

Universitatea Tehnică a Moldovei
Facultatea Calculatoare, Informatică și Microelectronică

Estimatori de stare

conf. univ., dr. Irina Cojuhari

Estimatori

- Pentru sistemul de reglare liniar staționar s-a constatat următoarele:
- 1. Existența conducerii care transferă orice starea „ x ” în originea de coordonate într-un timp oricare de scurt.
- 2. Această conducere poate fi realizată sub forma reacției nestaționare.
- 3. Dacă se limitează numai la legile de reglare liniare staționare, atunci se poate schimba proprietățile dinamice ale sistemului închis numai dacă toate componentele vectorului de stare sunt accesibile pentru măsurarea.

Estimatori

- În practică însă nu toate componentele vectorului de stare sunt accesibile pentru măsurarea.
- Astfel, pentru a utiliza toate facilitățile oferite de reacțiile după stare este necesar de a găsi o posibilitate de apreciere a vectorului stărilor utilizând informația despre mărimile de intrare și ieșire ale sistemului și despre structura lui (matricile A , B , C).
- Pentru aceasta se utilizează identificatori ce reprezintă niște sisteme dinamice ce formează aprecierea stării în cazul staționar.

Estimatori

- Scopul constă în aceia ca pentru sistemul liniar dat să se restabilească vectorul de stare $x(t)$, sau să găsească estimarea acestui vector după datele de intrare $u(t)$ și datele de ieșire $y(t)$ ale sistemului.
- Estimarea stării sistemului se notează cu $\hat{x}(t)$.

Estimatori

- Apropierea estimării $\hat{x}(t)$ spre vectorul de stare real $x(t)$ poate fi apreciată cel puțin în două moduri:
- 1. Fie prin faptul că eroarea estimării tinde spre zero, adică

$$x(t) - \hat{x}(t) \rightarrow 0, \forall t \rightarrow 0$$

2. Prin coinciderea exactă a vectorului de stare $x(t)$ și a vectorului estimator $\hat{x}(t)$ în momentele de timp $t=t_0$ după observarea variabilelor de ieșire a obiectului pe parcursul unui interval finit de timp $[t_{-1} < t_0]$, sau $[t_0, t_1]$ pentru $t_1 > t_0$.

Estimatori

- Dacă sistemul de estimare a stării poate fi construit, atunci apare întrebare, este posibil oare de a construi un regulator, care ar include sistemul de estimare a stării și reacția aleasă din considerentele că vectorul de stare este cunoscut.

Estimatori asimptotici de gradul n

- Sistemul dinamic ce formează la ieșire vectorul $\hat{x}(t)$ utilizând datele despre intrările și ieșirile sistemului se numește **estimator de stare**.

Estimator elementar

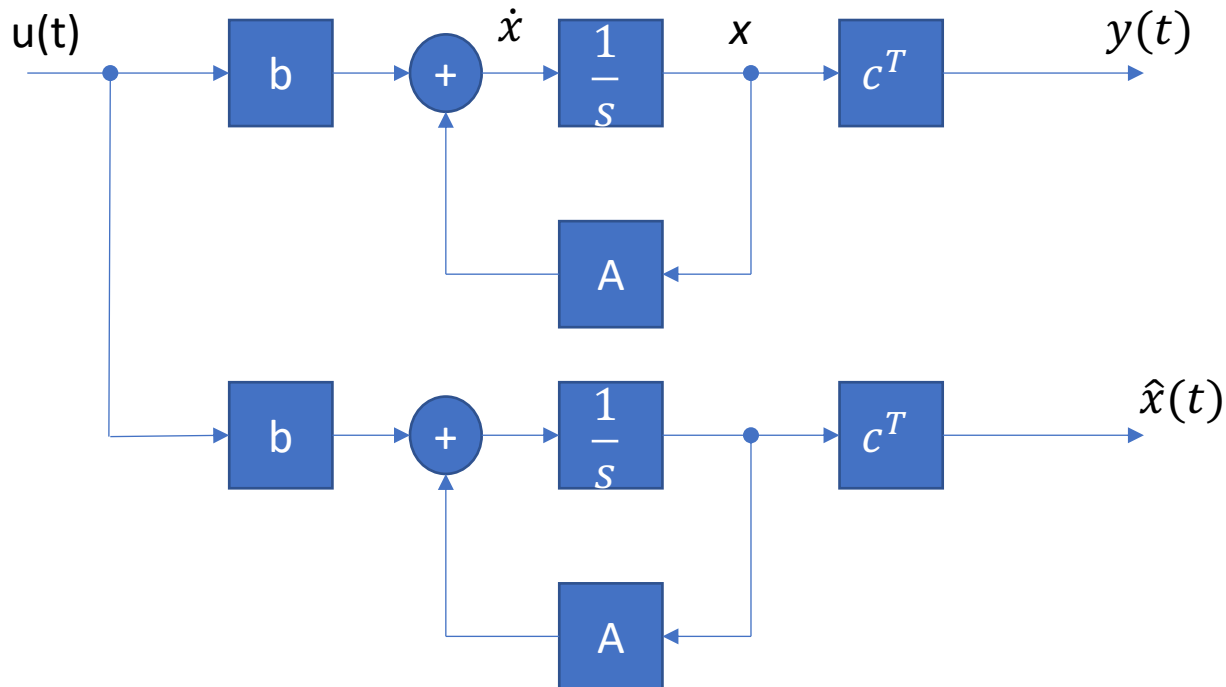
- Se propune de construit un estimator elementar pentru sistemul cu o intrare și o ieșire ce se descrie cu următoarele ecuații:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t)\end{aligned}$$

- Deoarece matriciile sistemului $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{c}$ sunt cunoscute, atunci în calitate de estimator de stare poate fi primit modelul sistemului, care ar forma estimarea $\hat{\mathbf{x}}(t)$.

Estimator elementar

- Schema unui astfel de estimator elementar se prezintă:



Estimator elementar

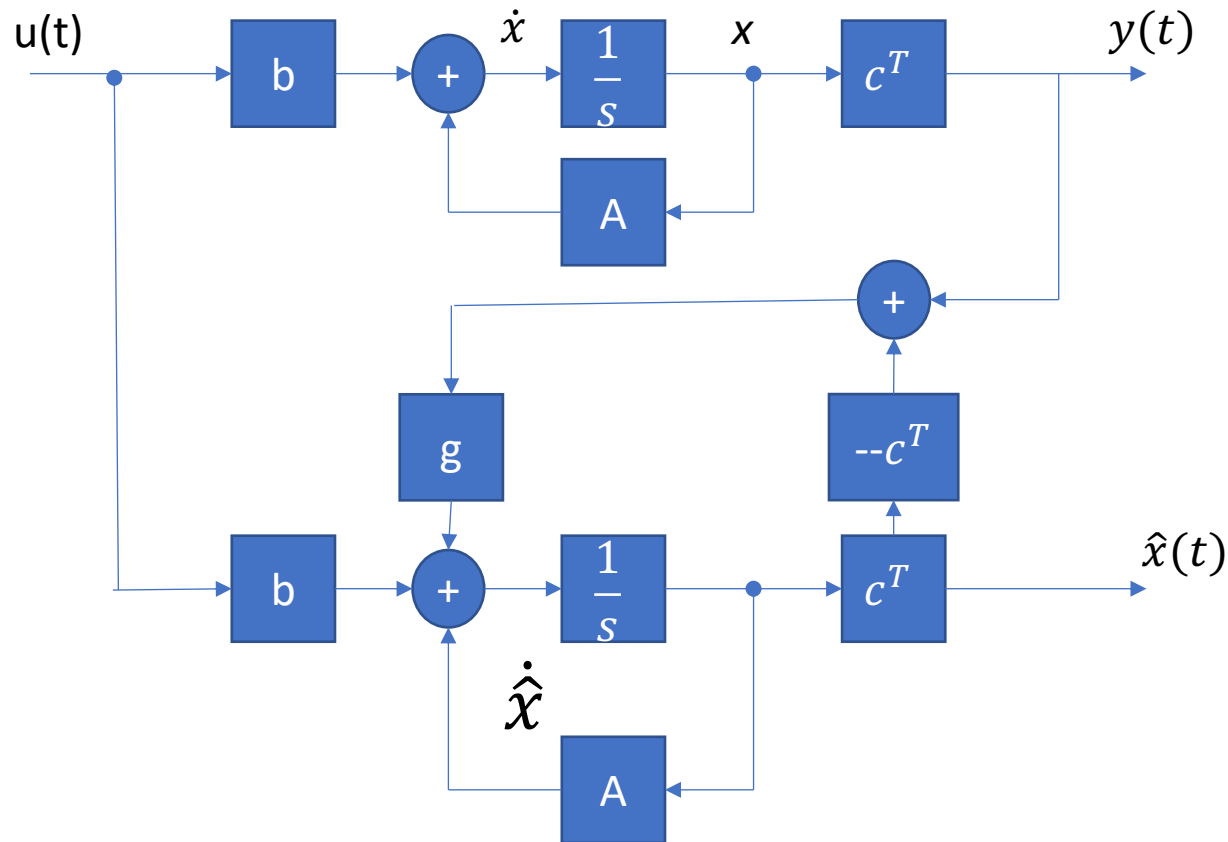
- Dacă starea inițială a sistemului coincide cu starea inițială a estimatorului și dacă la intrarea estimatorului se aplică același semnal de control ca și la intrarea sistemului, atunci ieșirea estimatorului $\hat{x}(t)$ va fi egală stării $x(t)$ pentru acest t .

Estimator elementar

- Acest estimator are, însă, două neajunsuri esențiale.
- 1. Este necesar de a calcula starea inițială în fiecare moment de timp după mărimea de intrare și ieșire a sistemului, ceea ce este incomod.
- 2. Dacă matricea A conține mărimi caracteristice cu partea reală pozitivă, atunci orice deviație mică $\hat{x}(t)$ de la $x(t_0)$ într-un moment oarecare de timp t_0 , ce poate fi chemată de o perturbație, sau apreciere imprecisă a stării inițiale va crește în timp cu atât mai repede cu cât e mai mare partea reală pozitivă a mărimii caracteristice A .
- Datorită acestor cauze estimatorul elementar fără reacție nu este satisfăcător.

Estimator asimptotic pentru sisteme cu o intrare

- Se examinează estimatorul cu următoarea schemă



Estimator asimptotic pentru sisteme cu o intrare

- La intrarea acestui estimator se aplică cum intrarea așa și ieșirea sistemului inițial.
- Ieșirea $y(t) = c^T x(t)$ se compară cu ieșirea $\hat{y}(t) = c^T \hat{x}(t)$, iar diferența lor reprezintă eroarea ce se aplică la intrarea sistemului. În calitate de semnal corector.

Estimator asimptotic pentru sisteme cu o intrare

Anume diferența

$$[y - \hat{y}] = [y - c^T \hat{x}]$$

- se înmulțește la vectorul „g” și se aplică la intrările integratoarelor estimatorului.
- Proprietățile dinamice ale unui astfel de estimator depind anume de alegerea vectorului „g”.

Estimator asimptotic pentru sisteme cu o intrare

Sistemul dinamic liniar, ieșirea căruia este vectorul $\hat{x}(t)$, se numește estimator asimptotic a stării sistemului liniar

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t)\end{aligned}$$

- Dacă $\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$.
- Gradul estimatorului prezentat este egal cu gradul sistemului „ n ”.

Estimator asimptotic pentru sisteme cu o intrare

Ecuatiile dinamice ale acestui estimator de gradul „ n ” au forma

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + g[y(t) - c^T\hat{x}(t)] + bu(t)$$

- sau $\dot{\hat{x}}(t) = [A - gc^T]\hat{x}(t) + gy(t) + bu(t)$

Estimator asimptotic pentru sisteme cu o intrare

Dacă se introduc variabile noi după formula

$$\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

Atunci ecuațiile estimatorului vor avea următoarea formă:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = [A - gc^T]\tilde{x}(t)$$

Unde $\tilde{x}(t)$ este vectorul erorii estimării stării.

Estimator asimptotic pentru sisteme cu o intrare

Dacă ar fi posibil printr-o alegere oarecare a lui „ g ” de ales polinomul caracteristic $[A - gc^T]$, atunci aceasta ar însemna că se poate de schimbat viteza de tindere a estimării $\hat{x}(t)$ la starea sistemului $x(t)$.

Estimator asimptotic pentru sisteme cu o intrare

Proprietățile dinamice ale estimatorului pot fi alese numai în cazul când sistemul este observabil, care se descrie în forma matricială în felul următor:

$$\text{rang}[c \ cA \ \dots \ cA^{n-1}]^T = n$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a_1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{n-1} - a_{n-1}b_n \\ b_{n-2} - a_{n-2}b_n \\ \vdots \\ b_1 - a_1b_n \\ b_0 - a_0b_n \end{bmatrix} u,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_n u.$$

Estimator asimptotic pentru sisteme cu o intrare

Fie că este dat un polinom oarecare normat de gradul „ n ”

$$\varphi_E = \lambda^n + \gamma_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \gamma_0$$

cu coeficienți reali.

Componentele vectorului „ g ” se determină după formulele:

$$g_i = \gamma_i - a_i, i = 0, 1, 2 \dots (n - 1)$$

Efectuând o verificare se poate observa că polinomul caracteristic al matriciei $[A - gc^T]$ coincide cu polinomul dat φ_E .

Exemplu:

- Fie că se dă sistemul în forma diagonală:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad c^T = [1 \quad 0]; \quad D = 0.$$

- Polinomul dat este:

$$\varphi_E = \lambda^2 + 4\lambda + 3.$$

Exemplu:

- Fie că se dă sistemul în forma diagonală:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad c^T = [1 \quad 0]; \quad D = 0.$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -9 & 1 & 0 \\ -24 & 0 & 1 \\ -20 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} u(t) \\ y &= c^T x = [1 \quad 0 \quad 0]x \end{aligned}$$

- Polinomul dat este:

$$\varphi_E = \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 4.$$

Elaborarea regulatorului

- După cum a fost menționat unui sistem staționar controlabil, utilizând reacția se poate de impune diferite proprietăți dinamice. Anume rădăcinile ecuației caracteristice ale unui astfel de sistem închis pot fi alese în mod aleator.
- Însă aceste posibilități oferite de reacția staționară nu pot fi utilizate, deoarece nu toate componentele vectorului de stare sunt accesibile pentru măsurarea.

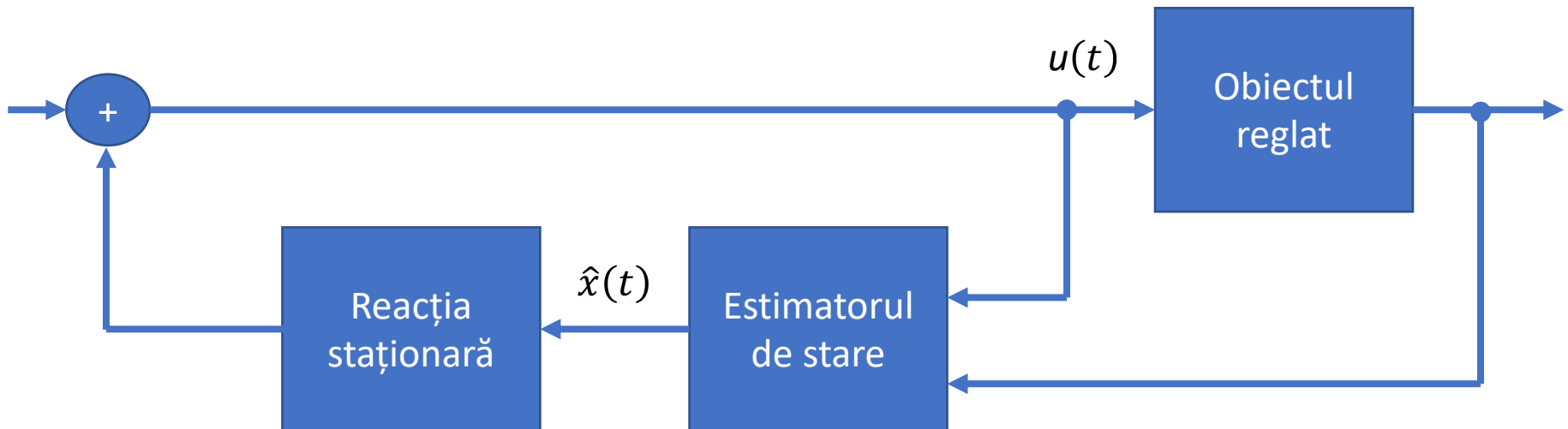
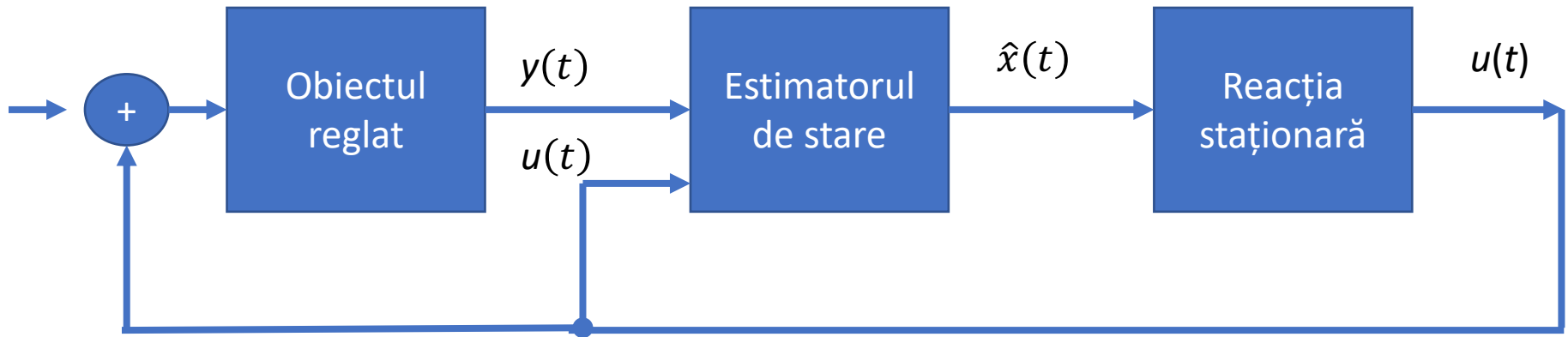
Elaborarea regulatorului

- După cum a fost stabilit pentru un sistem observabil se poate de realizat un sistem dinamic (estimator) variabilele de ieșire ale căruia se apropie asimptotic către variabilele de stare ale sistemului inițial.
- Astfel aceste rezultate trebuie să fie reunite pentru elaborarea regulatorului.

Elaborarea regulatorului

- Astfel aceste rezultate trebuie să fie reunite pentru elaborarea regulatorului.
- Acest regulator este alcătuit dintr-un sistem dinamic ce furnizează la ieșire estimarea vectorului de stare $\hat{x}(t)$ după rezultatele măsurării ieșirii sistemului $y(t)$ și a intrării $u(t)$, și din reacția staționară $u(t) = -k(t)\hat{x}(t)$

Elaborarea regulatorului



Utilizare estimatorului de ordinul n

- Se dă un sistem liniar controlabil și observabil de ordinul „ n ”

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t)\end{aligned}$$

- Fie că matricea reacției K este aleasă astfel încât polinomul caracteristic al matriciei $[\mathbf{A} - \mathbf{B}K]$ coincide cu polinomul dorit ales de noi $\varphi_c(\lambda)$.

Utilizare estimatorului de ordinul n

- Se presupune acum, că s-a elaborat un estimator asimptotic

$$\dot{\hat{x}}(t) = [A - GC]\hat{x}(t) + Gy(t) + Bu(t)$$

- Se notează polinomul caracteristic al estimatorului

$$\varphi_E(\lambda) = \varphi_{[A-GC]}.$$

Deoarece vectorul $x(t)$ nu este accesibil pentru măsurarea, atunci se încearcă de a înlocui vectorul $x(t)$ cu vectorul estimat $\hat{x}(t)$.

Utilizare estimatorului de ordinul n

- **Teorema:** fie că se dă un sistem controlabil și observabil (A, B, C) . Fie că matricea K a fost aleasă astfel încât polinomul caracteristic al matriciei $[A - BK]$ coincide cu polinomul dorit

- $\varphi_c(\lambda) = \lambda^n + q_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + q_0$

- Și fie că a fost aleasă matricea G astfel încât polinomul caracteristic al matriciei $[A - GC]$ coincide cu

$$\varphi_E = \lambda^n + \gamma_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \gamma_0$$

Utilizare estimatorului de ordinul n

- Atunci polinomul caracteristic al sistemului închis de gradul „ $2n$ ”

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BK\hat{x}(t)$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = [A - GC]\hat{x}(t) - BK\hat{x}(t) + GCx(t),$$

- care se va nota prin $\varphi_0 = \varphi_c(\lambda) \varphi_E(\lambda)$

Utilizare estimatorului de ordinul n

- Teorema dată afirmă că dacă avem de a lucra cu numere caracteristice ale sistemului închis, atunci nu are importanță dacă în circuitul reacției este utilizat vectorul $x(t)$ sau $\hat{x}(t)$.
- Deci, construcția circuitului de reacție și construcția estimatorului pot fi realizate independent.
- Iar polinomul caracteristic al sistemului închis va fi egal cu produsul polinoamelor caracteristice ale sistemului cu reacție după stare și a estimatorului.

Algoritmul de calcul al coeficienților regulatorului pentru sistemul cu o singură intrare

- Fie că sunt date matriciile unui sistem controlabil și observabil cu o singură intrare și o singură ieșire $\{A, b, c^T\}$ și fie polinomul caracteristic al matriciei A este

$$\varphi_A = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_0$$

- Alegem polinomul caracteristic dorit:

$$\varphi_C = \lambda^n + \gamma_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \gamma_0$$

- Iar polinomul caracteristic al estimatorului:

$$\varphi_l = \lambda^n + \beta_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \beta_0$$

Algoritmul de calcul al coeficienților regulatorului pentru sistemul cu o singură intrare

- Se introduc următoarele notații:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}; b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- Ecuațiile regulatorului în conformitate cu rezultatele expuse mai sus au următoarea formă:

$$\dot{\hat{x}}(t) = [A - lc^T]\hat{x}(t) + ly(t) + bu(t)$$

$$u(t) = -k^T \hat{x}(t).$$

Algoritmul de calcul al coeficienților regulatorului pentru sistemul cu o singură intrare

- Matriciile regulatorului pot fi calculate în conformitate cu următoarele formule:

$$[A - lc^T] = \begin{bmatrix} -\beta_{n-1} & \cdot & 1 & \dots & 0 \\ -\beta_{n-2} & & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 & & 1 \\ -\beta_0 & & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}; l = \begin{bmatrix} \beta_{n-1} - \alpha_{n-1} \\ \beta_{n-2} - \alpha_{n-2} \\ \vdots \\ \beta_1 - \alpha_1 \\ \beta_0 - \alpha_0 \end{bmatrix}.$$

$$b = P\hat{b}$$

$$k^T = [\gamma_0 - \alpha_0 \quad \dots \quad \gamma_{n-1} - \alpha_{n-1}]p^{-1}$$

Algoritmul de calcul al coeficienților regulatorului pentru sistemul cu o singură intrare

- Ca să fie obținute matriciile P și P^{-1} este necesar de a efectua următoarele calcule
 - $U = [b \quad Ab \quad \dots \quad A^{n-1}b]$
 - $\hat{U} = [\hat{b} \quad \hat{A}\hat{b} \quad \dots \quad \hat{A}^{n-1}\hat{b}]$
 - $\tilde{U} = \hat{U}^{-1}$
 - $\hat{c}^T = c^T U \tilde{U}$
 - $P = \{[\hat{c} \quad \hat{A}^T \hat{c} \quad \dots \quad (\hat{A})^{Tn-1} \hat{c}] \tilde{U}\}^T$

Exemplu

- Fie că este dat sistemul descris de modelul intrare-stare-ieșiere

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; \quad b^T = [b_1 \quad b_0]; \quad c^T = [c_0]; \quad D = 0.$$

- Pe baza matriciei A, se determină polinomul caracteristic

$$\varphi_A = \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$$

- Se aleg: $\varphi_C = \lambda^2 + \gamma_1 \lambda + \gamma_0$

$$\varphi_l = \lambda^2 + \beta_1 \lambda + \beta_0$$