Modelul cinematic al manipulatorului

Mișcarea diferențială

Pentru un lanţ cinematic cu n grade de libertate modelate, prin variabile din cuple $\boldsymbol{\theta}_1$**, ...** $\boldsymbol{\theta}_n$, se pune următoarea întrebare: **Cum influenţează deplasarea infinitezimală din cuple postura efectorului (poziţie şi orientare)?** Adică, cunoscând (problema de cinematică directă) dependenţa $\boldsymbol{\theta} \to \mathbf{x}$

unde $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \ldots, \theta_n]^T$ și $\mathbf{x} = [\mathrm{x}, y, z, \alpha, \beta, \gamma]^T$

sau

$$\delta\boldsymbol{\theta} \to \delta\mathbf{x}$$

Mișcarea diferențială

Coordonate generalizate pot fi definite în felul următor

$$q_i = \overline{\varepsilon}_i \theta_i + \varepsilon_i \mathrm{d}_i$$

unde

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 0, & dac\breve{a} \;\; cupla \;\; este \;\; de \;\; rotatie \\ 1, & dac\breve{a} \;\; cupla \;\; este \;\; de \;\; translatie \end{cases}$$

Astfel obținem coordonatele generalizate sub forma:

$$\mathbf{q} = [\mathrm{q}_1, \ldots, \mathrm{q}_n]^T$$

Jacobianul

Jacobianul se defineşte ca fiind operatorul (matricea) care modelează dependenţa $\delta\boldsymbol{\theta} \rightarrow \delta\mathbf{x}$

$$\delta\mathbf{x}_{(m\times 1)} \rightarrow \mathbf{J}_{(m\times n)}(\mathbf{q}) \cdot \delta\mathbf{q}_{(n\times 1)}$$

Pentru a obţine acest operator se porneşte de la problema de cinematică directă $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{q})$ unde $\mathbf{f}(\mathbf{q}) = [\mathrm{f}_1(\mathrm{q}), ..., \mathrm{f}_m(\mathrm{q})]^T$

m – număr grade de mobilitate

n – număr grade de libertate

Diferențiind expresia aceasta obținem

Jacobianul

$$\begin{cases} \delta x_1 = \dfrac{\partial \mathrm{f}_1(\mathbf{q})}{\partial \mathrm{q}_1} \cdot \delta \mathrm{q}_1 + \ldots + \dfrac{\partial \mathrm{f}_1(\mathbf{q})}{\partial \mathrm{q}_n} \cdot \delta \mathrm{q}_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \delta x_m = \dfrac{\partial \mathrm{f}_m(\mathbf{q})}{\partial \mathrm{q}_1} \cdot \delta \mathrm{q}_1 + \ldots + \dfrac{\partial \mathrm{f}_m(\mathbf{q})}{\partial \mathrm{q}_n} \cdot \delta \mathrm{q}_n \end{cases}$$

sau

$$\delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \ldots\ldots \\ \delta x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathrm{f}_1}{\partial \mathrm{q}_1} & \ldots & \dfrac{\partial \mathrm{f}_1}{\partial \mathrm{q}_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial \mathrm{f}_m}{\partial \mathrm{q}_1} & \ldots & \dfrac{\partial \mathrm{f}_m}{\partial \mathrm{q}_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta \mathrm{q}_1 \\ \ldots \\ \delta \mathrm{q}_n \end{bmatrix}$$

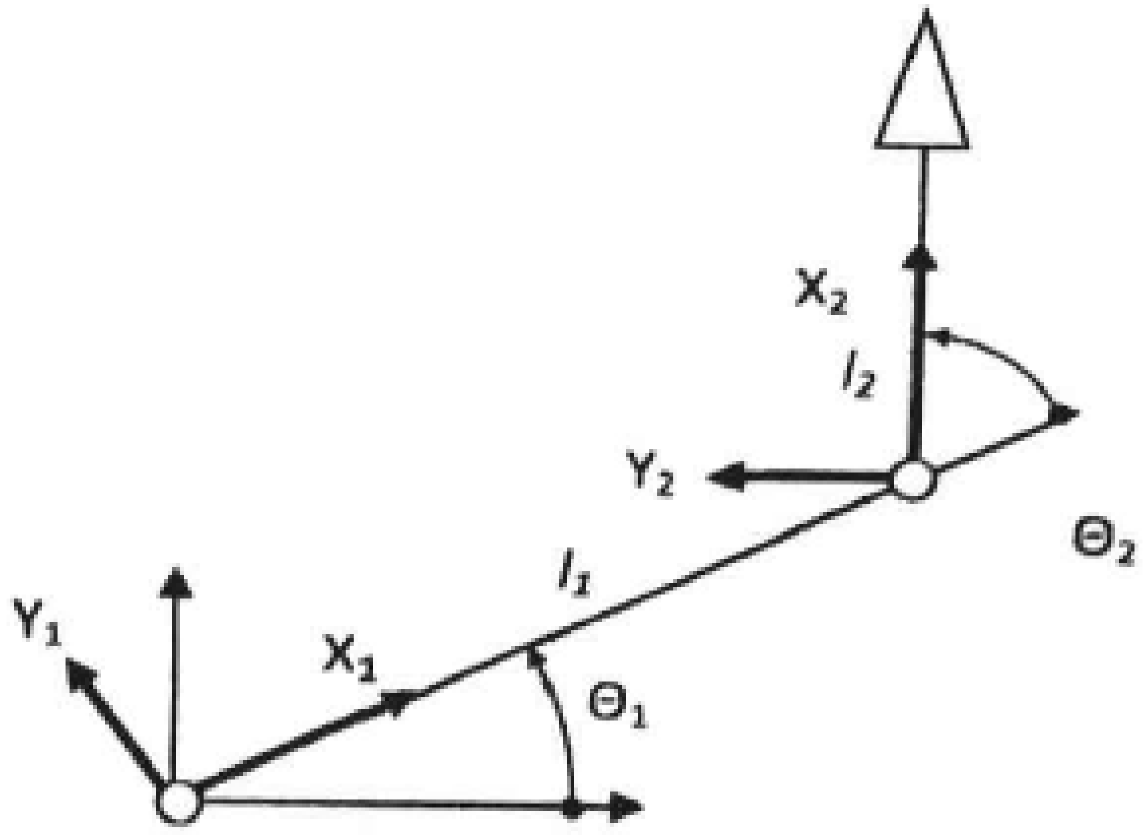
Cu alte cuvinte putem spune ca $\dot{\mathbf{x}}_{(m\times 1)} \rightarrow \mathbf{J}_{(m\times n)}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}}_{(n\times 1)}$

Jacobianul

Definirea Jacobianului reprezintă un mare câştig din punctul de vedere al modelăm matematice. Dacă relaţia dintre coordonatele generalizate (din cuple) şi postura efectoruiui era dată de o funcţie neliniară, de această dată relaţia dintre vitezele din cuple şi vitezele (liniare şi unghiulare) ale efectoruiui sunt exprimate prin calcul matriceal. Sau, relaţia vitezelor implică suprapunerea efectelor.

Poziția efectorului este

$$\begin{cases} x = l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y = l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \theta = \theta_1 + \theta_2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \delta x = -(l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2))\delta\theta_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)\delta\theta_2 \\ \delta y = (l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2))\delta\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)\delta\theta_2 \\ \delta\theta = \delta\theta_1 + \delta\theta_2 \end{cases}$$

$$\delta x = \begin{bmatrix} -(l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1+\theta_2)) & -l_2 \sin(\theta_1+\theta_2) \\ l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1+\theta_2) & l_2 \cos(\theta_1+\theta_2) \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta\theta_1 \\ \dots \\ \delta\theta_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -(l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1+\theta_2)) & -l_2 \sin(\theta_1+\theta_2) \\ l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1+\theta_2) & l_2 \cos(\theta_1+\theta_2) \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Observăm

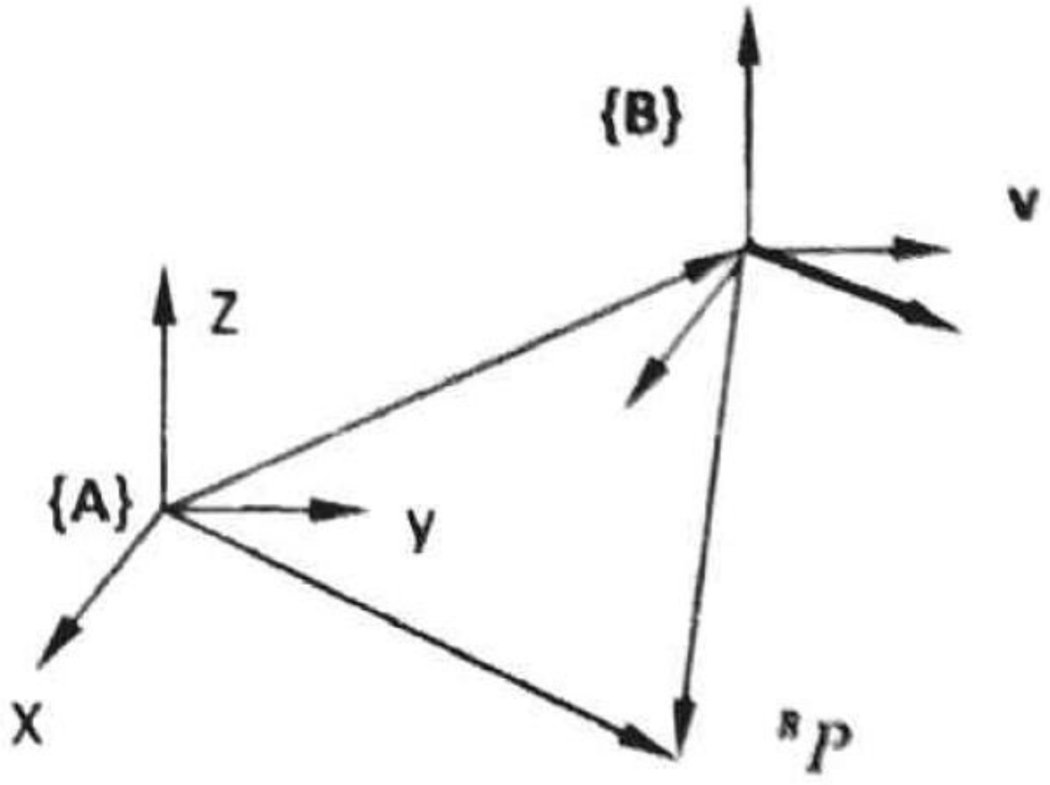
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x_P} \\ \mathbf{x_R} \end{bmatrix} \quad \text{și} \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J_{x_P}(q)} \\ \mathbf{J_{x_R}(q)} \end{bmatrix}$$

Compunerea vitezelor liniare și unghiulare

Calculul Jacobianului de bază necesită studiul dependenţei dintre vitezele coordonatelor generalizate şi vitezele efectorului. Pentru a pregăti acest studiu se face o scurtă prezentare a cinematicii solidului rigid, mai precis a modul de compunere al vitezelor unghiulare şi liniare. Ne punem problema determinării vitezei unui punct **P** în reperul **{A}**. Punctul **P** este definit faţă de un repet **{B}** iar acest reper are o mişcare generală faţă de reperul **{A}**. Complexitatea problemei este redusă prin mecanismul **PCAP**. Vom descompune mişcarea generală în mişcare de translaţie şi de rotaţie şi vom obţine primitivele prin studiul acestor tipuri de mişcări.

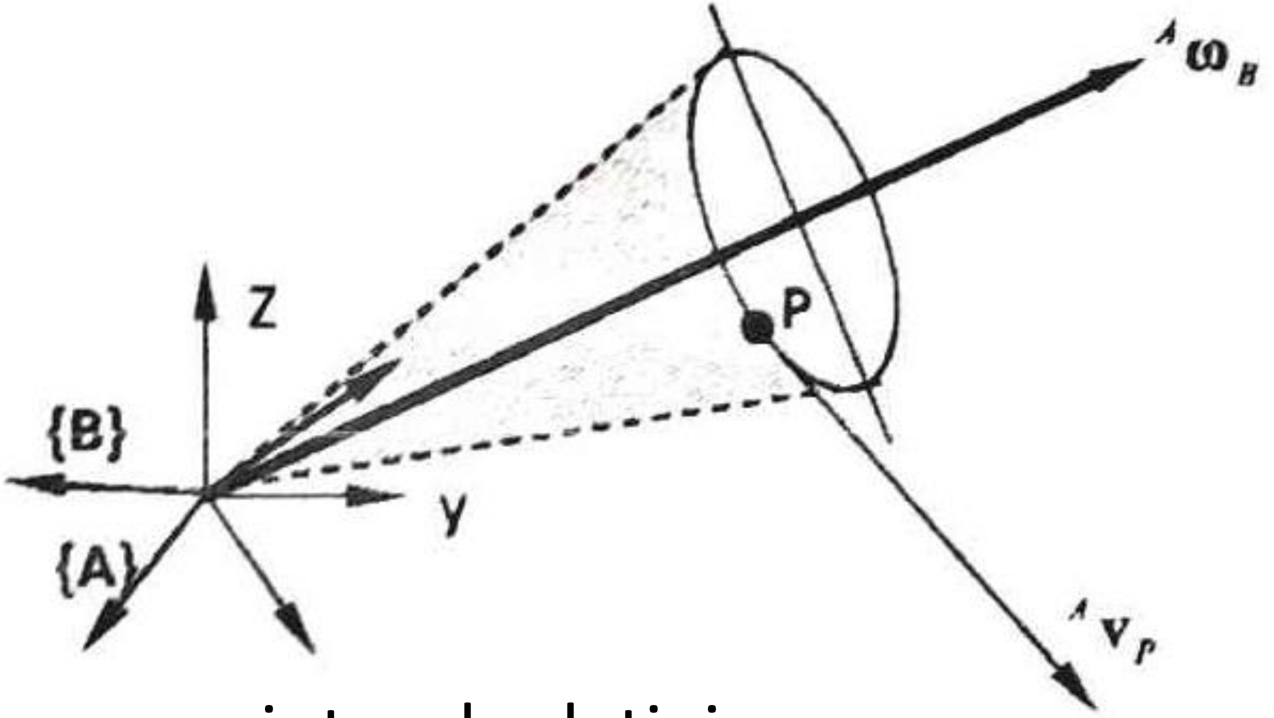
Compunerea vitezelor liniare

În cazul unei mişcări de **translaţie**
în care reperele au aceeaşi orientare,
atunci când reperul **{B}** se deplasează
faţa de reperul **{A}** cu viteza ${}^{A}\mathbf{v}_{B\_org}$
punctul **P** se deplasează cu viteza ${}^{B}\mathbf{v}_{P}$
compunerea vitezelor se face cu relaţia:
${}^{A}\mathbf{v}_{P} = {}^{A}\mathbf{v}_{B\_org} + {}^{B}\mathbf{v}_{P}$ sau în caz general



$${}^{A}\mathbf{v}_{P} = {}^{A}\mathbf{v}_{B\_org} + {}^{A}_{B}R\,{}^{B}\mathbf{v}_{P}$$

Compunerea vitezelor unghiulare



În cazul unei mişcări de **rotaţie** atunci când originile celor două repere sunt comune (nu se deplasează reciproc în timpul mişcării) şi când reperul **{B}** se roteşte cu viteza unghiulara **ω** faţă de reperul **{A}** iar punctul **P** este fixat în reperul **{B}**, compunerea vitezelor se face cu ajutorul relaţiei

$$^{A}\mathbf{v}_{P} = {}^{A}\boldsymbol{\omega}_{B} \times \mathbf{p}$$

unde: **p** este vectorul de poziţie a punctului **P**; în acest caz viteza liniară , viteza unghiulară şi vectorul **p** sunt exprimate în reperul **{A}**.

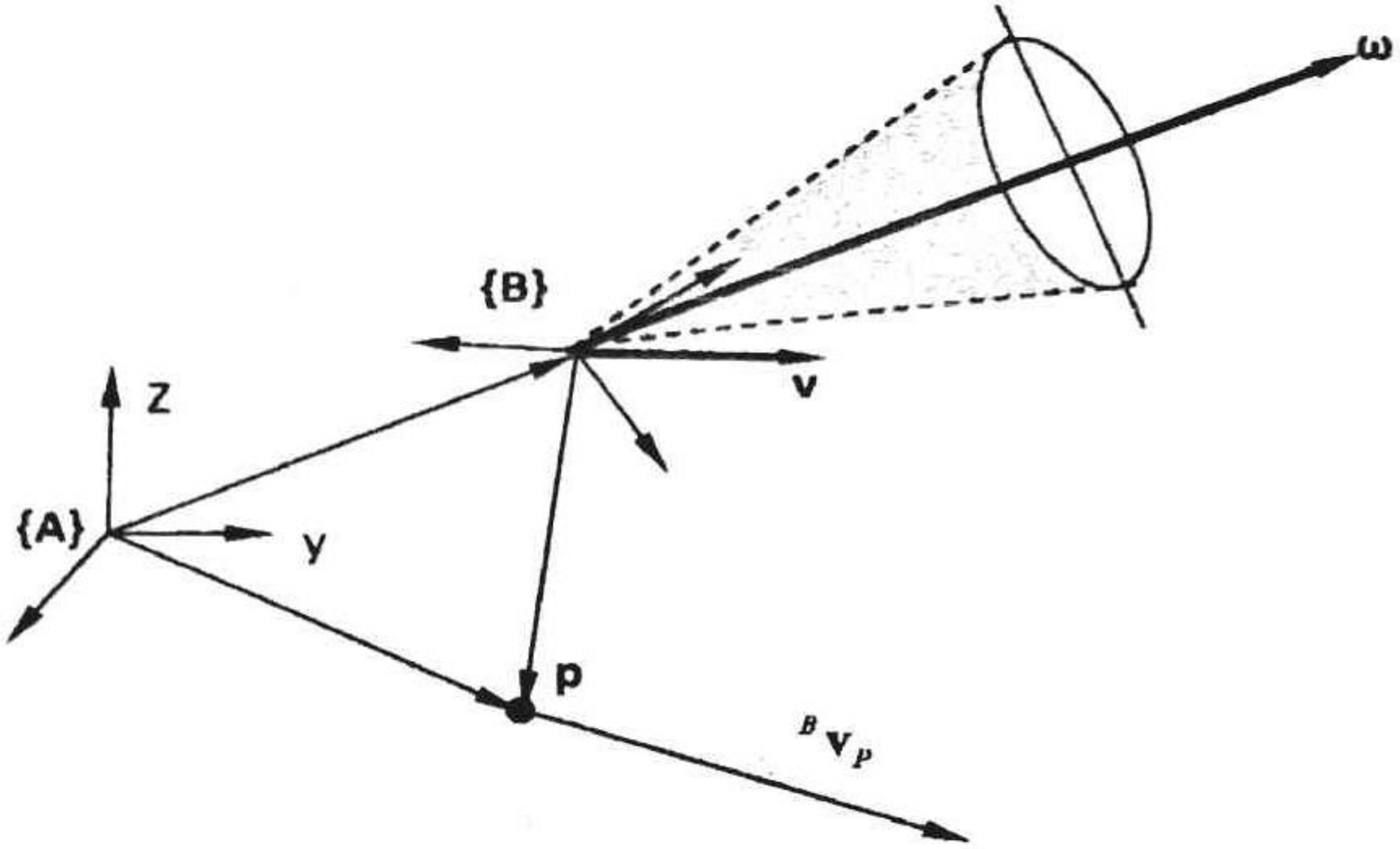
Compunerea vitezelor unghiulare

Relaţia $^{A}\mathbf{v}_{P} = {}^{A}\boldsymbol{\omega}_{B} \times \mathbf{p}$ poate fi scrisă matriceal utilizând tensorul vectorului de rotaţie

$$^{A}\mathbf{v}_{P} = {}^{A}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{B}\mathbf{p} \quad \text{unde} \quad \tilde{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

Compunerea vitezelor liniare și unghiulare

Dacă utilizăm cele două rezultate anterioare pentru a descrie o mişcare compusă dintr-o translaţie şi o rotaţie, atunci când reperul **{B}** se deplasează (translaţie şi rotaţie) faţă de **{A}** iar punctul **P** se deplasează faţă de **{B}**. compunerea vitezelor se face astfel:



Compunerea vitezelor liniare și unghiulare

Compunerea vitezelor se face astfel:

$$ {}^{A}\mathbf{v}_{P} = {}^{A}\mathbf{v}_{B\_org} + {}^{A}_{B}\mathbf{R}\, {}^{B}\mathbf{v}_{P} + {}^{A}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{B} \cdot {}^{A}_{B}\mathbf{R} \cdot {}^{B}\mathbf{p} $$

unde

Propagarea vitezei

Propagarea vitezei se referă la modul în care vitezele unghiulare şi vitezele liniare, din cuplele de rotaţie respectiv de translaţie, influenţează (determină) vitezele efectorului. Acest fenomen este modelat cu ajutorul **Jacobianului**.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}_o(\boldsymbol{\theta}) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}$$

unde: **x** are două componente: **v** şi **ω**.

Propagarea vitezei

Pe de altă parte, propagarea vitezei poate fi studiată şi cu ajutorul relaţiilor de compunere a vitezei, ceea ce face ca propagarea vitezelor să poată fi utilizată la calculul Jacobianul. Pentru aceasta se calculează viteza liniară şi unghiulară a reperului **{i+1}**, faţă de **{i}**, atunci când se cunoaşte mişcarea reperului **{i}** şi mişcarea relativă a reperului **{i+1}** faţă de reperul **{i}**.

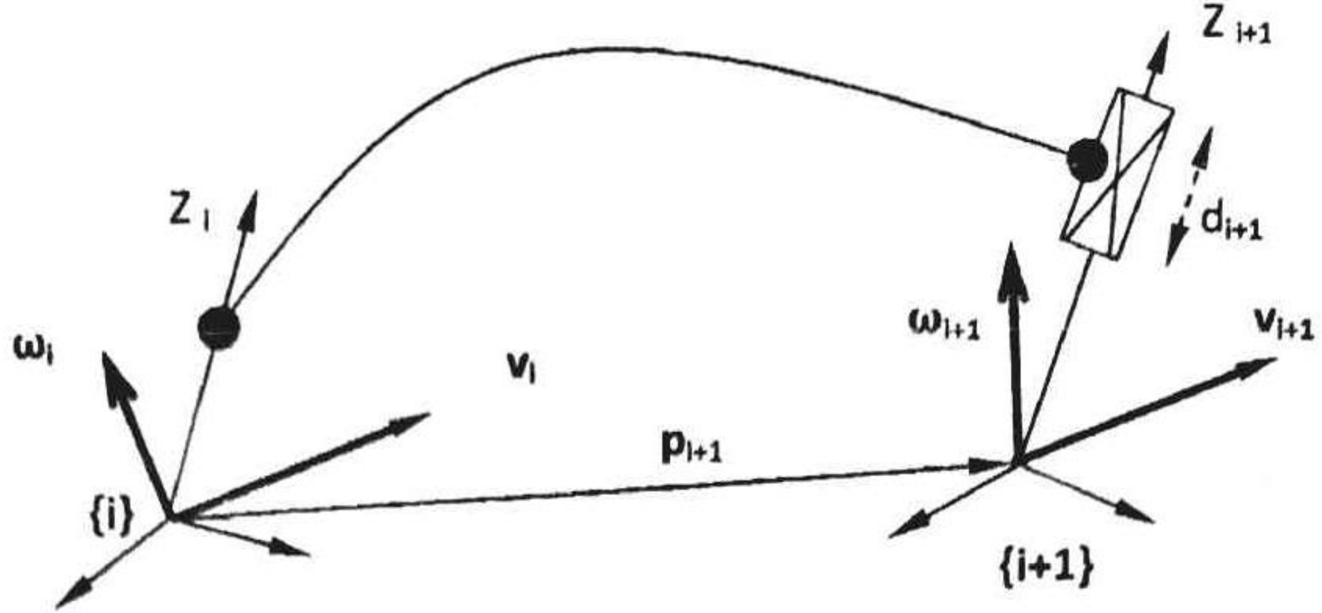
Propagarea vitezei

Observație

- Mişcarea relativă menţionată poate fi (în cazul unui lanţ cinematic al manipulatoarelor) de două tipuri: translaţie şi rotaţie, ceea ce conduce la particularizarea rezultatelor obţinute.
- Conform strategiei utilizate în studiul cinematicii solidului rigid, relaţiile care vor urma ignoră reperul în care sunt exprimate. Acest neajuns va fi rectificat atunci când se va prezenta algoritmul iterativ de compunere prin parcurgerea lanţului cinematic de la bază la efector.

Propagarea vitezei

În cazul translaţiei ecuaţiile de propagare a vitezelor liniare şi a celor unghiulare sunt:



$$\begin{cases} \mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{v}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{p}_{i+1} + \dot{d}_{i+1} \cdot \mathbf{Z}_{i+1} \\ \boldsymbol{\omega}_{i+1} = \boldsymbol{\omega}_i \end{cases}$$

$\mathbf{p}_{i+1}$ - vectorul de poziţie a lui originii reperului *{i* +1};

$\dot{d}_{i+1}$ - modulul vitezei de translaţie a reperului {i+1};

$\mathbf{Z}_{i+1}$ - axa reperului {i+1};

$\mathbf{v}_{i+1}$ - viteza reperului {i+1};

$\mathbf{v}_i$ - viteza reperului {i};

$\boldsymbol{\omega}_i$ - viteza unghiului a reperului {i};

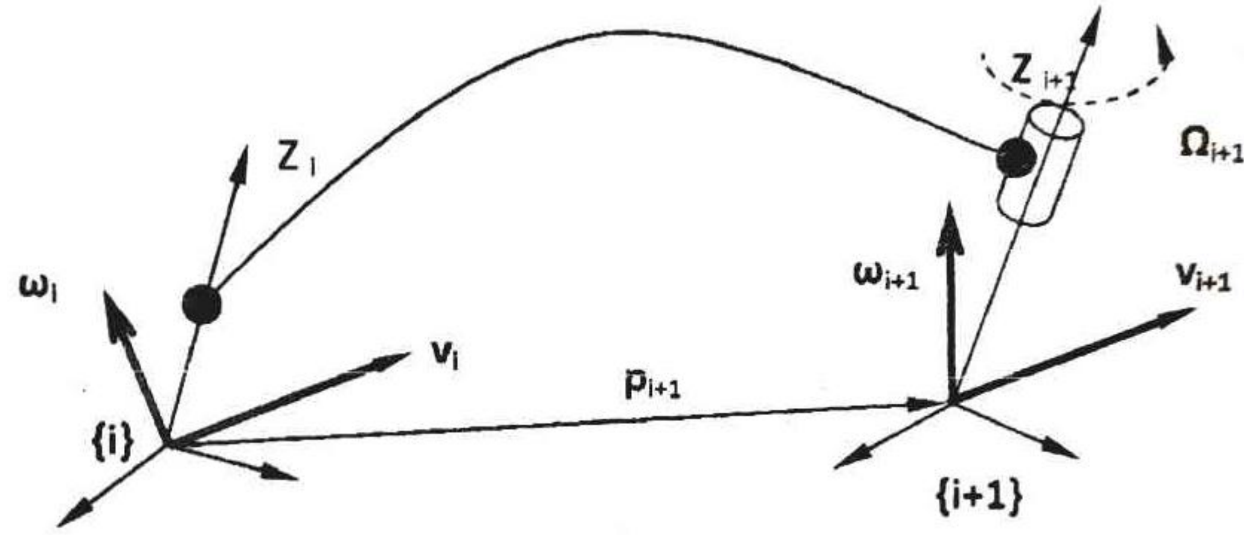
Propagarea vitezei

În cazul rotației vitezele liniare și unghiurile sunt:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{v}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{p}_{i+1} \\ \boldsymbol{\omega}_{i+1} = \boldsymbol{\omega}_i + \Omega_{i+1} \end{cases}$$

unde

$$\Omega_{i+1} = \dot{\theta}_{i+1} \cdot \mathbf{Z}_{i+1}$$



Propagarea vitezei

Din ultimele 2 relații de calcul a vitezelor de translație și rotație se poate de generalizat o formulă comună:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{v}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{p}_{i+1} + \dot{d}_{i+1} \cdot \mathbf{Z}_{i+1} \\ \boldsymbol{\omega}_{i+1} = \boldsymbol{\omega}_i + \dot{\theta}_{i+1} \cdot \mathbf{Z}_{i+1} \end{cases}$$

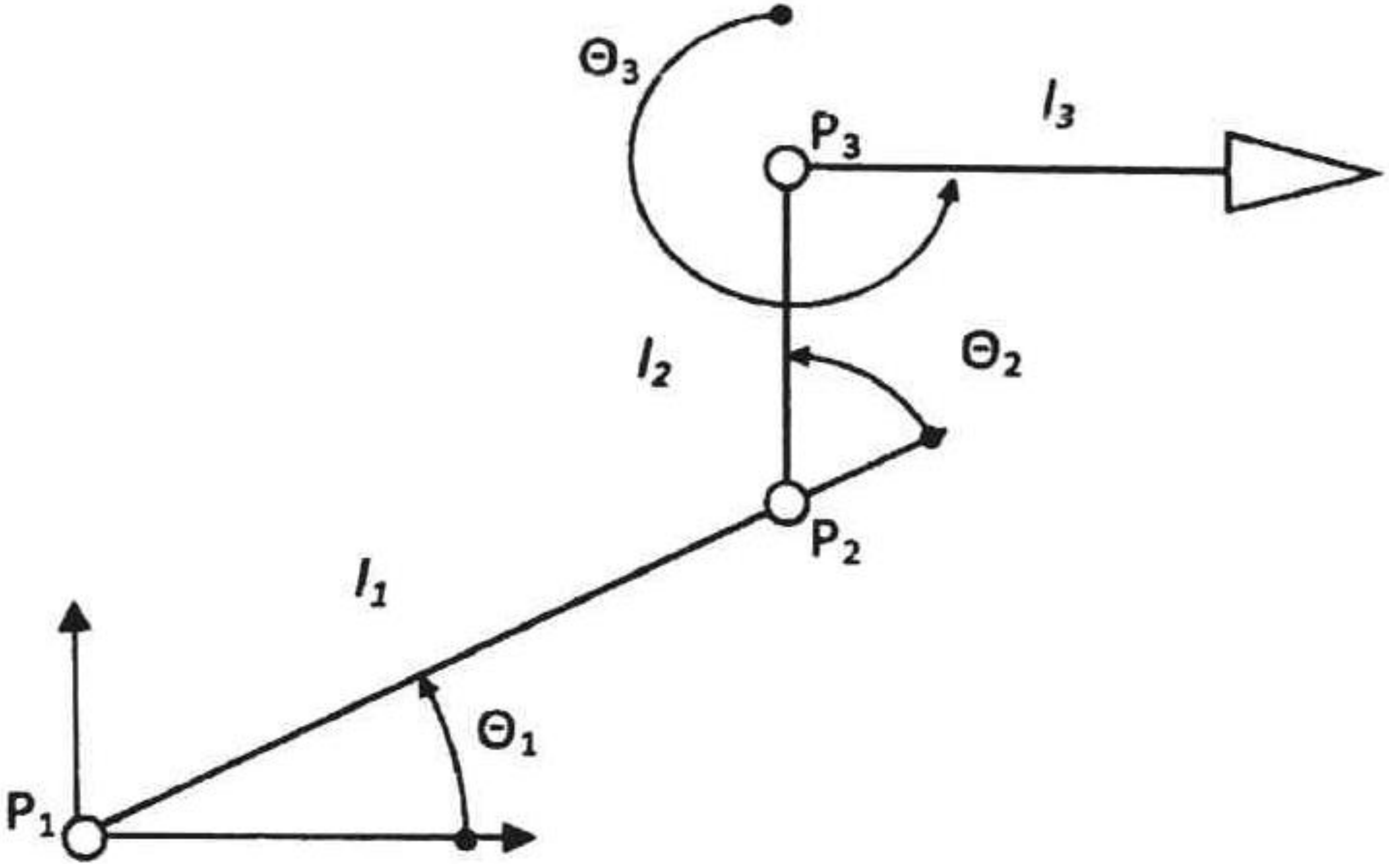
Propagarea vitezei

Observații:

- Compunerea vitezei liniare: **Viteza liniară** a reperului trebuie înţeleasă ca viteza originii reperului şi a tuturor punctelor care au o mişcare liniara faţă de acel reper.
- Compunerea vitezei unghiulare: **Viteza unghiulară** trebuie înţeleasă ca viteza de rotaţie a tuturor punctelor fixe din acel reper.

Exemplu

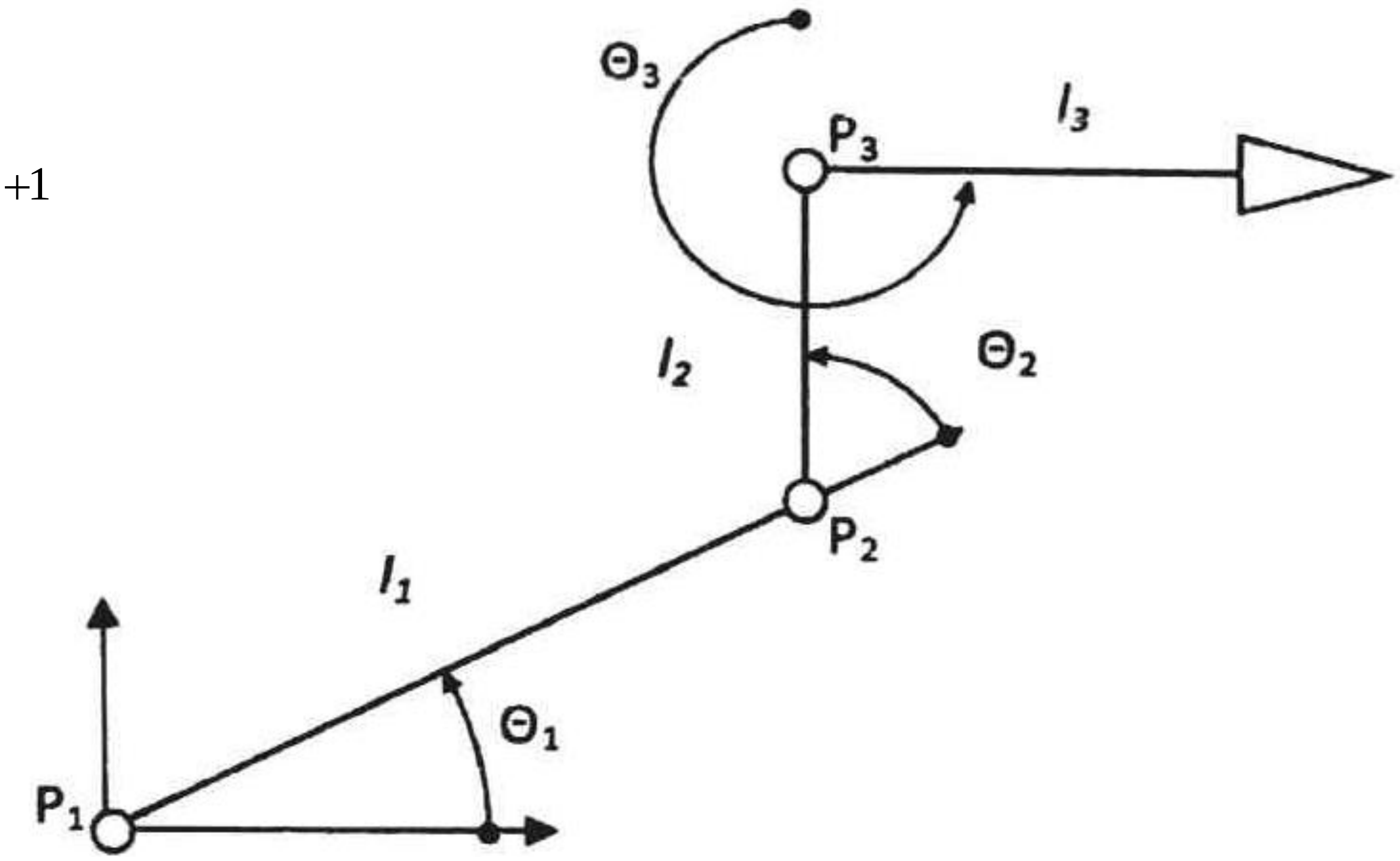
Algoritmul de compunere al vitezelor poate fi utilizat direct pentru determinarea analitică a Jacobianului. În cazul structurii plană RRR se obţin următoarele rezultate:



Exemplu

Utilizăm relația:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{v}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{p}_{i+1} + \dot{d}_{i+1} \cdot \mathbf{Z}_{i+1} \\ \boldsymbol{\omega}_{i+1} = \boldsymbol{\omega}_i + \dot{\theta}_{i+1} \cdot \mathbf{Z}_{i+1} \end{cases}$$



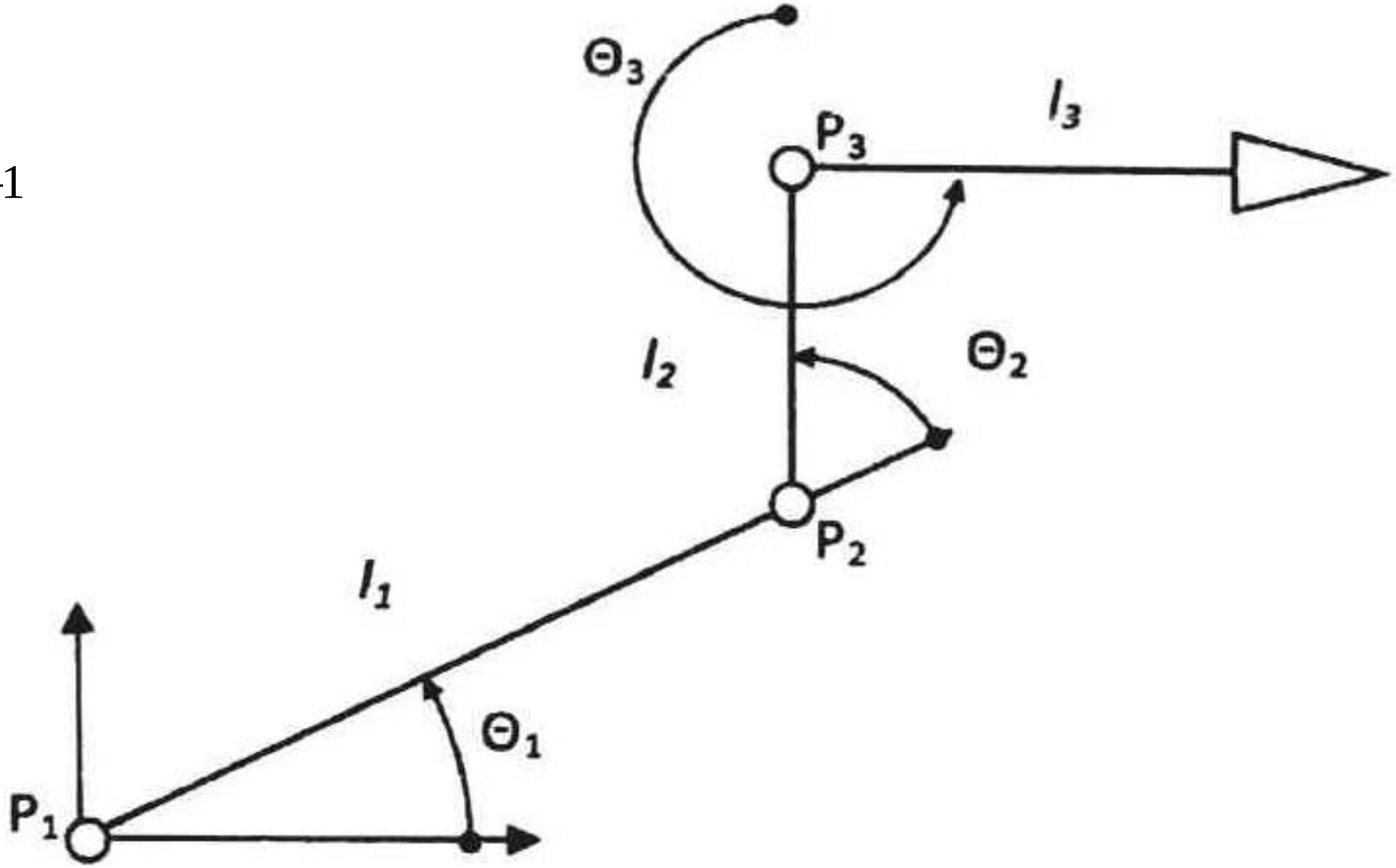
Exemplu

Utilizăm relația:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{v}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{p}_{i+1} + \dot{d}_{i+1} \cdot \mathbf{Z}_{i+1} \\ \boldsymbol{\omega}_{i+1} = \boldsymbol{\omega}_i + \dot{\theta}_{i+1} \cdot \mathbf{Z}_{i+1} \end{cases}$$

Pentru fiecare viteză avem:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{P_1} = 0 \\ \mathbf{v}_{P_2} = \mathbf{v}_{P_1} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{v}_{P_3} = \mathbf{v}_{P_2} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{p}_3 \end{cases}$$

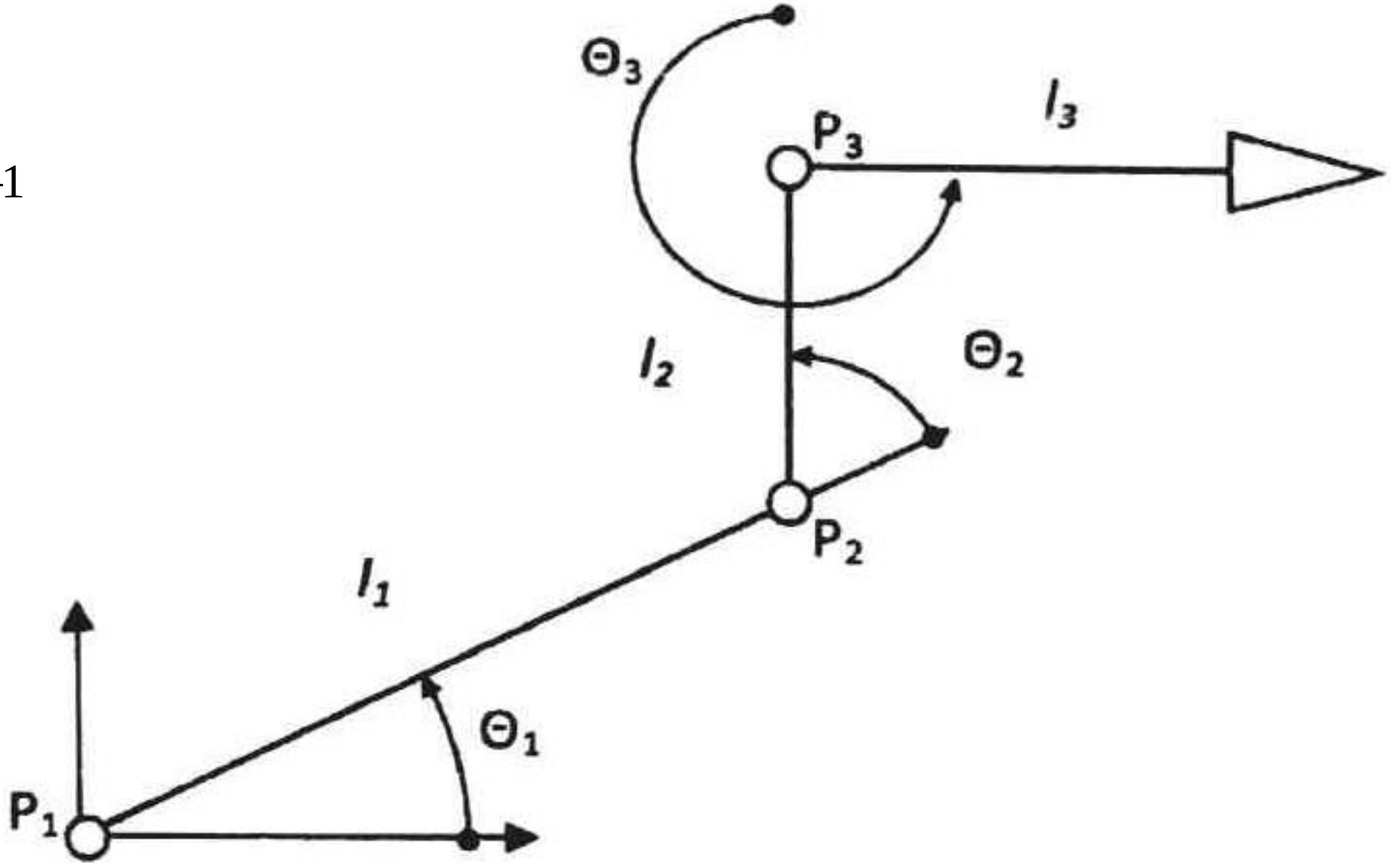


Exemplu

Utilizăm relația:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{v}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{p}_{i+1} + \dot{d}_{i+1} \cdot \mathbf{Z}_{i+1} \\ \boldsymbol{\omega}_{i+1} = \boldsymbol{\omega}_i + \dot{\theta}_{i+1} \cdot \mathbf{Z}_{i+1} \end{cases}$$

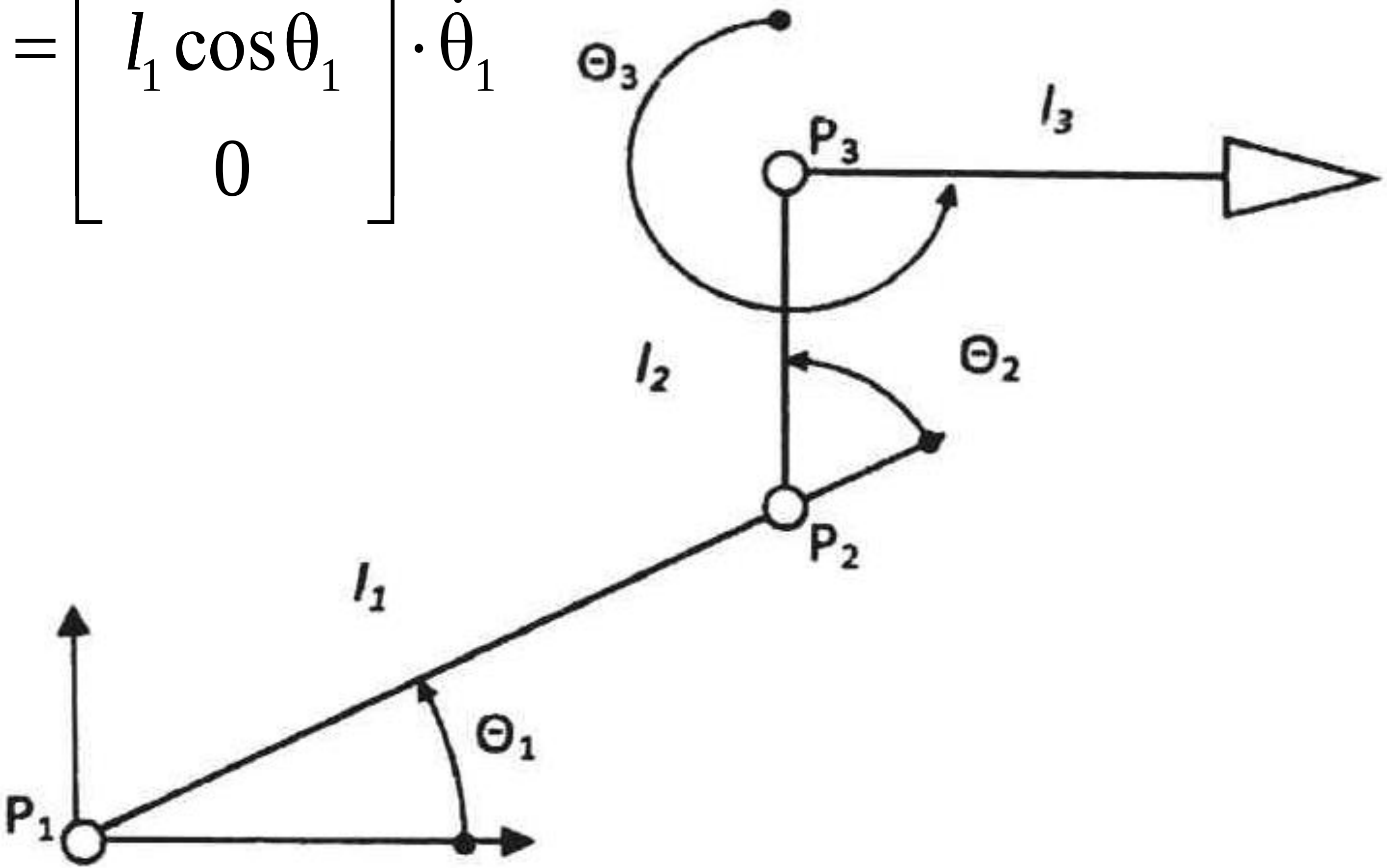
$$\begin{cases} \boldsymbol{\omega}_1 = \dot{\theta}_1 \cdot {}^0\mathbf{Z}_1 \\ \boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\omega}_1 + \dot{\theta}_2 \cdot {}^0\mathbf{Z}_2 \\ \boldsymbol{\omega}_3 = \boldsymbol{\omega}_2 + \dot{\theta}_3 \cdot {}^0\mathbf{Z}_3 \end{cases}$$



Exemplu

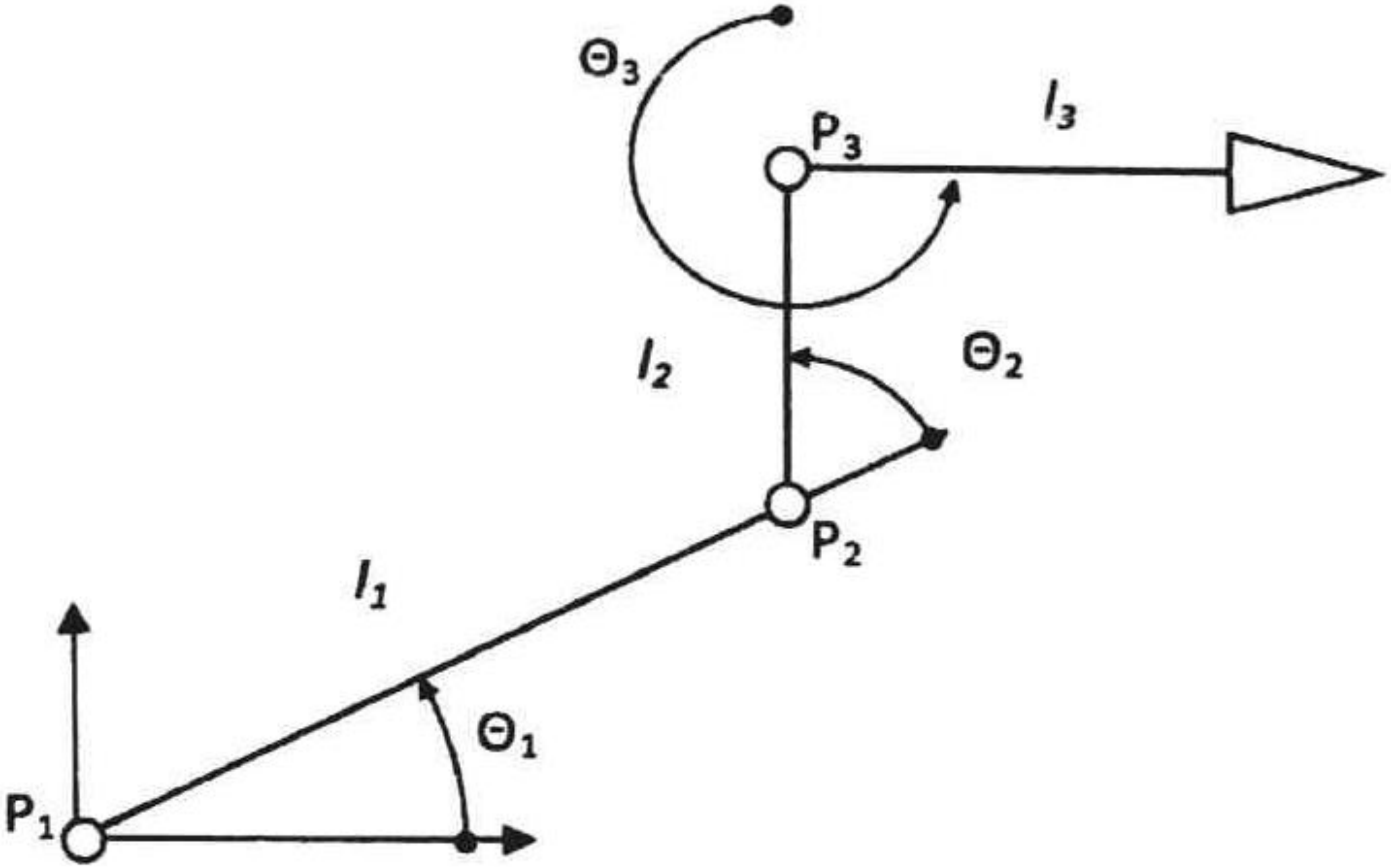
Explicit:

$$\mathbf{v}_{P_2} = 0 + \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_1 & 0 \\ \dot{\theta}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_1 \cos\theta_1 \\ l_1 \sin\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin\theta_1 \\ l_1 \cos\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \dot{\theta}_1$$



$$\begin{cases} \mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{v}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{p}_{i+1} + \dot{d}_{i+1} \cdot \mathbf{Z}_{i+1} \\ \boldsymbol{\omega}_{i+1} = \boldsymbol{\omega}_i + \dot{\theta}_{i+1} \cdot \mathbf{Z}_{i+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{P_1} = 0 \\ \mathbf{v}_{P_2} = \mathbf{v}_{P_1} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{v}_{P_3} = \mathbf{v}_{P_2} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{p}_3 \end{cases}$$



$$\mathbf{v}_{P_3} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin\theta_1 \\ l_1 \cos\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \dot{\theta}_1 + \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 & 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exemplu

$$\mathbf{v}_{P_3} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin\theta_1 \\ l_1 \cos\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \dot{\theta}_1 + \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 & 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_{P_3} = \begin{bmatrix} -(l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)) & -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

Exemplu

$$\mathbf{v}_{P_3} = \begin{bmatrix} -(l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1+\theta_2)) & -l_2 \sin(\theta_1+\theta_2) & 0 \\ l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1+\theta_2) & l_2 \cos(\theta_1+\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

deci

$$\mathbf{J}_{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} -(l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1+\theta_2)) & -l_2 \sin(\theta_1+\theta_2) & 0 \\ l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1+\theta_2) & l_2 \cos(\theta_1+\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplu

Compunerea vitezelor unghiulare:

$$\boldsymbol{\omega}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \qquad \text{deci} \qquad \mathbf{J}_{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplu

Jacobianul de bază

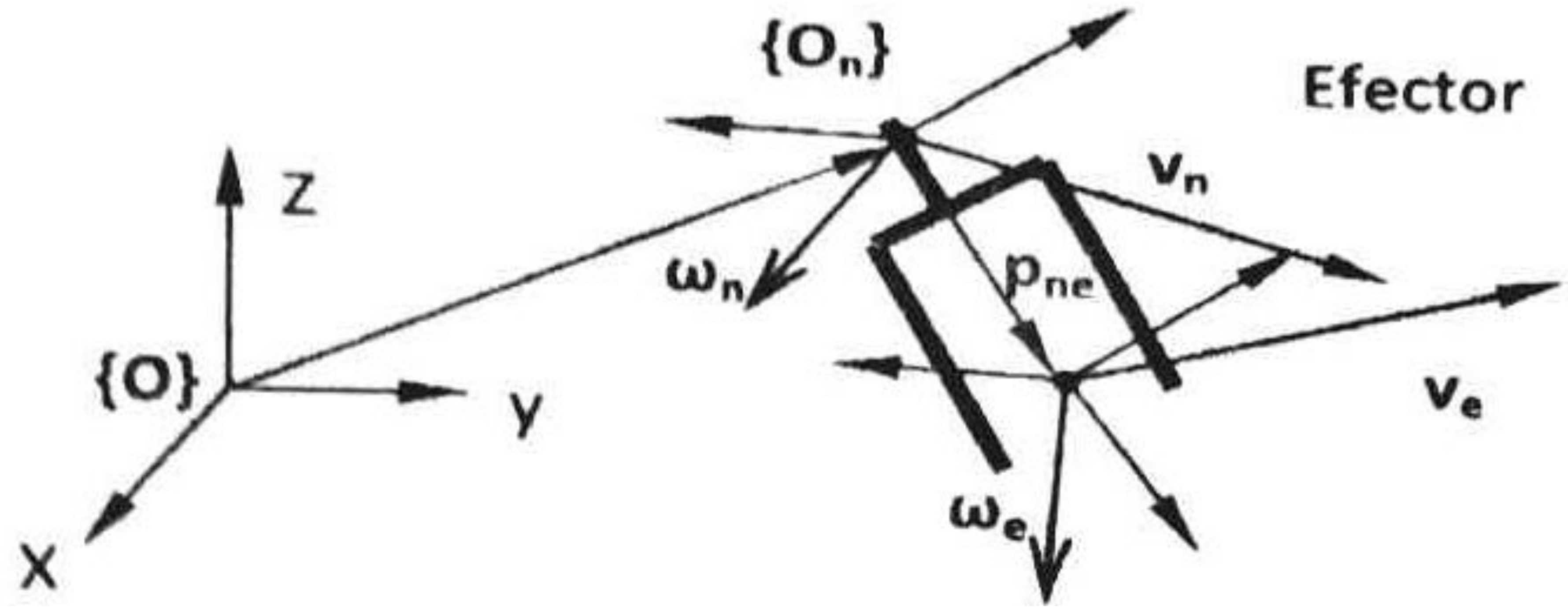
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{P_3} \\ \boldsymbol{\omega}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{v}_{P_3,x} \\ {}^0\mathbf{v}_{P_3,y} \\ {}^0\mathbf{v}_{P_3,z} \\ {}^0\boldsymbol{\omega}_{3.x} \\ {}^0\boldsymbol{\omega}_{3,y} \\ {}^0\boldsymbol{\omega}_{3,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1+\theta_2)) & -l_2 \sin(\theta_1+\theta_2) & 0 \\ l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1+\theta_2) & l_2 \cos(\theta_1+\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{J}_o \cdot \dot{\mathbf{q}}$$

Observație:

În acest caz Jacobianul a fost calculat în cupla *n* şi nu în sistemul efectorului. Pentru a trece de la cupla *n* la sistemul efectorului este necesară utilizarea unor transformări suplimentare:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_e = \mathbf{v}_n + \boldsymbol{\omega}_n \times \mathbf{p}_{ne} \\ \boldsymbol{\omega}_e = \boldsymbol{\omega}_n \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{v}_e \\ \boldsymbol{\omega}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -\tilde{\mathbf{p}}_{ne} \\ 0 & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}_n \\ \boldsymbol{\omega}_n \end{bmatrix}$$

unde $\boldsymbol{p}_{ne}$ este vectorul de poziție a prehensorului **{e}** în reperul **n.**


{On}
Efector
Z
vn
ωn
pne
{O}
Y
ve
X
ωe

Relația dintre cei 2 Jacobieni de bază este:

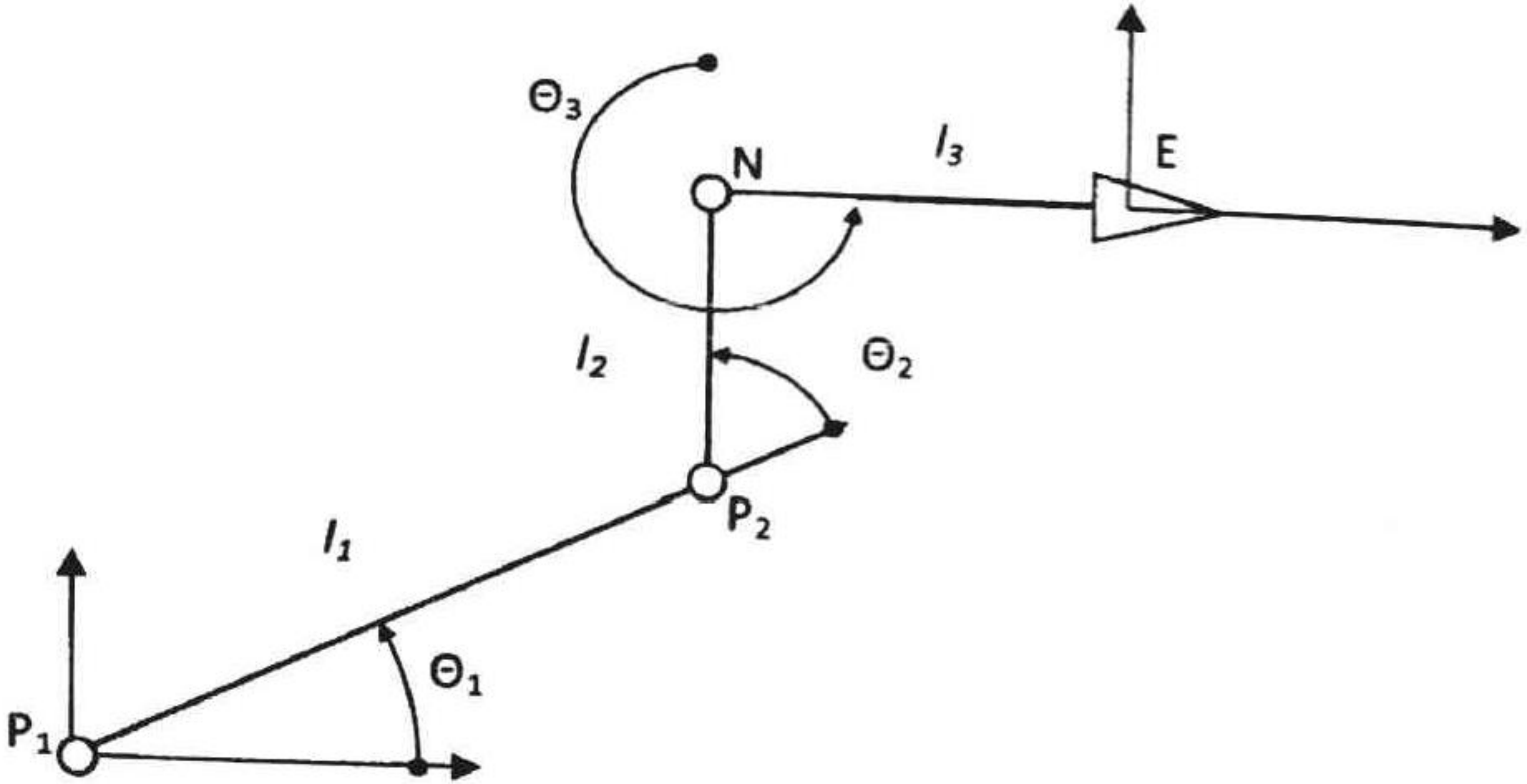
$$\mathbf{J}_e = \begin{bmatrix} I & -\tilde{p}_{ne} \\ 0 & I \end{bmatrix} \cdot \mathbf{J}_n$$

unde

$${}^{0}\tilde{\mathbf{p}} = {}^{0}_{n}\mathbf{R} \cdot {}^{0}\tilde{\mathbf{p}} \cdot {}^{0}_{n}\mathbf{R}$$

Exemplu (continuare)

Considerăm exemplul precedent la care se adaugă prehensorul:



Exemplu (continuare)

Jacobianul de bază are forma

$$
{}^{0}\mathbf{J}_n = \begin{bmatrix} -(l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1+\theta_2)) & -l_2 \sin(\theta_1+\theta_2) & 0 \\ l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1+\theta_2) & l_2 \cos(\theta_1+\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

Exemplu

Vectorul de poziție al prehensorului scris relativ la bază

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{P_3} \\ \boldsymbol{\omega}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{v}_{P_3,x} \\ {}^0\mathbf{v}_{P_3,y} \\ {}^0\mathbf{v}_{P_3,z} \\ {}^0\boldsymbol{\omega}_{3.x} \\ {}^0\boldsymbol{\omega}_{3,y} \\ {}^0\boldsymbol{\omega}_{3,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1+\theta_2)) & -l_2 \sin(\theta_1+\theta_2) & 0 \\ l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1+\theta_2) & l_2 \cos(\theta_1+\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{J}_o \cdot \dot{\mathbf{q}}$$

Exemplu

Vectorul de poziție al prehensorului scris relativ la bază

$$
{}^{0}\mathbf{p}_{ne} = \begin{bmatrix} l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ -l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{0}\tilde{\mathbf{p}}_{ne} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ 0 & 0 & -l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 \end{bmatrix}
$$

Exemplu

Aplicînd formula de determinare a Jacobianului $\mathbf{J}_e = \begin{bmatrix} I & -\tilde{p}_{ne} \\ 0 & I \end{bmatrix} \cdot \mathbf{J}_n$

$$
{}^0\mathbf{J}_e = \begin{bmatrix}
-(l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)) & -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\
l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1
\end{bmatrix}
$$