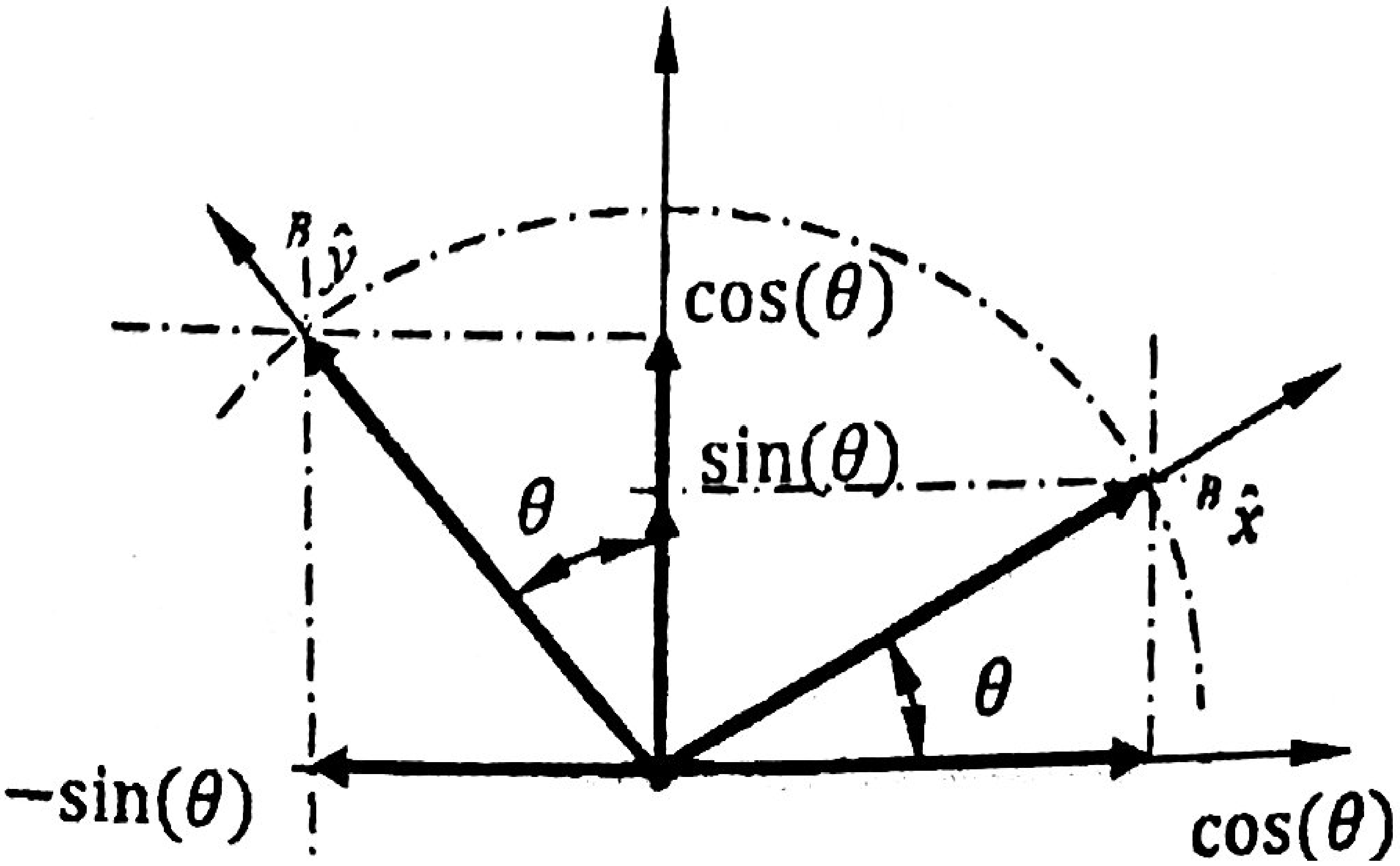
Miscare rigidului și transformări omogene. Matrici diagonal antisimetrice



$^B\hat{y}$
$\cos(\theta)$
{B}
$\sin(\theta)$
θ
$^B\hat{x}$
θ
{A}
$-\sin(\theta)$
$\cos(\theta)$

Matrice de transformare pentru 2D

- Orientarea lui **B** faţă de **A** se poate modela cu ajutorul unei matrici (operatorul) de rotaţie notată

$$ {}^{A}_{B}R $$

simbol care poate fi citit sub forma *rotaţia de la **B** la **A**.*

$$ {}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} $$

- Ortogonalitatea matricei de rotație implică următoarele două proprietăți:

- Determinantul matricei este egal cu unu

$$\det({}^{A}_{B}R) = 1$$

- Transformarea inversă este transpusa transformării

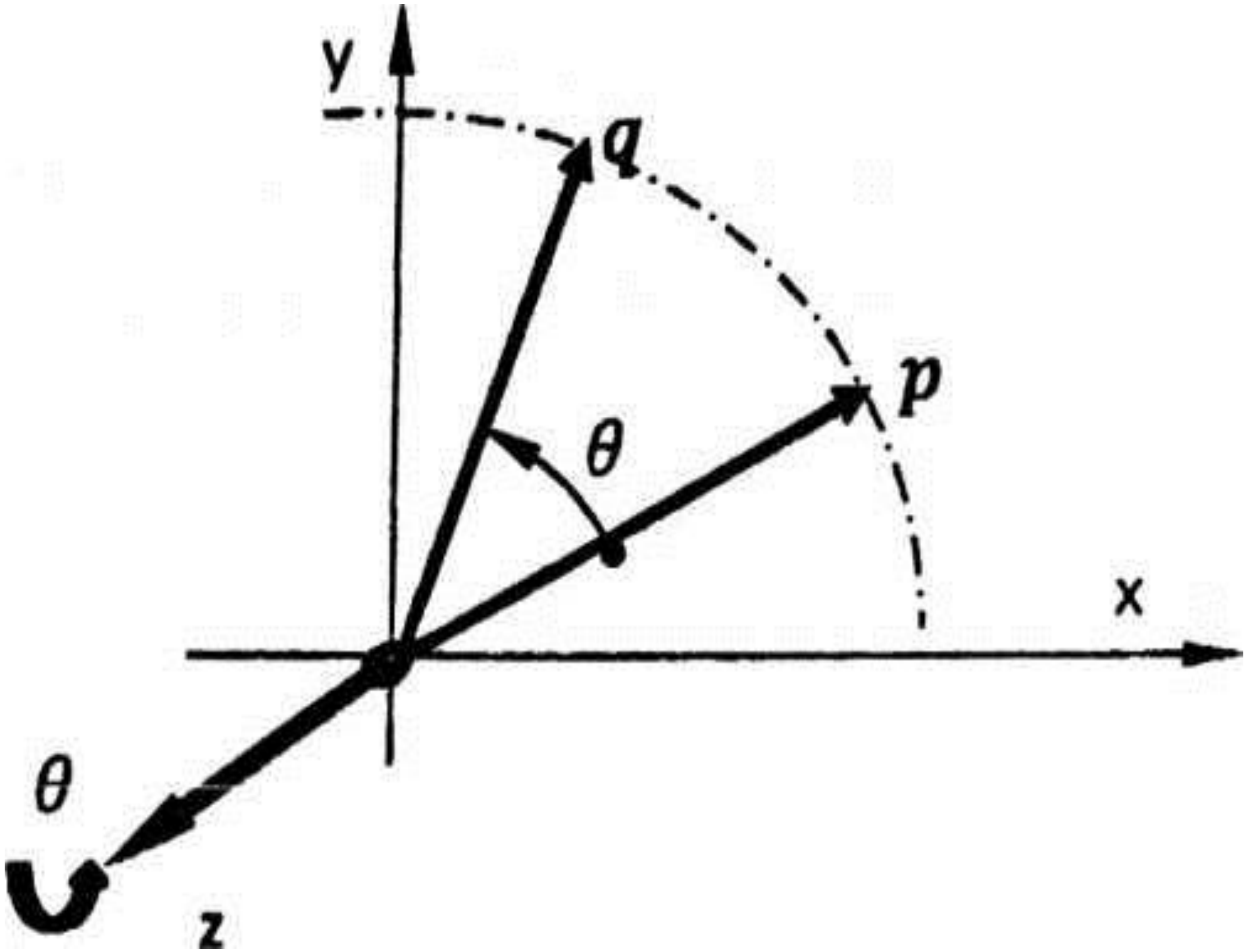
$${}^{B}_{A}R = {}^{A}_{B}R^{-1} = {}^{A}_{B}R^{T}$$

Matricea de rotație poate fi utilizată prin mecanismul de compunere menţionat la transformarea unui vector oarecare:

$$^{A}p = {}^{A}_{B}R \; {}^{B}p$$

Matricea de rotație conduce la al doilea mod de utilizare al relaţiei, cel care a dat numele transformării, rotaţia unui vector oarecare. De această dată sistemul de referinţă vizavi de care se exprimă vectorul este acelaşi. Avem:

$$q = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} p$$



y
q
p
θ
x
θ
z

Rezultatele anterioare pot fi sistematizate în următoarele concluzii:

- Operatorul de transformare 2D este o matrice 2x2 a cărei coloane sunt transformatele versorilor sistemului transformat;
- Elementele matricei de transformare sunt cosinusurile directoare ale axelor sistemului transformat faţă de axele sistemului în care se face transformarea;
- Operatorul de transformare este, în fapt, o matrice de rotaţie în jurul axei perpendiculare (aici a) pe cele două direcţii ale sistemelor de coordonate;
- Matricea este ortogonală, pentru care inversa este egală cu transpusa;

Transformari 3D cu origini comune

Utilizăm repere 3D drepte adică acelea care respectă regula miini drepte adica:

$$\hat{z} = \hat{x} \times \hat{y};\ \ \hat{x} = \hat{y} \times \hat{z};\ \ \hat{y} = \hat{z} \times \hat{x}.$$

Rezultatele precedente pot fi generalizate:

- In 3D există trei tipuri de rotaţii elementare(primitive) pe cele trei direcţii;
- Operatorii de transformare sunt matrice 3x3 a căror coloane sunt transformatele versorilor sistemului transformat;

Transformari 3D cu origini comune

- Elementele metricelor de transformare sunt cosinusurile directoare ale axelor sistemelor transformate, faţă de axele sistemelor în care se face transformarea;
- Primitivele sunt matrice de rotaţie în jurul axelor ***x, y,*** **z**;
- Matricele menţionate sunt ortogonale, adică au inversa egală cu transpusa.

Transformari 3D cu origini comune

- In conformitate cu generalizările facute, operatorul de rotație este o matrice 3x3 de tipul

$$ {}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{32} \end{bmatrix} $$

sau

$$ {}^{A}_{B}R = [\, {}^{A}_{B}\hat{x};\, {}^{A}_{B}\hat{y};\, {}^{A}_{B}\hat{z}] $$

- Matricea de rotatie pe axa z:

$$R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matricea de rotatie pe axa y:

$$R_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$$

- Matricea de rotatie pe axa x:

$$R_x(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}$$

Transformari 3D cu origini comune

Descrierea primitivelor este urmată, conform mecanismului PCAP, de analiza posibilităţilor de compunere. Ne putem imagina de exemplu rotaţia sistemului {C} în jurul unei axei urmată de rotaţia noului sistem {B} în jurul altei axe. Poate fi descris matematic prin operatorul

$$ {}^{A}_{C}R = {}^{A}_{B}R \, {}^{B}_{C}R $$

Generalizarea compunerii rotațiilor

$$ {}_{n}^{0}R = \prod_{k=0}^{n-1} {}_{k+1}^{k}R $$

unde

$$ {}_{k+1}^{k}R $$

este una din rotațiile elementare menționate sau o rotație compusă din rotații elementare.

Observaţie referitoare la ne-comutativitatea rotaţiilor. Deoarece, în general, produsul a două matrice este necomutativ, ordinea de compunere conduce la rezultate distincte, asupra cărora succesiunea de indici (A-B-B-C şi nu B-C-A-B) atrage atenţia (identificarea paternului):

Ceea ce este remarcabil, vizavi de problema compunerii, este faptul că orice rotaţie poate fi descompusa in trei rotaţii elementare. Aceste trei rotaţii pot fi realizate în mai multe moduri dintre care menţionăm următoarele două:

- Unghiuri fixe: atunci când cele 3 rotaţii se definesc vizavi de reperul iniţial;
- Unghiurile lui Euler: atunci când cele 3 rotaţii se definesc vizavi de reperul curent (rotit anterior).

De exemplu unghiurile lui Euler în succesiunea ***ZYX*** permit obţinerea oricărei orientări. Relaţia calculează transformarea dintre reperele {A} şi {B}.

$$ {}^{A}_{B}R = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_x(\gamma) $$

$$=$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Cos}[\alpha]\,\mathrm{Cos}[\beta] & -\mathrm{Cos}[\gamma]\,\mathrm{Sin}[\alpha]+\mathrm{Cos}[\alpha]\,\mathrm{Sin}[\beta]\,\mathrm{Sin}[\gamma] & \mathrm{Cos}[\alpha]\,\mathrm{Cos}[\gamma]\,\mathrm{Sin}[\beta]+\mathrm{Sin}[\alpha]\,\mathrm{Sin}[\gamma] \\ \mathrm{Cos}[\beta]\,\mathrm{Sin}[\alpha] & \mathrm{Cos}[\alpha]\,\mathrm{Cos}[\gamma]+\mathrm{Sin}[\alpha]\,\mathrm{Sin}[\beta]\,\mathrm{Sin}[\gamma] & \mathrm{Cos}[\gamma]\,\mathrm{Sin}[\alpha]\,\mathrm{Sin}[\beta]-\mathrm{Cos}[\alpha]\,\mathrm{Sin}[\gamma] \\ -\mathrm{Sin}[\beta] & \mathrm{Cos}[\beta]\,\mathrm{Sin}[\gamma] & \mathrm{Cos}[\beta]\,\mathrm{Cos}[\gamma] \end{pmatrix}$$

Dacă însă utilizăm succesiunea ***ZYZ*** (tot de tipul Euler) se obţine relaţia:

$$ {}^{A}_{B}R = R_z(\alpha) R_y(\beta) R_z(\gamma) $$

$$ = $$

$$ \begin{pmatrix} \text{Cos}[\alpha]\,\text{Cos}[\beta]\,\text{Cos}[\gamma] - \text{Sin}[\alpha]\,\text{Sin}[\gamma] & -\text{Cos}[\gamma]\,\text{Sin}[\alpha] - \text{Cos}[\alpha]\,\text{Cos}[\beta]\,\text{Sin}[\gamma] & \text{Cos}[\alpha]\,\text{Sin}[\beta] \\ \text{Cos}[\beta]\,\text{Cos}[\gamma]\,\text{Sin}[\alpha] + \text{Cos}[\alpha]\,\text{Sin}[\gamma] & \text{Cos}[\alpha]\,\text{Cos}[\gamma] - \text{Cos}[\beta]\,\text{Sin}[\alpha]\,\text{Sin}[\gamma] & \text{Sin}[\alpha]\,\text{Sin}[\beta] \\ -\text{Cos}[\gamma]\,\text{Sin}[\beta] & \text{Sin}[\beta]\,\text{Sin}[\gamma] & \text{Cos}[\beta] \end{pmatrix} $$

Atunci când cunoaştem orientarea reperului {B} faţă de reperul {A}, adică coeficienţii matricei de transformare de la {B} la {A}: r_{11}... r_{33} şi dorim să determinăm unghiurile lui Euler, adică succesiunea de rotaţii care conduc de la reperul {A} la reperul {B} putem utiliza ecuaţiile:

$$ {}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{32} \end{bmatrix} $$

$$\alpha = \mathrm{a}\tan 2(r_{21}, r_{11})$$

$$\beta = \mathrm{a}\tan 2(-r_{31}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2})$$

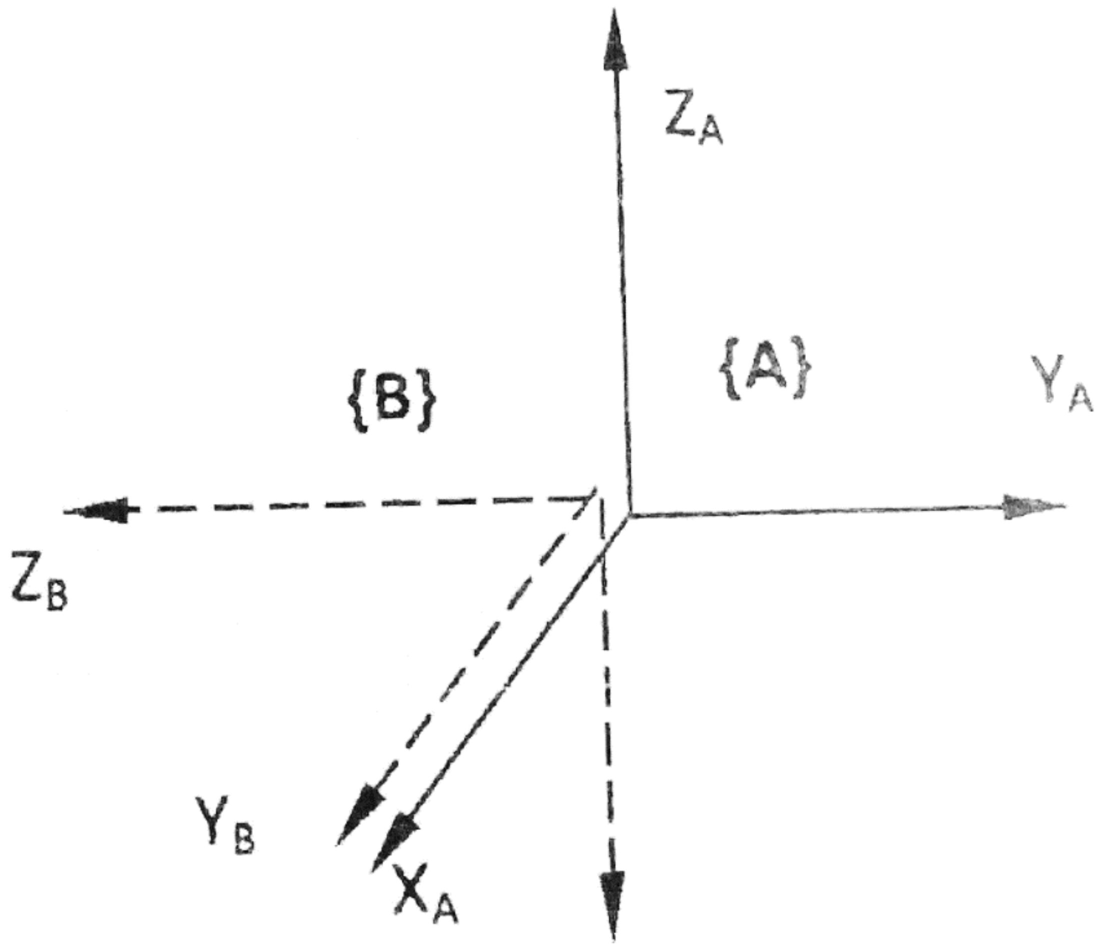
$$\gamma = \mathrm{a}\tan 2(r_{32}, r_{33})$$

$$\operatorname{atan2}(y,x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{if } x > 0, \\ \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{x}{y}\right) & \text{if } y > 0, \\ -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{x}{y}\right) & \text{if } y < 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \pm \pi & \text{if } x < 0, \\ \text{undefined} & \text{if } x = 0 \text{ and } y = 0 \end{cases}$$

Compunerea rotaţiilor conservă următoarele proprietăţi

- Operatorii de transformare sunt matrice 3x3 a căror coloane sunt transformatele versorilor sistemului transformat;
- Elementele matricelor de transformare sunt cosinusurile directoare ale axelor sistemelor transformate faţă de axele sistemelor în care se face transformarea;
- Matricele menţionate sunt ortogonale, adică au inversa egală cu transpusa.

Fiind date cele 2 repere {A} și {B} se scriu următoarele transformări:



Reperul {B} rotit față de {A}

$$
{}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad {}^{B}_{A}R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}
$$