Formalismul Denavit Hartenberg (DH-m)

Pentru DH-m călătoria reperului ***i-1*** la reperul ***i*** se face prin succesiunea:

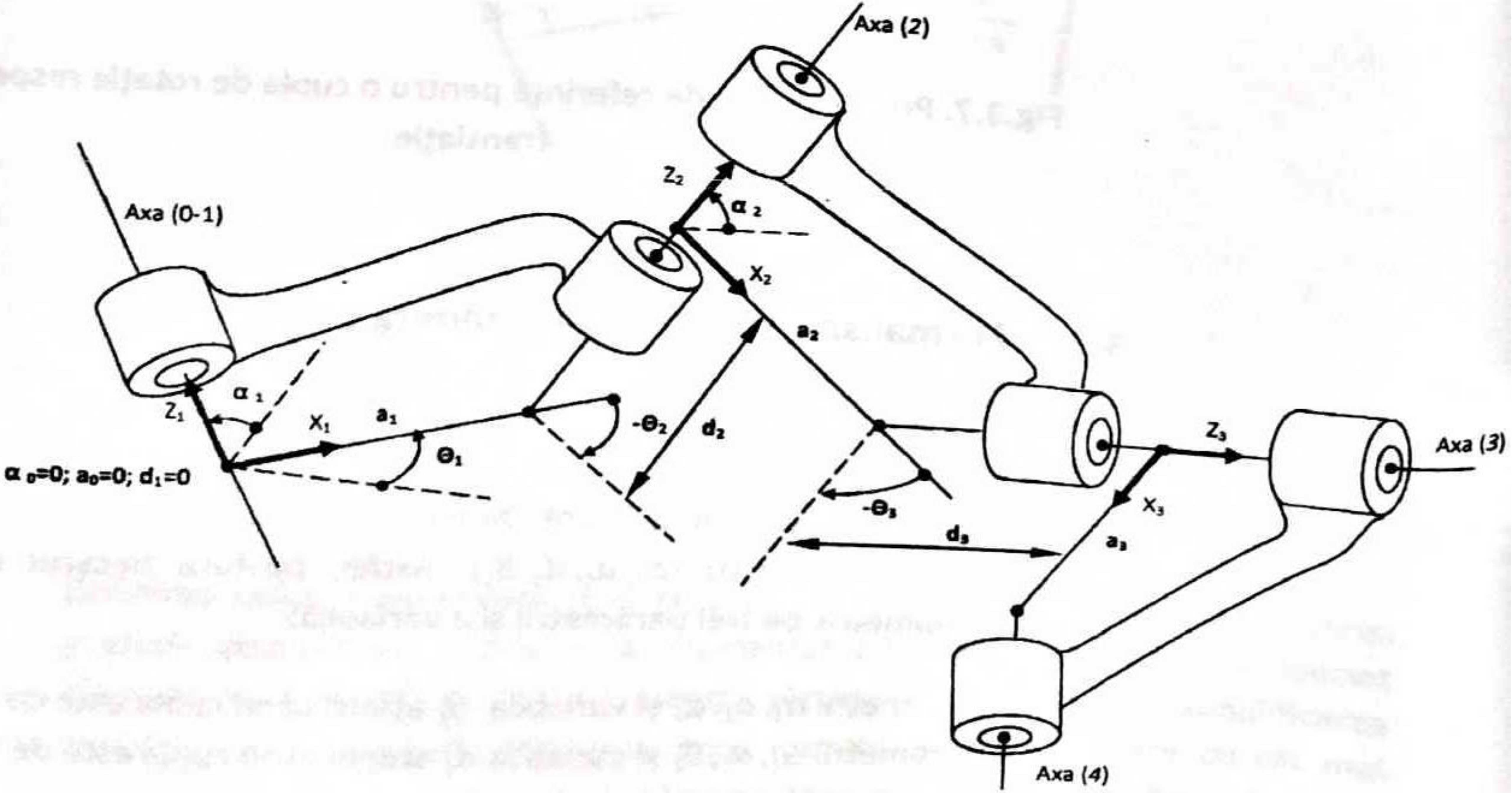
$$R_x(\alpha_{i-1}) \rightarrow D_x(\alpha_{i-1}) \rightarrow R_z(\theta_i) \rightarrow D_z(d_i) \quad \Rightarrow \quad {}^{i-1}_{\ \ i}T$$

$R_x(\alpha_{i-1})$ este rotație în jurul axei X;

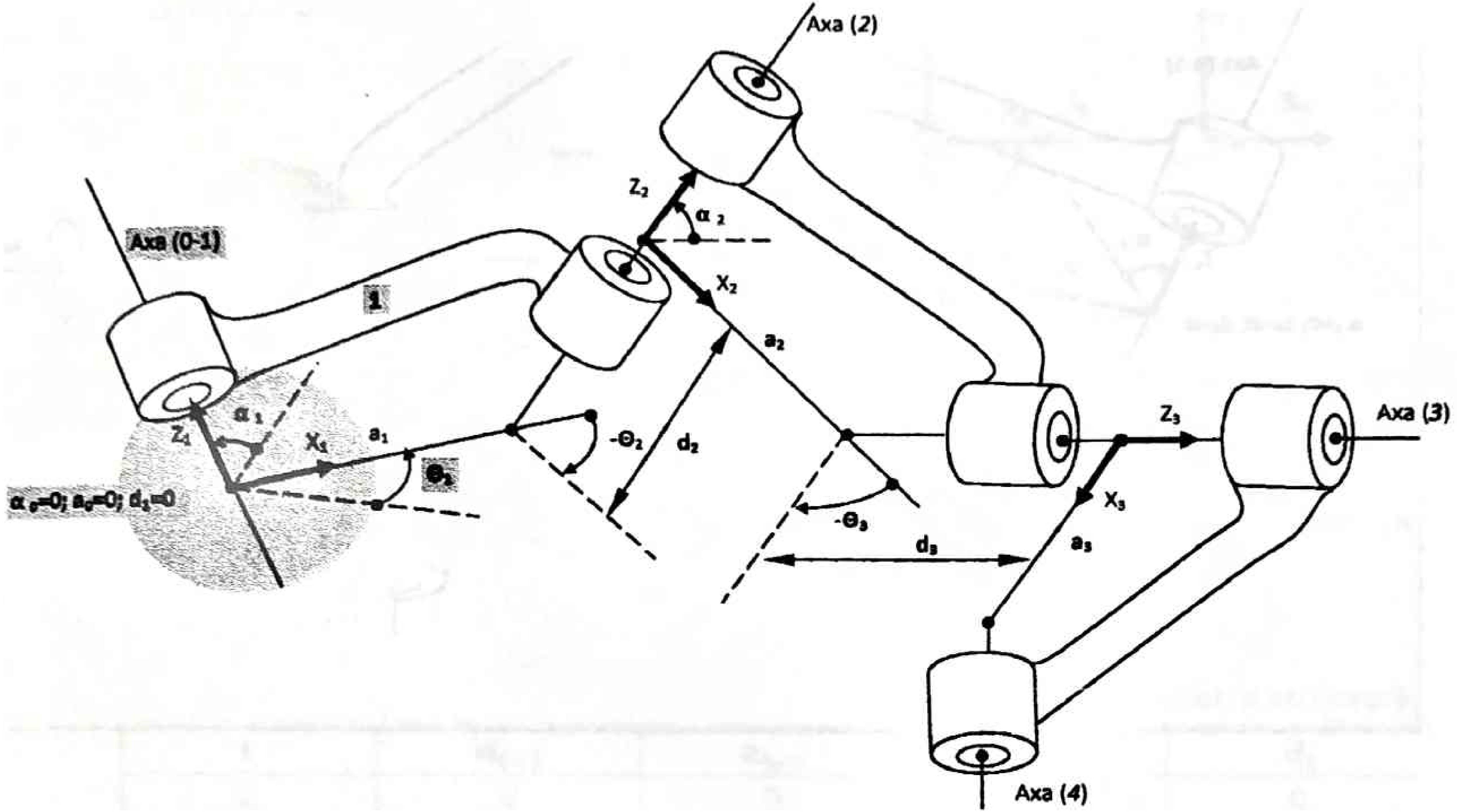
$D_x(\alpha_{i-1})$ este translaţia în lungul axei X;

$R_z(\theta_i)$ este rotaţia în jurul axei *Z*;

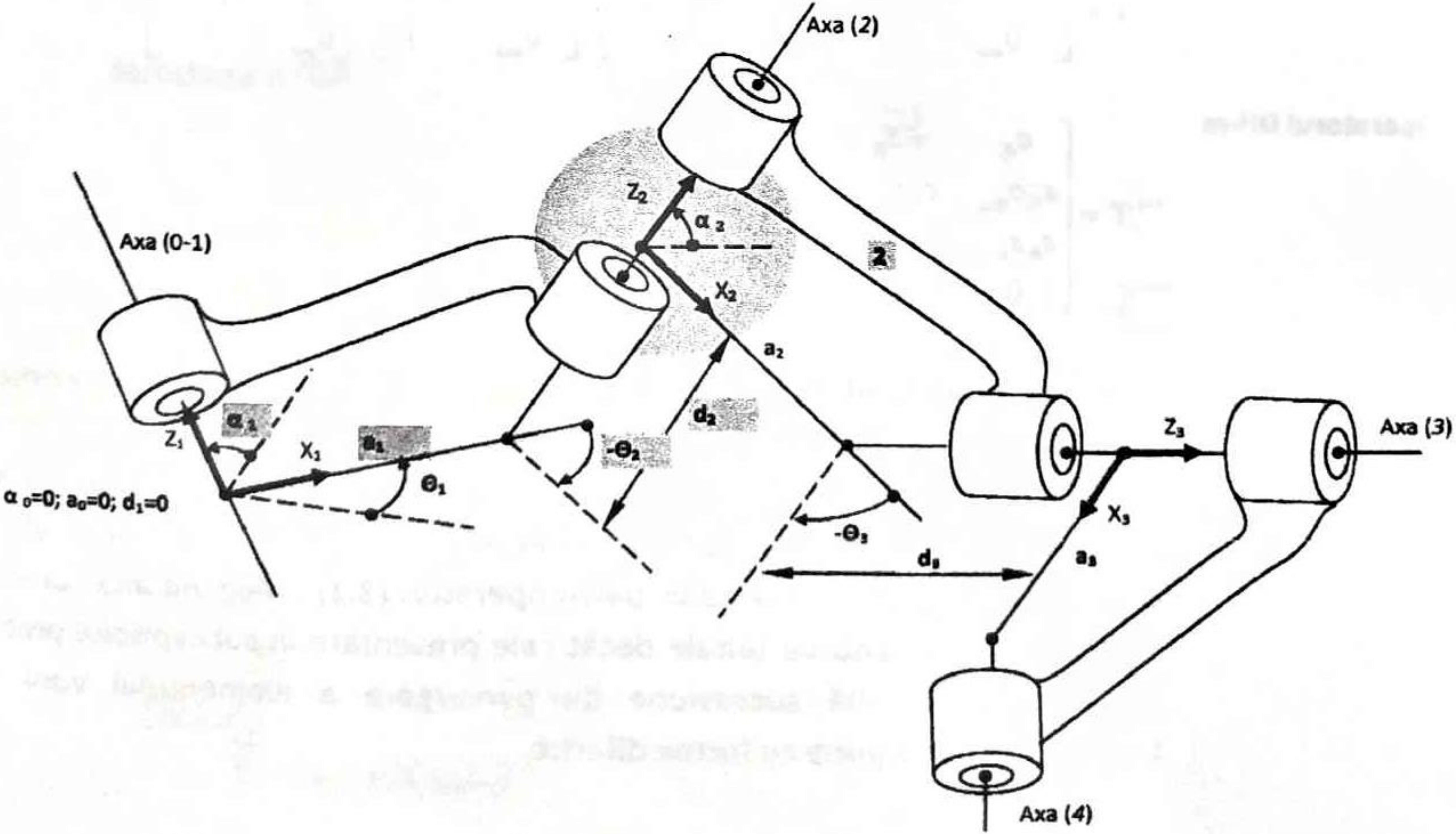
$D_z(d_i)$ este translaţia în lungul axei Z.

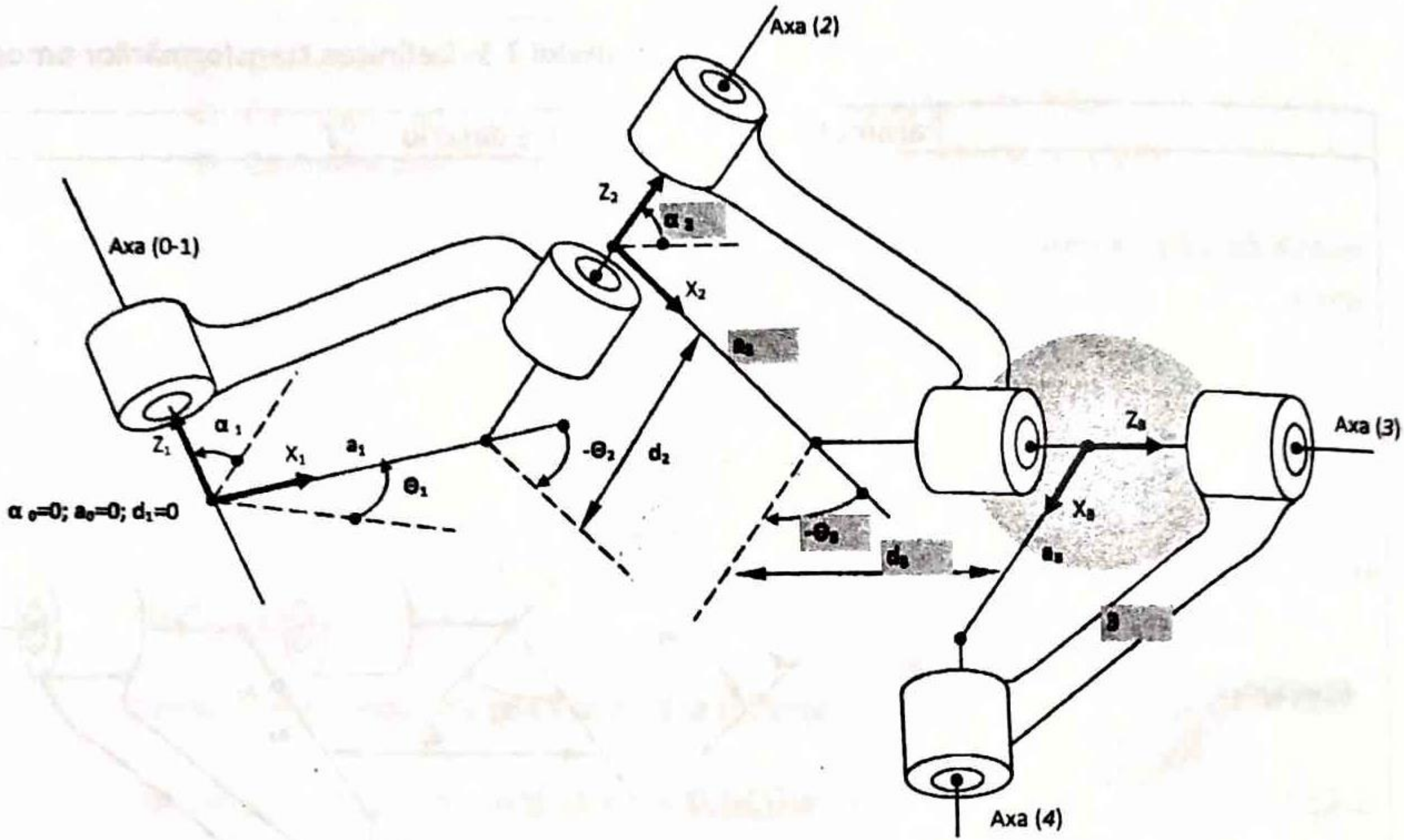


Axa (2)
Axa (0-1)
Z_2
α_2
X_2
a_2
Z_1
α_1
X_1
a_1
Θ_1
$-\Theta_2$
d_2
$\alpha_0=0;\ a_0=0;\ d_1=0$
Z_3
Axa (3)
X_3
$-\Theta_3$
d_3
a_3
Axa (4)



Axa (2)
Axa (0-1)
1
Z_2
α_2
X_2
a_2
Z_1
α_1
X_1
a_1
$-\Theta_2$
d_2
Θ_1
$\alpha_0=0;\ a_0=0;\ d_1=0$
$-\Theta_3$
d_3
Z_3
X_3
a_3
Axa (3)
Axa (4)


Axa (2)
Axa (0-1)
Z_2
α_2
2
X_2
a_2
Z_1
α_1
X_1
a_1
$-\Theta_2$
d_2
Θ_1
$\alpha_0=0$; $a_0=0$; $d_1=0$
$-\Theta_3$
d_3
a_3
Z_3
X_3
Axa (3)
Axa (4)


Axa (2)
Axa (0-1)
Axa (3)
Axa (4)
α 0=0; a0=0; d1=0

Formalismul Denavit Hartenberg (DH-m)

Aceste transformări succesive conduc la urmatoarea transformare

$$ {}^{i-1}_{\ \ i}T = \begin{bmatrix} R_x(\alpha_{i-1}) & 0_{(3\times 1)} \\ 0_{(1\times 3)} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{(3\times 3)} & D_x(\alpha_{i-1}) \\ 0_{(1\times 3)} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_z(\theta_i) & 0_{(3\times 1)} \\ 0_{(1\times 3)} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{(3\times 3)} & D_z(d_i) \\ 0_{(1\times 3)} & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{i-1}_{\ \ i}T = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & \mathrm{a}_{i-1} \\ \sin\theta_i \cos\alpha_{i-1} & \cos\theta_i \cos\alpha_{i-1} & -\sin\alpha_{i-1} & -\sin\alpha_{i-1} d_i \\ \sin\theta_i \sin\alpha_{i-1} & \cos\theta_i \sin\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1} d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Formalismul Denavit Hartenberg (DH-m)

Calitatea rezultatului obţinut reiese în faptul că pentru orice forma a elementelor transformarea omogenă este aceeaşi. Relaţiile cu care se calculează elementele matricei sunt aceleaşi. Valoarea lor depinde de cei patru parametrii ($\mathbf{a}_{i-1}$, $\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$, $\boldsymbol{d}_i$, $\boldsymbol{\theta}_i$) .

Relaţia de mai sus este o nouă abstracţie obţinută prin compunerea celor patru operatori. Alegând alte convenţii de măsurare a elementelor sau alegând o altă succesiune de parcurgere a elementului vom obţine transformări omogene cu forme diferite.

$\boxed{\theta_3}$

Probleme de cinematică

Putem imagina un model care permite calcularea transformatei dintre reperul definit în cupla n şi reperul din baza *O.*

$$ {}^{0}_{n}T = {}^{0}_{1}T \cdot {}^{1}_{2}T \cdot {}^{2}_{3}T \cdot \ldots \cdot {}^{n-1}_{n}T $$

Formalismul DH modificat defineşte fiecărui element un sistem de coordonate în articulaţia din aval, faţă de el formalismul DH nemodificat care ataşează acest reper în articulaţia din amonte.

Probleme de cinematică

În ambele situaţii este nevoie de o ajustare suplimentară care precizează postura efectorului, a sculei, vizavi de reperul ultimului element. Transformarea omogenă de la reperul *n* la efector (prehensor) cu precizarea că ea nu conţine nici o variabilă ci doar constante. Acest lucru înseamnă că postura efectorului nu se modifică relativ la reperul *n.*

$$
{}_{E}^{n}T = \begin{bmatrix} \cos\theta_E & -\sin\theta_E & 0 & \mathrm{a}_n \\ \sin\theta_E \cos\alpha_n & \cos\theta_E \cos\alpha_n & -\sin\alpha_n & -\sin\alpha_n d_E \\ \sin\theta_E \sin\alpha_n & \cos\theta_E \sin\alpha_n & \cos\alpha_n & \cos\alpha_n d_E \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Probleme de cinematică

Prehensorului i se ataşează un sistem de referinţă drept care are trei versori nică), $\hat{n}, \hat{o}, \hat{a}$ pentru care putem să imaginăm şi o transformare directă din sistemul ataşat prehensorului în sistemul din bază (fix).

$$ {}^{n}_{E}T = \begin{bmatrix} {}^{0}_{\mathrm{E}}\mathbf{n} & {}^{0}_{\mathrm{E}}\mathbf{o} & {}^{0}_{\mathrm{E}}\mathbf{a} & {}^{0}\mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

unde ${}^{0}p$ este vectorul de poziţie al originii sistemului de referinţă ataşat prehensorului.

$$ {}^{0}_{E}T = {}^{0}_{1}T \cdot {}^{1}_{2}T \cdot {}^{2}_{3}T \cdot \ldots \cdot {}^{n-1}_{n}T \cdot {}^{n}_{E}T $$

Probleme de cinematică

Relaţia de mai sus permite formularea a două probleme consacrate în studiul mecanismelor şi implicit al lanţurilor cinematice. Pentru a le definii se va introduce o variabilă suplimentară coordonata generalizată q_i.

$$q_i = \begin{cases} \theta_i, daca \ \ cupla \ \ i \ \ este \ \ de \ \ rotatie \\ d_i, daca \ \ cupla \ \ i \ \ este \ \ de \ \ translatie \end{cases}$$

Probleme de cinematică

Considerăm urmatoarele relații echivalente

$$\begin{bmatrix} {}^{0}_{\mathrm{E}}\mathrm{n} \\ {}^{0}_{\mathrm{E}}\mathrm{o} \\ {}^{0}_{\mathrm{E}}\mathrm{a} \\ {}^{0}\mathrm{p} \end{bmatrix} = \mathbf{f}(q_1, q_2, ..., q_n) \qquad \textbf{(1)} \qquad \text{și} \qquad q = \mathbf{f}^{-1}\left(\begin{bmatrix} {}^{0}_{\mathrm{E}}\mathrm{n} \\ {}^{0}_{\mathrm{E}}\mathrm{o} \\ {}^{0}_{\mathrm{E}}\mathrm{a} \\ {}^{0}\mathrm{p} \end{bmatrix}\right) \qquad \textbf{(2)}$$

Ceea ce poate fi citit astfel:

- cunoscând coordonatele generalizate, să se determine poziţia şi orientarea (postura) prehensorului
- cunoscând postura prehensorului să se determine coordonatele generalizate

Probleme de cinematică

Prima problemă poartă denumirea de problema de cinematică directa. Ea se reduce la un calcul matriceal, este o problemă determinată, relativ simplă.

Problema (2) poartă denumirea de problema de cinematică inversă. Este o problemă de cele mai multe ori nedeterminată, adică cu soluţii multiple şi uneori fără soluţii. în cazul soluţiilor multiple, aceeaşi postură a efectorului poate fi realizată printr-o combinaţie diferită de coordonate generalizate, iar în al doilea caz nu există nici o combinaţie a coordonatelor generalizate care să conducă la postura impusă. Soluţia problemei de cinematică inversă este, de obicei, numerică, implicând calcule de optimizare.

Probleme de cinematică

Existenţa soluţiilor problemei de cinematică inversă conduce la conceptul de **volum de lucru**. **Volumul de lucru** se defineşte ca fiind acea zonă din spaţiu care poate fi accesată de efectorul manipulatorului. Ştiind că problema de prehensiune este corelată cu noţiunea de postură şi că lanţul cinematic al robotului este divizat in două lanţuri cinematice (cel de poziţionare şi cel de orientare), menţionăm că noţiunea de volum de lucru se referă cu precădere la poziţionare.

Probleme de cinematică

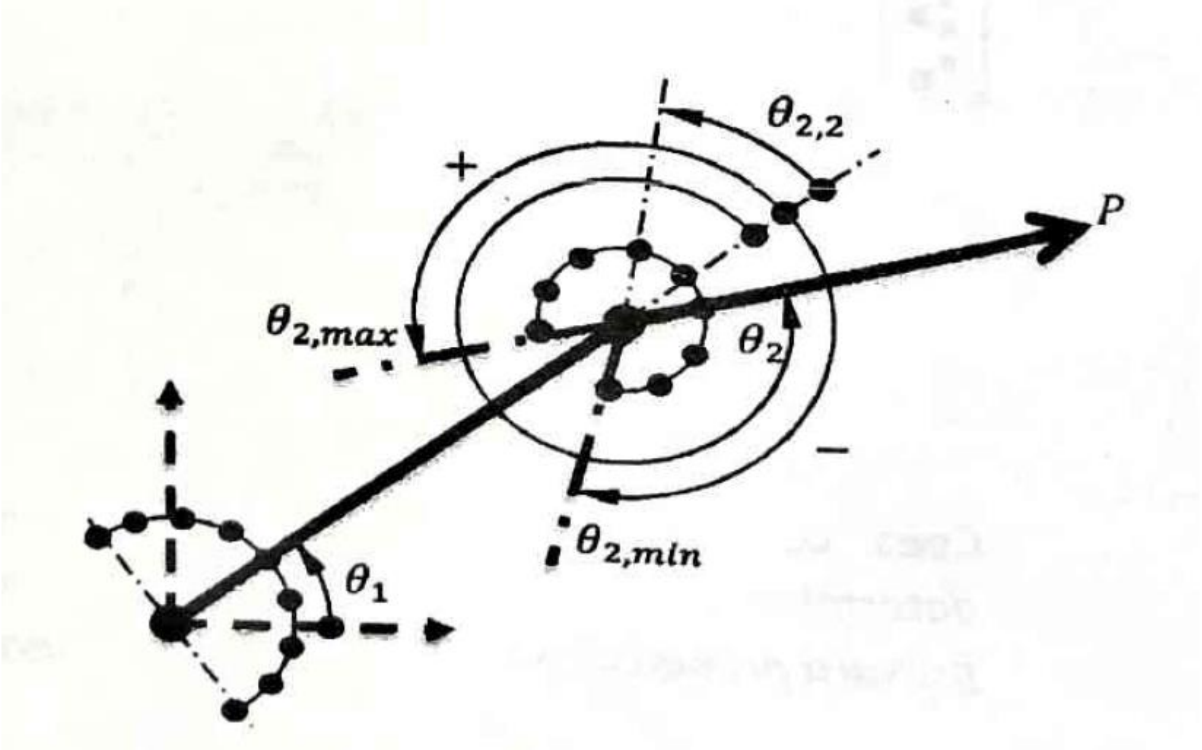
Volumul de lucru poate fi reprezentat ca un nor de puncte a căror poziţie poate fi calculată iterativ, prin discretizarea coordonatelor generalizate. Fiecare coordonată generalizată are un domeniu de definiţie care poate fi discretizat (în cel mai general caz cu incrementul de măsurare al respectivei coordonate), ceea ce permite definirea funcţiei **f**.

$$^{0}p = g(\mathrm{q}_{1k1}, \mathrm{q}_{2k2}, \ldots, \mathrm{q}_{nkn})$$

Unde $\mathrm{q}_{i,ki} \in \left\{ q_{i,\min}, q_{i,\min} + \Delta_i, \ldots, q_{i,\max} \right\}$ domeniul de definetie discret al coordonatei generalizate i.

Probleme de cinematică

Pentru a exemplifica determinarea volumului de lucru, va fi utilizat un manipulator RR (cu axele paralele) reprezentat în figura



Probleme de cinematică

Figura precedentă detalizaă discretizarea unghiului de poziție pentru cupla 2. Poate fi observat modul de măsurarea al unghiului (conform cu formalismul DH modificat) precum și faptul că există un domeniu de definiție al acestui unghi, explicabil din considerente tehnologice (de realizare efectivă a cuplei 2), mărginit de o valoare inferioară $\theta_{2,\min}$ și de una $\theta_{2,\max}$. În figură apare și imaginea discretizării. Poziţiile posibile ale punctului P se calculează cu ajutorul formalismului DH la care se adaugă transformările de la reperul prehensorului la sistemul de coordonate ataşat cuplei 2. În final se ajunge la funcţia

$$p = \begin{bmatrix} \mathrm{p}_x \\ \mathrm{p}_y \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{f}(q_1, q_2) = \begin{bmatrix} \mathrm{l}_1 \cos q_{1,i} + \mathrm{l}_1 \cos(q_{1,i} + q_{2,i}) \\ \mathrm{l}_1 \sin q_{1,i} + \mathrm{l}_1 \sin(q_{1,i} + q_{2,i}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Probleme de cinematică

În final se ajunge la funcţia

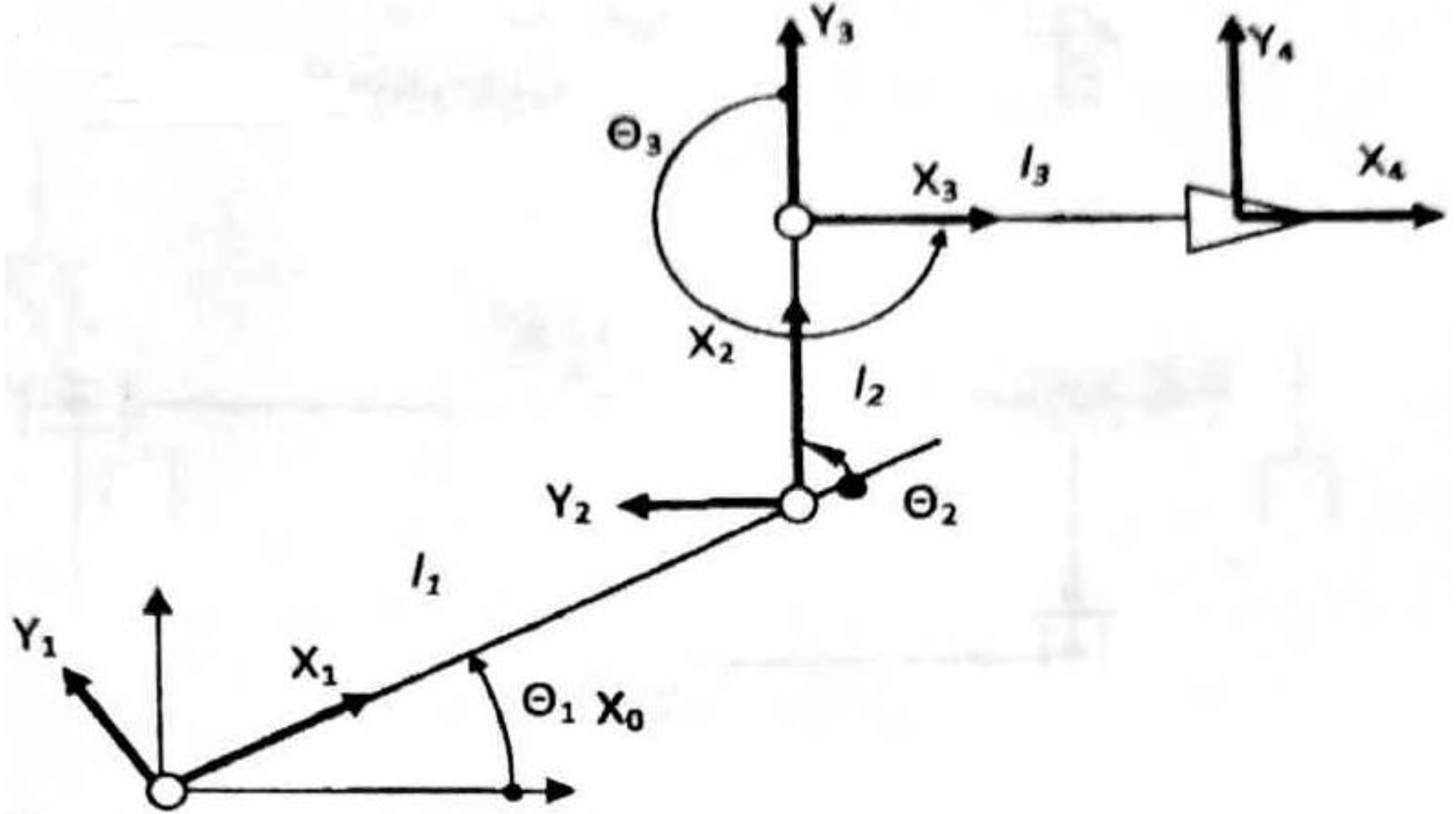
$$p=\begin{bmatrix}\mathrm{p}_x\\ \mathrm{p}_y\\ 0\end{bmatrix}=\mathbf{f(q_1,q_2)}=\begin{bmatrix}\mathrm{l}_1\cos q_{1,i}+\mathrm{l}_1\cos(q_{1,i}+q_{2,i})\\ \mathrm{l}_1\sin q_{1,i}+\mathrm{l}_1\sin(q_{1,i}+q_{2,i})\\ 0\end{bmatrix}$$

$\mathbf{q_2}=[q_{k,\min},\ldots,q_{k,\max}]^T;\ l_{1,2}$ sunt lungimile elementelor

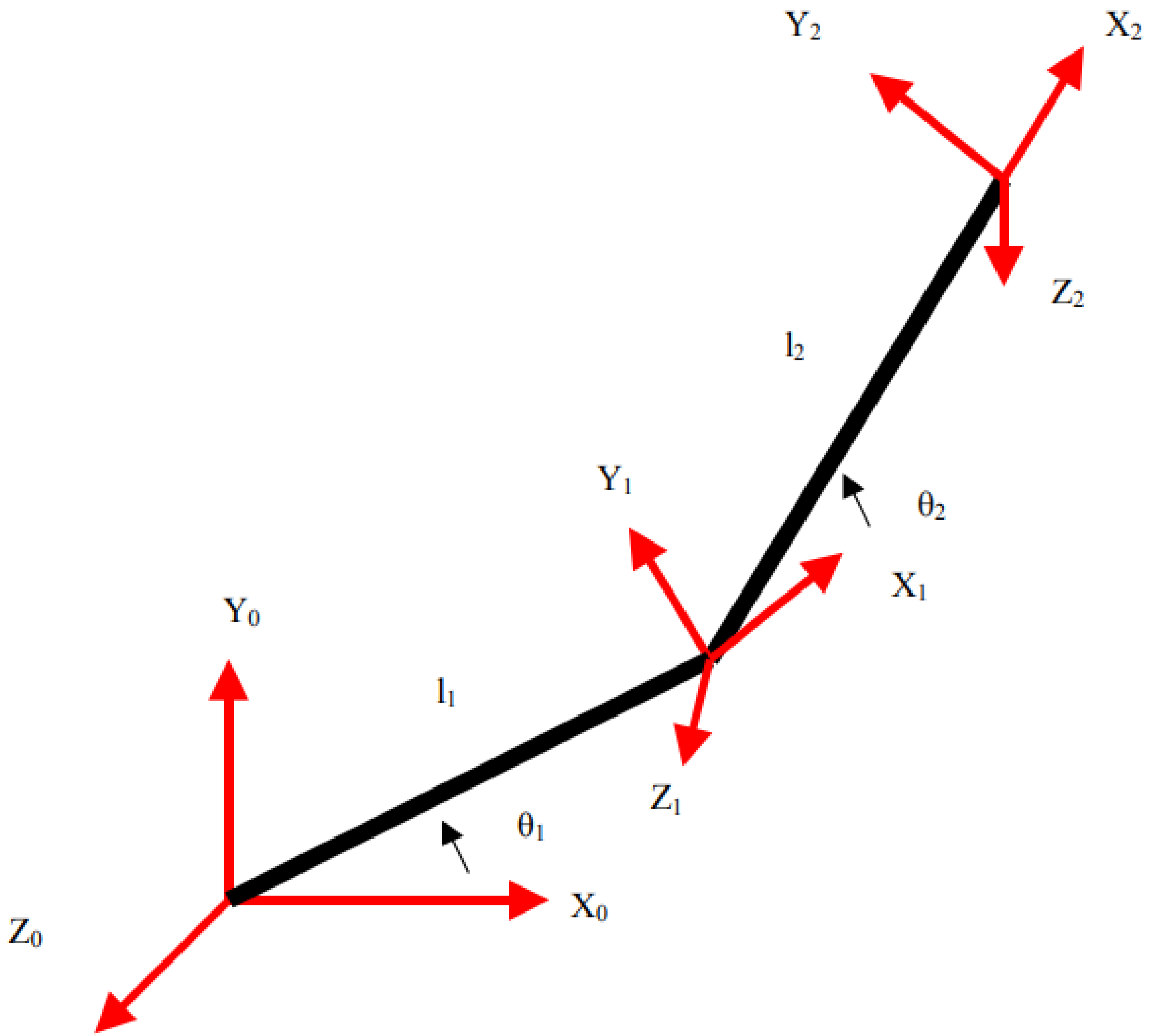
Probleme de cinematică

Funcţia **f** transformă toate combinaţiile posibile $q_{1,i} \times q_{2,\mathrm{j}}$ în poziţiile posibile ale prehensorului. Vectorii coordonatelor generalizate formează domeniul variabilelor din cuple iar vectorii de poziţie corespunzători formează domeniul cartezian al prehensorului.

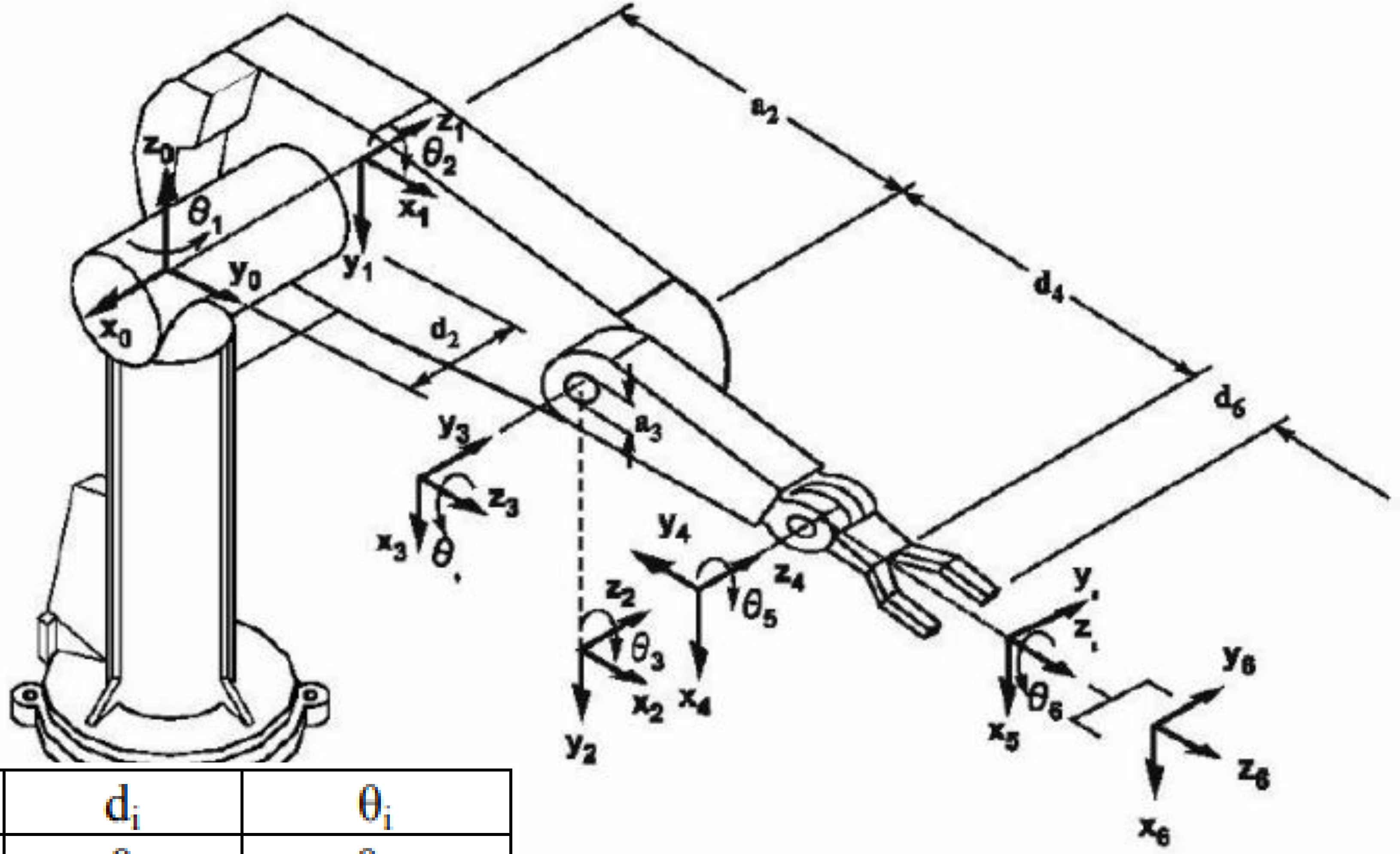
$$\begin{bmatrix} q_{1,1}q_{2,1} & q_{1,2}q_{2,1} & \cdots & q_{1,\mathrm{m}}q_{2,1} \\ q_{1,1}q_{2,2} & q_{1,2}q_{2,2} & \cdots & q_{1,m}q_{2,2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{1,1}q_{2,\mathrm{n}} & q_{1,2}q_{2,\mathrm{n}} & \cdots & q_{1,\mathrm{m}}q_{2,\mathrm{n}} \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{f}} \begin{bmatrix} p_{1,1} & q_{2,1} & \cdots & q_{\mathrm{m},1} \\ p_{1,2} & q_{2,2} & \cdots & q_{\mathrm{m},2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{1,\mathrm{n}} & q_{2,\mathrm{n}} & \cdots & q_{\mathrm{m},\mathrm{n}} \end{bmatrix}$$



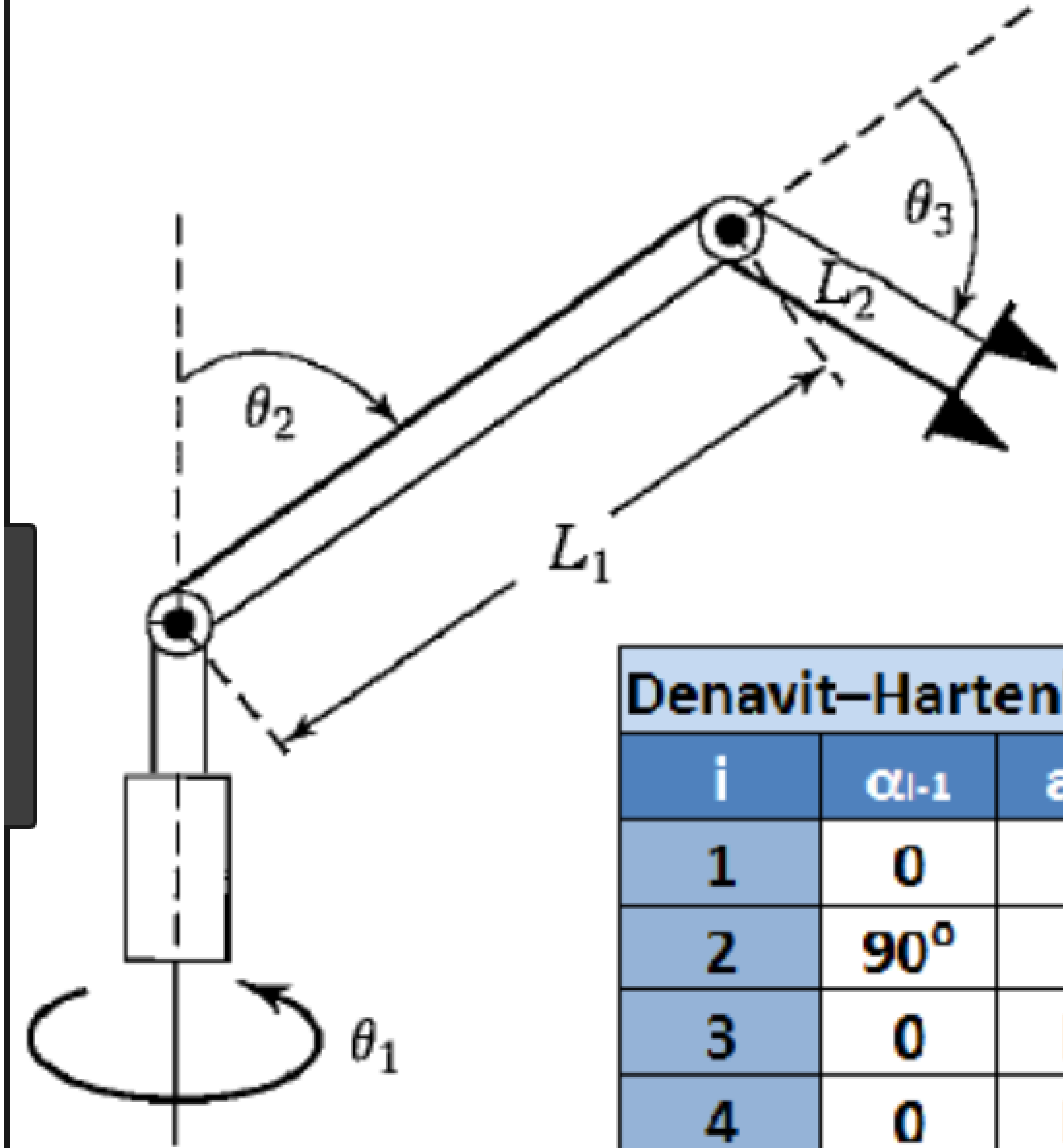
i	α_{i-1}	a_{i-1}	θ_i	d_i
1	0	0	θ_1	0
2	0	l_1	θ_2	0
3	0	l_2	θ_3	0



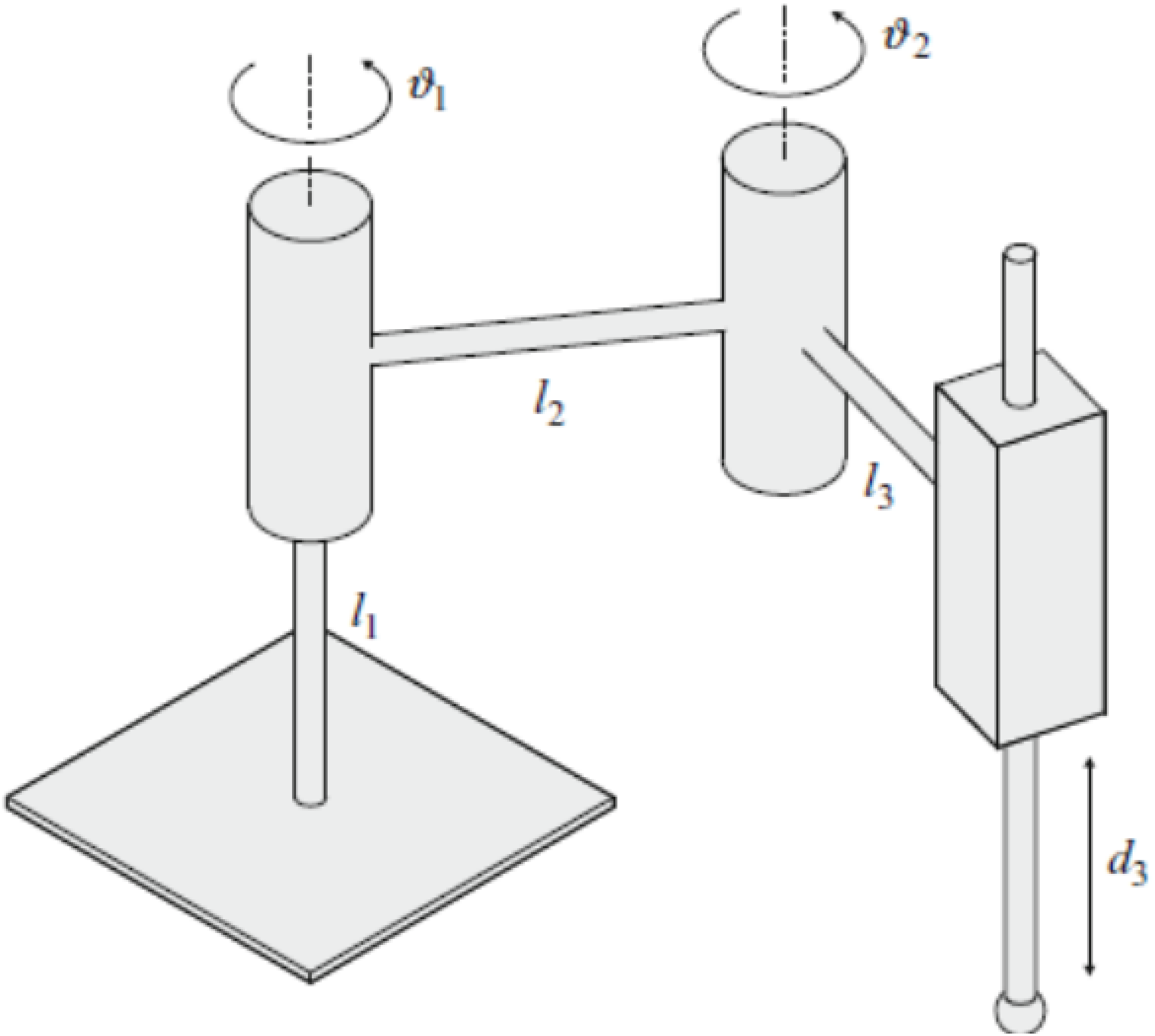
Element	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1	L_1	0	0	θ_1
2	L_2	0	0	θ_2



Element	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	0	-90^o	0	θ_2
3	a_2	0	d_2	θ_3
4	a_3	-90^o	d_4	θ_4
5	0	$+90^o$	0	θ_5
6	0	0	d_6	θ_6



Denavit–Hartenberg parameters				
i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	90°	0	0	θ_2
3	0	L_1	0	θ_3
4	0	L_2	0	0



ϑ_1
ϑ_2
l_2
l_3
l_1
d_3