theta = ?$ *, vom inregistra, aproximativ,* $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ *de cazuri când acest interval va acoperi valoarea adevarata a parametrului* θ *şi doar în aproximativ* $\alpha \cdot 100\%$ *de cazuri vom da greş.*

Definitia 2. Un interval de incredere de forma $(-\infty, \bar{\theta}(x_1, x_2, ..., x_n))$ se numeste *unilateral de stanga* iar de forma $(\underline{\theta}(x_1, x_2, ..., x_n), +\infty)$ se numeste *unilateral de dreapta.* In caz contrar acesta se numeste *bilateral.*

Pentru a construi un interval de incredere procedam astfel:

a) determinăm o statistică f ce depinde numai de valorile eşantionului şi formal de parametrul θ, dar distribuţia careia este cunoscută şi nu depinde de acest parametru;

b) pentru $\alpha \in (0,1)$ dat, determinăm (in cazul bilateral) valorile $f_{\alpha/2}$ si $f_{1-\alpha/2}$ astfel incat

$$P(f(x_1,x_2,...,x_n;\theta) \leq f_{\alpha/2}) = \alpha/2, \ \mathbf{P}(f(x_1,x_2,...,x_n;\theta) \leq f_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha/2.$$

c) dupa aceasta deducem intervalul (regiunea) de încredere pentru parametrul θ in presupunerea că funcţia $f(x_1,x_2,...,x_n;\theta)$ are proprietatile necesare ce permit acest lucru.

In paragrafele care urmează vom exemplifica această idee, luând drept exemplu cazul cand v.a. $X \sim N(m,\sigma^2)$, acest caz fiind reprezentativ în mai multe situaţii, deoarece în virtutea Teoremei Limită Centrală, atunci când volumul eşantionului este suficient de mare f.d. a multor dintre statisticile utilizate poate fi aproximată de f.d. normală. Concludent în acest sens este

Exemplul 1 (*Intervalul de încredere pentru parametrul* p *al distribuţiei Bernoulli*). Considerăm $(x_1,x_2,...,x_n)$ un eşantion de volum n dintr-o populaţie statistică a unei v.a. $X \sim Bernoulli(p)$, $p \in (0,1)$, p fiind necunoscut. Cum $\mathbb{E}X = p$, iar media de selecţie $\hat{p}(x_1,x_2,...,x_n)=\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ este un estimator eficient pentru p, vom folosi în calitate de statistică

$$f(x_1,x_2,...,x_n;p) = (\bar{x}-p)/\sqrt{p(1-p)/n}.$$

Dar

$$(\bar{x}-p)/\sqrt{p(1-p)/n} = (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - p)/\sqrt{p(1-p)/n} = (\sum_{i=1}^{n} x_i - np)/\sqrt{np(1-p)},$$

aceasta din urmă având, conform T.L.C. în forma Moivre-Laplace, pentru pentru n suficient de mare, f.d. aproximată de f.d. gaussiană

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}du.$$

Cu alte cuvinte, pentru n suficient de mare, indiferent de valoarea adevărată a lui θ, statistica noastră are proprietatea că

$$P(-x_{1-\alpha/2} \leq (\bar{x}-p)/\sqrt{p(1-p)/n} \leq x_{1-\alpha/2}) =$$

$$P\left(\bar{x} - x_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{p(1-p)/n} \leq p \leq \bar{x} + x_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{p(1-p)/n}\right) = 1 - \alpha$$

pentru orice $\alpha \in (0,1)$, unde $x_{1-\alpha/2}$ este $1-\alpha/2$ cuantila pentru distribuţia $N(0,1)$, adică $\Phi(x_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$. Deoarece în exemplul nostru

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\frac{1}{n}\sum x_i)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - (\frac{1}{n}\sum x_i)^2 = \hat{p}(1-\hat{p})$$

este de aşteptat ca, înlocuind $p(1-p)$ cu $\hat{p}(1-\hat{p})$, vom avea în continuare

$$P\left(\bar{x} - x_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n} \leq \theta \leq \bar{x} + x_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}\right) = 1 - \alpha.$$

Asteptările noastre sunt confirmate de următoarea

Propoziţie (*Estimator de interval pentru parametrul (proporţia)* p *a unei populaţiei statistice*). *Dacă* $(x_1, x_2, ..., x_n)$ *este un eşantion de volum* n *dintr-o populaţie statistică a unei v.a.* $X \sim Bernoulli(p)$, $p \in (0,1)$, p *fiind necunoscut, atunci f.d. a v.a.* $(\bar{x}-p)/\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}$ *poate fi aproximată cu f.d.* $\Phi(x)$, *iar intervalul*

$$\left[\hat{p} - x_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}, \hat{p} + x_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}\right]$$

devine un interval de incredere pentru θ *cu probabilitatea de încredere* $1-\alpha$, *pentru orice* $\alpha \in (0,1)$, *deîndată ce* $n{>}50$, $n\hat{p}{>}5$, $n\hat{p}(1-\hat{p}){>}5$, *unde .*

$$\hat{p}(x_1, x_2, ..., x_n) = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = f_n(X = 1)$$

este un estimator eficient pentru proporţia p *al unităţilor* ω *din populaţa statistică pentru care* $X(\omega) = 1$.

Exemplul 1 (*Continuare*). În condiţiile enunţate se pune problema aflării numărului minimal n_0 de valori incluse în eşantion pentru a garanta că, pentru probabilitatea dată $1-\alpha$, $\alpha \in (0,1)$ şi exactitatea dată $\varepsilon > 0$, vom avea că $P(|\, \hat{p} - p \,| \leq \varepsilon) \geq 1 - \alpha$, pentru orice $n \geq n_0$. Pentru aceasta observăm ca pentru orice prag de semnificaţie dat $\alpha \in (0,1)$, din modul cum am găsit intervalul corespunzător de încredere, deducem că

$$P\left(|\, \hat{p} - p \,| \leq x_{1-\alpha/2}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}\right) = 1 - \alpha$$

pentru orice n suficient de mare. Condiţia ca $|\hat{p} - p| \leq \varepsilon$ coroborată cu probabiliatea de mai sus arată că n_0 poate fi determinat din inegalitatea

$$x_{1-\alpha/2}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n} \leq \varepsilon.$$

De unde găsim că $n_0 \geq \left(\frac{x_{1-\alpha/2}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\varepsilon}\right)^2$, cea ce înseamnă că

$$n_0 = \left[\left(\frac{x_{1-\alpha/2}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\varepsilon}\right)^2\right] + 1,$$

unde prin $[x]$ se notează partea întreagă a numărului x.

Exemplul 2. Dintr-un lot de piese de acelaşi tip controlului calităţii au fost supuse 100 de piese, fiind rebutate 10 piese. *a)* Să se construiască un interval de încredere cu probabilitatea de încredere $1 - \alpha = 0.95$ pentru proporţia p a pieselor defecte din întregul lot. *b)* Să se determine numărul minimal n_0 de piese care trebuie supuse controlului pentru a garanta, cu probabilitatea $1 - \alpha = 0.95$, că frecvenţa relativă a pieselor defecte calculată în baza eşantionului de volum n_0 va estima valoarea necunoscută a lui p cu exactitatea $\varepsilon = 0.01$.

Soluţie. Dacă vom lua

$$x_k = \begin{cases} 1, & \text{daca piesa cu nr.} k \text{ e defectă,} \\ 0, & \text{în caz contrar,} \end{cases} \quad k = 1, 2, ...,$$

atunci $(x_1, x_2, ..., x_n)$ reprezintă un eşantion de volum n dintr-o populaţie statistică a unei v.a. $X \sim Bernoulli(p)$, $p \in (0, 1)$, p fiind necunoscut, iar frecvenţa a pieselor defecte calculată în baza eşantionului de volum n coincide cu

$$\hat{p}(x_1, x_2, ..., x_n) = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = f_n(X = 1),$$

Or, conform cu soluţia generală dedusă în exemplul 1, deoarece n=100>5, $n\hat{p}$=10>5 şi $n(1-\hat{p})$=90>5, iar $x_{1-\alpha/2} = x_{0.975} = 1.96$, rezultă că: *a)* intervalul de încredere căutat coincide cu intervalul $0.041 < p < 0.159$; *b)* volumul minimal n_0 al eşantionului, ce garantează exactitatea $\varepsilon = 0.01$ a estimatorului $\hat{p}(x_1, x_2, ..., x_{n_0})$=$f_{n_0}(X = 1)$ pentru proporţia necunoscută p, coincide cu

$$n_0 = \left[\left(\frac{x_{1-\alpha/2}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\varepsilon} \right)^2 \right] + 1 =$$

$$= \left[\left(\frac{1.96\sqrt{0.1 \cdot 0.9}}{0.01} \right)^2 \right] + 1 = [3457.\,44] + 1 = 3458.$$

7.3. Intervale de încredere pentru medie

Pentru început vom aborda construirea intervalelor de încredere pentru cazul când eşantionul $(x_1, x_2, ..., x_n) \sim X : N(m, \sigma)$, $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$.

Exemplul 1. Valoarea medie $\mathbb{E}X = m$ este **necunoscută**, abaterea standard σ fiind **cunoscută**, ne intereseaza intervalul de incredere pentru parametrul m cu probabilitatea de incredere $1 - \alpha$, $\alpha \in (0, 1)$.

Vom pleca de la următoarea afirmaţie ce ţine de Teoria Probabilităţilor:

Propoziţia 1. *Dacă $X_1, X_2, ..., X_n$ sunt v.a.i.i.d. normal cu media m si dispersia σ^2 atunci media aritmetica a acestor v.a.*

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(\ X_1 + X_2 + ... + X_n),$$

normata corespunzator, devine normală, standart distribuită, mai exact

$$\frac{\overline{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1),\ \forall m \in \mathbb{R}.$$

Aceasta insemnă ca media de selecţie $\overline{x} = \frac{1}{n}(\ x_1 + x_2 + ... + x_n)$ are proprietatatea că statistica

$$f((x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{\overline{x} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1),\ \forall m \in \mathbb{R},$$

adică funcţia ei de distribuţie nu depinde de m. Prin urmare, daca valoarea lui $\alpha, \alpha \in (0, 1)$,atunci are loc proprietatea că

$$P(x_{\alpha/2} \leq \frac{\overline{x} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq x_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha,$$

unde $x_{\alpha/2}$, $x_{1-\alpha/2}$ sunt acele valoari pentru care $\Phi(x_{\alpha/2}) = \alpha/2$, $\Phi(x_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha/2$,

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

De unde, stiind ca $x_{\alpha/2} = -x_{1-\alpha/2}$, deducem ca

$$P(\overline{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} x_{1-\alpha/2} \leq m \leq \overline{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} x_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha,$$

ceea ce inseamna ca intervalul

$$\left[\overline{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} x_{1-\alpha/2}, \overline{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} x_{1-\alpha/2}\right]$$

este un interval de incredere pentru parametrul m cu probabilitatea de incredere $1-\alpha$. Valoarea $\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}} x_{1-\alpha/2}$ se numeşte *marjă de eroare a estimatorului $\overline{x}$ pentru media m necunoscută.*

Exemplul 2. Valoarea medie $\mathbb{E}X = m$ este **necunoscută**, abaterea standard σ fiind, la fel, **necunoscută**, ne intereseaza intervalul de incredere pentru parametrul m cu probabilitatea de incredere $1-\alpha$, $\alpha \in (0,1)$.

Mai întâi reamintim o v.a. a cărei distribuţie probabilistă este legată de distribuţia normală. Este vorba de v.a. $T(n)$ care are distribuţia Student (distribuţia T) cu n grade de libertate daca $T(n)$ are aceeaşi distribuţie ca şi v.a.

$$X \Bigg/ \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2},$$

unde X, X_i , $i = \overline{1,n}$,sunt v.a.i.i.r.$N(0,1)$. Distribuţia lui $T(n)$, este o distribuţie de tip (absolut) continuu, dar valorile funcţiei ei de distribuţie nu pot fi calculate decât prin metode aproximative, însă există tabele numerice corespunzătoare ca şi pentru distribuţia normală. Dealtfel, conform Teoremei Limită Centrală şi distribuţia lui $T(n)$, pentru n suficient de mare, poate fi aproximată de distribuţia normala, prin urmare, incepand de la un anumit n distribuţia lui $T(n)$ se reduce la distribuţia normală.

Vom beneficia de urmatorul rezultat teoretic ce ţine de Teoria Probabilităţilor:

Propoziţia 2. *Dacă* $X_1, X_2, ..., X_n$ *sunt v.a.i.i.d. normal repartizate cu media* m *si dispersia* σ^2 *iar*

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \ S_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2,$$

atunci

$$T(n-1) = \frac{\overline{X} - m}{\frac{S_X}{\sqrt{n}}} \sim Student(n-1), \ \forall m \in \mathbb{R}.$$

Aceasta propoziţie arată, de fapt, că pentru problema noastră, in care $(x_1, x_2, ..., x_n) \sim X : N(m, \sigma^2)$, $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ iar $\overline{x}$, S^2 reprezinta, respectiv, media si dispersia de selectie, statistica urmatoare, mai exact v.a.

$$\frac{\overline{x} - m}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim T(n-1), \forall m \in \mathbb{R},$$

are f.d. ce nu depinde de parametrul estimat. Aceasta insemnă că

$$P(t_{\alpha/2}(n-1) \leq \frac{\overline{x} - m}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \leq t_{1-\alpha/2}(n-1)) = 1 - \alpha,$$

unde $t_{\alpha/2}(n-1)$, $t_{1-\alpha/2}(n-1)$ sunt acele valoari pentru care

$$P(\frac{\overline{x} - m}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \leq t_{\alpha/2}(n-1)) = \alpha/2, \ P(\frac{\overline{x} - m}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \leq t_{1-\alpha/2}(n-1)) = 1 - \alpha/2.$$

De unde, ştiind că $x_{\alpha/2} = -x_{1-\alpha/2}$ şi în cazul distribuţiei Student, deducem că

$$\mathbf{P}(\overline{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1) \leq \ m \leq \overline{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1)) = 1 - \alpha,$$

ceea ce inseamna ca intervalul

$$\left[\overline{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1), \overline{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1)\right]$$

este un interval de incredere pentru parametrul m cu probabilitatea de incredere $1 - \alpha$. Valoarea $\pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1)$ se numeşte *marjă de eroare a estimatorului* $\overline{x}$ *pentru media* m *necunoscută.*

Exemplul 3. Fie $(x_1, x_2, ..., x_{25})$ un eşantion dintr-o populaţie statistică a v.a. X distribuită normal ce reprezintă gradul de umplere automata a unei sticle de lapte de 1 litru pe o bandă rulantă de îmbuteliere, pentru care media m este **necunoscută,** fiind cunoscută, în schimb, că media de selecţie $\overline{x} = 997$ ml. Să se construiască un interval de încredere pentru media m cu probabilitatea de încredere $1 - \alpha = 0.95$ în fiecare din urmatoarele cazuri: *a)* abaterea standard $\sigma = 10$ ml; *b)* abaterea standard este **necunoscută,** dar se cunoaşte abaterea standard de selecţie $S = 11$ ml**.**

Soluţie. Cazul *a)* reprezintă, de fapt, un caz particular al exemplului 1. Cu alte cuvinte, deoarece $n = 25$, iar din Anexa 1 găsim că $x_{1-\alpha/2}$=$x_{0.975}$=1.96, intervalul de incredere corespunzător coincide cu

$$\left[\overline{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} x_{1-\alpha/2}, \overline{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} x_{1-\alpha/2}\right] = \left[997 - \frac{10}{\sqrt{25}} 1.96, 997 + \frac{10}{\sqrt{25}} 1.96\right] =$$

$$= [993.\,08, 1000.\,9]\,.$$

Cu alte cuvinte, putem afirma, cu o marjă de eroare de $\pm\frac{10}{\sqrt{25}}1.96 = \pm 3.\,92$ ml şi o probabilitate de încredere egală cu 0.95 că $m = 997$ ml.

Analogic, cazul *b)* reprezintă, de fapt, un caz particular al exemplului 2. Cu alte cuvinte, deoarece volumul eşantionului $n = 25$, abaterea standard de selecţie $S = 11$ ml, iar din Anexa 2 pentru distribuţia Student găsim că $t_{1-\alpha/2}(n-1)$=$t_{0.975}(24)$=2.064, intervalul de incredere corespunzător coincide cu

$$\left[\overline{x} - \frac{S}{\sqrt{25}} t_{1-\alpha/2}(n-1), \overline{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1)\right] =$$

$$= \left[997 - \frac{11}{\sqrt{25}} 2.064, 997 + \frac{11}{\sqrt{25}} 2.064\right] = [992.\,46, 1001.\,5]\,.$$

Cu alte cuvinte, putem afirma, cu o marjă de eroare de $\pm\frac{11}{\sqrt{25}}2.064 = \pm 4.\,5401$ ml şi o probabilitate de încredere egală cu 0.95 ca $m = 997$ ml. Observăm, astfel, că necunoaşterea valorii adevărate a parametrului σ are, drept efect, creşterea margei de eroare a estimatorului $\overline{x}$.

Acum ne putem permite, în baza T.L.C., să abordăm problema construirei intervalelor de încredere pentru medie în cazul când ştim că există valoarea medie si dispersia v.a. observate X, dar valoarea adevărată a mediei este necunoscută, volumul eşantionului fiind suficient de mare.

Exemplul 4 (*Intervale de încredere pentru medie în cazul eşantioanelor de volum mare*). Fie $(x_1, x_2, ..., x_n) \sim X$: $\mathbb{E}X$=m=?, volumul eşantionului n fiind suficiuent de mare. Presupunem, suplimentar, ca distribuţia v.a. X, chiar dacă este necunoscută, este de aşa natură încât există şi dispersia ei. Atunci din T.L.C. rezultă că:

a) statistica

$$f((x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{\overline{x} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \simeq N(0,1),\ \forall m \in \mathbb{R},$$

adică funcţia ei de distribuţie nu depinde de m, în cazul când *abaterea standard* σ *a v.a.* X *este* ***cunoscută*** şi

b) statistica

$$\frac{\overline{x} - m}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \simeq T(n-1), \forall m \in \mathbb{R}$$

adică funcţia ei de distribuţie nu depinde de m, în cazul când *abaterea standard* σ *a v.a. este* ***necunoscută****,* dar în schimb *este cunoscută abaterea standard* S de selecţie.

Atunci intervalul de incredere pentru media necunoscută m cu probabilitatea de încredere $1-\alpha$, $\alpha \in (0,1)$, coincide, in cazul *a)* cu cel din Exemplul 1, iar în cazul *b)* coincide cu cel din exempul 2.

Exemplul 5. Un eşantion format din 532 de abonaţi ai săptămânalului *Business Week* arată că un abonat accesează Internetul şi serviciile online in medie 6.7 ore pe săptămână (*Business Week 1996 World Wide Subscriber Study*). Dacă se ştie că abaterea standard de selecţie este egală cu 5.8 ore, care este intervalul de ĭncredere cu probabilitatea de íncredere egală cu 0.95 pentru durata medie de accesare a Internetului şi seviciilor online la nivel de întreaga populaţie a abonaţilor pentru *Business Week.*

Soluţie. Conform cu exemplul 4, ne aflăm în condiţiile cazului b): media $\mathbb{E}X{=}m$ este necunoscută, necunoscută fiind şi abaterea standard, dar se cunoaste abaterea standard de selecţie $S = 5.8$ *ore*. Prin urmare, având volumul eşantionului $n = 532$, probabilitatea de încredere $1-\alpha = 0.95$, iar $t_{1-\alpha/2}(n-1){=}t_{0.975}(531){=}t_{0.975}(\infty){=}1.96$, putem găasi intervalul în cauză:

$$\left[\overline{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1), \overline{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1)\right] =$$

$$= \left[5.8 - \frac{5.8}{\sqrt{532}}1.96, 5.8 + \frac{5.8}{\sqrt{532}}1.96\right] = [5.3071, 6.2929].$$

Cu alte cuvinte, putem afirma, cu o marjă de eroare de $\pm\frac{5.8}{\sqrt{532}}1.96{=}\pm 0.49287$ ore şi o probabilitate de încredere egală cu 0.95 ca $m = 6.7$ ore.

7.4. Intervale de încredere pentru dispersie

Înainte de abordarea problemei de construire a intervalelor pentru dispersie, menţionăm că acestea au la bază următioarea v.a. Este vorba despre v.a. $\mathcal{X}^2(n)$ (se citeste Hi-pătrat) care are *distribuţia Hi-pătrat cu* n *grade de libertate* daca aceasta are aceaşi distribuţie ca şi v.a.

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2,$$

unde X_i , $i = \overline{1,n}$,sunt v.a.i.i.d. $N(0,1)$.

Or, putem considera că

$$\mathcal{X}^2(n) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2,\ \textit{unde } X_i, i = \overline{1,n},\ \textit{sunt v.a.i.i.r.} N(0,1).$$

Mai ştim ca aceasta este o v.a. de tip (absolut) continuu, dar valorile funcţiei ei de distribuţie nu pot fi calculate decât prin metode aproximative, însă există tabele numerice corespunzatoare ca şi pentru repartiţia normală. Dealtfel, conform Teoremei Limită Centrală, atunci cand $n \to \infty$, distribuţia v.a. $\frac{\mathcal{X}^2(n)-n}{\sqrt{2n}}$ converge către catre distribuţia $N(0,1)$, prin urmare, pentru n suficient de mare distribuţia lui $\mathcal{X}^2(n)$ se reduce la distribuţia normala.

Exemplul 1. Considerăm eşantionul $(x_1, x_2, ..., x_n) \sim X : N(m, \sigma)$, $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, abaterea standard σ fiind **necunoscută**. **Ne interesează intervalul de incredere pentru dispersia σ^2 cu probabilitatea de încredere** $1 - \alpha$, $\alpha \in (0,1)$.

Cazul 1. Valoarea medie $\mathbb{E}X = m$ este **cunoscută.**

Vom pleca de la statistica

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - m)^2}{\sigma^2}.$$

Din definitia repartitiei Hi-patrat cu n grade de libertate, iar din faptul ca $X \sim N(m, \sigma^2)$ avem că $(X - m)/\sigma \sim N(0,1)$, prin urmare

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - m)^2}{\sigma^2} = \frac{nS_0^2}{\sigma^2} \sim \mathcal{X}^2(n),\ \forall \sigma > 0.$$

unde

$$S_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 .$$

Aceasta insemna că

$$P(\mathcal{X}^2_{\alpha/2}(n) \le \frac{nS_0^2}{\sigma^2} \le \mathcal{X}^2_{1-\alpha/2}(n)) = 1-\alpha,$$

unde $\mathcal{X}^2_{\alpha/2}(n)$, $\mathcal{X}^2_{1-\alpha/2}(n)$ sunt acele valoari pentru care $P(\mathcal{X}^2(n) \le \mathcal{X}^2_{\alpha/2}(n)) = \alpha/2$, $P(\mathcal{X}^2(n) \le \mathcal{X}^2_{1-\alpha/2}(n)) = 1-\alpha/2$. Cu alte cuvinte, $\mathcal{X}^2_{\alpha/2}(n)$, $\mathcal{X}^2_{1-\alpha/2}(n)$ sunt $\alpha/2$ şi $1-\alpha/2$ cuantile ale distribuţiei $\mathcal{X}^2(n)$. De unde deducem ca

$$P(\mathcal{X}^2_{\alpha/2}(n) \le \frac{nS_0^2}{\sigma^2} \le \mathcal{X}^2_{1-\alpha/2}(n)) =$$

$$P(nS^2/\mathcal{X}^2_{1-\alpha/2}(n) \le \ \sigma^2 \le nS_0^2/\mathcal{X}^2_{\alpha/2}(n)) = 1-\alpha.$$

ceea ce inseamna ca intervalul

$$[nS_0^2/\mathcal{X}^2_{1-\alpha/2}(n), nS_0^2/\mathcal{X}^2_{\alpha/2}(n)]$$

este un interval de incredere pentru parametrul σ^2 cu probabilitatea de incredere $1-\alpha$.

Cazul 2. Valoarea medie $\mathbb{E}X = m$ este **necunoscută.**

Aici vom beneficia de următorul rezultat teoretic ce ţine de Teoria Probabilităţilor:

Propozitia 3. *Daca* $X_1, X_2, ..., X_n$ *sunt v.a.i.i.r. normal repartizate cu media* m *si dispersia* σ^2 *iar*

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, \ s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2,$$

atunci

$$\sum_{i=1}\frac{(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \mathcal{X}^2(n-1), \ \forall \sigma > 0.$$

Propoziţia aceasta, aplicată la statistica

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i - \overline{x})^2}{\sigma^2} .$$

ne arată că

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\overline{x})^2}{\sigma^2}=\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\sim\mathcal{X}^2(n-1),\ \forall\sigma>0,$$

unde

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2.$$

Aceasta insemna ca

$$P(\mathcal{X}^2_{\alpha/2}(n-1)\leq\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\leq\mathcal{X}^2_{1-\alpha/2}(n-1))=1-\alpha,$$

unde $\mathcal{X}^2_{\alpha/2}(n-1)$, $\mathcal{X}^2_{1-\alpha/2}(n-1)$ sunt acele valoari pentru care $P(\mathcal{X}^2(n-1)\leq\mathcal{X}^2_{\alpha/2}(n-1))=\alpha/2$, $P(\mathcal{X}^2(n-1)\leq\mathcal{X}^2_{1-\alpha/2}(n-1))=1-\alpha/2$.De unde deducem ca

$$P(\mathcal{X}^2_{\alpha/2}(n-1)\leq\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\leq\mathcal{X}^2_{1-\alpha/2}(n-1))=$$

$$=P((n-1)s^2/\mathcal{X}^2_{1-\alpha/2}(n-1)\ \leq\ \sigma^2\leq(n-1)s^2/\mathcal{X}^2_{\alpha/2}(n-1))=1-\alpha.$$

ceea ce inseamna ca intervalul

$$\left[(n-1)s^2/\mathcal{X}^2_{1-\alpha/2}(n-),(n-1)s^2/\mathcal{X}^2_{\alpha/2}(n-1)\right]$$

este un interval de incredere pentru parametrul m cu probabilitatea de incredere $1-\alpha$.

Exemplul 1. Măsurătorile care vizeaza gradul de duritate a 16 mostre de oţel aliat (in unităţi convenţionale) s-au soldat cu următoarele rezultate: 13.1,12.8,11.9,12.04,13.5,13.7,12.0,13.8,10.6,12.4,13.5,11.7,13.9,11.5,12.5,11.9.

În presupunerea că aceste date reprezintă un eşantion de volum 16 dintr-o populaţie statistică a unei v.a. normal repartizate cu media m si dispersia σ^2 **necunoscute**, sa se construiasca intervalele corespunzatoare de confidenta pentru aceşti parametri cu probabilitatea de incredere $1-\alpha=0.95$.

Soluţie. Intervalele cautate corespund cazurilor 2 si 4 descrise mai sus. Prin urmare avem nevoie de media de selectie $\overline{x}$, dispersia de selectie S^2 si estimaţia corectata a dispersiei de selectie s^2. Calculele arată că $\overline{x}\simeq 12.57$, $S^2\simeq 0.93$, $S\simeq 0.96$, $s^2\simeq 0.87$. Din tabelele de calcul pentru repartiţiile Student cu $n-1=16-1=15$ grade de libertate si repartiţia Hi-pătrat cu acelasi număr de grade de libertate aflăm valorile quantilelr $t_{1-\alpha/2}(n-1) = t_{0.975}(15) = 2.131$ şi $\mathcal{X}^2_{\alpha/2}(n-1) = \mathcal{X}^2_{0.025}(15) = 6.26$, $\mathcal{X}^2_{1-\alpha/2}(n-1) = \mathcal{X}^2_{0.975}(15) = 27.49$. Aflam, astfel, ca intervalul de incredere pentru parametrul m este egal cu

$$\left[\overline{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1), \overline{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1)\right] \simeq$$

$$\simeq \left[12.57 - \frac{0.96}{\sqrt{15}} \times 2.131, 12.57 + \frac{0.96}{\sqrt{15}} \times 2.131\right] \simeq [12.042, 13.1],$$

iar intervalul de incredere pentru dispersia σ^2 este egal cu

$$\left[(n-1)s^2/\mathcal{X}^2_{1-\alpha/2}(n-1), (n-1)s^2/\mathcal{X}^2_{\alpha/2}(n-1)\right] \simeq$$

$$\simeq [15 \times 0.87 \ / \ 27.49, 15 \times 0.87 \ / \ 6.26] \simeq [0.47, 2.08].$$

8. Verificarea ipotezelor statistice

8.1. Întroducere

Orice investigaţie statistică devine una temeinică atunci când, in baza datelor statistice ce vizează v.a. X cercetată (variabila care poate fi şi multidimensională), este abordată si rezolvată problema validări sau invalidării distribuţiei (legităţii) probabiliste care guvenează comportamentul probabilist al acestei v.a., validării sau invalidării unor aserţiuni privind valoarea adevărată a unor parametri (valoarea medie, dispersia, coeficientul de corelaţie, etc.) legaţi de v.a. X. Această etapă a unei cercetări statistice ţine de analiza inferenţială a datelor statistice şi implica testarea ipotezelor statistice prin intermediul unor proceduri dedicate verificării ipotezelor statistice.

8.2. Verificarea ipotezelor statistice: notiuni de bază

Drept punct de plecare pentru verificarea unor supoziţii (ipoteze) ce vizeaza anumite proprietati ale distribuţiei populaţiei statistice a v.a. X va servi un eşantion $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de volum n ce constă din rezultatele observaţiilor facute asupra v.a. X.

Definitia 1. Vom numi *ipoteza statistică* orice presupunere H ce vizeaza parametrii sau distribuţia v.a. X. Ipoteza statistica H se numeste *simpla* daca ea vizeaza o distribuţie unică a v.a. X sau o valoare unica a parametrului legat de această v.a., in caz contrar ipoteza H se numeste *compusa.*

De exemplu daca stim ca $X \sim \exp(\lambda)$, atunci *simpla* este ipoteza $H : X \sim \exp(1)$ sau, altfel spus, simplă este ipoteza $H : \lambda = 1$, iar ipoteza $H : \lambda \geq 1$ este *compusă.*

Deseori forma distribuţiei v.a. X este cunoscuta si atunci ipotezele vizeaza valorile parametrilor care definesc distribuţia data. In acest caz ipotezele se numesc *parametrice.* In continuare vom avea in vedere anume acest caz.

Ipoteza care se verifica se numeste *ipoteza nulă* sau *ipoteza de baza* si se noteaza cu H_0.Împreună cu ipoteza nula este considerata si ipoteza *alternativă* notata cu H_1, aceste fiind ipoteze ce se exclud , dar care se completeaza reciproc (tertium non datur).

Un test statistic are menirea de a recomanda acceptarea ipotezei H_0 (şi deci respingerea lui H_1) sau respingerea lui H_0 (şi deci acceptarea lui H_1).

Regula sau procedura $\mathcal{K}$ în baza careia se ia decizia de acceptare sau respingere a ipotezei nule se numeste *criteriu.* La fel ca in cazul construirii intervalelor de incredere la baza unui criteriu $\mathcal{K}$ se afla o statistica Z corespunzatoare si care se numeste *statistică a criteriului* $\mathcal{K}$.

Verificarea ipotezelor statistice se bazeaza pe principiul in conformitate cu care un eveniment de probabilitate mica este considirat imposibil iar un eveniment de probabilitate mare este considirat sigur, cu alte cuvinte, vom respecta Principiul Verosimilităţii maxime. Înainte de analiza eşantionului se fixează o probabilitate mica α numita prag de semnificatie. Fie V domeniul de valori al statisticii Z, iar $V_K \subseteq V$ o submultime pentru care, in conditia ca ipoteza nula este adevarata, probabiliatatea ca valoarea lui Z va nimeri in V_K este egala cu α.

Daca vom nota prin z valoarea statisticii Z, ca funcţie de valorile eşantionului, atunci criterul poate fi formulat astfel: ipoteza H_0 se respinge daca $z \in V_K$, in caz contrar, adica daca $z \in V \setminus V_K$, atunci ipoteza H_0 se accepta. Aceasta justifica denumirile de *multime (regiune, domeniu) critica* pentru V_K si *domeniu de acceptare* a ipotezei H_0 pentru $V \setminus V_K$. Acum suntem in stare sa descriem Algoritmul de verificare a ipotezelor H_0, H_1:

Pasul 1. Formulam ipotezele nula H_0 si alternativa H_1 ;

Pasul 2. Fixam pragul de semnificatie α;

Pasul 3. Alegem statistica Z pentru criteriul de verificare a ipotezei $H_{0.}$

Pasul 4. Determinam distribuţia v.a. Z in functie de valorile eşantionului privite ca v.a.;

Pasul 5. Alegem multimea critica V_K in dependenta de forma ipotezei alternative;

Pasul 6. In baza valorile observate $(x_1, x_2, ..., x_n)$ calculam valoarea de selectie z;

Pasul 7. Se ia decizia de

a) respingere a ipotezei H_0 daca $z \in V_K$;

b) acceptare a ipotezei H_0 daca $z \in V \setminus V_K$.

In mod logic dupa aplicarea unui criteriu de verificare a ipotezelor sunt posibile urmatoarele 4 variante:

1. Ipoteza H_0 este acceptata, ea fiind in realitate justa;
2. Ipoteza H_0 este respinsa, ea fiind in realitate justa;
3. Ipoteza H_0 este respinsa, ea fiind in realitate falsa;
4. Ipoteza H_0 este acceptata, ea fiind in realitate falsa;

Definitia 2. Spunem ca avem de a face cu o *eroare de speta I* daca ipoteza H_0 este respinsa, ea fiind in realitate justa si ca avem de a face cu o *eroare de speta II* daca ipoteza H_0 este acceptata, ea fiind in realitate falsa. Probabilitatea $P(Z \in V_K \ / \ H_0) = \alpha$, care coincide cu pragul de semnificaţie este, de fapt, *probabilitatea erorii de speta I.* Probabilitatea $P(Z \in V \setminus V_K \ / \ H_1) = \beta$ se numeste *probabilitatea erorii de speta II ,* iar valoarea $1-\beta$ se numeste *puterea testului.*

Desigur că dorim să proiectăm teste pentru care probabilităţile de eroare α şi β să fie mici. În anumite situaţii, se caută minimizarea sumei $\alpha + \beta$. În alte cazuri se fixează nivelul de semnificaţie α şi se caută testul pentru care β să fie minimă. În cazuri complexe calculul lui β este dificil sau chiar imposibil, aşa că se fixează doar nivelul de semnificaţie α.

8.3.Verificarea ipotezelor statistice despre valoarea medie

Ca şi în cazul intervalelor de încredere, deoarece distribuţia normală ocupă, graţie Legii Numerelor Mari si Teoremei Limită Centrală, un loc aparte, exemplele aduse în continuare sunt reprezentative şi pentru eşantioanele de volum mare ce ţin de populaţii statistice diferite de cele ale v.a. distribuite normal. De aceea vom exemplifica procedura de verificare a ipotezelor, în primul, prin exemple legate de distribuţa normală.

Exemplul 1 (*Verificarea ipotezelor despre media v.a. repartizate normal cu dispersia cunoscuta*).

Fie, aşadar, $(x_1, x_2, ..., x_n) \sim X : N(m, \sigma^2)$, $m \in \mathbb{R}$ fiind ***necunoscută*** iar σ^2 ***cunoscută***.Vom analiza 3 subcazuri:

a) $H_0 : m = m_{0,} \; H_1 : m < m_0$, numit *Test de Stânga*;

b) $H_0 : m = m_{0,} \; H_1 : m \neq m_0$, numit *Test Bilateral*;

c) $H_0 : m = m_{0,} \; H_1 : m > m_0$, numit *Test de Dreapta.*

Criteriile de verificare a ipotezelor in cazurile a)-c) se numesc criterii de *stanga, bilateral si dreapta* respectiv. In toate aceste cazuri ne vom baza pe statistica

$$Z = \frac{\overline{x} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

despre care stim ca $Z \sim N(0, 1)$, $\forall m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$.

Cazul a) Cum mulţimea de valori V a statistici Z coincide cu $\mathbb{R}$, ipoteza $H_1 : m < m_0$ indica asupra faptului ca multimea critica V_K trebuie sa fie de forma $V_K = (-\infty, x_\alpha)$.

Din condiţia

$$P(Z \in V_K \;/\; H_0) = P(\frac{\overline{x} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \in V_K \;/\; H_0) = P(\frac{\overline{x} - m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_\alpha) = \alpha$$

gasim ca z_α are proprietatea $z_\alpha : \Phi(z_\alpha) = \alpha$, adică z_α este $\alpha-$cuantila v.a. Z, α fiind valoarea pragului de semnificatie dat, $\alpha \in (0, 1)$. Dar

$$P(\frac{\overline{x} - m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_\alpha) = P(\overline{x} < m_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha) = \alpha$$

Prin urmare daca $\overline{x} < m_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha$, atunci ipoteza H_0 se respinge, în caz contrar se accepta. Cu alte cuvinte, in raport cu statistica $\overline{x}$ multimea critica a criteriului este multimea $(-\infty, m_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha)$ iar domeniul de acceptare a ipotezei H_0 este multimea $[m_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha, +\infty)$

Cazul b) Cum multimea de valori V a statisticii Z coincide cu $\mathbb{R}$, ipoteza $H_1 : m \neq m_0$ indica asupra faptului ca multimea critica V_K trebuie sa fie de forma $V_K = (-\infty, z_{\alpha/2}) \cup (z_{1-\alpha/2}, +\infty)$, ceea ce corespunde *Testului Bilateral.*

Din condiţia

$$P(Z \in V_K \;/\; H_0) = P(\frac{\overline{x} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \in V_K \;/\; H_0) =$$

$$P(\frac{\overline{x} - m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{\alpha/2}) + P(\frac{\overline{x} - m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > z_{1-\alpha/2}) = \alpha$$

gasim ca $z_{\alpha/2}$ are proprietatea $z_{\alpha/2} : \Phi(z_{\alpha/2}) = \alpha/2$, iar $z_{1-\alpha/2}$ are proprietatea $z_{1-\alpha/2} : \Phi(z_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha/2$, α fiind valoarea pragului de semnificatie dat, $\alpha \in (0,1)$. Dar

$$P(\frac{\overline{x}-m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{\alpha/2}) = P(\overline{x} < m_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2})$$
$$= P(\overline{x} < m_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2})$$

iar

$$P(\frac{\overline{x}-m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > z_{1-\alpha/2}) = P(\overline{x} > m_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2})$$

Prin urmare daca $\overline{x} < m_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}$ sau $P(\overline{x} > m_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2})$, atunci ipoteza H_0 se respinge si se accepta in caz contrar. Cu alte cuvinte, in raport cu statistica $\overline{x}$ multimea critica a criteriului este multimea $(-\infty, m_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}) \cup (m_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}, +\infty)$ iar domeniul de acceptare este multimea

$$[m_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2},\ m_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}]$$

Cazul c) Prin analogie cu cazul c) gasim ca in raport cu statistica $\overline{x}$ multimea critica a criteriului este multimea $(m_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}, +\infty)$ iar domeniul de acceptare este multimea

$$(-\infty,\ m_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}].$$

Exemplul 2. Conform datelor tehnice ale unui motor auto, acesta consumă $10l$ de carburanţi la $100km$. Constructorul a operat anumite modificari asupra acestui motor in scopul diminuarii consumului de carburanti. Pentru verificare au fost alese la intamplare 25 de automobile cu motor modernizat, constatându-se, astfel, ca media de selectie a acestui consum $\overline{x} = 9.3l$ la $100km$. În presupunerea ca selecţia a fost facută dintr-o populaţie statistică a unei v.a. $X \sim N(m, 2l)$, să se verifice ipoteza că modificările de construcţie aduse motorului nu au afectat consumul de carburant in sensul diminuării lui, luând in calitate de prag de semnificaţie $\alpha = 0.05$.

Solutie. Avem de a face, aşadar, cu o problema de verivficare a ipotezelor despre media m a unei populatii statistice legate de o v.a. normal repartizate cu dispersia cunoscuta $\sigma^2 = 4l^2$, ipoteze de baza si alternativa fiind, respectiv, $H_0\ : m = 10$, $H_1 : m < 10$, iar pragul de semnificatie $\alpha = 0.05$. Primii doi pasi ai Algoritmului de verificare a ipotezelor fiind cunoscuti, trecem la

Pasul 3. Luăm

$$Z = \frac{\overline{x} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

in calitate de statistica a criteriului de verificare a ipotezelor unde media de selectie.$\overline{x}$ este estimatorul valorii medii teoretice m ;

Pasul 4. În presupunerea ca este adevarata ipoteza $H_0 : m = 10$ statistica $Z = (\overline{x} - m) / (\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ are repartitia normala standard, cu media 0 si dispersia 1.

Pasul 5. Deoarece ipoteza alternativa are forma $H_1 : m < 10$, rezulta ca avem de a face cu un criteriu de stanga cu multimea critica de vorma $V_K = (-\infty, z_\alpha)$, unde z_α are proprietatea $z_\alpha : \Phi(z_\alpha) = \alpha$.

Din tabelul de calcul al valorilor $\Phi(z)$ in functie de z aflam ca $\Phi(z_{0.05}) = 0.05$ atunci cand $z_{0.05} = -1.645$;

Pasul 6. Valoarea de selectie z a statisticii Z este egala cu

$$z = \frac{9.3 - 10}{\frac{2}{\sqrt{25}}} = -1.75;$$

Pasul 7. Deoarece valoarea de selectie $z = -1.75 \in V_K = (-\infty, -1.645)$ rezulta ca ipoteza de baza $H_0 : m = 10$ este respinsa, prin urmare este valabila ipoteza alternativa $H_1 : m < 10$. Cu alte cuvinte, modificările de construcţie a motorului au drept efect diminuarea consumului de carburanti.

Deoarece pragul critic al statisticii de selecţie Z este egal cu $z_K = z_{0.05} = -1.645$, din ecuaţia $z_{0.05} = -1.645 = (\overline{x}_K - 10) / (\frac{2}{\sqrt{25}})$ aflam si pragul critic pentru media de selectie $\overline{x}_K = 9.342$, cu alte cuvinte multimea critica pentru statistica $\overline{x}$ este data de relatia $\overline{x} < 9.342l$.

Exemplul 3 (*Verificarea ipotezelor despre media v.a. repartizate normal cu dispersia necunoscuta*).

Fie $(x_1, x_2, ..., x_n) \sim X : N(m, \sigma^2)$, $m \in \mathbb{R}$ fiind ***necunoscută*** dar şi σ^2 ***necunoscută***. Din cele 3 subcazuri:

a) $H_0 : m = m_{0,} H_1 : m < m_0$;

b) $H_0 : m = m_{0,} H_1 : m \neq m_0$;

c) $H_0 : m = m_{0,} H_1 : m > m_0$,

vom analiza doar subcazul b) celelalte fiind asemănătoare, iar în toate aceste cazuri ne vom baza pe statistica

$$T(n-1) = \frac{\overline{x} - m}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim Student(n-1), \forall m \in \mathbb{R},$$

unde $\overline{x}$ este media de selecţie, iar S este abaterea standard de selecţie, la bază aflându-se Propozitia 2 din paragraful anterior.

Aşadar, cu referire la cazul b), cum multimea de valori V a statisticii $T(n-1)$ coincide cu $\mathbb{R}$, ipoteza $H_1 : m \neq m_0$ indica asupra faptului ca multimea critica V_K trebuie sa fie de forma $V_K = (-\infty, t_{\alpha/2}(n-1) \cup (t_{1-\alpha/2}(n-1), +\infty)$.

Din condiţia

$$P(T(n-1) \in V_K \ / \ H_0) = P(\frac{\overline{x}-m}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \in V_K \ / \ H_0) =$$

$$P(\frac{\overline{x}-m_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < t_{\alpha/2}(n-1)) + P(\frac{\overline{x}-m_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} > t_{1-\alpha/2}(n-1)) = \alpha$$

găsim că $t_{\alpha/2}(n-1)$ are proprietatea $t_{\alpha/2}(n-1) : P(T(n-1) < t_{\alpha/2}(n-1)) = \alpha/2$, iar $t_{1-\alpha/2}$ are proprietatea $t_{1-\alpha/2} : P(T(n-1) < t_{1-\alpha/2}(n-1)) = 1-\alpha/2$, α fiind valoarea pragului de semnificatie dat, $\alpha \in (0,1)$. Dar

$$P(\frac{\overline{x}-m_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < t_{\alpha/2}(n-1)) = P(\overline{x} < m_0 + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1))$$

$$= P(\overline{x} < m_0 - \frac{S}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2})$$

iar

$$P(\frac{\overline{x}-m_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} > t_{1-\alpha/2}(n-1)) = P(\overline{x} > m_0 + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1)).$$

Prin urmare daca $\overline{x} < m_0 - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1)$ sau $\overline{x} > m_0 + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}$, atunci ipoteza H_0 se respinge si se accepta in caz contrar. Cu alte cuvinte, in raport cu statistica $\overline{x}$ mulţimea critica a criteriului este multimea $(-\infty, m_0 - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1)) \cup (m_0 + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1), +\infty)$ iar domeniul de acceptare este multimea

$$[m_0 - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1), \ m_0 + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1)]$$

Remarcă. Prin analogie cu raţionamentele care stau la baza extinderii intervalelor de incredere, construite în cazul populaţiilor statistice, asupra populaţiilor statistice diferite de cele normal distribuite, folosind faptul că eşantioanele au un volum suficient de mare, la fel se procedează şi cu procedurile de testare a ipotezelor statistice.

Exemplul 4. (***Verificarea ipotezelor statistice despre parametrul (proporţia)*** p ***al unei populaţiei statistice***). Fie $(x_1, x_2, ..., x_n)$ un eşantion de volum n dintr-o populaţie statistică a unei v.a. $X \sim Bernoulli(p)$, $p \in (0,1)$, p fiind necunoscut. Situaţia este tipica pentru orice populaţie statistică atunci când masurătorile/observaţiile statistice depistează dacă unitatea inclusă în eşantion posedă nivelul dat (convenţional notat cu 1,dacă-l posedă) sau nu posedă acest nivel (convenţional notat cu 0 dacă nu-l posedă) al unei caracteristici statistice, p reprezentând proporţia acelor unităţ din populaţie care posedă nivelul dat. Având la dispoziţie doar estimatorul eficient $\hat{p}(x_1, x_2, ..., x_n)=\overline{x}$ al parametrului p putem putem verifica, de exemplu, ipotezele: $H_0 \ : p = p_{0,}\ H_1 : p \neq p_0$. Într-adevăr, conform Propoziţiei din Exemplul 1, p.6.1., f.d. a v.a. $(\bar{x} - p)/\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}$ poate fi aproximată cu f.d. normală standard $\Phi(x)$, mai exact $(\bar{x} - p)/\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n} \simeq N(0,1)$ pentru orice $p \in (0,1)$, deîndată ce $n{>}50$, $n\hat{p}{>}5$, $n\hat{p}(1-\hat{p}){>}5$. Prin urmare problema noastră devine un caz particular de verificare a ipotezelor despre medie a unei populaţii statistice normal distribuite cu dispersia cunoscuta (a se vedea cazul b) din exemplul 1 analizat anterior. În concluzie, in raport cu statistica $\hat{p}(x_1, x_2, ..., x_n)=\overline{x}$, multimea critica a criteriului cu pragul de semnificaţie α, $\alpha \in (0,1)$ este mulţimea

$$(-\infty, p_0 - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n)} \cup (m_0 + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}, +\infty)$$

iar domeniul de acceptare este multimea

$$[p_0 - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n},\ m_0 + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}].$$

Prin analogie se verifica şi ipotezele $H_0 \ : p = p_{0,}\ H_1 : p < p_0$, dar si ipotezele $H_0 \ : p = p_{0,}\ H_1 : p > p_0$.

Exemplul 5. La o universitate americană Senatul sustine că nu se face discriminare pe criteriu de gen la admitere. Se aleg la întâmplare 500 studenti, constatându-se că din ei 267 sunt baieţi. Să se testeze cu pragul de semnificaţie $\alpha = 0.05$ daca Senatul universitatii spune adevarul sau nu.

Soluţie. Problema noastră reprezintă un caz particular al problemei generale, rezolvate în exemplul anterior, unde

$$X = \begin{cases} 1, \text{dacă studentul ales este băiat,} \\ 0, \text{dacă studentul ales este fată,} \end{cases}$$

$X \sim Bernoulli(p)$, $p \in (0,1)$, p fiind *necunoscut*, dar sunt cunoscute volumul eşantionului $n = 500$ şi proporţia băieţilor în eşantion $\hat{p}$=267/500= 0.534. Atunci, a testa dacă Senatul universitatii spune adevarul sau nu, este echivalent cu verificarea ipotezelor $H_0 : p = 1/2$, $H_1 : p \neq 1/2$, având un prag de semnificaţie $\alpha = 0.05$, adică $z_{1-\alpha/2} = z_{0.975} = 1.96$. Cum domeniul de acceptare este mulţimea

$$[\frac{1}{2}-1.96\frac{\sqrt{0.534(1-0.534)}}{\sqrt{500}},\ \frac{1}{2}+1.96\frac{\sqrt{0.534(1-0.534)}}{\sqrt{500}}] = [0.456\,27, 0.543\,73],$$

iar proporţia eşantionului $\hat{p}$=0.534 nimereşte în el, rezultă ca putem accepta, cu probabilitatea 1-$\alpha = 0.95$, că Senatul spune adevărul.

Exemplul 6. (***Verificarea ipotezelor statistice despre medie atunci când volumul eşantionului este mic***).

8.4.Verificarea ipotezelor statistice despre dispersie

Ca şi în cazul mediei, în acest paragraf ne vom concentra asupra verificarii ipotezelor despre dispersie atunci când eşantionul $(x_1, x_2, ..., x_n)$ provine dintr-o populaţie statistică a unei v.a. $X \sim N(m, \sigma^2)$, deoarece algoritmul verificarii rămâne neschimbat, deîndată ce volumul n al eşantionului este suficient de mare iar $x_1, x_2, ..., x_n$, privite ca v.a.i.i.d., sunt guvernate de Legea Numerelor Mari si Teorema Limită Centrală.

Remarca 1. Evident, atunci când $X \sim N(m, \sigma^2)$, algoritmul de verificare a ipotezelor despre dispersie, ca şi despre medie, nu se schimbă chiar dacă eşantionul nu are volum destul de mare.

Exemplul 1 (***Verificarea ipotezelor despre dispersia v.a. distribuite normal cu media cunoscută***).

Aşadar, fie $(x_1, x_2, ..., x_n) \sim X : N(m, \sigma^2)$, media $m \in \mathbb{R}$ fiind ***cunoscută,*** dar dispersia σ^2 ***necunoscută***. Din cele 3 subcazuri:

a) $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$, $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$;

b) $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$, $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$;

c) $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$, $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$.

vom analiza, de exemplu, subcazul a) celelalte fiind asemănătoare, iar în toate aceste subcazuri ne vom baza, ca şi la construirea intervalului de incredere pentru σ^2 (Exemplul1, p.6.2.), pe statistica

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - m)^2}{\sigma^2} = \frac{nS_0^2}{\sigma^2} \sim \mathcal{X}^2(n), \ \forall \sigma > 0.$$

unde $S_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2$.

Aşadar, cu referire la cazul a), cum multimea de valori V posibile ale statisticii $\mathcal{X}^2(n)$ coincide cu $[0, +\infty)$, ipoteza $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$ indica asupra faptului ca multimea critica V_K trebuie sa fie de forma $V_K = [0, \mathcal{X}_\alpha^2(n))$, unde $\mathcal{X}_\alpha^2(n)$:$P(\mathcal{X}^2(n) \leq \mathcal{X}_\alpha^2(n)) = \alpha$, pragul de semnificaţie $\alpha \in (0, 1)$.

Din condiţia

$$\mathbf{P}(\mathcal{X}^2(n) \in V_K \ / \ H_0) = \mathbf{P}(\frac{nS_0^2}{\sigma^2} \in V_K \ / \ H_0) =$$

$$\mathbf{P}(\frac{nS_0^2}{\sigma_0^2} < \mathcal{X}_\alpha^2(n)) = \alpha.$$

Prin urmare, dacă valoarea calculată $\frac{nS_0^2}{\sigma_0^2} \in [0, \mathcal{X}_\alpha^2(n))$, atunci ipoteza de bază este respinsă, în caz contrar este acceptată.

Cu alte cuvinte, in raport cu statistica $\frac{nS_0^2}{\sigma_0^2}$, mulţimea critică a criteriului este multimea $[0, \mathcal{X}_\alpha^2(n))$, iar domeniul de acceptare este multimea $[\mathcal{X}_\alpha^2(n), +\infty)$.

Prin analogie se arată că, în raport cu aceeaşi statistică, în *subcazul b),* avem că mulţimea critică a criteriului este mulţimea $[0, \mathcal{X}_{\alpha/2}^2(n)) \cup (\mathcal{X}_{1-\alpha/2}^2(n))$, iar domeniul de acceptare este multimea $[\mathcal{X}_{\alpha/2}^2(n),\ (\mathcal{X}_{\alpha/2}^2(n)]$, iar în *subcazul c),* avem că mulţimea critică a criteriului este mulţimea $(\mathcal{X}_{1-\alpha}^2(n), +\infty)$, iar domeniul de acceptare este mulţimea $[0,\ \mathcal{X}_{1-\alpha}^2(n)]$.

Exemplul 2 (*Verificarea ipotezelor despre dispersia v.a. distribuite normal cu media necunoscută*).

Fie $(x_1, x_2, ..., x_n) \sim X : N(m, \sigma^2)$, media $m \in \mathbb{R}$ fiind ***necunoscută,*** dar şi dispersia σ^2 ***necunoscută***.

Şi aici sun posibile 3 subcazuri:

a) $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$, $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$;

b) $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$, $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$;

c) $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$, $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$.

Spre deosebire de exemplul anterior, în toate aceste subcazuri ne vom baza, ca şi la construirea intervalului de incredere pentru σ^2 (Exemplul 2, p.6.2.), pe statistica

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \overline{x})^2}{s^2} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \mathcal{X}^2(n-1), \ \forall \sigma > 0.$$

unde $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$. Algoritmul de construire a criteriului de verificare a ipotezelor fiind similar cu cel din exemplul anterior, atâta doar că statistica de referinţă va fi $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$ distribuită $\mathcal{X}^2(n-1)$, $\forall \sigma > 0$, putem reproduce cum arată mulţimea critică şi someniul de acceptare cu pragul de semnificaţie α, $\alpha \in (0,1)$, în fiecare subcaz, în următorul tabel:

	Domeniul critic	*Domeniul de acceptare*
Subcazul a)	$[0, \mathcal{X}_\alpha^2(n-1))$	$[\mathcal{X}_\alpha^2(n-1), \ +\infty)$
Subcazul b)	$[0, \mathcal{X}_{\alpha/2}^2(n-1)) \cup (\mathcal{X}_{1-\alpha/2}^2(n-1))$	$[\mathcal{X}_{\alpha/2}^2(n-1), (\mathcal{X}_{1-\alpha/2}^2(n-1)]$
Subcazul c)	$(\mathcal{X}_{1-\alpha}^2(n-1), +\infty)$	$[0, \mathcal{X}_{1-\alpha}^2(n-1)]$

Exemplul 3. Pentru a valida valorile ce corespund valorii medii şi a dispersiei înălţimii unui bărbat adult ales la întâmplare din Republica Moldova, s-a efectuat un sondaj de volum $n = 100$ în baza căruia media de selecţie s-a dovedit a fi egală cu $\overline{x}$=169.7 cm, s^2=38.3 cm^2. Deoarece înălţimea unui bărbat (ca şi a unei femei) este o v.a. $X \sim N(m, \sigma^2)$, cu *media* m şi *dispersia* σ^2 *necunoscute*, putem, de exemplu, verifica ipotezele $H_0 : m = 170$, $H_1 : m \neq 170$, folosind criteriul dedus în Exemplul 3 (subcazul b), p. 7.2., luând ca prag de semnificaţie $\alpha = 0.05$. Statistica de referinţa fiind $\overline{x}$, iar $S \simeq s = \sqrt{38.3} = 6.188\,7$, $t_{0.975}(100-1) \simeq z_{0.975} = 1.96$, deducem că domeniul de acceptare, care este egal cu

$$[m_0 - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{0.975}(n-1), m_0 - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{0.975}(n-1)] = [170 - \frac{6.1887}{\sqrt{100}} 1.96, 170 + \frac{6.1887}{\sqrt{100}} 1.96] =$$

$$= [168.9, 170, 38$$

acoperă valoarea $\overline{x} = 169.95$ calculată în baza eşantionului menţionat. Prin urmare ipoteza ca media $m = 170$ cm este acceptata.

La fel, putem verifica ipotezele $H_0 : \sigma^2 = 36$, $H_1 : \sigma^2 \neq 36$, folosind criteriul dedus în Exemplul 2 (anterior) (subcazul b), luând ca prag de semnificaţie $\alpha = 0.05$. Cum $\mathcal{X}^2_{\alpha/2}(n-1) = \mathcal{X}^2_{0.025}(999) = 74.2$ iar $\mathcal{X}^2_{1-\alpha/2}(n-1) = \mathcal{X}^2_{0.975}(999) = 129.6$, deducem ca domeniul de acceptare fiind egal cu $[74.2, 129.6]$ este acoperitor pentru valoarea calculata a statisticii de referinţa $\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{99\times 38.3}{36} = 105.33$. În concluzie, putem considera cu o probabilitate de încredere $1-\alpha = 0.95$ că $X \sim N(170; 36)$, cu alte cuvinte că înălţimea unui bărbat adult ales la întâmplare din Republica Moldova este o v.a. X cu media 170 cm şi dispersia 36 cm^2.

8.5. Verificarea ipotezelor statistice şi $p-$valoarea

Din câte am văzut, pragul de semnificaţie α, folosit la verificarea ipotezelor, reprezintă eroarea de speţa I, mai exact α este probabilitatea respingerii ipotezei nule atunci când ea este adevărată. Experimentatorul îşi fixează valoarea pentru α char la începutul procesului de testare a ipotezelor. Cu alte cuvinte, el foloseşte acest prag de semnificaţie pentra a determina dacă ipoteza H_0 este sau nu respinsă. Dealtfel, după cum vom vedea din exemplul următor, în baza unuia şi aceluiaşi eşantion de date, în dependenţa de valoarea utilizată a lui α, putem ajunge la concluzii diferite dupa testare. Într-adevăr, sa luăm

Exemplul 2 din p.7.3. (Continuare). Conform datelor tehnice ale unui motor auto, acesta consumă $10l$ de carburanţi la $100km$. Constructorul a operat anumite modificari asupra acestui motor in scopul diminuarii consumului de carburanti. Pentru verificare au fost alese la intamplare 25 de automobile cu motor modernizat, constatându-se, astfel, ca media de selectie a acestui consum $\overline{x} = 9.3l$ la $100km$. În presupunerea ca selecţia a fost facută dintr-o populaţie statistică a unei v.a. $X \sim N(m, 2l)$, să se verifice ipoteza că modificările de construcţie aduse motorului nu au afectat consumul de carburant in sensul diminuării lui, luând in calitate de prag de semnificaţie $\alpha = 0.05$.

În concordanţă cu scopul formulat în problemă, verificarea ipotezelor $H_0 : m = 10$, $H_1 : m < 10$ cu pragul de semnificaţie $\alpha = 0.05$ are drept rezultat resingerea ipotezei H_0 , deoarece multimea critica raportată la statistica de referinţa $Z = \frac{\overline{x}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, fiind egala cu $V_K = (-\infty, -1.645)$ este acoperitoare pentru valoarea $z = \frac{9.3-10}{\frac{2}{\sqrt{25}}} = -1.75$, unde z este valoarea lui $Z = \frac{\overline{x}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

calculată în baza datelor eşantionului, dar si a cunoaşterii faptului că abaterea standard $\sigma = 2$.

Surprinzător este faptul că, pentru $\alpha = 0.01$, care este mai mic decât 0.05, ipoteza de bază H_0 nu mai este respinsa, fiind acceptată. Într-adevăr, repetând pas cu pas procedura de verificare a ipotezelor, găsim ca pentru $\alpha = 0.01$ multimea critică este egala cu $V_K = (-\infty, -2.34)$, valoarea calculată $z = \frac{9.3-10}{\frac{2}{\sqrt{25}}} = -1.75$ fiind aceeaşi, nu mai nimereşte în mulţimea critică. Prin urmare ipoteza H_0 este accepată.

În directă legătură cu exemplul analizat apare o întrebare firească: dar care este cea mai mică valoare a pragului de semnificaţie pentru care datele din eşantion ne vor conduce la respingerea ipotezei de bază. Răspunsul rezidă în $p-$valoare, noţiune dată în următoarea

Definiţie. Pentru distribuţia probabilistă vizată de ipoteza nulă *vom numi $p-$valoare* cea mai mică valoare a pragului de semnificaţie pentru care valoarea statisticii de referinţă, valoare calculată în baza datelor incluse în eşantion, implică respingerea lui H_0.

Din definiţie deducem algoritmul de calcul al $p-$valorii pornind de la statistica de referinţă pe care o vom nota cu Y=$Y(x_1, x_2, ..., x_n)$, văzută ca v.a., atunci când eşantionul $(x_1, x_2, ..., x_n)$ este interpretat ca v.a. $n-$dimensională (din punct de vedere matematic), valoarea ei calculată fiind notă cu y=$y(x_1, x_2, ..., x_n)$, atunci când eşantionul $(x_1, x_2, ..., x_n)$ este interpretat ca un set de valori numerice (din punctul de vedere al experimentatorului).

Cazul 1. *Test de Stânga.* $p-$valoarea=$P(Y < y)$;

Cazul 2. *Test Bilateral.* $p-$valoarea=$P(|Y| > y)$, atunci când distribuţia v.a. Y este simetrică faţa de 0 sau $p-$valoarea=$2 \cdot P(Y < y)$, în caz contrar;

Cazul 3. *Test de Dreapta.* $p-$valoarea=$P(Y > y)$.

Odată fiind calculată $p-$valoarea, regula de verificare a ipotezei de bază este următoarea: ipoteza nulă H_0 este respinsă dacă $p-$valoarea $< \alpha$.

Drept continuare la exemplul anterior, având de a face cu un Test de Stânga, gasim ca $p-$valoarea=$P(Z \leq -1.75) = 0.04006$. Comparând succesiv aceasta valoare cu valorile lui $\alpha = 0.05$, într-un caz şi $\alpha = 0.01$, în alt caz, se confirmă concluziile trase şi fără a apela la noţiunea de $p-$valoare. Însă, avantajul calculării $p-$valorii constă în faptul ca putem afla limita de jos până la care poate fi micşorată probabilitatea erorii de speţa I. În exemplul citat cea mai mică probabilitate a eroarii de speţa I pe care ne-o putem permite este egala cu α=$p-$valoarea=0.04006. Altfel spus, testul cu cea mai mare probabilitate de încredere pe care ni-l putem permite este cel care corespunde lui α=0.04006, această probabilitatea de încredere fiind egală cu $1-\alpha$=0.959 94.

8.6.Verificarea ipotezelor statistice despre diferenţe legate de date împerecheate (Eşantioane dependente)

Multe din aplicatiile analizei inferenţiale au de a face cu eşantioane, elementele cărora reprezintă date împerecheate, având ca scop formularea unor concluzii despre diferenţa dintre mediile a doua populaţii. Datele împerecheate apar, în mod firesc, în situaţiile de tipul "înainte şi după" sau de tipul "potrivirilor", aceste fiind situaţiile în care unul şi acelaşi obiect sau item este măsurat de două ori, o dată înainte iar a doua oară după tratament", sau masurarile se referă la doi itemi pereche de acelaşi fel, dar supuşi unor condiţii diferite de tratament. De exemplu, cantitatea medie de porumb la hectar, pentru unul si acelaşi tip de porumb, dar crescut pe soluri diferite sau in conditii diferite.

Atunci când avem de a face cu perechi de date este foarte important ca acestea să fie obţinute în baza unei metode bine definite de creare de perechi de date şi care foloseşte în mod clar caracteristici de potrivire naturală. De exemplu, pentru a verifica afirmaţia producatorilor de pantofi, precum ca lungimea medie a tălpii piciorului stâng e mai mare decât cea a piciorului drept vizavi de populatia statistica a adultilor din Republica Moldova putem lua, sa zicem, un eşantion de 15 adulţi, luând drept date împerecheate, datele ce corespund masurarii lungimei tălpii la piciorul stâng si la piciorul drept pentru fiecare adult în parte.

Remarcă. Pentru compararea mediilor a două populaţii nu întotdeauna putem aplica testul diferenţelor pentru date împerecheate, dar atunci când e posibil, aceasta reprezinta un avantaj. De ce? Deoarece, operând cu date împerecheate, excludem, deseori, pericolul influienţelor externe sau a factorilor incontrolabili atunci când colectăm datele împerecheate în baza măsurărilor. Mai mult, se poate arăta ca datele împerecheate au, din punct de vedere teoretic, un efect benefic asupra diminuării gradului de împrăştiere a datelor, adică asupra dispersiei, ceea ce conferă o acurateţe sporită a concluziilor trase în urma analizei inferenţiale.

Un eşantioan de volum n de date împerecheate arată, formal, astfel: $((x_1', x_1''), (x_2', x_2''), ..., (x_n', x_n'') \sim (X', X'')$, unde X', X'' pot fi considerate, de regula, v.a. independente deoarece acestea viziaza sau acelaş item, inainte si dupa, sau caracteristicele a doi itemi inruditi/asociaţi, dar supuşi tratamentelor diferite, etc. Deoarece testarea vizează analiza diferentei $X{=}X' - X''$, criteriul de verificare se va baza, de fapt, pe un eşantion de forma:

$$(x_1, x_2, ..., x_n) \sim X = X' - X'', \text{ unde } x_i = x_i' - x_i'',\ i = \overline{1,n}.$$

Considerân media de selecţie a diferenţelor $\overline{x}$ şi abaterea standart corectată a acestora

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2},$$

atunci în calitate de bază pentru formularea criteriului de verificare a ipotezelor despre diferenţe legate de date împerecheate putem lua următoarea

Teoremă. Statistica $\frac{\overline{x}\ - m}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ poate fi privită ca o v.a. Student sau $T-$distribuită cu $n-1$ grade de libertate, unde m reprezintă valoarea medie teoretică a v.a. $X{=}X' - X''$.

În concluzie, daca vrem sa verificăm, în baza mediei de selecţie a diferenţelor $\overline{x}$, faptul că există sau nu diferenţă de medii ale populaţiilor v.a. X', X'', atunci ipoteza de bază este $H_0{:}m = 0$, iar alternativă poate varia în funcţie de problemă: $H_1{:}m < 0$ (test de stânga); $H_1{:}m > 0$ (test de dreapta) sau $H_1{:}m \neq 0$ (test bilateral).

Exemplul 1. Echipa de medici specializaţ în chirurgia inimii de Spitalul Republican din Chişinau cunosc faptul ca pacienţii care au trecut prin faza primului atac de cord, inainte de o eventuala operaţie pe cord programată în cazul lor, aceştea dezvoltă un grad sporit de anxietate. Echipa de psihiatri a acestui spital si-au propus sa testeze un program de consiliere pentru reducerea anxietăţii acestui tip de pacienţi. Pentru aceasta, înainte şi dupa consiliere, fiecarui pacient i se măsoară, dupa o anumita metodică, gradul de anxietate. În tabelul de mai jos sunt reproduse datele împerecheate ale masurărilor efectuate pe baza unui eşantion de 9 pacienţi.

Prenume pacient	X' Scorul inregistrat inainte de consiliere	X'' Scorul inregistrat după consiliere	$X = X' - X''$ Diferenţa
Ion	121	76	45
$Petru$	93	93	0
$Maria$	105	64	41
$Elena$	115	117	-2
$Gheorghe$	130	82	48
$Mircea$	98	80	18
Ana	142	79	63
$Ecaterina$	118	67	51
$Stefan$	125	89	36.

În baza datelor de mai sus, putem noi oare conchide ca sesiunile de consiliere reduc din anxietate? Sa se foloseasca un prag de semnificaţie egal cu 0.01. Sa se găseasca $p-$valoarea.

Soluţie. *Pas 1.*Volumul eşantionului de date împerechiate fiind egal cu $n = 9$, găsim că media de selectie a diferentelor $\overline{x} = 33.333$ iar abaterea standart corectata s=22. 924.

Pas 2. Deoarece ipotezele vizeaza media diferentelor m, ipoteza de baza este H_0:$m = 0$. Deoarece ne intereseaza dacă după consilere anxietatea scade, adică $m = \mathbb{E}(X' - X'') > 0$, ipoteza alternativa devine H_1:$m > 0$.

Pas 3. Pentru $\alpha = 0.01$, din anexa 2 pentru distribuţia Student cu $n-1 = 8$ grade de libertate, deoarece multimea critica are forma ($t_{1-\alpha}(8)$,$+\infty$), aflăm cuantila $t_{1-\alpha}(8) = 2.896$.

Pas 4. În presupunerea că este adevărată ipoteza de bază H_0:$m = 0$, aflăm valoarea calculată a statisticii de referinţă:

$$t_0(8) = \frac{\overline{x}\ - m}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{33.333 - 0}{\frac{22.924}{\sqrt{9}}} = 4.\,362\,2.$$

Pas 5. Deoarece $t_0(8)$=4. 362 2 $>$ $t_{1-\alpha}(8) = 2.896$, rezultă că valoarea calculată $t_0(8)$ a statisticii de referinţă nimereşte în mulţimea critică, rezultă că ipoteza de bază este respinsă, ceea ce însemna ca aşteptările psihologilor, conform cărora consilierea reduce din anxietate, sunt întemeiate.

Pas 6. Pentru a calcula *$p-$valoarea*, apeland la calculatorul online de la adresa *https://www.danielsoper.com/statcalc/calculator.aspx?id=8* ,observăm că $p = P(T(8) > t_0(8)) = P(T(8) > 4.362) = 0.00120309$. Aceasta inseamnă că Testul confirma acelaşi rezultat chiar pragul de semnificaţie este si mai mic decat 0.01, mai exact, daca $0.00120309 \leq \alpha \leq 0.01$.

8.7.Verificarea ipotezelor despre diferenţa mediilor a două populaţii statistice independente

În acest paragraf vom utiliza distribuţiile statistice ce apar în legătură cu verificarea ipotezelor despre diferenţa mediilor a două populaţii statistice pornind de la mediile de selecţie a două eşantioane ce provin, respectiv, fiecare din aceste populaţii.

Vom începe cu cazul când ambele eşantioane provin din populaţii statistice normal distribuite şi independente deoarece acest caz testul nu este sensibil la marimea eşantioanelor, în schimb, dacă volumele ambelor eşantioane n_1 şi n_2 sunt suficient de mari, atunci testul se aplică, graţie Teoremei Limită Centrale, fară modificare şi pentru populaţiile distribuţia cărora diferă de cea normală.

Fie, aşadar, două eşantioane $(x'_1, x'_2, ..., x'_{n_1}) \sim X'$:$N(m_1, \sigma_1^2)$, $m_1 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1 > 0$, $(x''_1, x''_2, ..., x''_{n_2}) \sim X''$:$N(m_2, \sigma_2^2)$, $m_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_2 > 0$, unde X', X'' sunt v.a. independente. Se pune problema ca în baza acestor date să se verifice ipoteza despre coincidenţa sau noncoincidenţa mediilor necunoscute m_1, m_2.

Vom reda sumar pentru fiecare caz in parte, cum arată statistica de referinţa, cum este distribuită aceasta, cum arata domeniul de acceptare a ipotezei H_0: m_1-$m_2 = 0$ in cazurile testului bilateral si a testului de dreapta.

Cazul 1. Dispersiile σ_1^2 şi σ_2^2 sunt *cunoscute*. Atunci in calitate de statistică de referinţă se ia v.a. $(\overline{x}_1 - \overline{x}_2)/\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \sim N(0,1)$. Drept consecinţă, pentru *testul bilateral domeniul de acceptare a ipotezei de bază* H_0 *cu pragul de semnificaţie* $\alpha \in (0,1)$ coincide cu $V \setminus V_K$=$\{(\overline{x}, \overline{x}_2) : |\overline{x}_1 - \overline{x}_2| /\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < z_{1-\alpha/2}\}$, iar pentru *testul de stânga domeniul de acceptare a ipotezei de bază* H_0 *cu pragul de semnificaţie* $\alpha \in (0,1)$ coincide cu $V \setminus V_K$=$\{(\overline{x}, \overline{x}_2) : (\overline{x}_1 - \overline{x}_2) /\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < z_{1-\alpha}\}$, unde $z_{1-\alpha/2}$ şi $z_{1-\alpha}$ sunt, respectiv $1-\alpha/2$ şi $1-\alpha$ cuantile ale distribuţiei $N(0,1)$,iar $\overline{x}_1, \overline{x}_2$ sunt mediile corepunzătoare ambelor eşantioane. .

Cazul 2. Dispersiile σ_1^2 şi σ_2^2 sunt *necunoscute, dar se ştie că sunt egale.* Atunci in calitate de statistică de referinţă se ia v.a. $(\overline{x}_1 - \overline{x}_2)/(s\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}) \sim$

$T(n_1 - n_2 - 2)$. Drept consecinţă, pentru *testul bilateral domeniul de acceptare a ipotezei de bază* H_0 *cu pragul de semnificaţie* $\alpha \in (0,1)$ coincide cu $V \setminus V_K$=$\{(\overline{x}_1, \overline{x}_2) : |\overline{x}_1 - \overline{x}_2| \,/(s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}) < t_{1-\alpha/2}(n_1 - n_2 - 2)\}$, iar pentru *testul de stânga domeniul de acceptare a ipotezei de bază* H_0 *cu pragul de semnificaţie* $\alpha \in (0,1)$ coincide cu $V \setminus V_K$=$\{(\overline{x}_1, \overline{x}_2) : (\overline{x}_1 - \overline{x}_2)$ $/(s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}) < t_{1-\alpha}(n_1 - n_2 - 2)\}$, unde $t_{1-\alpha/2}(n_1 - n_2 - 2)$ şi $t_{1-\alpha}(n_1 - n_2 - 2)$ sunt, respectiv $1-\alpha/2$ şi $1-\alpha$ cuantile ale distribuţiei Student cu $n_1 - n_2 - 2$ grade de libertate, $\overline{x}_1, \overline{x}_2$ fiind mediile de selecţie corespunzătoare ambelor eşantioane, iar $s = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1 - n_2 - 2}$, s_1^2, s_2^2 fiind dispersiile de selecţie corectate corespunzătoare ambelor eşantioane.

Cazul 3. Dispersiile σ_1^2 şi σ_2^2 sunt *necunoscute, dar se ştie, in plus, că nu sunt egale.* Atunci in calitate de statistică de referinţă se ia v.a. $(\overline{x}_1 - \overline{x}_2)/\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$. În acest caz, conform criteriului Cochran-Cox [6] , pentru *testul bilateral domeniul de acceptare a ipotezei de bază* H_0 *cu pragul de semnificaţie* $\alpha \in (0,1)$ coincide cu $V \setminus V_K$=$\{(\overline{x}_1, \overline{x}_2) : |\overline{x}_1 - \overline{x}_2| \,/\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} <$ $t_{1-\alpha/2}(k)\}$, iar pentru *testul de stânga domeniul de acceptare a ipotezei de bază* H_0 *cu pragul de semnificaţie* $\alpha \in (0,1)$ coincide cu $V \setminus V_K$=$\{(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ $: (\overline{x}_1 - \overline{x}_2) \,/\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} < t_{1-\alpha}(k)\}$, unde pragul critic $t_{1-\alpha}(k)$ în funcţie de α se calculează dupa formula $t_{1-\alpha}(k) = \frac{t_{1-\alpha}(n_1-1)\frac{s_1^2}{n_1} + t_{1-\alpha}(n_2-1)\frac{s_2^2}{n_2}}{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$, $t_{1-\alpha}(n_1 - 1), t_{1-\alpha}(n_2 - 1)$ fiind, respectiv $1-\alpha$ cuantilele distribuţiilor Student cu $n_1 - 1$ şi $n_2 - 1$ grade de libertate, $\overline{x}_1, \overline{x}_2$ fiind mediile de selecţie corespunzătoare ambelor eşantioane, iar $s^2 = \frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}$, s_1^2, s_2^2 fiind dispersiile de selecţie corectate corespunzătoare ambelor eşantioane.

Remarcă. Aplicabilitatea criteriilor de veificare a ipotezelor despre diferenţa mediilor descrise mai sus în cazurile 2-3 este valabilă şi pentru eşantioane de volum mic.

Exemplul 1. Considerăm două eşantioane de date ordonate crescător, unul de volum n_1=10, (2, 4, 6, 7, 9, 12, 14, 16, 19, 24), altul de volum n_2=9, (9, 14, 19, 21, 25, 29, 35, 41, 46), dispersiile populaţiilor respective fiind necunoscute, dar despre care se ştie ca acestea sunt diferite. Ne aflăm în condiţiile cazului 3. Calulăm mediile de selecţie $\overline{x}_1$=11.3, $\overline{x}_2$=26.556, dispersiile de selecţie corectate s_1^2=49.122, s_2^2=152.53. Pentru pragul de semnificaţie $\alpha = 0.05$, din Anexa 2, aflăm cuantilele $t_{1-\alpha/2}(n_1 - 1) = t_{0.975}(9)$ $=2.2$ iar $t_{1-\alpha/2}(n_2 - 1) = t_{0.975}(8) = 2.306$, prin urmare pentru testul bilateral

Cochran-Cox valoarea

$$t_{1-\alpha/2}(k) = \frac{t_{1-\alpha/2}(n_1-1)\frac{s_1^2}{n_1} + t_{1-\alpha/2}(n_2-1)\frac{s_2^2}{n_2}}{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}} =$$

$$\frac{2.262\frac{49.122}{10} + 2.306\frac{152.53}{9}}{\frac{49.122}{10}+\frac{152.53}{9}} = 2.2961.$$

Cum valoarea statisticii de referinţa calculată în presupunerea ca ipoteza H$_0$ diferenţa mediilor populaţiilor este egală cu zero (adică mediile coincid) este egală cu

$$(\overline{x}_1 - \overline{x}_2)/\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}} = (11.3 - 25.556)/\sqrt{\frac{49.122}{10}+\frac{152.53}{9}} = -3.0491$$

iar valoarea ei absoluta nu nimereşte in domeniul de acceptare a ipotezei H$_0$, aceasta este respinsă, fiind acceptata ipoteza alternativă, conform căreia mediile in cauză diferă.

8.8. Criterii (teste) de verificare a ipotezelor bazate pe distribuţia χ^2

1. Testul de concordanţă χ^2: verificarea ipotezelor despre distribuţia populaţiei statistice a unei v.a. X. Fie $(x_1, x_2, ..., x_n)$ un eşantion de volum n din populaţia statistică a v.a. X cu f.d. $F(x)$ necunoscută. Se verifică ipoteza ca f.d. $F(x)$ coincide cu f.d. $F_0(x)$, cu alte cuvinte $H_0 : F(X) = F_0(x)$, $H_1 : F(X) \neq F_0(x)$, unde $F_0(x)$ sau este cunoscută în totalitate sau este cunoscută forma ei, ca fiind o funcţie ce depinde de parametrii θ_1, θ_2, ..., θ_l necunoscuţi. Dacă se ştie că $F_0(x)$ depinde de parametrii θ_1, θ_2, ..., θ_l , atunci în baza datelor din eşantion se afla estimaţiile acestor parametri $\widehat{\theta}_1 = \widehat{\theta}_1(x_1, x_2, ..., x_n)$, $\widehat{\theta}_2 = \widehat{\theta}_2(x_1, x_2, ..., x_n)$, ..., $\widehat{\theta}_l = \widehat{\theta}_l(x_1, x_2, ..., x_n)$, luând în calitate de $F_0(x) = F_0(x; \widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2, ..., \widehat{\theta}_l)$ iar ca ipoteze $H_0 : F(x) = F_0(x; \widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2, ..., \widehat{\theta}_l)$, $H_1 : F(x) \neq F_0(x; \widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2, ..., \widehat{\theta}_l)$. Atunci, criteriul, intitulat *citeriul* χ^2 *de concordanţă*, de verificare a ipotezei H_0 se poate realiza urmând următoarele etape.

a) Dacă X este o v.a.de tip discret, atunci trebuie calculate frecvenţele n_k, k=1, 2, ..., r, cu care fiecare valoare sau grupă de valori apare în eşantion.

Dacă, însă, v.a. X este de tip (absolut) continue, atunci mulţimea ei de valori posibile este divizată în r intervale Δ_1, Δ_2, ..., Δ_r , disjuncte două câte doua, după care determinăm numărul n_k de elemente din eşantion care nimeresc în intervalul Δ_k, k=1, 2, ..., r. Evident, în ambele cazuri, $\sum\limits_{k=1}^{r} n_k = n$.

b) În caz că v.a. X e de tip discret, presupunând că aceasta este guvernată de f.d. $F_0(x)$, calculăm probabilităţile p_k pentru care v.a. X ia fiecare valoare sau grupă de valori, k=1, 2, ..., r. În caz că v.a. X e de tip (absolut) continue, calculăm probabilităţile p_k cu care v.a. X nimereşte în intervalul Δ_k: $p_k = P(X \in \Delta_k)$, k=1, 2, ..., r. Evident, în ambele cazuri, $\sum\limits_{k=1}^{r} p_k = 1$

c) Deoarece criteriul se bazează pe faptul ca statistica $\sum\limits_{k=1}^{r} \frac{(n_k - np_k)^2}{np_k}$ este distribuită χ^2 cu $r - l - 1$ de libertate, unde l este numărul de parametri de care depinde f.d. $F_0(x)$, l fiind egal cu zero daca funcţia $F_0(x)$ este cunoscută (adică este neparametrică), avem că mulţimea critică cu pragul de semnificaţie $\alpha \in (0, 1)$ are forma V_K=$(\chi^2_{1-\alpha}(\ r - l - 1),\ \ \infty)$. Mai exact, daca valoarea calculata χ^2_{calc} a statisticii $\sum\limits_{k=1}^{r} \frac{(n_k - np_k)^2}{np_k}$ nimereşte în mulţimea critică V_K, atunci ipoteza de bază este respinsă, în caz contrar este acceptată.

Remarca 1. La baza afirmaţiei că statistica $\sum\limits_{k=1}^{r} \frac{(n_k - np_k)^2}{np_k} \sim \chi^2(\ r - l - 1)$ se află Teorema Limită Centrală conform căreia, pentru n suficient de mare, v.a. $\frac{(n_k - np_k)}{\sqrt{np_k}} \simeq N(0, 1)$ pentru orice k=1, 2, ..., r, acestea fiind, totodată independente.

Exemplul 1. Presupunem că în uma aruncării unei monede de 50 de ori succesiv, stema a apărut de 20 de ori. Cu pragul de semnificaţie $\alpha = 0.05$ să se verifice ipoteza că moneda este simetrică.

Soluţie. Variabila aleatoare X aflată în studiu este repartizată Bernoulli cu parametrul $p \in (0, 1)$, mai exact: p_1=$P(X = 0)$=$1 - p$, $p_2 = P(X = 1) = p$, considerând ca apariţia stemei este echivalenta cu evenimentul $\{X = 1\}$, iar apariţia banului cu $\{X = 0\}$, moneda fiind simetrica atunci şi numai atunci când $p = 1/2$. Prin urmare ipoteza că moneda este simetrică este echivalentă cu ipoteza ca v.a. $X \sim Bernoulli(1/2)$. Adică f.d. $F_0(x)$ este cunoscută în totalitate şi corespunde distribuţiei p_1=$P(X = 0)$=$1 - p$= $p_2 =$

$P(X=1)=1/2$. Cazul fiind discret, conform datelor din problemă, avem ca valoarea 0 apare de $n_1=30$ de ori iar valoarea 1 de $n_1=20$ de ori. Mulţimea critică V_K=$(\chi^2_{1-\alpha}(\,r-l-1),\ \infty)$=$(\chi^2_{0.95}(\,2-0-1),\ +\infty)$=$(\chi^2_{0.95}(1),\ \infty)$=$(3.841,+\infty)$. Valoarea calculată χ^2_{calc} a statisticii $\sum_{k=1}^{r}\frac{(n_k-np_k)^2}{np_k}$ este egală cu χ^2_{calc}=$\frac{(20-50\cdot 0.5)^2}{50\cdot 0.5}+\frac{(30-50\cdot 0.5)^2}{50\cdot 0.5}=2$. Valoarea 2 nu nimereşte în mulîţimea critica $(3.841,+\infty)$, ceea ce înseamnă că ipoteza că moneda este simetrică este acceptată.

2. Verificarea ipotezelor despre independenţa a două variabile aleatoare. Presupunem că n observaţii făcute asupra unei v.a. (X,Y) bidimensionale de tip discret au fost centralizate în următorul tabel de contingenţă:

$X\diagdown Y$	y_1	y_2	...	y_l	$\sum\limits_{j=1}^{l} n_{ij}=n_{i\cdot}$
x_1	n_{11}	n_{12}	...	n_{1l}	$n_{1\cdot}$
x_2	n_{21}	n_{22}	...	n_{2l}	$n_{2\cdot}$
...	...	...	...	...	...
x_k	n_{k1}	n_{k2}	...	n_{kl}	$n_{k\cdot}$
$\sum\limits_{i=1}^{k} n_{ij}=n_{\cdot j}$	$n_{\cdot 1}$	$n_{\cdot 2}$	...	$n_{\cdot l}$	$n_{\cdot\cdot}=n$

unde prin n_{ij} sunt notate frecvenţele absolute ale cazurilor când $X=x_i$, $Y=y_j$, $i=\overline{1,k}, j=\overline{1,l}$.

Tabelul de contingenţă de mai sus poate fi adaptat si la cazul când v.a. (X,Y) este de tip (absolut) continue, divizând mulţimea de valori posibile a fiecărei v.a. intr-un număr finit de intervale, n_{ij} reprezentând numărul cazurilor în care X nimereşte în intervalul i,$i=\overline{1,k}$, iar X nimereşte în intervalul j, $j=\overline{1,l}$.

Se pune problema verificării ipotezei H_0 precum că v.a. X şi Y sunt independente în caz discret, de exemplu, dacă ipoteza H_0 este adevărată, atunci, prin definiţie

$$P(X=x_i,\,Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j)=p_iq_j.$$

Dar $\widehat{p_i}=n_{i\cdot}/n$, $\widehat{q_j}=n_{\cdot j}/n$ sunt estimatori ai probabilităţilor p_i, q_j, respectiv. Or, în caz că ipoteza H_0 este adevărată, conform Legii Numerelor Mari media teoretică a cazurilor când $X=x_i$, $Y=y_j$, $i=\overline{1,k}, j=\overline{1,l}$ care este egală cu np_iq_j poate fi considerată că $np_iq_j \approx n\widehat{p}_i\widehat{q}_j = n_{i\cdot}n_{\cdot j}/n = \widehat{n}_{ij}$. Prin urmare, pentru verificarea ipotezei H_0 putem apela la statistica

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\frac{(n_{ij}-\widehat{n}_{ij})^2}{\widehat{n}_{ij}} .$$

Urmare a considerentelor menţionate în remarca 1 de mai sus, cu condiţia că ipoteza H_0 este adevărată iar toate frecvenţele $\widehat{n}_{ij} \geq 4$, $i = \overline{1,k}, j = \overline{1,l}$, statistica de mai sus este distribuită $\chi^2[(k-1)(l-1)]$. În concluzie, ipoteza H_0 despre independenţa v.a. X, Y va fi acceptată cu pragul de semnificaţie α, $\alpha \in (0,1)$ deîndată ce valoarea calculata a acestei statistici $\chi^2_{calc} < \chi^2_{1-\alpha}[(k-1)(l-1)]$. În caz contrar, ipoteza H_0 este respinsă.

Remarca 2. *a)* Dacă unele valori $\widehat{n}_{ij}$ nu satisfac condiţiei $\widehat{n}_{ij} \geq 4$, atunci linia si coloana respectivă trebuie comasată cu una din linia si coloana învecinată, astfel încât sa fie respectată condiţia menţionată.

b) Dacă $(k-1)(l-1) \geq 8$ şi $n \geq 40$, atunci valoarea minimală admisibilă pentru $\widehat{n}_{ij}$ poate fi egală ~~cu~~ şi cu 1.

Exemplul 2. Producătorul unui medicament nou afirmă că rezultatul actiunii acestuia depinde de modul de administrare. În baza datelor de mai jos să se verifice această afirmaţie cu pragul de semnificaţie α=0.05:

Rezultatul ╲Modul de administrare	A	B	C
Nefavorabil	11	17	16
Favorabil	20	23	19

Soluţie. Din tabel deducem că, formal, putem identifica două v.a. $X \in \{1,2\}$, $\{X = 1\} = \{$*rezultatul va fi nefavorabil*$\}$, $\{X = 2\} = \{$*rezultatul va fi favorabil*$\}$ şi $Y \in \{1,2,3\}$, $\{Y = 1\} = \{$*va fi aplicat modul A de administrare*$\}$, $\{Y = 2\} = \{$*va fi aplicat modul B de administrare*$\}$, $\{Y = 3\} = \{$*va fi aplicat modul C de administrare*$\}$. Totodată, $n_{1\cdot}$=44, $n_{2\cdot}$=62, $n_{\cdot 1}$=31, $n_{\cdot 2}$=40, $n_{\cdot 3}$=35, n=$n_{\cdot\cdot}$=106, $\widehat{n}_{11}$=$44 \cdot 31/106 = 12.868$, $\widehat{n}_{12}$=$44 \cdot 40/106 = 16.604$, $\widehat{n}_{13}$=$44 \cdot 35/106 = 14.528$, $\widehat{n}_{21}$=$62 \cdot 31/106 = 18.132$, $\widehat{n}_{22}$=$62 \cdot 40/106 = 23.396$, $\widehat{n}_{23}$=$62 \cdot 35/106 = 20.472$. Prin urmare χ^2_{calc}= $[(11-12.868)^2/12.868+(17-16.604)^2/16.604+(16-14.528)^2/14.528+(20-18.132)^2/18.132+(23-23.396)^2/23.396+(19-20.472)^2/20.472] = 0.734\,75$. In cazul nostru

$$\chi^2_{1-\alpha}[(k-1)(l-1)] = \chi^2_{1-\alpha}[(2-1)(3-1)] = \chi^2_{0.95}(2) = 5.991.$$

Prin urmare este acceptată ipoteza H_0 că v.a. X, Y sunt independente, adică, in pofida afirmaţiei producătorului, este admisă ipoteza ca rezultatul acţiunii medicamentului nu depinde de modul lui de aplicare, deoarece χ^2_{calc}= 0.73475<$\chi^2_{0.95}$(2)=5.991.

8.9. Detectarea caracterului nealeator/aleator a datelor

Problema caracterului nealeator/aleator a datelor trebuie rezolvată, mai ales atunci când există suspiciuni că aceste date nu sunt aleatoare, deoarece analiza inferenţială a datelor bazată pe metode statistico-matematice presupune, implicit, valabilitatea Principiului Regularităţii Statistice, specific datelor cu caracter aleator. Conceptul de "caracter aleator" fiind foarte larg, este destul de dificil să construim criterii exacte şi puternice pentru testarea caracterului întâmplător a datelor. De cele mai dese ori este mai uşor să se verifice caracterul nealeator a datelor.

Din multitudine de criterii de verificare a caracterului nealeator a datelor, am ales urmatorul test descris in lucrarea [4] ca fiind suficient de sensibil la majoritatea factorilor ce imprima datelor un caracter nealeator.Fie, aşadar, eşantionul de date (x_1, x_2, ..., x_n) de volum n , unde $n \geq 25$. Ipoteza de bază este ca aceste date au un caracter *aleatoar*, cea alternativa-că aceste date au un caracter *nealeator*. Criteriul constă în următoarele. În calitate de statistica de referinţa se ia

$$\left(\frac{\delta^2}{2s^2}-1\right)/\left(\frac{n-2}{n^2-1}\right)$$

care pentru $n \geq 25$, atunci când ipoteza de bază este adevărată, este aproximativ standard normal distribuită, adică de clasă $N(0,1)$, unde

$$\delta^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)^2, s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2, \overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i.$$

Prin urmare, domeniul de acceptare cu pragul de semnificaţie a ipotezei de bază este multimea acelor valori calculate a statisticii de referinţă care nimeresc în intervalul $[-z_{1-\alpha/2}, z_{1-\alpha/2}]$, unde $z_{1-\alpha/2}$ este $1-\alpha/2$ cuantilă a distribuţiei $N(0,1)$.

Exemplul 1. PARTEA 1. Ne propunem să verificăm caracterul nealeator/aleator al zecimalelor numărului π. Vom pleca de la primele n=100 zecimale care pot fi gasite la adresa http://www.eveandersson.com/pi/digits/100

(1,4,1,5,9,2,6,5,3,5,8,9,7,9,3,2,3,8,4,6,2,6,4,3,3,8,3,2,7,9,5,0,2,8,
8,4,1,9,7,1,6,9,3,9,9,3,7,5,1,0,5,8,2,0,9,7,4,9,4,4,5,9,2,3,0,7,8,1,
6,4,0,6,2,8,6,2,0,8,9,9,8,6,2,8,0,3,4,8,2,5,3,4,2,1,1,7,0,6,7,9).

Eşantionul patratelor tuturor diferenţelor perechilor învecinate $(x_{i+1} - x_i)^2, i = \overline{1,99}$ arată astfel:

(9,9,16,16,49,16,1,4,4,9,1,4,4,36,1,1,25,16,4,16,16,4,1,0,25,25,
1,25,4,16,25,4,36,0,16,9,64,4,36,25,3,36,0,36,16,4,9,36,4,49,4,
9,25,25,0,1,16,49,1,9,49,1,49,25,4,16,36,16,36,4,16,36,4,16,4,64,
1,0,1,4,16,36,64,9,1,16,36,9,4,1,4,1,0,36,49,36,1,4) .

Prin urmare

$$\overline{x} = 4.\,77, s^2 = 8.\,663\,7,\ \delta^2 = \frac{807}{49} = 16.\,469,$$

iar valoarea calculata a statisticii

$$\left(\frac{\delta^2}{2s^2} - 1\right) / \left(\frac{n-2}{n^2-1}\right) = \left(\frac{12.29}{2 \times 7.1} - 1\right) / \left(\frac{98}{100^2 - 1}\right) = -4.\,9309.$$

: $-13.\,724$Observăm că pentru $\alpha = 0.05$, domeniul de acceptare a ipotezei despre caracterul aleator $[-z_{1-\alpha/2}, z_{1-\alpha/2}] = [-1.96, 196]$ nu acoperă valoarea calculată -4.6026. Prin urmare aceasta ipoteză este respinsa, fiind acceptată ipoteza că zecimalele numărului π nu sunt întâmplătoare, chiar dacă o analiză exploratorie a datelor sugerează contrariul.

PARTEA 2. Pe de altă parte,suntem tentaţi sa testăm dacă, să zicem, $n = 50$ de numere generate de Generatorul de Numere Aleatoare (GNA) de la adresa *https://www.random.org/integers/* au *un caracter aleator*, acestea fiind numere pe care le-am cerut sa fie uniform distribuite pe multimea {0,1,..,9}:

(3,1,1,6,8,7,5,4,7,1,9,4,6,5,9,4,6,6,1,9,7,4,0,5,7,4,6,8,5,5,6,2,1,1,9,6,5,3,7,6,
6,7,3,5,1,3,4,2,6,4).

În baza lor gasim ca media de selectie $\overline{x}$ =4.8, iar dispersia de selecţie corectată s^2=5.959 2.

Eşantionul patratelor tuturor diferenţelor perechilor învecinate $(x_{i+1} - x_i)^2, i = \overline{1,49}$ arată astfel:

4,0,25,4,1,4,1,9,36,64,25,4,1,16,25,4,0,25,64,4,9,16,25,4,9,4,4,9,0,1,16,1,0,
64,9,1,4,16,1,0,1,16,4,4,4,1,4,16,4.

Prin urmare $\delta^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)^2 = 11.\,490$, iar valoarea calculatā a statisticii noastre de referinţă,

$$\left(\frac{\delta^2}{2s^2} - 1\right) / \left(\frac{n-2}{n^2-1}\right) = \left(\frac{11.49}{2 \times 5.959} - 1\right) / \left(\frac{48}{25^2 - 1}\right) = -0.466\,86$$

nimereşte în domeniul de acceptare $[-1.96, 1.96]$ a ipotezei de baza cu probabilitatea de încredere 0.95, ceea ce confirmă caracterul aleator al numerelor generate cu ajutorul (GNA) de la adresa *https://www.random.org/integers/.*

8. Proiecte propuse.

Proiectul 1. Inteprinderea "Ionel" din Chisinau are nevoie ca, pentru loturile de costume barbatesti destinate vânzăriii pe piata interna, sa formeze un program (plan) adecvat de fabricare a costumelor in functie de inaltimea X a barbatilor explrimata in centimetri, marimile fiind categorisite pe intervalele: [150; 155), [155; 160), [160; 165), [165; 170), [170; 175), [175; 180), [180; 185), [185; 190), [190; 195), [195; 200]. Se stie, in acest caz doar ca repartitia probabilista (modelul matematic) cea mai potrivita pentru v.a. X-inaltimea unui barbat ales la intamplare este distribuita normal cu media m si dispersia σ^2. Parametrii acestea fiind necunoscuti, în scopul aflării lor, prin sondaj, au fost masurate înăltimile a 100 de barbati, potentiali cumpărători ai costumelor produse de fabrica "Ionel" , alesi la intamplare din Rep. Moldova. Rezultatele inregistrate sunt prezentate mai jos.

a) Sa se efectueze analiza exploratorie a acestor date.

b) Sa se scoata in evidenta cei mai buni estimatori pentru parametrii m si σ si sa justifice alegerea din p. de vedere a Analizei Inferentiale a datelor.

c) Sa se construiasca intervalele de incredere (confidenta) pentru m si σ cu *probabilitatea de incredere* $1 - \alpha$ =0.95 , adica cu *pragul de semnificatie* α =0.05.

d) Sa se formuleze ipotezele adecvate pentru fiecare parametru m si σ in parte si sa se verifice aceste ipoteze cu probabilitatea erorii de speta 1 egala 0.05.

e) Distributia fiind validata, sa se alcatuiasca planul cerut de confectionare.

167. 52, 173. 17, 165. 14, 169. 77, 165. 98, 173. 94, 165. 05, 168. 56, 178. 85, 158. 12, 166. 54, 165. 64, 164. 73, 170. 64, 160. 78, 173. 60, 169. 38, 164. 63, 163. 60, 173. 55, 173. 06, 176. 15, 165. 17, 160. 41, 160. 3, 166. 48, 178. 72, 173. 51, 176. 24, 164. 95, 175. 11, 179. 48, 162. 28, 171. 62, 173. 19, 175. 43, 166. 78, 159. 15, 184. 45, 165. 79, 171. 98, 177. 32, 162. 60, 165. 45, 163. 29, 161. 50, 161. 45, 175. 53, 175. 04, 175. 29, 169. 20, 172. 37, 174. 49, 176. 79, 185. 01, 176. 05, 178. 19, 167. 93, 170. 56, 165. 82, 173. 48, 164. 84, 170. 52, 169. 63, 159. 65, 175. 62, 160. 07, 163. 40, 168. 88, 171. 08, 167. 93, 181. 47, 168. 71, 158. 16, 170. 99, 166. 78, 170. 20, 167. 68, 170. 03, 163. 16, 169. 49, 174. 8, 160. 44, 167. 88, 174. 24, 166. 48, 176. 54, 171. 01, 161. 62, 182. 25, 168. 91, 171. 02, 167. 29, 175. 17, 161. 43, 173. 25, 181. 35, 166. 95, 178. 30, 167. 07

Proiectul 2. Pentru estimarea cantităţii zilnice Q de combustibil, solicitate unei firme de aprovizionare cu combustibil auto, firma în cauză foloseşte formula Q=$100 - 10p + E$, unde $p \in [0, 8]$. E reprezdntând eroarea de estimare/prognozare a cantitatii Q, aceasta este o v.a. dată de d.d. $f(x) = I_{[-a,b]}(x)$, $a, b > 0$. Cantitatea Q solicitata se masoară în mii de galoane, iar preţul p este exprimat în dolari per galon. Firma caută raspunsuri la urmatoarele intrebari: **a)** Cu ce este egală probabilitatea că va fi solicitată o cantitate de combustibil mai mare decât 70 000 de galoane, dacă preţul este egal cu 3$ galonul? Dar pentru preţul de 4$ per galon? **b)** Dacă ştim costul mediu variabil de furnizare a benzinei fără plumb, că este dat de formula $C(Q)$=$\sqrt{Q}/2$, ce v.a. poate fi utilizată pentru a reprezenta profitul zilnic în funcţie de preţul variabil p ? **c)** Cu ce este egală probabilitatea că profitul zilnic va fi unul pozitiv dacă pretţul de vânzare este stabilit să fie 4$ per galon/ Dar daca preţul este egal cu 5$? Dar 3$?

Deoarece raspunsurile pot fi aflate doar daca se stie valoarea adevarata a parametrului a, firma a inregistrat pe parcursul a doi ani de zile date statistice ce vizeaza eroarea E de prognozare, ca fiind diferenta dintre valoarea prognozata a cantitatii Q si valoarea reala a cantitatii de combustibil vandută in ziua data. Inainte de a purcede la rezolvarea pp. a)-c), in baza celor 730 de valori inregistrate se cere:

1. Sa se faca o analiza exploratorie a acestor date.

2. Sa se ia in calitate de estimatori punctuali ai parametrilor a si b estimatorii $\widehat{a}$ si $\widehat{b}$ obtinuti prin Metoda Verosimilitatii Maxime.

3. Folosind criteriul Pearson (χ^2) de concordanta, validaţi ipoteza că v.a. $E \sim U[-\widehat{a}, \widehat{b}]$, adica parametrii a si b, ce definesc d.d. $f(x)$, pot fi consideraţi

ca fiind egali cu $\widehat{a}$ si $\widehat{b}$ respectiv.

4. 785 3, 11. 456, 7. 645 1, −15. 494, 8. 480 1, 7. 069 9, −18. 576, −7. 836 0, 9. 860 8, 12.
644, 3. 126, −14. 48, 8. 509 7, −5. 310 0, 7. 405 4, −4. 504 0, −11. 909, −15. 959, −
1. 851 8, −14. 453, 15.0, −5. 759 8, −1. 832 9, 15. 065, 1. 336 1, 7. 283 1, −3. 387 3, −1.
537 7, −15. 435, 19. 309, 16. 980, −12. 870, −8. 661 1, −1. 895 2, 19. 111, −11. 378, −
16. 856, −17. 284, 5. 788 5, 6. 326 8, −17. 119, −7. 714 3, −0.247 43, −17. 456, 1. 749 4, −4.
574 0, 0.903 84, −3. 473 9, 7. 534 5 $\times 10^{-3}$, 10. 906, 18. 805, 2. 627 6, 5. 057 3, −13.
737, 17. 554, −5. 750 9, −16. 597, −5. 115 2, −10. 369, −19. 126, 7. 359 7, −1. 118 1, −
4. 599 3, −1. 828 2, −17. 677, −14. 251, −4. 245 4, −16. 077, 0.659 86, 3. 291, 19. 557, 10.
302, 0.231 59, −19. 471, −12. 126, 11. 327, 9. 242 6, −8. 798 7, 2. 033 4, −14. 988, 3.
001 6, −3. 022 2, 2. 122 3, 1. 585 7, −4. 616 6, −5. 380 1, −15. 542, −8. 126 4, 2. 641 5, −18.
143, 8. 184 4, 10. 925, 18. 692, 2. 623 6, 3. 913, 9. 850 5, −18. 387, 1. 092 2, 12. 647, 17.
807, 14. 166, −4. 149, −15. 335, −6. 460 2, 4. 126 3, −2. 289 7, −19. 266, 9. 108 1, −
9. 447 7, −16. 583, 15. 266, 8. 572 9, 13. 006, −5. 041 4, 0.550 37, −10. 213, 8. 600 9, 7.
598 7, 13. 838, 19. 949, −8. 315 7, 4. 897, −2. 959 7, −17. 544, 8. 925 5, 18. 055, 12.
834, −11. 305, 11. 016, −2. 712 5, −8. 54, −8. 964 9, 9. 492 9, −18. 962, −1. 281 1, −8.
414 8, 8. 861 2, 0.203 96, −0.207 06, 11. 597, 11. 650, 17. 568, −11. 629, 10. 234, −
5. 922 8, −11. 765, 7. 693 3, −4. 113 8, −14. 174, −0.678 18, −0.157 84, 18. 874, −
7. 187 7, −12. 909, −12. 986, 19. 626, −17. 966, −12. 837, −13. 462, 0.621 96, 6. 053 8, −11.
947, −7. 053 7, −19. 434, 19. 372, −18. 000, −12. 686, −17. 452, 19. 951, −10. 214, −
17. 577, 16. 625, −12. 357, 13. 624, −10. 408, 17. 249, −15. 932, 5. 793 5, −9. 054 4, −15.
845, −8. 666 4, 16. 920, −7. 439 6, 6. 265 5, 0.861 99, −4. 102 6, −19. 631, −6. 368 7,
19. 506, −14. 127, 1. 616, −2. 328 8, 10. 913, 0.662 79, −13. 624, −2. 320 7, 2. 938 3, 15.
849, −18. 916, 13. 746, 9. 292 5, −18. 963, −13. 45, −11. 211, −8. 568 5, 7. 924 8, 3.
446 9, 15. 681, 7. 893 4, −9. 825 7, −6. 012 8, −15. 579, 16. 907, 18. 151, −14. 216, 8.
674, 16. 341, −3. 114 9, −10. 613, 15. 473, 8. 724 5, 7. 130 0, −11. 354, −1. 299 0, 12.
099, −18. 716, −16. 997, 14. 060, 9. 440 9, −19. 812, 10. 222, 18. 982, −8. 385 4, 1.
228 7, −2. 799 6, −9. 419 6, −14. 119, 10. 275, −10. 204, −7. 39, −15. 144, −0.829 05,
11. 155, −13. 830, 17. 27, 16. 379, −8. 239 5, 4. 546 7, −1. 015 6, 18. 127, 12. 399, −6.
787 4, −8. 658 0, 8. 916 5, 3. 268 7, 4. 509 6, −14. 447, 11. 541, −2. 747 8, −9. 371 9,
10. 991, −18. 968, 14. 534, 10. 391, 17. 841, −8. 173 4, −3. 155 0, −2. 777 2, −8. 362 9, −13.
559, −16. 194, −9. 610 3, 4. 413 4, −12. 195, −5. 139 3, 9. 398 7, −6. 721 9, 5. 120 0,
18. 173, 7. 683 6, 3. 734 5, 3. 117 9, −6. 771 0, 13. 826, −14. 160, 2. 125, 12. 611, 2.
001 5, −9. 721 8, −11. 196, 5. 218 1, 10. 132, 17. 381, 11. 467, 12. 572, −0.187 07, 2.
843 5, 10. 445, −7. 097 3, 14. 399, 7. 072 3, −6. 149 1, −15. 127, −11. 542, 15. 908, −5.
846 4, −13. 608, 10. 250, 4. 235 1, 7. 110 3, −11. 86, 17. 576, 4. 749 7, −15. 430, 12.
632, −5. 917 6, −10. 133, −13. 796, −17. 887, 17. 279, −6. 944 4, 18. 493, 18. 601, 1.

023 1, −6. 733 1, −4. 752 9, 13. 611, 5. 589 6, 1. 972 2, 13. 251, 10. 301, −5. 927 4, −
15. 916, −16. 762, 5. 866 7, −0.469 28, −17. 013, 17. 043, 5. 494, −3. 714 9, −0.462 24, −0.613 54,
3. 293 3, −1. 253 3, 3. 913 8, 6. 983 2, 11. 675, 1. 078 9, −19. 049, 5. 544, −13. 547, −3.
47, 5. 061 1, 17. 598, 17. 142, 16. 555, −14. 351, −14. 036, 19. 171, 2. 298 7, −1. 564 6, 19.
770, 14. 431, −3. 156 1, 0.405 68

Proiectul 3. O Companie de asigurări are asigurate 10000 de autoturisme, probabilitatea unei avarieri ce intră sub incidenţa poliţei de asigurare, fiind egală cu p=0.006. Fiecare proprietar de automobil asigurat plăteşte o poliţă de asigurare anuală de 50 de euro, primind, în caz de avariere o sumă de 4000 de euro. Să se calculeze probabilităţile următoarelor evenimente: A={*la sfârşit de an Compania fa fi în pierdere*}, B_m={*la sfârşit de an Compania va avea un profit decelpuţin m* euro}, m=160000, 240000, 320000.

Deoarece raspunsurile pot fi aflate doar daca se stie valoarea adevarata a parametrului p, firma a foloseste datele statistice inregistrate de Politia Rutiera, vizavi de avarierile pe parcursul anului a autoturismelor aflate in evidenta Registrului Auto, alegând prin sondaj 1000 de autoturisme.

1. Sa se faca o analiza exploratorie a acestor date.

2. Sa se ia in calitate de estimator punctual al parametrului p estimatorul $\widehat{p}$ obtinuti prin Metoda Verosimilitatii Maxime.

3. Construiti un interval de incredere pentru parametrul p cu probabilitatea de incredere $1-\alpha=0.95$ (pragul de semnificatie $\alpha=0.05$).

4. Verificati si validati ipoteza de baza $H_0 : p=\widehat{p}$ impotriva ipotezei alternative $H_1 : p\neq\widehat{p}$.

5. Rezolvati problema formulata, luînd $p=\widehat{p}$.

0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,

0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0,

0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0

0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,

0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,

0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,

0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,

0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,

0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0 0, 0, 0, 0, 0, 0,

0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,

0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,

0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,

0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,

0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,

0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,

0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,

0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0

Problema 4. O banca, ce are printre serviciile sale şi emiterea de carduri de credit, a diminuat dobânda anuala cu 1%. Datele înregistrate de bancă pâna la micşorarea dobânzii arată că suma medie datorată de catre posesorii de carduri era egală cu m_0=576\$. Pentru a studia efectul diminuării dobânzii asupra parametrului m, banca a examinat, după scurgerea a 6 luni de aplicare a dobânzii reduse, 36 de conturil de carduri alese la întâmplare.

Datele rezultate (x_1, x_2, ..., x_{36}), privind datoriile acumulate pe card de catre posesori, find prezentate mai jos, se cere ca in baza lor sa se efectueze :

a) Analiza exploratorie a acestor date.

b) Considerând ca datoria acumulată pe un card ales la întâmplare, dupa 6 luni de la reducerea dobânzii, este o v.a. $X \sim N(m, \sigma^2)$, construiţi un interval de încredere pentru parametrul m, luând în calitate de dispersie σ^2=s^2, adică dispersia de selectie corectată.

c) Formulati ipotezele corespunzătoare, daca interes prezinta raspunsul la intrebarea: a avut sau nu reducerea dobanzii, drept efect, cresterea mediei datorate pe card?

d) Calculaţi $p-$valoarea Testului corespunzator de verificare a ipotezelor si comentati rezultatul in functie de diverse valori ale pragului de semnificatie $\alpha \in (0,1)$.

$632.13, 665.70, 556.69, 598.05, 565.67, 696.76, 812.2, 690.75, 723.89, 597.60, 504.9, 741.73, 766.83, 583.71, 767.14, 588.93, 771.50, 533.16, 630.16, 452.67, 820.03, 713.01, 620.43, 557.87, 544.3, 695.3, 474.38, 532.59, 986.2, 796.14, 631.27, 657.08, 711.89, 425.56, 508.57, 672.22$

Proiectul 5. A fost adoptată o nouă lege care să ofere mai multe puteri poliţieneşti în ceea ce priveşte reţinerea criminalilor suspectaţi.

Pentru şapte cartiere, numărul de infracţiuni raportate cu 1 an înainte şi 1 an după noua lege este prezentat în tabelul următor:

Cartierul nr.	1	2	3	4	5	6	7
Până la noua lege	31	27	25	36	34	29	38
După noua lege	19	30	10	20	28	29	19

Folosind un prag de semnificatie de $\alpha = 0.05$ testaţi veridicitatea aşteptărilor conform cărora numarul de infracţiuni raportate a scăzut dupa aplicarea noii legi.

a) Formulaţi ipotezele de bază si alternativă.

b) Care va fi statistica de referinţă?

c) Descrieţi mulţimea critică în funcţie de pragul de semnificaţie.

d) Calculaţi $p-$valoarea Testului folosit şi explicaţi semnifică ea în acest context.

Proiectul 6. Compararea generatorului de numere aleatoare de la adresa https://www.random.org/integers/ cu zecimalele numarului π pe post de generator de numere aleatoare.

Cu ajutorul generatorilor de numere aleatoare *de la adresa https://www.random.org/integer*, generaţi 100 de valori ale unei v.a. X uniform distribuite pe multimea de valori {0,1,2, ..., 9}. Pe de alta parte, luati in calitate de esantion de volum

100, primele 100 de cifre zecimale dupa virgula a numarului π, folosind datele de la adresa *https://www.piday.org/million/*

a) Pentru fiecare set de date, efectuati o comparatie priliminara folosind analiza exploratorie a datelor pentru fiecare set de date in parte.

b) Pentru fiecare set de date in parte, verificati ipoteza despre caracterul aleator a datelor cu pragul de semnificatie $\alpha = 0.05$.

c) Pentru ficare set in parte, pentru care ipoteza despre caracterul aleator a fost acceptata, sa se verifice ipoteza ca acesta *corespunde sau nu* distributiei uniforme pe multimea de valori $\{0,1,2, ..., 9\}$, folosind pragul de semnificatie $\alpha = 0.05$.

c) Sa se calculeze $p-$valoarea.

Proiectul 7. Compararea a doua metodici de predare.

Un profesor universitar a decis sa compare noua sa metodica de predare versus metodicei sale anterioare. Pentru aceasta el a divizat studentii in doua grupe. Grupei 1 i s-a aplicat metodica veche, iar grupei 2-metodica noua. La sfarsitul procesului de predare toti studentii au fost supusi unui examen amplu.

Grupa 1 enumera 49 iar grupa 2 enumera 50 de studenti. Rezultatele finale al unuia si acelasi examen pentru fiecare grupa in parte sunt date mai jos. In baza lor, sa verifice daca asteptarile profesorului, conform carora media notelor la examen va fi mai mare in cazul aplicarii metodicii noi, sunt intemeiate din punct de vedere statistic. Sa se foloseasca un prag de semnificaţie egal cu 0.05.

a) Sa formuleze ipotezele adecvate.

b) Sa se aplice criteriul corespunzator de testare a ipotezelor.

c) Sa se calculeze p-valoarea.

d) Sa se comenteze rezultatul.

Rezultatele examenului in Grupa 1:

9.27, 7.79, 6.66, 8.94, 7.42, 7.78, 1.07, 10.00, 8.17, 6.73, 7.74, 4.40, 10.00, 7.01, 8.89, 7.91, 8.40, 6.44, 6.71, 7.11, 6.71, 8.23, 5.96, 5.85, 9.18, 8.70, 7.54, 8.88, 7.09, 8.94, 7.80, 7.65, 7.21, 8.88, 6.24, 4.75, 5.55, 7.60, 7.37, 8.79, 5.29, 7.51, 7.26, 6.62, 10.00, 8.63, 7.05 , 5.31, 7.37

Rezultatele examenului in Grupa 1:

9.28, 8.39, 8.35, 8.08, 4.66, 6.57, 9.18, 8.27, 8.90, 7.15, 6.65, 8.14, 8.34, 9.94, 7.76, 6.44, 8.56, 8.25, 7.60, 8.62, 8.88, 8.06, 9.99, 6.10, 10.00, 8.36, 9.12, 6.68, 7.33, 7.49, 9.28, 8.85, 8.66, 7.83, 5.98, 8.85, 10.00, 8.83, 8.78, 9.93, 6.51, 9.00, 6.97, 5.90, 8.29, 7.08, 9.11, 9.61, 9.03, 8.56

BIBLIOGRAFIE

1. Iosifescu M., Mihoc Gh., Theodorescu R., *Teoria probabilităţilor si statistica matematică,* Ed. Tehnică, Bucureşti, 1966.

4. Mittelhammer R. C., *Mathematical statistics for economics and bussiness*, Ed. Springer-Verlag, N.-Y. Inc., 1996.

3. Andersen D. R., Sweeney D. J., Williams T.A., *Statistics for bussiness and economics (7-Ed),* Cincinnati SouthWestern College Pub., N-Y., 1999.

4. Iliescu d. V., Vodă V. Gh., Statistică şi toleranţe, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1977.

5. *Probabilităţi şi Statistică,* http://www.edumanager.ro/community/documente/probabilitati%20si%20statistica.pdf

6. Kobzari A.I., *Statistica Matematica pentru ingineri si cercetători ştiinţifici,* Ed. Fizmatlit, Moscova, 2006, 816 pp., l. rusă.

ANEXA 1

Tabelul de valori a distribuţiei normale standard:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.9	.00005	.00005	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00003	.00003
-3.8	.00007	.00007	.00007	.00006	.00006	.00006	.00006	.00005	.00005	.00005
-3.7	.00011	.00010	.00010	.00010	.00009	.00009	.00008	.00008	.00008	.00008
-3.6	.00016	.00015	.00015	.00014	.00014	.00013	.00013	.00012	.00012	.00011
-3.5	.00023	.00022	.00022	.00021	.00020	.00019	.00019	.00018	.00017	.00017
-3.4	.00034	.00032	.00031	.00030	.00029	.00028	.00027	.00026	.00025	.00024
-3.3	.00048	.00047	.00045	.00043	.00042	.00040	.00039	.00038	.00036	.00035
-3.2	.00069	.00066	.00064	.00062	.00060	.00058	.00056	.00054	.00052	.00050
-3.1	.00097	.00094	.00090	.00087	.00084	.00082	.00079	.00076	.00074	.00071
-3.0	.00135	.00131	.00126	.00122	.00118	.00114	.00111	.00107	.00104	.00100
-2.9	.00187	.00181	.00175	.00169	.00164	.00159	.00154	.00149	.00144	.00139
-2.8	.00256	.00248	.00240	.00233	.00226	.00219	.00212	.00205	.00199	.00193
-2.7	.00347	.00336	.00326	.00317	.00307	.00298	.00289	.00280	.00272	.00264
-2.6	.00466	.00453	.00440	.00427	.00415	.00402	.00391	.00379	.00368	.00357
-2.5	.00621	.00604	.00587	.00570	.00554	.00539	.00523	.00508	.00494	.00480
-2.4	.00820	.00798	.00776	.00755	.00734	.00714	.00695	.00676	.00657	.00639
-2.3	.01072	.01044	.01017	.00990	.00964	.00939	.00914	.00889	.00866	.00842
-2.2	.01390	.01355	.01321	.01287	.01255	.01222	.01191	.01160	.01130	.01101
-2.1	.01786	.01743	.01700	.01659	.01618	.01578	.01539	.01500	.01463	.01426
-2.0	.02275	.02222	.02169	.02118	.02068	.02018	.01970	.01923	.01876	.01831
-1.9	.02872	.02807	.02743	.02680	.02619	.02559	.02500	.02442	.02385	.02330
-1.8	.03593	.03515	.03438	.03362	.03288	.03216	.03144	.03074	.03005	.02938
-1.7	.04457	.04363	.04272	.04182	.04093	.04006	.03920	.03836	.03754	.03673
-1.6	.05480	.05370	.05262	.05155	.05050	.04947	.04846	.04746	.04648	.04551
-1.5	.06681	.06552	.06426	.06301	.06178	.06057	.05938	.05821	.05705	.05592
-1.4	.08076	.07927	.07780	.07636	.07493	.07353	.07215	.07078	.06944	.06811
-1.3	.09680	.09510	.09342	.09176	.09012	.08851	.08691	.08534	.08379	.08226
-1.2	.11507	.11314	.11123	.10935	.10749	.10565	.10383	.10204	.10027	.09853
-1.1	.13567	.13350	.13136	.12924	.12714	.12507	.12302	.12100	.11900	.11702
-1.0	.15866	.15625	.15386	.15151	.14917	.14686	.14457	.14231	.14007	.13786
-0.9	.18406	.18141	.17879	.17619	.17361	.17106	.16853	.16602	.16354	.16109
-0.8	.21186	.20897	.20611	.20327	.20045	.19766	.19489	.19215	.18943	.18673

-0.7	.24196	.23885	.23576	.23270	.22965	.22663	.22363	.22065	.21770	.21476
-0.6	.27425	.27093	.26763	.26435	.26109	.25785	.25463	.25143	.24825	.24510
-0.5	.30854	.30503	.30153	.29806	.29460	.29116	.28774	.28434	.28096	.27760
-0.4	.34458	.34090	.33724	.33360	.32997	.32636	.32276	.31918	.31561	.31207
-0.3	.38209	.37828	.37448	.37070	.36693	.36317	.35942	.35569	.35197	.34827
-0.2	.42074	.41683	.41294	.40905	.40517	.40129	.39743	.39358	.38974	.38591
-0.1	.46017	.45620	.45224	.44828	.44433	.44038	.43644	.43251	.42858	.42465
-0.0	.50000	.49601	.49202	.48803	.48405	.48006	.47608	.47210	.46812	.46414
0.0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56749	.57142	.57535
0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72575	.72907	.73237	.73565	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
1.0	.84134	.84375	.84614	.84849	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92785	.92922	.93056	.93189
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861

3.0	.99865	.99869	.99874	.99878	.99882	.99886	.99889	.99893	.99896	.99900
3.1	.99903	.99906	.99910	.99913	.99916	.99918	.99921	.99924	.99926	.99929
3.2	.99931	.99934	.99936	.99938	.99940	.99942	.99944	.99946	.99948	.99950
3.3	.99952	.99953	.99955	.99957	.99958	.99960	.99961	.99962	.99964	.99965
3.4	.99966	.99968	.99969	.99970	.99971	.99972	.99973	.99974	.99975	.99976
3.5	.99977	.99978	.99978	.99979	.99980	.99981	.99981	.99982	.99983	.99983
3.6	.99984	.99985	.99985	.99986	.99986	.99987	.99987	.99988	.99988	.99989
3.7	.99989	.99990	.99990	.99990	.99991	.99991	.99992	.99992	.99992	.99992
3.8	.99993	.99993	.99993	.99994	.99994	.99994	.99994	.99995	.99995	.99995
3.9	.99995	.99995	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99997	.99997

ANEXA 2

Tabelul de valori ale $t_{1-\alpha}$-cuantilelor pentru care v.a. $T(n)$ Student distribuită cu n grade de libertate are probabilitatea $P(T(n) \leq t_{1-\alpha}) = 1-\alpha, \alpha \in (0,1)$.

n	$t_{0.9}$	$t_{0.95}$	$t_{0.975}$	$t_{0.990}$	$t_{0.999}$
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
32	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738
34	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728
36	1.306	1.688	2.028	2.434	2.719
38	1.304	1.686	2.024	2.429	2.712
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

ANEXA 3

Tabel pentru $\alpha-$cuantilele uzuale $Q(\alpha)$, $\alpha \in (0,1)$ ale v.a. $\chi^2(\nu)$ distribuite Hi-pătrat cu ν grade de libertate:
$\mathrm{P}(\chi^2(\nu) \leq Q(\alpha,\nu)) = \alpha$, unde pentru $\nu \geq 40$ quantilele $Q(\alpha,\nu) \approx Q(\alpha,40)$

ν	$Q(.005)$	$Q(.01)$	$Q(.025)$	$Q(.05)$	$Q(.1)$	$Q(.9)$	$Q(.95)$	$Q(.975)$	$Q(.99)$	$Q(.995)$
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.143	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.041	30.813	33.924	36.781	40.290	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	34.382	37.653	40.647	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278	50.994
29	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
31	14.458	15.655	17.539	19.281	21.434	41.422	44.985	48.232	52.192	55.003
32	15.134	16.362	18.291	20.072	22.271	42.585	46.194	49.480	53.486	56.328
33	15.815	17.074	19.047	20.867	23.110	43.745	47.400	50.725	54.775	57.648
34	16.501	17.789	19.806	21.664	23.952	44.903	48.602	51.966	56.061	58.964
35	17.192	18.509	20.569	22.465	24.797	46.059	49.802	53.204	57.342	60.275
36	17.887	19.233	21.336	23.269	25.643	47.212	50.998	54.437	58.619	61.581
37	18.586	19.960	22.106	24.075	26.492	48.364	52.192	55.668	59.893	62.885
38	19.289	20.691	22.878	24.884	27.343	49.513	53.384	56.896	61.163	64.183
39	19.996	21.426	23.654	25.695	28.196	50.660	54.572	58.120	62.429	65.477
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	51.805	55.759	59.342	63.691	66.767

0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0,
0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0