

Systeme optimale

Principii de optimizare

Problemă tipică de inginerie: este un **proces** care poate fi reprezentat de un **model matematic**. Este dat, de asemenea, un criteriu de performanță, cum ar fi costul minim.

Scopul optimizării este de a găsi valorile variabilelor din proces care satisfac cel mai bine criteriul de performanță.

Două componente procesului de optimizare:

- (i) *proces sau model*
- (ii) *criteriul de performanță*

Criterii tipice de performanță:

- profit maximum
- cost minimum
- minimum efort
- eroarea minimă
- deșeuri minime
- debit maxim
- cea mai bună calitate a produsului

Unde criteriul de performanță se exprimă printr-un **model matematic**.

Optimizarea statică: variabilele au valori numerice fixate în funcție de timp.

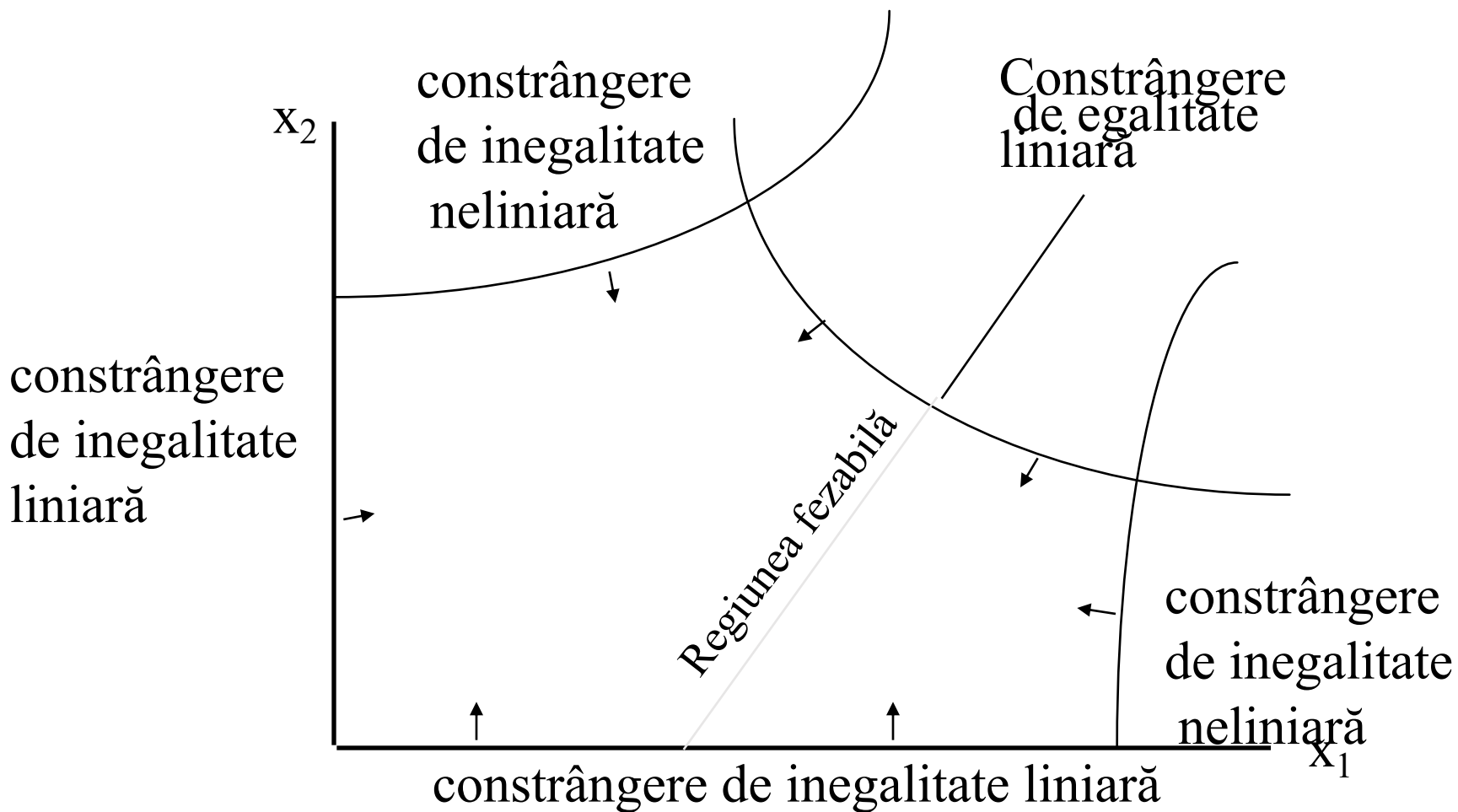
Optimizarea dinamică: variabile sunt funcții de timp.

Caracteristici esențiale

Fiecare problemă de optimizare conține trei elemente esențiale:

1. Cel puțin o funcție obiectiv (criteriu de performanță), care trebuie să fie optimizată.
2. Constrângeri de egalitate.
3. Constrângeri de inegalitate.

Printr-o soluție fezabilă înțelegem un set de variabile care satisfac categoriile 2 și 3. Regiunea soluțiilor fezabile se numește *regiunea fezabilă*.



O soluție optimă este un set de valori ale variabilelor care se conțin în regiunea fezabilă și oferă, de asemenea, cea mai bună valoare a funcției obiectiv din categoria 1.

Pentru soluționare problemei de optimizare, modelul trebuie să fie determinat.

Conducerea optimală

- Conducerea optimală este cea mai convenabilă conducere din punct de vedere tehnico-economic dintr-o mulțime de conduceri posibile.
- Determinarea și realizare a soluțiilor optime este o problemă fundamentală în automatică și în alte domenii.
- Optimizarea sistemelor automate are atât aspecte teoretice vaste cât și importante aspecte aplicative.

Conducerea optimală

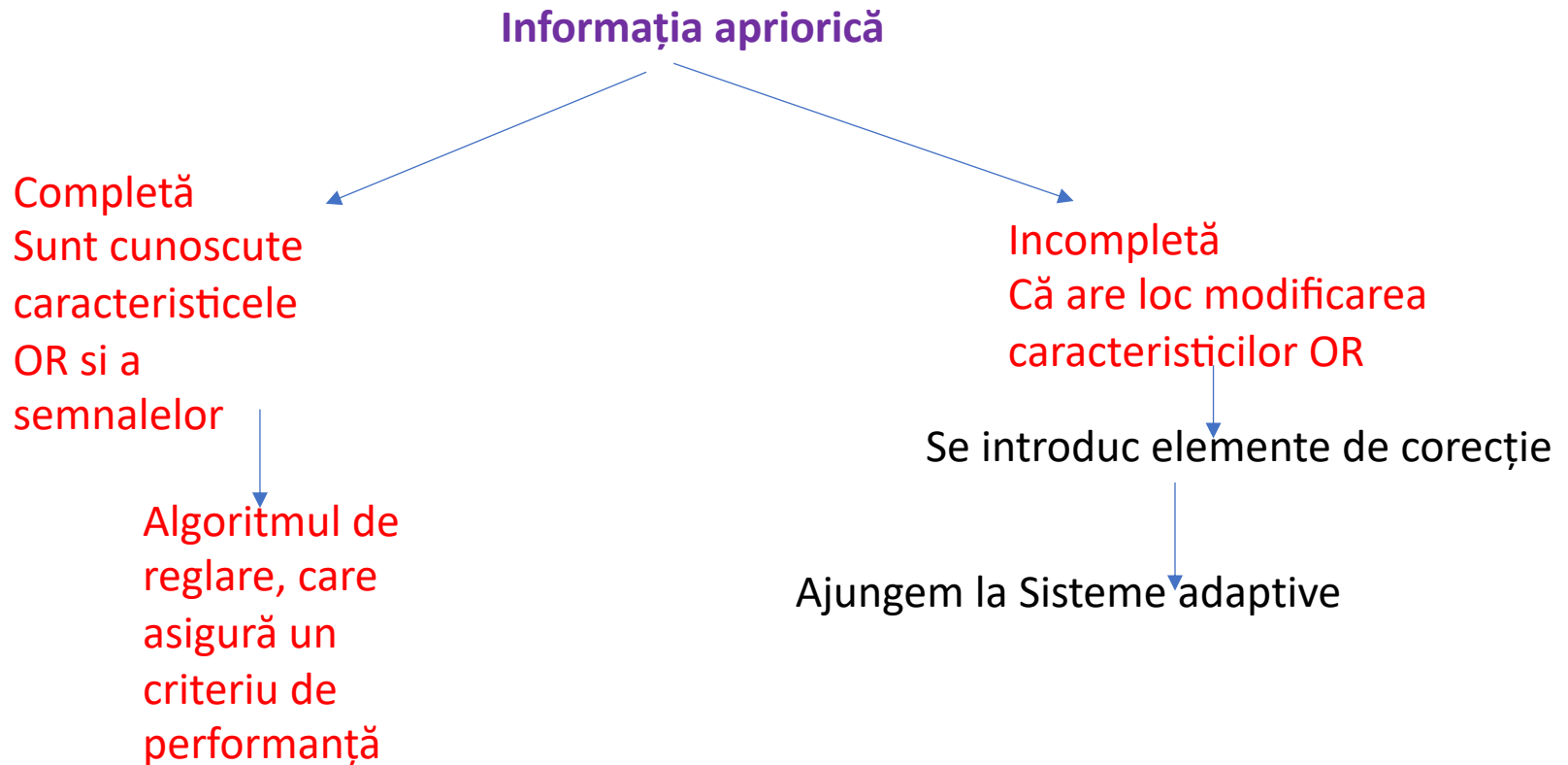
- **Conducerea optimală** este o abordare a proiectării sistemelor de control, unde este realizat cel mai bun control posibil din punct de vedere în ceea ce privește o măsură de performanță.
- Teoria controlului optim a început să se dezvolte în anii celui de-al doilea război mondial. Rezultatul principal al acestei perioade a fost teoria **Wiener-Kolmogorov** care abordează sistemele SISO liniare cu zgomot gaussian.
- Cele mai multe teorii au început să dezvolte în anii 50 și 60:
 - În 1957 Bellman publică cartea Programarea Dinamică
 - În 1960 Kalman publică generalizarea multivariabilă a lui Wiener-Kolmogorov.
 - În 1962 Pontryagin publică principiul maximului.
 - În 1965 Isaacs publică cartea despre jocuri diferențiale.

Conducerea optimală

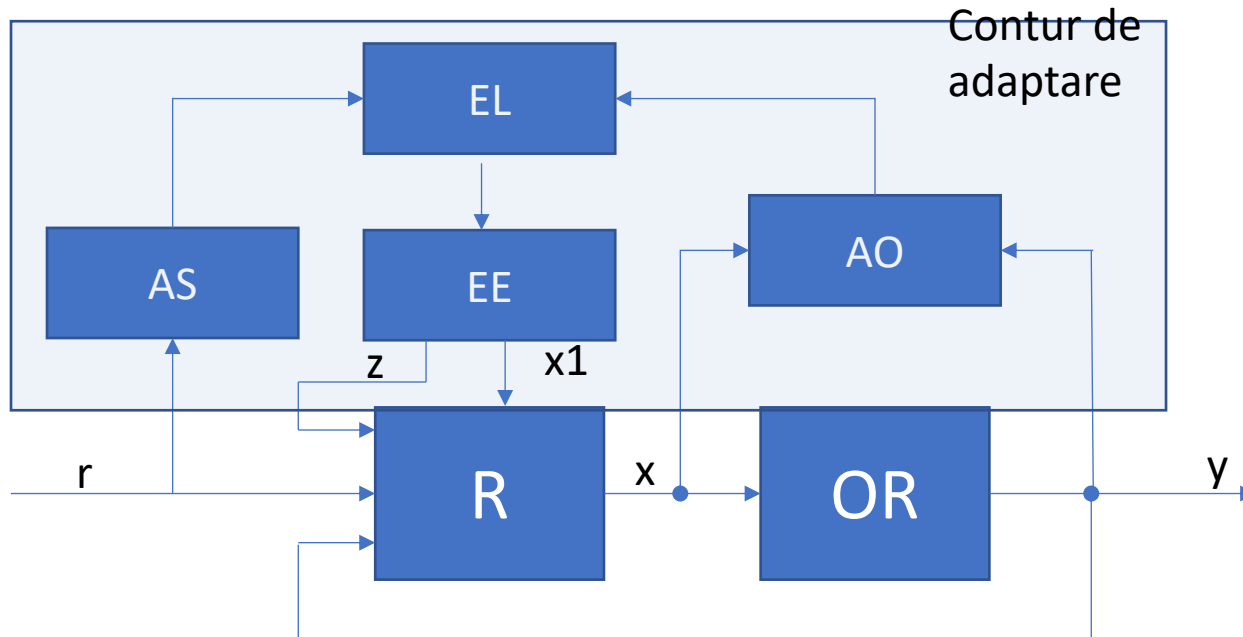
- Optimizarea SA implică rezolvarea succesivă a mai multor clase de probleme:
- 1. Se formulează scopul optimizării. Scopul se formulează matematic prin stabilirea expresiei unui criteriu, **funcției de cost**.
- 2. În calculul soluției trebuie să fie luate în considerare restricțiile la care sunt supuse elemente componente ale SA. Existența restricțiilor determină în mare măsură apariția problemei de optimizare.
- 3. În **baza criteriului** și **limitărilor impuse** trebuie elaborată și realizată soluția care asigură optimizarea și se obțin cele mai bune performante.

Conducerea optimală

- Datele inițiale referitoare la obiect și semnale exterioare formează informația apriorică referitoare la sistem:



Sistem adaptiv



R- regulator
OR-obiect de reglare
AO- analizator obiectului de reglare
El- element logic de adaptare
AS- analizator semnalelor de intrare
EE- element de execuție

Formularea problemei de optimizare

- În formularea problemei de optimizare automat intervine o serie de date, informații legături, restricții, condiții, care se numesc **elementele problemei**.
- **Elementele de bază:**
 - 1. Sistem dinamic prezentat prin model matematic S .
 - 2. Condiții inițiale I .
 - 3. Condiții finale F .
 - 4. Mulțimea mărimilor de intrare admise (restricții U).
 - 5. Limitările asupra variabilelor de stare R .
 - 6. Criteriul de optimizare/ de performanță/funcția de cost Q .
- Traiectorie optimală

Formularea problemei de optimizare

- În afară de elemente de bază sunt și cele **secundare** ca:
- 1. Restricții și legături funcționale.
- 2. Condiții parametrice.
- 3. Restricții diferențiale.

Formularea problemei

- Constă prin faptul că sistemul dinamic se prezintă printr-o descriere matematică adecvată, prin ecuația diferențială, sau funcția de transfer, funcția frecvențială.
- O largă răspândire au modele ISE – intrare-stare-ieșire:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) \\ y(t) &= f(x(t), u(t), t)\end{aligned}$$

Formularea problemei

- O largă răspândire au modele ISE – intrare-stare-ieșire:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) \\ y(t) &= g(x(t), u(t), t)\end{aligned}$$

Pe lângă această sunt fixate și **condiții inițiale**.

Ce reprezintă starea inițială a sistemului X_0 la moment de timp inițial t_0 .

Formularea problemei

- Condiții inițiale **/**:
 - **1. Pot fi fixate într-un punct al spațiului X .**
 - **2. Poate fi liberă pe o submulțime $x_0 \in X$.**
 - **3. Momentul inițial poate fi fixat la o valoare dată t_0 .**

Formularea problemei

- Condiții finale **F** :
- Ca și cu starea inițială, condiții inițiale sunt compuse din starea finală $x \in X$, în momentul final de timp $t_1 \in T$ ($t_1 > t_0$).
- **1. Pot fi fixate într-un punct al spațiului X .**
- **2. Poate fi liberă pe o submulțime $x \in X$.**
- **3. Poate fi complet liberă pe X .**
- **4. Momentul final poate fi fixat la o anumită valoare dată t_1 .**

Formularea problemei

- **Restricții asupra mărimilor de intrare U :**
- Se consideră că mărimile de intrare reprezintă un vector semnalelor de intrare

$$U=(u1(t), u2(t),...un(t)),$$

- și sunt admise dacă satisfac restricțiile din domeniul U , care se va preciza și asigura mișcarea sistemului S din condiții inițiale I în condiții finale F .

Formularea problemei

- **Restricții impuse asupra variabilelor de stare R :**
- Variabilele de stare pot fi impuse la restricții sau nu reieșind din specificul problemei.

Criteriu de optimizare

- Dacă sunt cunoscute:
 - - modelul matematic de descriere a sistemului S .
 - - condiții inițiale I .
 - - condiții finale F .
 - - restricții asupra vectorului de stare R .
 - - restricții asupra vectorului de semnalelor de intrare U .

Se determină o familie de traiectorii:

$$F = \{S, I, F, U, R\}$$

*Care se numesc **traiectorii admise**.*

Criteriu de optimizare

Se determină o familie de traiectorii:

$$F = \{S, I, F, U, R\}$$

*Care se numesc **traiectorii admise**.*

- *Mulțimea traiectoriilor admise F este generată pe mulțimea comenzilor admise U , cu respectarea condițiilor S, I, F, R .*

Fiecărei traiectoriei din mulțimea F i se poate atașa un număr determinist, un indicator sau index cumulativ de performanță Q .

Criteriu de optimizare

În general index de performanță Q are formă:

$$I_0 = \int_{t_0}^{t_1} L_0(x(t), u(t), t) dt + \mu_0(x_0, t_0, x_1, t_1)$$

Unde:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

$x \in R^n$ - *vector de stare*

$u \in R^m$ - *vector de control*

$t \in [t_0, t_1]$ - *timpul*

Criteriu de optimizare

În general index de performanță Q are formă:

$$I_0 = \int_{t_0}^{t_1} L_0(x(t), u(t), t) dt + \mu_0(x_0, t_0, x_1, t_1)$$

Constrângeri fizice:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

$u \in U$ – U - setul de semnale de control admisibile

$x \in X$ – setul de traiectorii de stare admisibile

t_0 – timp inițial

t_1 – timp final

Criteriu de optimizare

- Dacă I_0 este index de performanță admisibil pe mulțime de comenzi ce admit unul sau mai multe extreme, atunci se poate formula problema de optimizare, adică determinarea comenzii $u(t) \in U$, care extrimează indice de performanță I_0 :
 - $\min_{u \in U} I_0 \rightarrow u^*$ and x^* - **controlul optimal și**
traectoria optimală

Criteriu de optimizare

În general index de performanță Q are formă:

$$I_0 = \int_{t_0}^{t_1} L_0(x(t), u(t), t) dt + \mu_0(x_0, t_0, x_1, t_1)$$

Prin particularitățile funcțiilor $L_0(\cdot)$ și $\mu_0(\cdot)$ se obțin diverse criterii și probleme de optimizare:

1. Problema de tip Lagrange $L_0(\cdot) \neq 0$ și $\mu_0(\cdot) = 0$
2. Problema de tip Mayer $L_0(\cdot) = 0$ și $\mu_0(\cdot) \neq 0$
3. Problema de tip Bolza $L_0(\cdot) \neq 0$ și $\mu_0(\cdot) \neq 0$

Control cu bucla deschisă/închisă

- Dacă este data o singură stare inițială x_0 și se caută controlul optimal $u(t)$, care îl duce sistemul din starea inițială în starea finală și avem control în bucla deschisă.
- Dacă se caută controlul optimal în funcție de starea sistemului avem controlul în bucla închisă.

Formularea problemei de optimizare

- Elemente de bază ca
 - $F = \{S, I, F, U, R\}$
- Permit să formuleze o mare varietate de probleme de optimizare.
- Perechea vectorilor de stare și timp $(x(t), t)$ formează o traiectorie în sens restrâns, dacă elementele lui x și t sunt componentele ale unei traiectorii în sens larg.

Formularea problemei de optimizare

- Fie că avem o mulțime de traiectorii admisibile criteriului de performanță Q și se marchează fiecare traiectorie admisă cu I_0 care depinde de comanda U pe intervalul $[t_0, t_1]$

$$I_0 = I_0(u(t)) \quad (1)$$

Printr-o alegere corespunzătoare a criteriului de performanță, funcția (1) admite cel puțin un *max* sau un *min* pe mulțimea U .

Formularea problemei de optimizare

- Astfel, în cazul problemei de optimizare în **minim** se cere ca să se determine comandă optimă U^* pentru care

$$I_0^* = I_0^*(u^*) \leq I_0(u), \forall u \in U \quad (2)$$

Iar în problema de optimizare de **maxim** se cere intrare optimă pentru care

$$I_0^* = I_0^*(u^*) \geq I_0(u), \forall u \in U \quad (3)$$

Formularea problemei de optimizare

Formulele (2) și (3) precizează faptul că în general soluția unei probleme de optimizare este dată de extremul absolut sau global al I_0 .

Metode uzuale de rezolvare a problemei variaționale conduc de regulă la extreme locale pentru care se caută apoi extremul absolut (min sau max). Aceasta constituie soluția optimală.

Formularea problemei de optimizare

Dacă $u^*(t)$ este o comandă extremală (locală sau globală), atunci traiectoria $(x^*(t), u^*(t), t)$ corespunde acestei comenzi și se va numi **traiectorie extremală**.

Formularea problemei de optimizare

În funcție de cerințele problemei de optimizare valoarea optimă $\mathbf{u}^*(t)$ se poate obține în una din următoarele forme:

1. Ca funcția vector de timp $\mathbf{u}^*(t)$ și aceasta constituie comanda optimă.

Traectoria $(\mathbf{x}(t), t)$ corespunde comenzii optime $\mathbf{u}^*(t)$ și se numește traectoria optimă și se înseamnă $(\mathbf{x}^*(t), t)$.

Formularea problemei de optimizare

În funcție de cerințele problemei de optimizare valoarea optimă $\mathbf{u}^*(t)$ se poate obține în una din următoarele forme:

2. Ca funcția vector de variabile de stare $\mathbf{x}(t)$, sau mărimile de ieșire $\mathbf{y}$ care corespunde traiectoriei optime $\mathbf{u}^*(t) = \mathbf{V}^*(\mathbf{x}^*(t), t) = \boldsymbol{\omega}^*(\mathbf{y}^*(t), t)$ și atunci avem problema de **comandă optimală** în circuit închis.

Funcțiile $\mathbf{V}$ și $\boldsymbol{\omega}$ determină în acest caz condiții optime după variabile de stare și respectiv mărimea de ieșire.

Problema dată se numește **optimizarea automată**.

Formularea problemei de optimizare

- În orice problema de optimizare se cere de a determina comanda în circuit deschis $u^*(t)$, sau conducerea în circuit închis V^* sau respectiv ω^* , pentru orice moment de timp $t \in [t_0, t_1]$, care transportă sistemul S din condiții inițiale în condiții finale F , astfel încât să fie satisfăcute restricții R , iar index de performanță Q să ia valoarea în **min** sau **max**, în condiții de restricții U asupra intrărilor.

Formularea problemei de optimizare

- Din aceasta formulare rezultă că S, I, F, R formează structura rigidă (hardul) problemei de optimizare, iar restricțiile U asupra intrărilor reprezintă elementul mobil, sau variabila care determină câmpul de testare.

Criteriul de optimizare

- Criteriul de optimizare/de performanță se exprimă printr-o formă matematică funcțională de formă:

$$Q = Q(x_p, y, u, x, p, t) = \textit{extrem} \quad (4)$$

Unde x_p - mărimea de intrare

y – mărimea de ieșire

u – mărimea de comandă

x – vector de stare

p – perturbație

t – timp

Relația (4) se prezintă ca:

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} F(x, u) dt = \min$$

Metode de construirea sistemelor optimale

- Pentru construirea sistemelor optimale o largă utilizare au:
- 1. Metode clasice variaționale.
- 2. Principiul maximului (principiul lui Pontryagin).
- 3. Metode programării dinamice.
- 4. Metode analitice de construire a reguletoarelor.

Metode clasice variaționale

- Calculul variațional are ca scop generalizarea construcțiilor analizei clasice, pentru rezolvarea problemelor de extremum în spații funcționale (extreme de funcții cu o infinitate de variabile).

Formularea problemelor clasice de calcul variațional

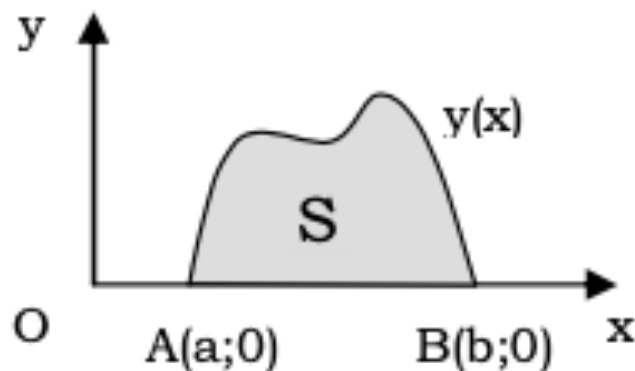
- Problema lui Dido
- Problema brahistocronei
- Problema lui Kepler
- Problema echilibrului mecanic al grinzii încastate la capete
- Problema echilibrului unei membrane elastice deformate
- Problema de minimizare a timpului de tranzit al unui râu
- Problema oscilațiilor pendulului simplu
- Problema lui Chaplygin
- Problema izoperimetrică

Problema lui Dido

- Din punct de vedere istoric este prima problemă de calcul variațional.
- Este cunoscută datorită unei legende redată de poetul latin Vergilius în epopeea în versuri Aeneis ("Eneida"). Legenda întemeierii orașului antic Cartagina ne relatează cum că prințesa feniciană Elisa (cunoscută la romani sub numele de Dido), sora regelui Pygmalion al orașului Tyr, ca urmare a unor conflicte cu aristocrația a fost nevoită să părăsească orașul, retrăgându-se din calea fratelui său însetat de putere, a traversat Marea Mediterană și a acostat în regiunea țărmului nord-african. Căpetenia tribului băștinaș i- a făgăduit atât pământ cât va putea să cuprindă cu o piele de vițel. Dido a tăiat pielea în fâșii înguste, le-a legat cap la cap, iar cu firul (funia) obținut a putut marca un teritoriu destul de vast lângă țărm. Pe teritoriul marcat a apărut cetățuia Byrsa, în jurul căreia s- a dezvoltat mai târziu orașul Cartagina.

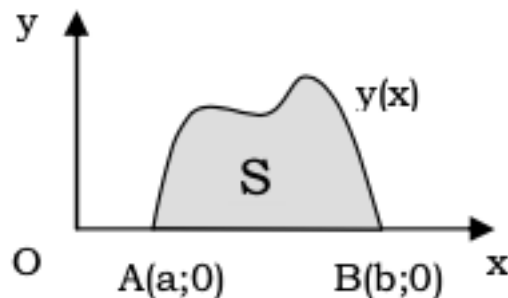
Problema lui Dido

- Conținutul matematic al legendei poate fi formulat astfel: *cum trebuie de amplasat firul în raport cu țărmul mării pentru ca el să delimiteze un lot de pământ cu o suprafață maxim admisibilă, adică problema constă în a determina curba din plan de lungime fixă l (l - lungimea funiei), care mărginește o figură de arie maximă.*

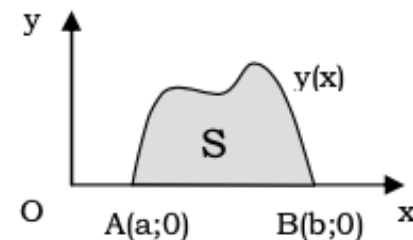


Problema lui Dido

- Să presupunem că pe porțiunea analizată țărmul mării are forma unei drepte și considerăm sistemul de coordonate cartezian xOy , astfel încât axa Ox să reprezinte țărmul mării.
- Fie punctele $A(a;0), B(b;0)$ reprezintă capetele firului, iar poziția firului este descrisă de graficul funcției netede $y = y(x)$, $x \in [a;b]$



Problema lui Dido



- Întrucât capetele $x = a$ și $x = b$ ale firului sunt fixate, avem

$$y(a) = y(b) = 0. \quad (1)$$

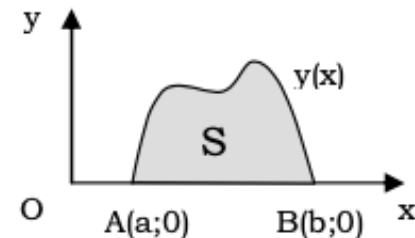
Lungimea / a firului se calculează conform formulei

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx \quad (2)$$

iar aria lotului limitat de fir conform formulei:

$$S[y(x)] = \int_a^b y(x) dx \quad (3)$$

Problema lui Dido



- Problema se reduce la determinarea funcției netede $y = y(x)$, care satisface condițiile (1), (2) și-i asigură integralei (3) valoarea maximă.
- Din motive evidente problema lui Dido se numește problemă **izoperimetrică**. Forma căutată a firului este cea a unui arc de cerc.

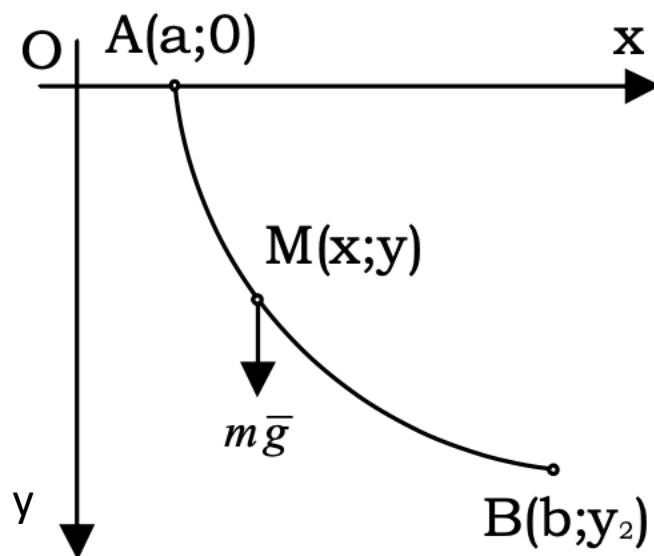
Problema brahistocronei (curba celei mai rapide descendențe sub acțiunea forței gravitaționale)

- Cu toate că probleme de calcul variațional au fost formulate și rezolvate încă în antichitate, drept moment al apariției calculului variațional ca disciplină matematică se consideră anul 1696 când în revista „**Acta Eruditorum**” a apărut scrisoarea lui Johann Bernoulli în care acesta formula renumita problemă a brahistocronei.
- Originea termenului brahistocronă se află în limba greacă (**brakhistos este cel mai scurt, khronos timp timp**).

Problema brahistocronei (curba celei mai rapide descendențe sub acțiunea forței gravitaționale)

- Un punct material M pornește din punctul A fără viteză inițială și se mișcă fără frecare, sub acțiunea forței de gravitație cuprinsă într-un plan vertical (A și B nu stau pe aceeași verticală).
- **Problema brahistocronei** constă în următoarele: dintre toate curbele netede, aflate într-un plan vertical, care unesc punctele fixe A și B , cu B mai jos decât A , să se determine acea curbă pe care punctul M ajunge din A în B în timpul cel mai scurt.

Problema brahistocronei (curba celei mai rapide descendențe sub acțiunea forței gravitaționale)



Problema brahistocronei (curba celei mai rapide descendente sub acțiunea forței gravitaționale)

- Fie $y=y(x)(x \in [a;b])$ ecuația curbei netede căutate, $y(a)=0, y(b)=y_2, b>0, y_2 >0, a \geq 0$, iar $v=v(x)$ - mărimea vitezei de deplasare a punctului material M în fiecare punct $(x; y(x))$ al arcului AB .
- În momentul în care ordonata poziției punctului material va fi egală cu y , punctul material va pierde mgy unități de energia potențială. Însă către acest moment va crește energia cinetică cu $mv^2/2$ unități.

Problema brahistocronei (curba celei mai rapide descendențe sub acțiunea forței gravitaționale)

- Prin urmare, dacă $T[y]$ este timpul necesar pentru ca punctul material să ajungă din A în B pe arcul $y = y(x), x \in [a; b]$, vom avea

$$T[y(x)] = \int_{\widehat{AB}} \frac{ds}{v} = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}}{\sqrt{2gy(x)}} dx .$$

- În condițiile menționate vom spune că timpul este o funcțională de tip integrală, care depinde de y și, care verifică condițiile $y(a) = 0, y(b) = y_2$.

Calculul variațional

- Calculul variațional clasic rezolvă problema **extremelor funcționalelor** prin mijloace asemănătoare celor folosite de analiza clasică în rezolvarea problemei extremelor funcțiilor de una sau mai multe variabile.

Calculul variațional

- Calculul în funcție de o singură variabilă:

- Funcția primește extrem într-un anumit domeniu.
- Condiția necesară de extrem în punctul x_0 , dacă este derivata:

$$f'(x_0) = 0$$

- Calculul variațional:

- Adevărat extrem pentru $y(x)$

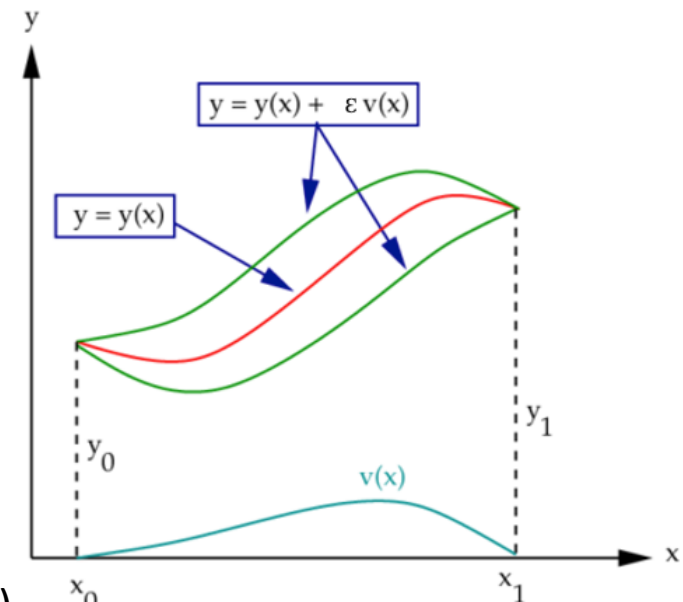
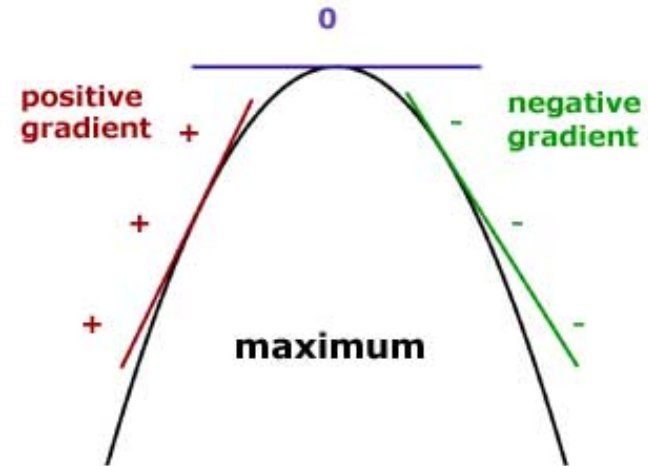
$$I[\varepsilon] = \int_a^b F(x, w, w_x) dx$$

- Condiția necesară de extrem este:

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = 0$$

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F(t, u(t), \dot{u}(t)) dt$$

$I = \min$, pentru semnalul de comandă găsit $u(t)$



Calculul variațional

- Se derivează $I[\varepsilon]$:

$$\frac{dI}{d\varepsilon}(\varepsilon) = \frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b F(x, w, w_x) dx = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial w_x} \frac{\partial w_x}{\partial \varepsilon} \right) dx \quad I[\varepsilon] = \int_a^b F(x, w, w_x) dx$$

- Se setează $I[0] = 0$ pentru valoarea extremală, substituind termenul cu $\varepsilon = 0$:

$$\frac{\partial w}{\partial \varepsilon}(\varepsilon) = v(x) \quad \frac{\partial w}{\partial \varepsilon}(0) = v(x) \quad \frac{\partial w_x}{\partial \varepsilon}(\varepsilon) = v_x(x) \quad \frac{\partial w_x}{\partial \varepsilon}(0) = v_x(x) \quad w(0) = u(x) \\ w_x(0) = u_x(x)$$

$$\frac{dI}{d\varepsilon}(0) = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial u} v + \frac{\partial F}{\partial u_x} v_x \right) dx \quad \int_a^b \frac{\partial F}{\partial u} v dx + \int_a^b \frac{\partial F}{\partial u_x} v_x dx = 0$$

- Integrarea integralei a doua prin părți:

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial u_x} v_x dx = \left[\frac{\partial F}{\partial u_x} v \right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \right) v dx = - \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \right) v dx$$

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial u} v dx - \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \right) v dx = 0$$

$$\boxed{\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \right) \right] v dx = 0}$$

Ecuția Euler-Lagrange

- Funcția $v(x)$ este o funcție arbitrară și unica soluție ca integrala să fie zero este că alți factori ai integralei să fie zero

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \right) \right] v dx = 0$$

- Rezultatul se cunoaște sub denumirea de ecuația Euler-Lagrange:

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial u_x} \right]}$$

Ecuția Euler-Lagrange

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial u_x} \right]}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{u}} \right]$$

- Ecuția Euler este un nucleu principal al calculului variațional și exprimă condiții necesare de minim al funcționalei /
- Deoarece $\frac{\partial F}{\partial \dot{u}}$ este funcția de trei variabile $u(t), \dot{u}(t), t$.

Calculul variațional

În forma desfășurată avem:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{u}} \right] = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial \dot{u}} \frac{dU}{dt} + \frac{\partial}{\partial \dot{u}} \frac{\partial F}{\partial \dot{u}} \frac{d\dot{u}}{dt} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial \dot{u}}$$

Ecuția Euler se prezintă atunci în forma:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{u}} - \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial \dot{u}} \dot{u} - \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{u}^2} \ddot{u} = 0$$

Calculul variațional

La soluționarea problemei variaționale se caută răspunsul pe extremală, care aduce la **max** sau la **min** funcțională.

Pentru acesta se utilizează condițiile Legendre:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{U}^2} \geq 0, \text{ pentru } I \text{ să fie minimă}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{U}^2} \leq 0, \text{ pentru } I \text{ să fie maximă}$$

Funcții de două variabile

- Analogic la calculul multivariabil:
 - Funcții primesc valoarea extremală pe domeniul definit.
 - Condiția necesară de extrem pentru x_0 , dacă este diferențiabilă:

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$$

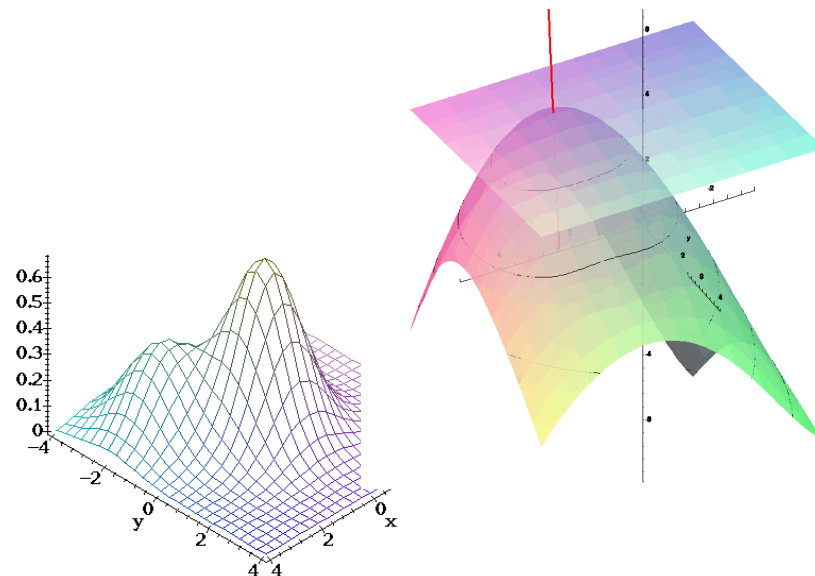
- Calculul variațional este asemănător:

$$I = \iint_D F(x, y, u, u_x, u_y) dx dy \quad w(x, y) = u(x, y) + \varepsilon v(x, y)$$

$$\frac{dI}{d\varepsilon}(\varepsilon) = \frac{d}{d\varepsilon} \iint_D F(x, y, w, w_x, w_y) dx dy = \iint_D \left(\frac{\partial F}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial w_x} \frac{\partial w_x}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial w_y} \frac{\partial w_y}{\partial \varepsilon} \right) dx dy$$

$$\iint_D \frac{\partial F}{\partial u} v dx dy + \iint_D \frac{\partial F}{\partial u_x} v_x dx dy + \iint_D \frac{\partial F}{\partial u_y} v_y dx dy = 0$$

$$\iint_D \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \right) - \frac{d}{dy} \left(\frac{\partial F}{\partial u_y} \right) \right] v dx dy = 0$$



$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial u_x} \right] + \frac{d}{dy} \left[\frac{\partial F}{\partial u_y} \right]}$$

Ecuatii Euler-Lagrange

- Ecuația Euler-Lagrange pentru mai multe variabile:

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \sum_{i=1}^N \frac{d}{dq_i} \left[\frac{\partial F}{\partial u_{q_i}} \right]$$

Exemplu 1

- De calculat extremul funcționalei:
- $J = \int_{t_0}^T (\dot{u}^2 - 2ut) dt$ – funcționala
- Condiții inițiale: $u(1)=0$, $u(t)$ = semnal de comanda
- Condiții finale: $u(2)=1$
- $F = [\dot{u}^2 - 2ut]$
- $\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{u}} \right] = 0; \rightarrow \frac{\partial F}{\partial u} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{u}} \right]$

$$\frac{\partial F}{\partial u} [\dot{u}^2 - 2ut] - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{u}} [\dot{u}^2 - 2ut] = -2t - \frac{d}{dt} 2\dot{u} = -2t - 2\ddot{u} = 0$$

Exemplu 1:

$$\frac{\partial F}{\partial u} [\dot{u}^2 - 2ut] - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{u}} [\dot{u}^2 - 2ut] = -2t - \frac{d}{dt} 2\dot{u} = -2t - 2\ddot{u} = 0$$

$$\ddot{u} = -t;$$

$$\dot{u} = -\frac{t^2}{2} + c;$$

$$u(t) = -\frac{t^3}{6} + c_1 t + c_2;$$

$$u(1)=0; u(2)=1$$

$$u(1) = -\frac{1^3}{6} + c_1 1 + c_2 = 0;$$

$$u(2) = -\frac{2^3}{6} + c_1 2 + c_2 = 1;$$

Exemplu 1:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{U}^2} \geq 0, \text{ pentru } I \text{ să fie minimă}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{U}^2} \leq 0, \text{ pentru } I \text{ să fie maximă}$$

$$u(1) = -\frac{1^3}{6} + c_1 \cdot 1 + c_2 = 0;$$

$$u(2) = -\frac{2^3}{6} + c_1 \cdot 2 + c_2 = 1;$$

$$c_1 = \frac{1}{6} - c_2$$

$$u(2) = -\frac{2^3}{6} + \left(\frac{1}{6} - c_2\right) \cdot 2 + c_2 = 1;$$

$$-\frac{2^3}{6} + \left(\frac{1}{6} - c_2\right) \cdot 2 + c_2 = 1 \rightarrow$$

$$c_2 = -2, c_1 = 13/6$$

$$\bar{u}(t) = -\frac{t^3}{6} + \frac{13}{6}t - 2;$$

$$\frac{\partial^2 (u^2 - 2ut)}{\partial \dot{U}^2} = 2 > 0 - \text{functională dată tinde la minim}$$

Exemplu 2

- De calculat extremul funcționalei:
- $J = \int_1^3 (3ut - u^2) dt$ – funcționala
- Condiții inițiale: $u(1)=1$, u semnal de comanda
- Condiții finale: $u(3)=4$
- $F = [3ut - u^2]$
- $\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{u}} \right] = 0$; $\rightarrow \frac{\partial F}{\partial u} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{u}} \right]$

$$\frac{\partial F}{\partial u} [3ut - u^2] - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{u}} [3t - u^2] = 3t - 2u = 0$$

- $u = \frac{3}{2}t$; $u(1)=1.5=1$; $u(3)=1.5*3=4$
- Funcționala nu are extremuri definite pe intervalul respectiv $[1,3]$

Exemplu 3

- De calculat extremul funcționalei:
- $J = \int_1^2 (\dot{u} - t^2 \dot{u}^2) dt$ – funcționala
- Condiții inițiale: $u(1)=1$, u semnal de comanda
- Condiții finale: $u(2)=2$
- $F = [\dot{u} - t^2 \dot{u}^2]$
- $\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{u}} \right] = 0$; $\rightarrow \frac{\partial F}{\partial u} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{u}} \right]$
$$\frac{\partial}{\partial u} [\dot{u} - t^2 \dot{u}^2] - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{u}} [\dot{u} - t^2 \dot{u}^2] = 0$$
- $-\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{u}} [\dot{u} - t^2 \dot{u}^2] = -\frac{d}{dt} (1 + 2t^2 \dot{u}) = 0$

Condiții inițiale: $u(1)=1$, u semnal de comanda
 Condiții finale: $u(2)=2$

Exemplu 3

$$\bullet -\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{u}}[\dot{u} - t^2\dot{u}^2] = -\frac{d}{dt}(1+2t^2\dot{u})=0$$

$$\bullet -\frac{d}{dt}(1+2t^2\dot{u})=0$$

$$1+2t^2\dot{u}=c$$

$$\dot{u}=\frac{c-1}{2t^2}; \rightarrow \dot{u}=\frac{c1}{t^2} \rightarrow c1 = \frac{c-1}{2}$$

$$u=-\frac{c1}{t} + c2;$$

$$u(1)=-\frac{c1}{1} + c2 = 1;$$

$$u(2)=-\frac{c1}{2} + c2 = 2;$$

$$c1=2; c2=3$$

$$u=-\frac{2}{t} + 3;$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{U}^2} \geq 0, \text{ pentru } I \text{ să fie minimă}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{U}^2} \leq 0, \text{ pentru } I \text{ să fie maximă}$$

$$\frac{\partial^2(\dot{u}-t^2\dot{u}^2)}{\partial \dot{U}^2} = -2t^2 < 0 - \text{functională data tinde la maxim}$$

Ecuția Euler-Puasson

- În cazul când funcția de sub integrală este derivabilă de n ori, și funcționala are forma:

$$J = \int_{t_0}^T G[t, u(t), u'(t), \dots, u^{(n)}(t)] dt$$

- Unde funcțiile $u(t)$, $u^{(n)}(t)$ sunt netede și derivabile de n ori, atunci ecuația Euler capătă următoarea formă:

- $$\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial \dot{u}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial G}{\partial \ddot{u}} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \frac{\partial G}{\partial u^{(n)}} = \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{d^i}{dt^i} \frac{\partial G}{\partial u^{(i)}} = 0$$

Ecuatia Euler-Puasson

- Este o ecuație diferențială, nelineară de ordinul $2n$ cu condițiile inițiale și finale:

$$u^{(i)}(t_0) = u_0^{(i)}, \quad u^{(i)}(T) = u_1^{(i)}, \quad i = \overline{0, (n-1)}$$

- Soluția ecuației se obține ca $u(t, c_1, c_2, \dots, c_n)$, conține $2n$ constante de integrare, care pot fi determinate din condițiile de limită (inițiale și finale).
- Pentru a determina tipul extremumului (maximum sau minimum) se utilizează condițiile *Legendre*, care capătă următoarea formă:

$$\max \frac{\partial^n G}{\partial u^{(n)}} \leq 0, \quad \min \frac{\partial^n G}{\partial u^{(n)}} \geq 0$$

Exemplu

- De calculat funcționala
- $J = \int_0^1 (2t^2 u - \ddot{u}^2) dt$
- Condiții: $u(0)=0$, $\dot{u}(1)=0$; $\ddot{u}(1)=1$, $n=2$
- Aplicând ecuația Euler-Puasson s-a obținut:
- $\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial \dot{u}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial G}{\partial \ddot{u}} = 0$
- $2t^2 - 2u^{(4)}(t) = 0$
- $u^{(4)}(t) = t^2$
- După integrare de 4 ori obținem:
- $u(t) = \frac{t^6}{360} + c_1 t^3 + c_2 t^2 + c_3 t + c_4$

Exemplu:

- Din condiții de limită: $u(0)=0$, $\dot{u}(1)=0$; $\ddot{u}(1)=1$, $n=2$ se obține
- $C_4=0; c_3=1; c_2=-\frac{359}{120}; c_1 = \frac{179}{90}$
- $u(t) = \frac{t^6}{360} + \frac{179}{90}t^3 - \frac{359}{120}t^2 + t$
- Din condiții Legendre avem $G = 2t^2u - \ddot{u}^2$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \ddot{u}^2} = -2 \rightarrow \text{este maxim}$$

Ecuatia Euler-Lagrange

- În cazul când funcția de sub integrală este derivabilă de n ori, și funcționala are forma:

$$J = \int_{t_0}^T G[t, u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t, \dot{u}_1(t), \dot{u}_2(t), \dots, \dot{u}_m(t)] dt \quad (1)$$

$$u_i(t) \in U, \quad i = \overline{1, m}$$

$$1) \quad \varphi_i(t, u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) = 0, \quad j = \overline{1, s}, \quad i = \overline{1, m}, \quad s < m \quad (2)$$

$$2) \quad \varphi_i(t, u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), \dot{u}_1(t), \dot{u}_2(t), \dots, \dot{u}_m(t)) = 0, \quad s < m \quad (3)$$

$$3) \quad \int_{t_0}^T \varphi_i(t, u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), \dot{u}_1(t), \dot{u}_2(t), \dots, \dot{u}_m(t)) = l \text{ (const.)} \quad (4)$$

Ecuatia Euler-Lagrange

- Problema variațională se formulează în felul următor:
- *Este necesar de a găsi astfel de funcții $u_i(t) \in U$, care ar trece prin condițiile de limită $u_i(t_0)$, $u_i(T)$ ar satisface ecuațiile de legătură și să extremizeze funcționala (1) (ex. $J \rightarrow \min$).*
- *Problema formulată pentru condițiile (2), se numește **geodezică**.*
- *Pentru (3) se numește **Lagrange**. Iar pentru condițiile (4) se numește **izoperimetrică**.*

Ecuatia Euler-Lagrange

- Problema Lagrange se soluționează utilizând multiplicatorii Lagrange λ_i , astfel pornind de la funcționala (1), se compune o funcțională adăugătoare:

$$J^* = \int_{t_0}^T \left[G + \sum_{j=1}^s \lambda_j(t) \varphi_j \right] dt = \int_{t_0}^T G^* dt \quad (5)$$

- Funcționala (5) depinde de m funcții $u_i(t)$ și s funcții $\lambda_j(t)$ și se studiază la *minimum*.

Ecuatia Euler-Lagrange

- În cazul dat, pentru a soluționa problema se utilizează ecuația Euler, care are următoarea formă:

$$\frac{\partial G^*}{\partial u_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial G^*}{\partial \dot{u}_i} = 0, \quad i = \overline{1, m} \quad (6)$$

- Și se rezolvă cu unul din tipurile de ecuații de legătură (2), (3) sau (4). În rezultat se obține un sistem alcătuit din $m + s$ ecuații care conține tot atâtea necunoscute.

- $$u_i(t), \quad i = \overline{1, m}$$
$$\lambda_j(t), \quad j = \overline{1, s}$$

Acest sistem împreună cu condițiile de limită este suficient pentru a determina toate necunoscutele.

Rezolvarea problemelor de conducere optimală prin aplicarea metodelor variaționale

- Se dă modelul obiectului prin ecuații diferențiale de stare:

$$\dot{x}_i - \psi(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = 0, \quad i = \overline{1, n} \quad (1)$$

Recapitulare: $H(s) = \frac{\beta_0}{s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0} = \frac{y(s)}{u(s)}$

$$y = x_1, \quad \dot{y} = \dot{x}_1 = x_2, \quad \ddot{y} = \dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = -\alpha_0 x_1 - \alpha_1 x_2 - \alpha_2 x_3 + u$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = -\alpha_0 x_1 - \alpha_1 x_2 - \alpha_2 x_3 + u$$

$$\dot{x}_1 - x_2 = 0, \quad \dot{x}_2 - x_3 = 0$$

$$\dot{x}_3 + \alpha_0 x_1 + \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_3 - u = 0$$

Sunt cunoscute condițiile inițiale și finale: $x_i(0), x_j(T)$.

Rezolvarea problemelor de conducere optimală prin aplicarea metodelor variaționale

- Iar criteriul de optimizare se dă în următoarea formă:

$$J = \int_{t_0}^T G[x_1, x_2, \dots, x_n, u] dt \quad (2)$$

- Din mulțimea comenzilor admise U , este necesar de a determina acea comandă care aparține U , care ar aduce funcționala (2) la minimum $J \rightarrow \min$, iar obiectul va fi transferat din starea inițială în starea finală.

Rezolvarea problemelor de conducere optimală prin aplicarea metodelor variaționale

- În cazul dat ecuațiile de stare ale obiectului sunt utilizate în calitate ecuații de legătură în calculul variațional.
- Dacă se admite că asupra variabilelor de stare $x_1, x_2, \dots, x_n$ și comenzii $u(t)$ nu sunt impuse nici un fel de restricții, atunci soluționarea problemei poate fi efectuată, ca în calculul variațional, astfel se compune funcționala adăugătoare:

$$J^* = \int_{t_0}^T \left[G + \sum_{j=1}^n \lambda_j \left(\frac{dx_j(t)}{dt} - \psi_j \right) \right] dt = \int_{t_0}^T G^* dt \quad (3)$$

- λ_j, x_j, u – variabile independente.

Rezolvarea problemelor de conducere optimală prin aplicarea metodelor variaționale

- Față de funcțiile $u(t)$ și $x^j(t)$ se compune ecuația Euler, la care se adaugă, în calitate de ecuații de legătură, ecuațiile obiectului, astfel obținându-se un sistem alcătuit din $(2n + 1)$ ecuații.

$$\frac{\partial G^*}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial G^*}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial G^*}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad i = \overline{1, n} \quad (4.1)$$

$$\dot{x}_i - \psi(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = 0, \quad i = \overline{1, n} \quad (4.2)$$

Exemplu:

- $H(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{s^2}$; *ecuatia diferentiala*: $y''(t) = u(t)$
- Condiții inițiale: $y(0)=0$; $\dot{y}(0) = 1$
- Condiții finale: $y(1)=1$; $\dot{y}(1) = 0$
- Funcțională:
- $J = \int_{t_0}^T u^2(t)dt = \int_{t_0}^T Gdt$
- Trebuie de determinat comanda optimală $u(t)$, pentru care $J \rightarrow \min$ și obiectul trece din starea inițială în starea finală.

Exemplu:

- $H(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{s^2}$; *ecuația diferențială*: $y''(t) = u(t)$
- Trecem la reprezentare intrare-stare-ieșire:
- $y=x_1$; $\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2$;
- $\dot{x}_2=u$, din ecuația diferențială.

$$\frac{\partial G^*}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial G^*}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial G^*}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad i=1,2 \text{ (2 var. de stare)}$$

$$\dot{x}_j - \psi_j = 0, \quad j=1,2$$

$$J^* = \int_0^1 [u^2(t) + \lambda_1(\dot{x}_1 - x_2) + \lambda_2(\dot{x}_2 - u)] dt = \int_0^1 G^* dt$$

Exemplu: $\frac{\partial G^*}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial G^*}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial G^*}{\partial \dot{x}_i} = 0,$

$$J^* = \int_0^1 [u^2(t) + \lambda_1(\dot{x}_1 - x_2) + \lambda_2(\dot{x}_2 - u)] dt = \int_0^1 G^* dt$$

- Se aplică ecuațiile lui Euler:

- $G = u^2(t) + \lambda_1(\dot{x}_1 - x_2) + \lambda_2(\dot{x}_2 - u)$

- $\frac{\partial G^*}{\partial u} = 2u + 0 - \lambda_2 = 0 \quad (1)$

- $\frac{\partial G^*}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial G^*}{\partial \dot{x}_i} = 0; i = 1, 2$

- $\frac{\partial G^*}{\partial x_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial G^*}{\partial \dot{x}_1} = 0 - \frac{d}{dt} (0 + \lambda_1 + 0) = -\dot{\lambda}_1 = 0 \quad (2)$

- $\frac{\partial G^*}{\partial x_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial G^*}{\partial \dot{x}_2} = (0 - \lambda_1 + 0) - \frac{d}{dt} (0 + 0 + \lambda_2) = -\lambda_1 - \dot{\lambda}_2 = 0 \quad (3)$

- $(\dot{x}_1 - x_2) = 0 \quad (4)$

- $\dot{x}_2 - u = 0 \quad (5)$

Exemplu:

- Din ecuația (2) obținem: $\lambda_1(t)=c_1$
- Din ecuația (3) ($-\lambda_1 - \dot{\lambda}_2=0$) obținem:
- $\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 = -c_1 \rightarrow \lambda_2 = -c_1 t + c_2$.
- Din ecuația (1) ($2u - \lambda_2=0$) avem

$$u = \frac{\lambda_2}{2} = -\frac{1}{2}c_1 t + \frac{1}{2}c_2$$

Exemplu:

- Din ecuația (5) ($\dot{x}_2 - u=0$) obținem:
- $\dot{x}_2=u$
- $x_2 = \int u(t)dt = -\frac{c_1 t^2}{4} + \frac{c_2 t}{2} + c_3$
- Din ecuația (4) ($(\dot{x}_1 - x_2)=0$) obținem
- $\dot{x}_1 = x_2$
- $x_1 = \int x_2(t)dt = -\frac{c_1 t^3}{12} + \frac{c_2 t^2}{4} + c_3 t + c_4$

Exemplu:

- $x_1 = \int x_2(t)dt = -\frac{c_1 t^3}{12} + \frac{c_2 t^2}{4} + c_3 t + c_4$
- Constantele de integrare se determină din condiții inițiale și finale:
- $x_1=y; \mathbf{y(0)=0}; x_1(0)=y(0)=c_4=0$
- $x_1(1)=y(1)=-\frac{c_1}{12} + \frac{c_2}{4} + c_3 + 0 = 1$
- $x_2(0)=\dot{y}(0) = c_3 = 1$
- $x_2(1)=\dot{y}(1) = -\frac{c_1}{4} + \frac{c_2}{2} + 1=0$

Exemplu:

$$-\frac{c_1}{4} + \frac{c_2}{2} + 1 = 0$$

$$-\frac{c_1}{12} + \frac{c_2}{4} + c_3 + 0 = 1$$

$$c_1=12; c_2=4, c_3=1; c_4=0$$

- $u = -6t + 2$

Principiul maximului

- Principiul maximului, elaborate de *Pontryagin* , este similar calculului variațional din care a și derivat, dar totodată este legat și de programarea dinamică.

- Principiul maximului se bazează pe următoarele elemente:

1. **Sistemul este descris de ecuațiile de stare:**

$$\dot{x}_i(t) = f_i(\bar{x}, \bar{u}, t), \quad i = \overline{1, n} \quad (1)$$

2. **Timpul inițial t_0 și timpul final T sunt date.**

3. **Unele componente ale vectorului de stare au valori date la momentele de timp t_0 și T**

$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad x_i(T) = x_i^T$$

Principiul maximului

4. Indicele de performanță este dat de următoarea funcțională:

$$J = \int_{t_0}^T f_0(\bar{x}, \bar{u}, t) dt \rightarrow \min \quad (2)$$

5. Comanda $\bar{u}(t)$ este supusă restricțiilor de tip *inegalitate* și se include în mulțimea comenzilor admisibile U .

6. Se caută comanda optimală $u^*(t)$ care transferă sistemul din starea inițială în starea finală, astfel încât să optimizeze criteriul J respectând restricțiile impuse comenzii.

Funcțiile f_i sunt continue pe toate variabilele și derivabile pe variabile de stare $(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$.

Principiul maximului

Metodologia de soluționare presupune următoarele:
Se compune funcția *Lagrange* în felul următor:

$$L = \Psi_0 f_0 + \sum_{i=1}^n \psi_i (f_i - \dot{x}_i) = H - \sum_{i=1}^n \psi_i \dot{x}_i \quad (3)$$

Funcția H se numește *Hamiltonian*

$$H = \sum_{i=0}^n \psi_i f_i \quad (4)$$

Funcția H se mai numește funcția de stare a lui Pontryagin.
Funcția ψ_i satisface următoarea relație:

$$\psi_i = \frac{\partial H}{\partial x_i} = - \sum_{i=0}^n \psi_i \frac{\partial t_i}{\partial x_i}, \quad i = \overline{0, n} \quad (5)$$

Ecuatiile (5) se numesc *adjuncte* sau *duale*.

Principiul maximului

Hamiltonianul H , după cum se observă, nu este o funcție de variabila x_0 , din aceste considerente:

$$\dot{\psi}_0 = -\frac{\partial H}{\partial x_0} = 0 \Rightarrow \psi_0 = \text{const.}$$

Principiul maximului pentru variațională cu condițiile determinate fixate și timpul fixat se formulează în felul următor:

- Pentru ca comanda admisă $u^*(t)$ și $x^*(t)$ să fie optimale, este necesar să existe așa soluție nenulă:

$$\psi^*(t) = (\psi_0^*, \psi_1^*, \dots, \psi_n^*)$$

a ecuațiilor adjuncte

$$\psi_i^* = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i(x^*(t), u^*(t))}{\partial x_i(t)}, \quad i = \overline{1, n}$$

Principiul maximului

Pentru orice $t \in [t_0, T]$, astfel ca funcția H pe variabila u să atingă valoarea maximală, adică:

$$H[\psi^*(t), x^*(t), u^*(t)] = \max_{u \in U} H[\psi^*(t), x^*(t), u] \quad (6)$$

Ecuatiile (1) și (5) conțin $(2n + 1)$ ecuații diferențiale și inclusiv $(2n + 1)$ constante de integrare, însă pentru determinarea lor avem doar $2n$ condiții inițiale.

Însă constanta ψ_0 poate fi aleasă arbitrar, din unica condiții ca $\psi_0 < 0$, de obicei se admite, ca $\psi_0 = -1$

Exemplu:

- Se dă obiectul de reglare, descris prin f.d.t.:
- $H(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{k}{s^2} \rightarrow y''(t) = ku(t)$
- Condiții inițiale: $x(0)=x_{10}; \dot{x}(0) = x_{20}$
- Condiții finale: $x(T)=x_{1T}; \dot{x}(T) = x_{2T}$
- Funcționala care trebuie să fie minimizată este:
- $J = \int_0^T u^2(t)dt \rightarrow \min$
- De găsit comanda optimală și traiectoria optimală în baza principiului maximului.

Exemplu:

- 1. Descriem obiectul de reglare în forma ecuației de stare.
- $x_1 = y$
- $\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2(t) = f_1$
- $\ddot{y} = \dot{x}_2 = ku(t) = f_2$
- $\dot{x} = f_0 = u^2(t)$
- 2. Pentru determinarea funcțiilor ψ_i se scrie expresia pentru hamiltonianul:
- $H = \sum_{i=0}^2 \psi_i f_i = \psi_0 f_0 + \psi_1 f_1 + \psi_2 f_2$
- Se fac substituții și se obține:
- $H = \psi_0 u^2(t) + \psi_1 x_2(t) + \psi_2 ku(t)$

Exemplu:

- $H = \psi_0 u^2(t) + \psi_1 x^2(t) + \psi_2 ku(t)$
- Funcțiile $\psi_i = \frac{\partial H}{\partial x_i} = - \sum_{i=0}^n \psi_i \frac{\partial t_i}{\partial x_i}$
- $\frac{d\psi_0}{dt} = \dot{\psi}_0(t) = 0 \rightarrow \psi_0(t) = c_0;$
- $\frac{d\psi_1}{dt} = \dot{\psi}_1(t) = 0 \rightarrow \psi_1(t) = c_1;$
- $\frac{d\psi_2}{dt} = \dot{\psi}_2(t) = -\psi_1(t); \rightarrow \psi_2(t) = -c_1 t + c_2;$
- Hamiltonianul va avea următoarea formă:
- $H = \psi_0 u^2(t) + \psi_1 x^2(t) + \psi_2 ku(t) = c_0 u^2(t) + c_1 x^2(t) + (-c_1 t + c_2)ku(t)$

Exemplu:

- Hamiltonianul va avea următoarea formă:

- $H = \psi_0 u^2(t) + \psi_1 x^2(t) + \psi_2 k u(t) = c_0 u^2(t) + c_1 x^2(t) + (-c_1 t + c_2) k u(t)$

3. Condiții de minimizare a Hamiltonianului pe variabila u este:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2c_0 u(t) + (c_2 - c_1 t)k = 0$$

4. Legea de conducere este:

$$2c_0 u(t) = \frac{(c_1 t - c_2)k}{2c_0} = \frac{c_1 k t}{2c_0} - \frac{c_2 k}{2c_0}$$

Exemplu:

4. Legea de conducere este:

$$u(t) = \frac{(c_1 t - c_2)k}{2c_0} = \frac{c_1 k t}{2c_0} - \frac{c_2 k}{2c_0}$$

5. Expresia de la pasul (4) se înmulțește cu k:

$$ku(t) = \frac{(c_1 t - c_2)k^2}{2c_0} = \frac{c_1 k^2 t}{2c_0} - \frac{c_2 k^2}{2c_0} = \dot{x}_2$$

6. Expresia de la punctul (5) o integrăm pentru a calcula x_2 :

$$x_2 = \frac{c_1 k^2 t^2}{4c_0} - \frac{c_2 k^2 t}{2c_0} + c_3 = A$$

7. Se cunoaște că $\dot{x}_1 = x_2(t) = A$

$$x_1 = \frac{c_1 k^2 t^3}{12c_0} - \frac{c_2 k^2 t^2}{4c_0} + c_3 t + c_4$$

Exemplu:

7. Se cunoaște că $\dot{x}_1 = x_2(t) = A$

$$x_1 = \frac{c_1 k^2 t^3}{12c_0} - \frac{c_2 k^2 t^2}{4c_0} + c_3 t + c_4$$

8. În baza condițiilor inițiale și finale determinăm c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 .

$$c_0 = -1; c_3 = x_{20}; c_4 = x_{10}$$

$$c_1 = -\frac{12}{5k^2 T^3} x_{10} + \frac{6T}{5k^2 T^3} x_{20} - \frac{12}{5k^2 T^3} x_{1T} + \frac{6T}{5k^2 T^3} x_{2T}$$

$$c_2 = -\frac{24}{5k^2 T^2} x_{10} + \frac{2}{5k^2 T} x_{20} - \frac{24}{5k^2 T^2} x_{1T} + \frac{22}{5k^2 T} x_{2T}$$

Metoda programării dinamice

- Presupunem că sistemul supus optimizării se reprezintă cu următoarele ecuații de stare:

$$(1) \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ t \in [t_0, t_f] \\ u(t) \in U \\ x(t_0) = x^0; \quad x(t_f) \in X_f \\ J = g_0[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x, u, t) dt \end{cases}$$

Metoda programării dinamice

- Pentru ca perechea $(u^*(t), x^*(t))$ să optimizeze problema (1) este necesar ca orice valoarea lui $t' \in [t_0, t_f]$ și semnalul de comandă $u^*(t_0, t_f)$ trebui să fie optimală în raport cu starea $x^*(t')$ în care se va afla sistemul la momentul t' .
- Valoarea minimă a criteriului J , va depinde de valori alese ale lui t' și $x(t')$ și se exprimă:

$$s[x(t'), t'] = \min[g_0(x(t_f), t_f) + \int_{t'}^{t_f} f_0(x, u, t) dt] \quad (2)$$

- Pentru cazul când

$$t = t_f, s(x(t_f), t_f) = g_0(x(t_f), t_f).$$

Funcția $s = f(x(t'), t')$ se numește **funcția Bellman**.

Metoda programării dinamice

- După unele transformări funcția Bellman se transformă în ecuația Bellman, care are următoarea reprezentare:

$$0 = \min_{u(t) \in U} \left[f_0(x, u, t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial s}{\partial x_i} f_i(x, u, t) + \frac{\partial s}{\partial t} \right] \quad (3)$$

$$\min_{u(t) \in U} \left[f_0(x, u, t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial s}{\partial x_i} f_i(x, u, t) \right] = - \frac{\partial s}{\partial t} \quad (4)$$

$$\min_{u(t) \in U} \left[f_0(x, u, t) + \frac{\partial s}{\partial x} f(x, u, t) \right] = - \frac{\partial s}{\partial t} \quad (5)$$

Metoda programării dinamice

- După unele transformări funcția Bellman se transformă în ecuația Bellman, care are următoarea reprezentare:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \left\{ \frac{\partial s}{\partial x_1}, \frac{\partial s}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial s}{\partial x_n} \right\}$$

$$s(x(t_f), t_f) = g_0(x(t_f), t_f) \quad (6)$$

$$f_0(x, u, t) + \frac{\partial s}{\partial x} f(x, u, t) = - \frac{\partial s}{\partial t} \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial u_j} \left(f_0(x, u, t) + \frac{\partial s}{\partial x} f(x, u, t) \right) = 0 \quad (8)$$

Algoritmul de conducere optimală

- 1. Din ecuația (8) se determină conducerea ca funcție de “s”:

$$u^* = u^*(s)$$

- 2. $u^*(s)$ se substituie în ecuația (7) și, soluționând-o la condițiile de limită, se determină funcția Bellman-“s”.
- 3. Funcția Bellman, obținută la pasul precedent, se substituie în expresia comenzii din condiția 1 și se determină conducerea optimală ca funcție de variabilele de stare.

$$u^* = u^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$$