

Universitatea Tehnică a Moldovei

Facultatea Calculatoare, Informatică și Microelectronică

Descrierea SRA staționare în spațiul stărilor

conf. univ., dr. Irina Cojuhari

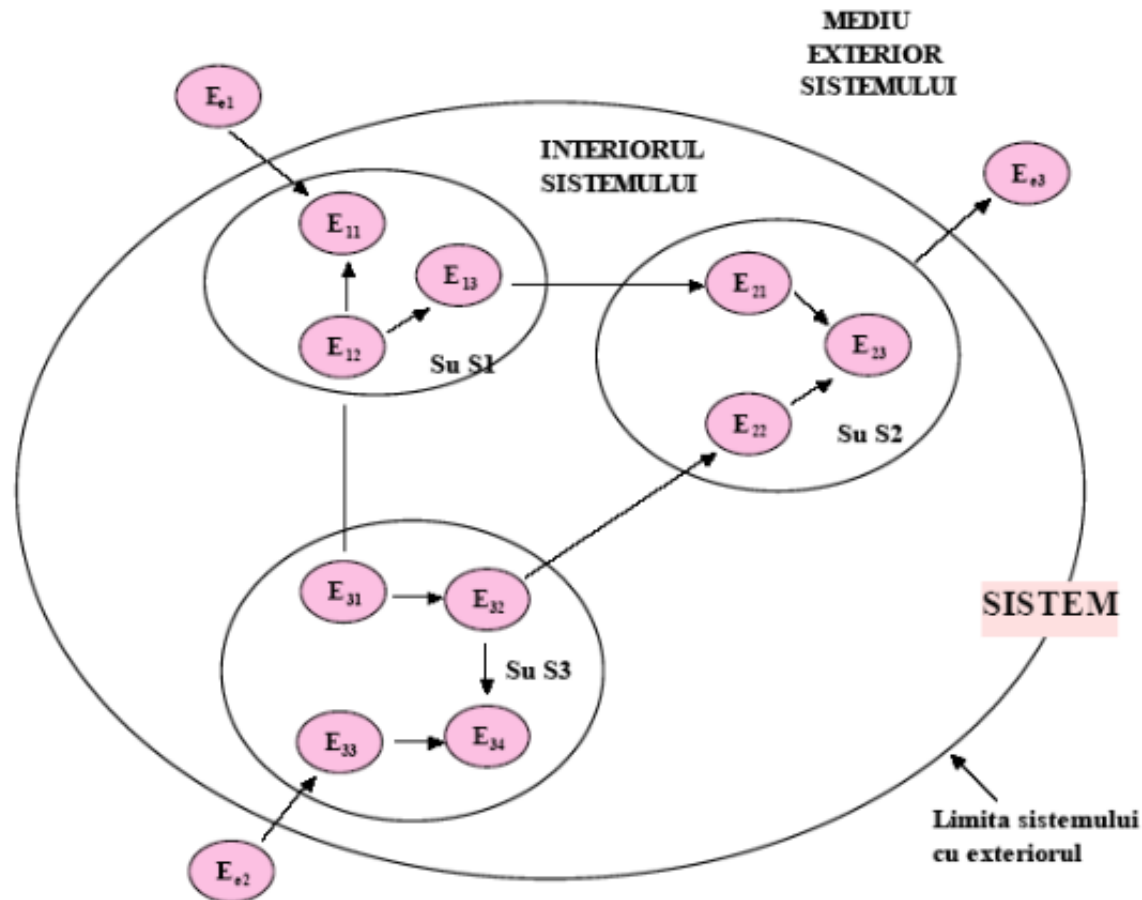
- 30 ore-curs.
- 30 ore –laborator.

- 2 evaluare –60%
- Examen – 40%

Introducere

- În orice descriere **modelul** este elementul cheie. În același timp trebuie subliniat faptul că această descriere nu este unică. Un rol aparte din punctul de vedere al mecatronicii îl joacă descrierea dinamicii sistemului. Modelele pentru sistemele dinamice pot fi construite în domeniul timp continuu, discret sau mixt.
- O primă definiție a **sistemelor** este cea de sistem termodinamic: porțiune din univers pentru care se poate delimita un “interior” și un “exterior”, interiorul conținând un număr oarecare de corpuri macroscopice, considerate ca având o structură fizică continuă. Caracterizarea acestor sisteme se realizează prin *stările* lor termodinamice, reprezentate ca o mulțime de parametri, care descriu aspecte interne ale sistemului și relațiile cu mediul înconjurător (exteriorul sistemului). Tranziția de stare a unui sistem termodinamic este denumită *proces fizic*.

Prezentarea schematică unui sistem



Clasificarea modelelor de obiecte după proprietăți

- Diversitatea și complexitatea proceselor tehnologice și tehnice întâlnite în practică presupune o varietate mare de modele matematice care descriu adecvat funcționarea și proprietățile lor. Reieșind din aceste considerente și ținând cont de unele particularități identice, modelele matematice ale obiectelor de conducere pot fi clasificate după cum urmează.

Clasificarea modelelor de obiecte după proprietăți

- Modelele matematice utilizate în studiul sistemelor automate pot fi de tipul:

1. Intrare-ieșire

- ecuații diferențiale;
- funcții de transfer;
- funcția frecvențială.

2. Intrare- stare-ieșire

- ecuații de stare

Modele intrare-stare-ieșire

Noțiunea “**stare**” reprezintă o noțiune care s-a dovedit în decursul timpului extrem de recomandată pentru înțelegerea naturii sistemelor dinamice. Apărută pentru prima dată în lucrările matematicianului H. Poincaré, noțiunea de “**stare**” a fost utilizată pentru studiul comportării dinamice a sistemelor oscilante mecanice, descrise ca și modele matematice de ordinul doi. Ulterior, conceptul a fost generalizat – prin lucrările matematicianului A. Leapunov – pentru modele de ordin superior.

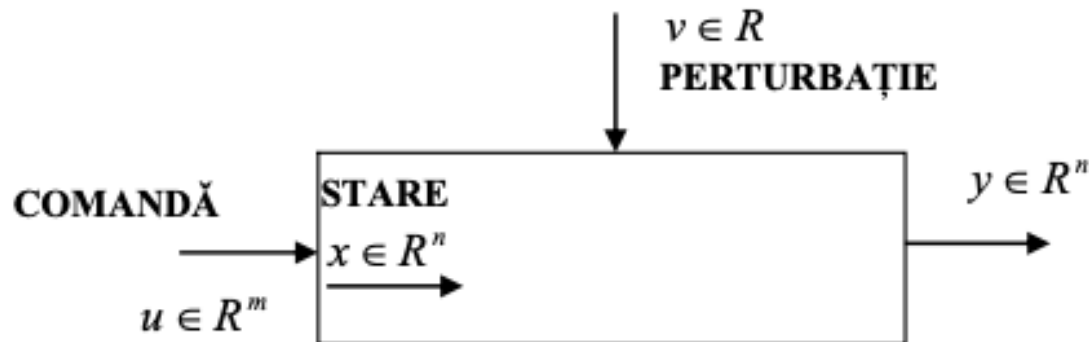
Modele intrare-stare-ieșire

- Un sistem strict *cauzal* este caracterizat de transferul mărimii de intrare spre ieșirea sistemului conform schemei prezentate în:

$$\text{intrare } u(t) \rightarrow \text{stare } x(t) \rightarrow \text{ieșire } y(t)$$

Modele intrare-stare-ieșire

- În figura de mai jos se prezintă schema bloc a unui sistem dinamic. Sistemul este strict cauzal deoarece variabila de intrare afectează mai întâi variabila de stare, prin *ecuația diferențială de stare* (aceasta definește dinamica sistemului), iar variabila de stare determină, printr-o ecuație algebrică (ecuația de ieșire), variabila de ieșire a sistemului.



Modele intrare-stare-ieșire

- *Un sistem dinamic poate fi caracterizat prin:*
- una sau mai multe mărimi de intrare variabile în timp $u_i(t)$ care formează intrarea sistemului;
- una sau mai multe mărimi de ieșire variabile în timp, $y_j(t)$ care formează ieșirea sistemului;
- o ecuație diferențială care leagă variabilele de stare $x_n(t)$ de derivatele acestora, de mărimile de intrare $u_i(t)$ și perturbația $v(t)$;
- o ecuație de ieșire, care leagă mărimile de ieșire $y_j(t)$ de variabilele de stare $x_n(t)$ și de mărimile de intrare $u_i(t)$.

Modele intrare-stare-ieșire

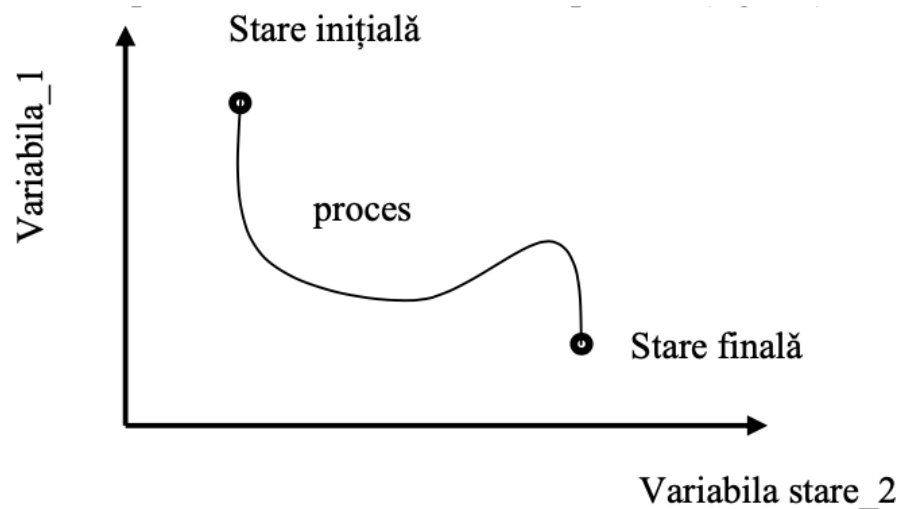
- Se definește sistemul simplu strict cauzal ca și sistemul de tipul:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, u, v, t) \\ y &= g(x)\end{aligned}$$

- În care nu există nici o conexiune de tip reacție inversă.
- Ecuația diferențială de stare și ecuația de ieșire formează împreună modelul matematic al sistemului dinamic.

Exemplu

- Pentru un sistem termic trecerea dintr-o stare de echilibru în altă stare de echilibru poartă denumirea de proces. Exemplu de variabile de stare: **masa, temperatura, volumul, presiunea, densitatea, entropia** etc.



Modele intrare-stare-ieșire

- Orice sistem liniar poate fi reprezentat prin modelul cu variabile de stare (*state-space model*) descris de ecuațiile:

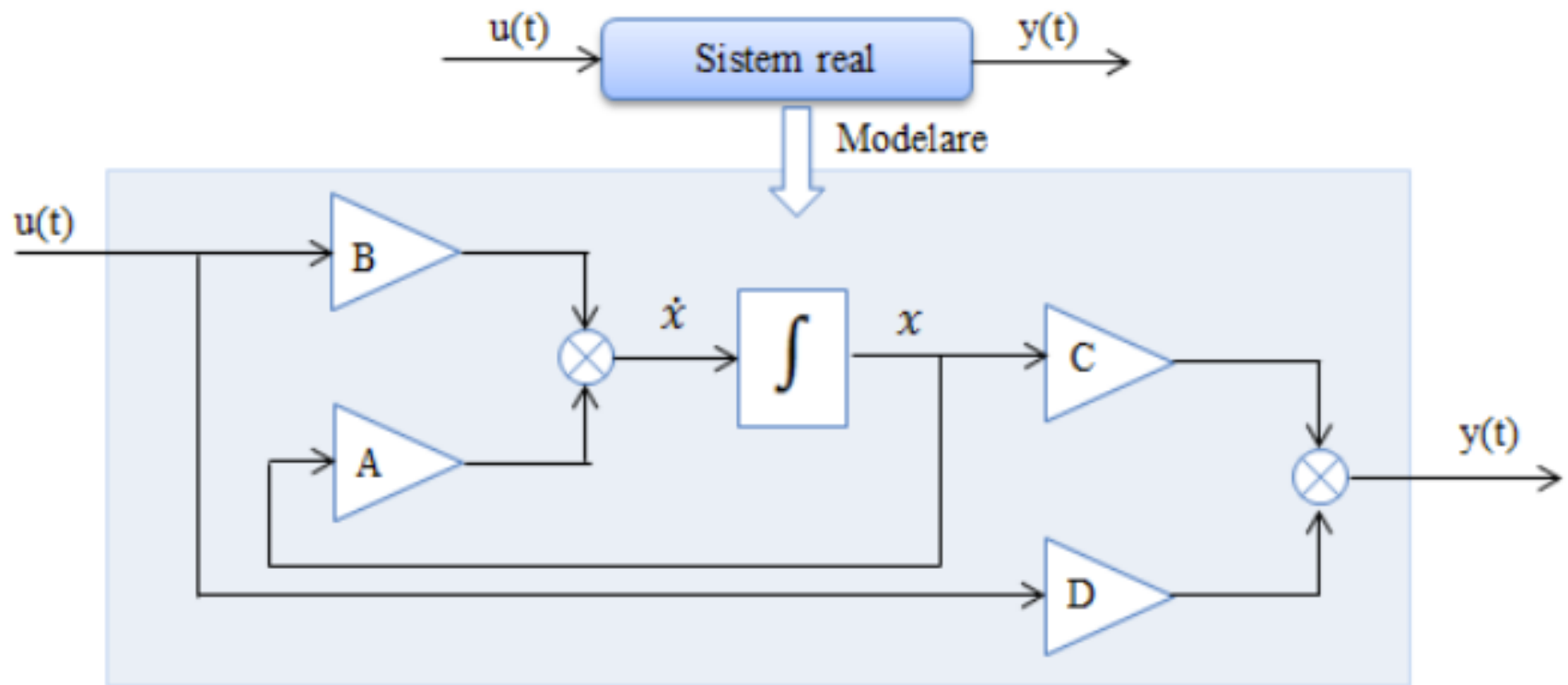
$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases}$$

- Prima ecuație a modelului se numește *ecuație de stare*, iar ecuația a doua se numește *ecuație de ieșire*.

Modele intrare-stare-ieșire

- Variabilele de stare sunt elementele “cu memorie” din sistem (cele care implică schimburi energetice). Acestea pot fi identificate și în sistemul de ecuații diferențiale, fiind semnalele care se derivează.
- Dacă sistemul are un semnal de intrare $u(t)$, un semnal de ieșire $y(t)$ și o variabilă de stare $x(t)$, atunci va fi descris de cele două ecuații de mai sus, unde A, B, C, D sunt coeficienți (constante).

Schema bloc (*flowchart*) pentru modelul cu ecuații de stare



Modele intrare-stare-ieșire

- Pentru a determina modelul cu variabile de stare a unui sistem, trebuie parcurse următoarele etape:
- Scrierea ecuațiilor diferențiale care descriu sistemul și identificarea intrărilor, ieșirilor și a variabilelor de stare din sistem.
- Prelucrarea ecuațiilor diferențiale în domeniul timp pentru a ajunge la ecuațiile modelului cu variabile de stare.
- Identificarea coeficienților/matricelor A , B , C , D .

Modele intrare-stare-ieșire

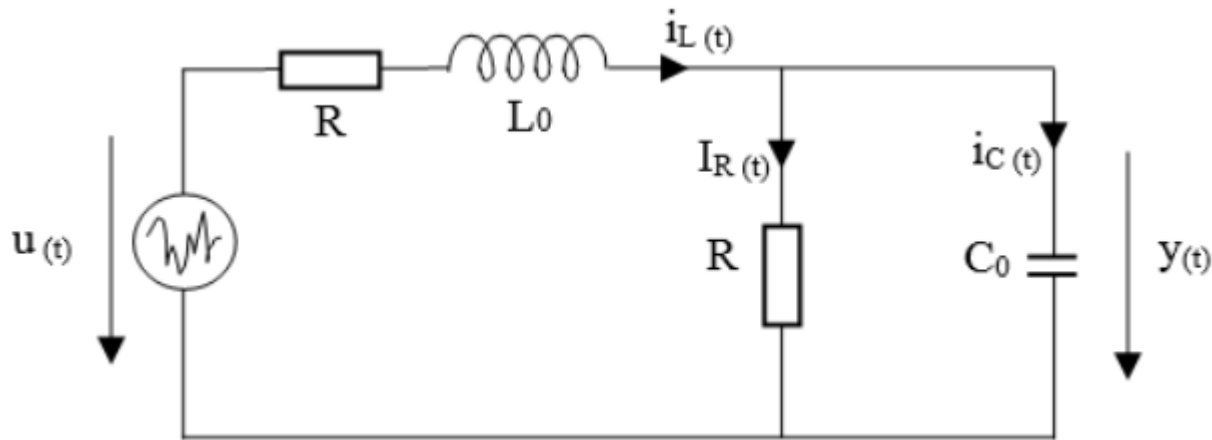
Matricea	Structura	Dim.	Denumire
X	$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_1(t) \\ \dots \\ x_N(t) \end{bmatrix}$	$N \times 1$	matricea de stare (matricea de tranziție a stărilor)
$\frac{dX}{dt} = \dot{X}$	$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dots \\ \dot{x}_N(t) \end{bmatrix}$	$N \times 1$	matricea derivatei variabilelor de stare
U	$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \dots \\ u_M(t) \end{bmatrix}$	$M \times 1$	matricea variabilelor de intrare
Y	$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_Q(t) \end{bmatrix}$	$Q \times 1$	matricea variabilelor de ieșire

Modele intrare-stare-ieșire

A	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{bmatrix}$	NxN	matricea sistemului (<i>system matrix</i>)
B	$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1M} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{N1} & b_{N2} & \dots & b_{NM} \end{bmatrix}$	NxM	matricea de intrare (<i>input matrix</i>)
C	$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{Q1} & c_{Q2} & \dots & c_{QN} \end{bmatrix}$	QxN	matricea de ieșire (<i>output matrix</i>)
D	$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1M} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{Q1} & d_{Q2} & \dots & d_{QM} \end{bmatrix}$	QxM	matricea de transfer direct (<i>direct transmittance matrix</i>)

Exemplu

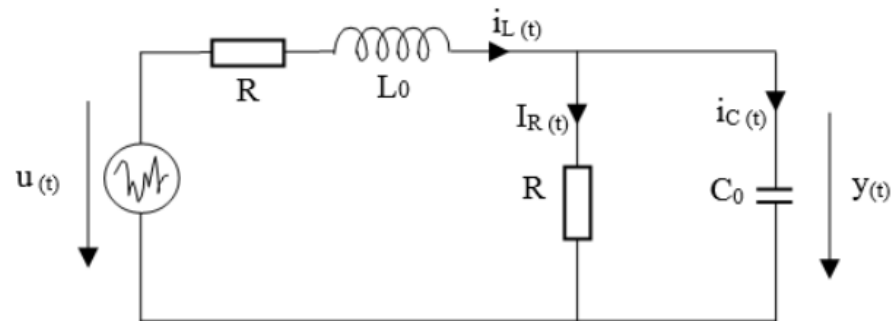
- Fie circuitul de mai jos, pentru care tensiunea de alimentare $u(t)$ se consideră semnal de intrare, iar tensiunea pe condensator $y(t)$ se consideră semnal de ieșire. Să se determine matricele A , B , C , D din modelul cu variabile de stare pentru acest sistem.



Exemplu

- Ecuațiile diferențiale care descriu sistemul sunt:

$$\begin{cases} u(t) = R \cdot i_L(t) + u_L(t) + y(t) \\ i_L(t) = i_R(t) + i_C(t) \\ y(t) = R \cdot i_R(t) \\ u_L(t) = L_0 \cdot \frac{di_L(t)}{dt} \\ i_C(t) = C_0 \cdot \frac{dy(t)}{dt} \end{cases}$$



Matricea variabilelor de intrare:

$$\mathbf{U} = [u(t)]$$

$$M = 1$$

Matricea variabilelor de stare:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} i_L(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

$$N = 2$$

Matricea variabilelor de ieșire:

$$\mathbf{Y} = [y(t)]$$

$$Q = 1$$

Exemplu

$$\begin{cases} u(t) = R \cdot i_L(t) + u_L(t) + y(t) \\ i_L(t) = i_R(t) + i_C(t) \\ y(t) = R \cdot i_R(t) \\ u_L(t) = L_0 \cdot \frac{di_L(t)}{dt} \\ i_C(t) = C_0 \cdot \frac{dy(t)}{dt} \end{cases} \quad \begin{array}{l} U = [u(t)] \\ X = \begin{bmatrix} i_L(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \\ Y = [y(t)] \end{array} \quad \begin{array}{l} M = 1 \\ N = 2 \\ Q = 1 \end{array} \quad \begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases}$$

- Ecuația de stare din model $\dot{X} = A \cdot X + B \cdot U$ poate fi scrisă desfășurat astfel:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} di_L(t)/dt \\ dy(t)/dt \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_L(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} \cdot u(t) \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} di_L(t)/dt = a_{11} \cdot i_L(t) + a_{12} \cdot y(t) + b_{11} \cdot u(t) \\ dy(t)/dt = a_{21} \cdot i_L(t) + a_{22} \cdot y(t) + b_{21} \cdot u(t) \end{cases} \end{aligned}$$

Exemplu

- Deoarece $u_L(t)$ nu este nici variabilă stare și nici semnal de intrare

$$\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{1}{L_0} \cdot (u(t) - R \cdot i_L(t) - y(t))$$

- După desfacerea parantezelor și re-aranjarea termenilor, se pot identifica coeficienții

$$\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{-R}{L_0} \cdot i_L(t) + \frac{-1}{L_0} \cdot y(t) + \frac{1}{L_0} \cdot u(t)$$

$$a_{11} = \frac{-R}{L_0}, \quad a_{12} = \frac{-1}{L_0}, \quad b_{11} = \frac{1}{L_0}$$

Exemplu

$$\begin{bmatrix} di_L(t)/dt \\ dy(t)/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_L(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} \cdot u(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} di_L(t)/dt = a_{11} \cdot i_L(t) + a_{12} \cdot y(t) + b_{11} \cdot u(t) \\ dy(t)/dt = a_{21} \cdot i_L(t) + a_{22} \cdot y(t) + b_{21} \cdot u(t) \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= \frac{1}{C_0} \cdot (i_L(t) - i_R(t)) = \frac{1}{C_0} \cdot \left(i_L(t) - \frac{y(t)}{R} \right) \\ &= \frac{1}{C_0} \cdot i_L(t) + \frac{-1}{C_0 \cdot R} \cdot y(t) + 0 \cdot u(t) \end{aligned}$$

$$a_{21} = \frac{1}{C_0}, \quad a_{22} = \frac{-1}{C_0 \cdot R}, \quad b_{21} = 0$$

Exemplu

- Matricea sistemului A și matricea de intrare B sunt așadar:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-R}{L_0} & \frac{-1}{L_0} \\ \frac{1}{C_n} & \frac{-1}{C_n \cdot R} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1/L_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Ecuția de ieșire din model $Y = C \cdot X + D \cdot U$ poate fi scrisă desfășurat astfel:

$$y(t) = [c_{11} \ c_{12}] \cdot \begin{bmatrix} i_L(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + [d_{11}] \cdot u(t)$$

- Deoarece $y(t)$ este în același timp semnal de ieșire și variabilă de stare, rezultă:

$$y(t) = 0 \cdot i_L(t) + 1 \cdot y(t) + 0 \cdot u(t) \quad C = [0 \ 1] \quad D = [0]$$

Transformări

- Ecuația diferențială a unui sistem poate fi transformată prin operații matematice simple sub forma:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots b_0 u(t)$$

sau

$$y^{(n)}(t) + \frac{a_{n-1}}{a_n} y^{(n-1)}(t) + \dots + \frac{a_0}{a_n} y(t) = \frac{b_m}{a_n} u^{(m)}(t) + \dots \frac{b_0}{a_n} u(t)$$

sau

$$y^{(n)}(t) = -\frac{a_{n-1}}{a_n} y^{(n-1)}(t) - \dots - \frac{a_0}{a_n} y(t) + \frac{b_m}{a_n} u^{(m)}(t) + \dots \frac{b_0}{a_n} u(t)$$

Transformări

- Fie că este dat un sistem descris prin ecuația diferențială

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \dots + b_{n-1} \dot{u} + b_n u$$

- Sau

$$Y(s) (s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n) = U(s) (b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n)$$

- Funcția de transfer:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

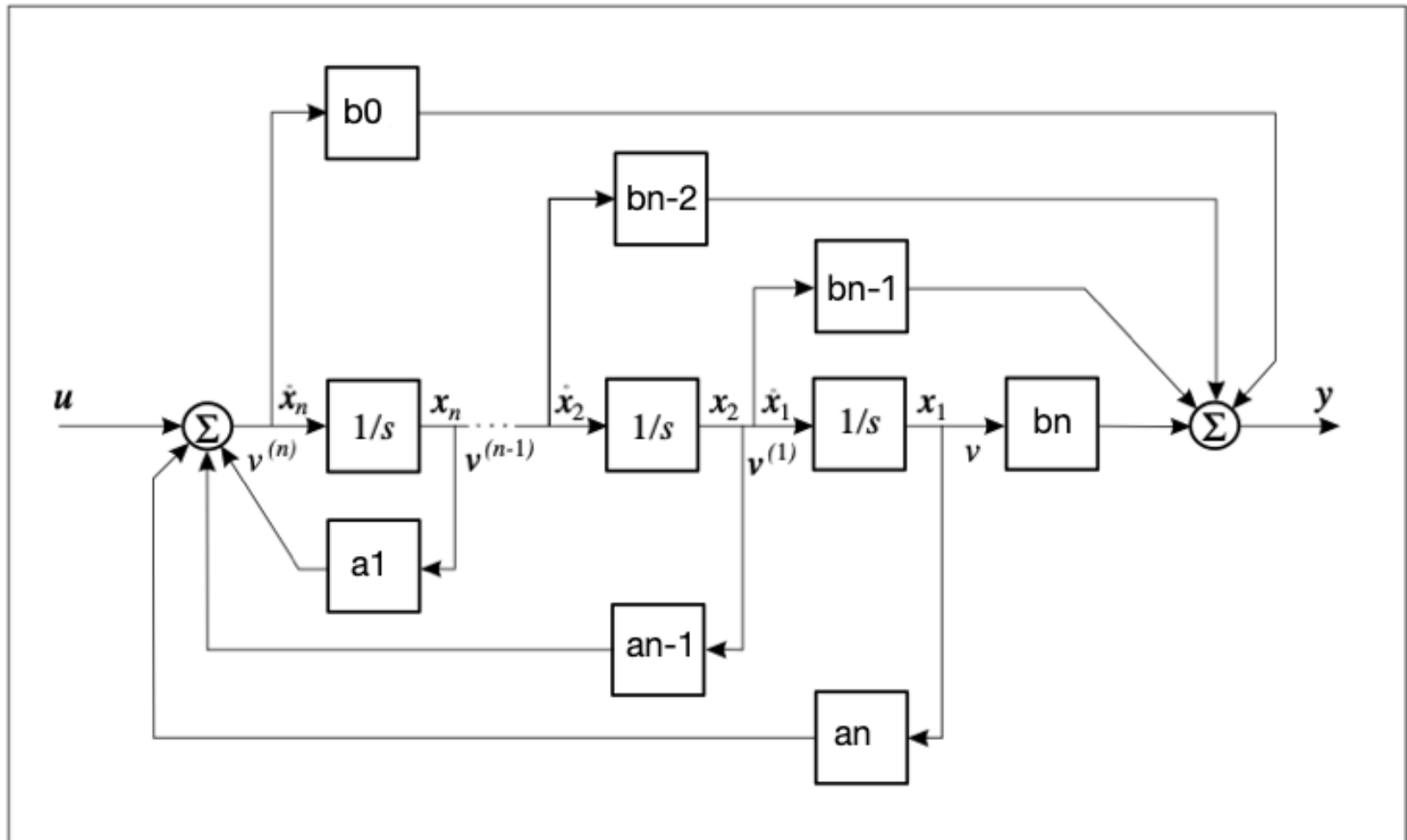
Forma canonică controlabilă

- Reprezentarea intrare-stare-ieșire

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 & b_{n-1} - a_{n-1} b_0 & \dots & b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

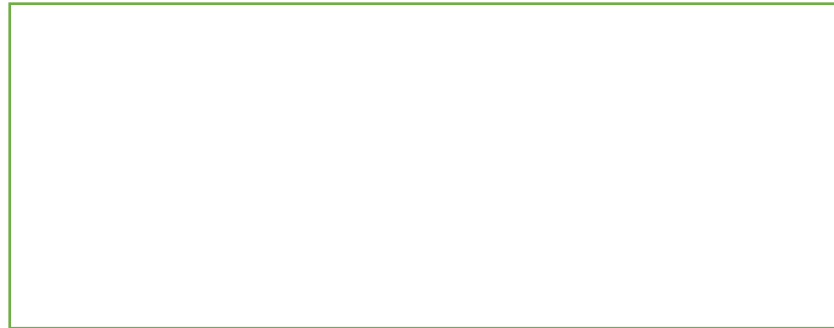
Schema bloc



Exemplu:

- Este dată: $\frac{U(s)}{Y(s)} = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$

- Obținem

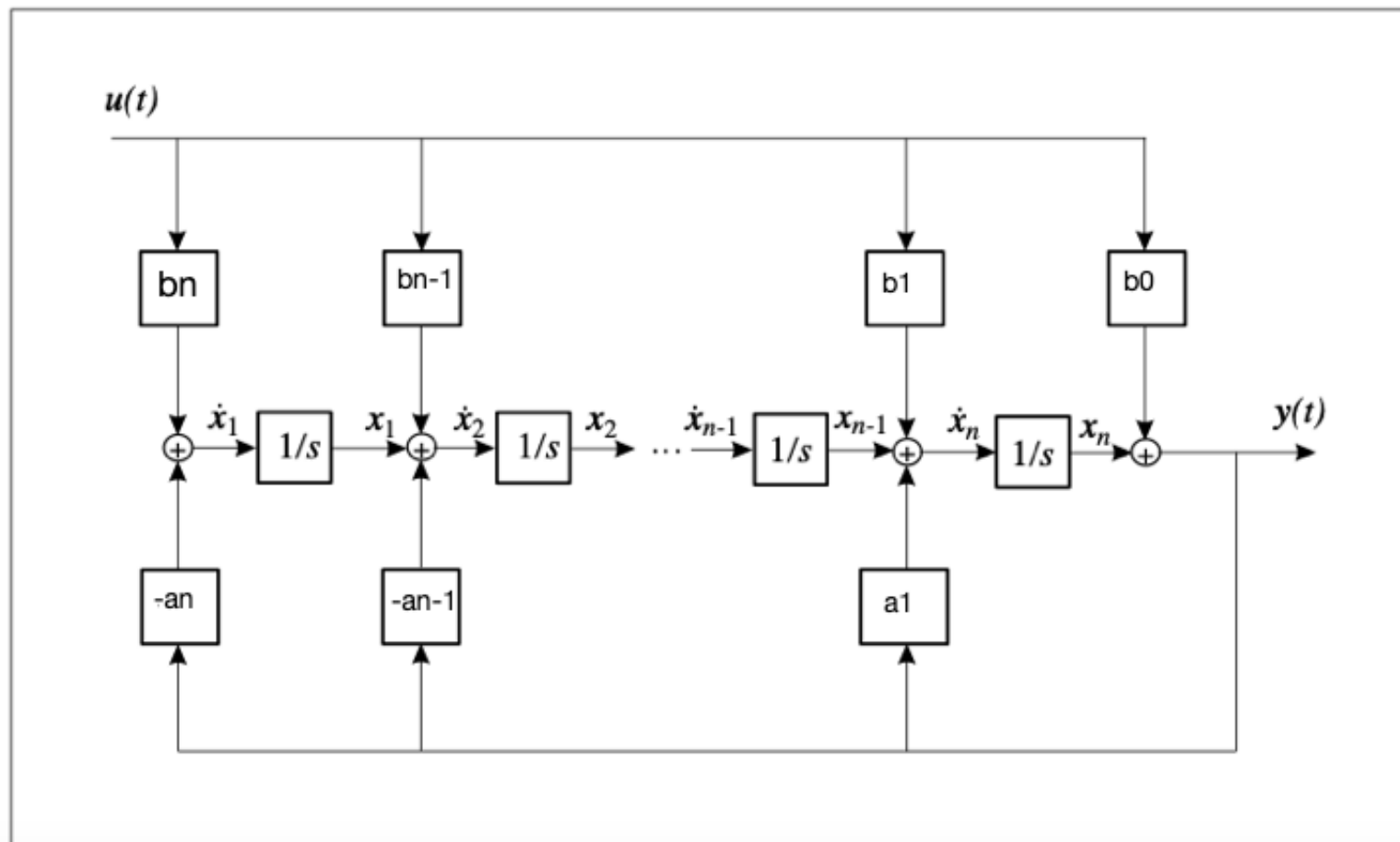


Forma canonică observabilă

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

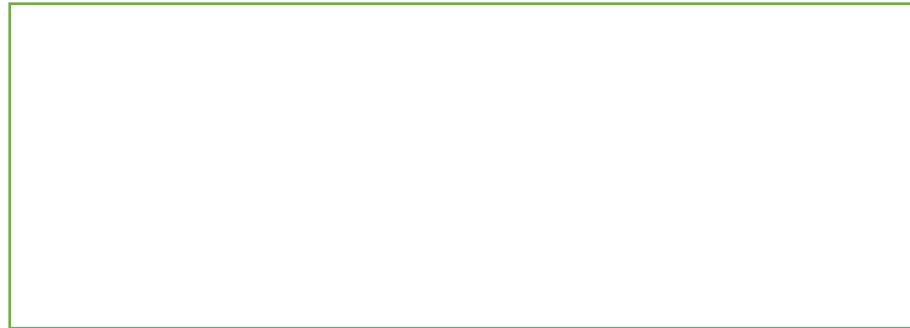
Schema bloc



Exemplu:

- Este dată: $\frac{U(s)}{Y(s)} = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$

- Obținem:



Forma diagonală canonică

- Sistemul se descrie prin funcția de transfer dată în următoarea formă

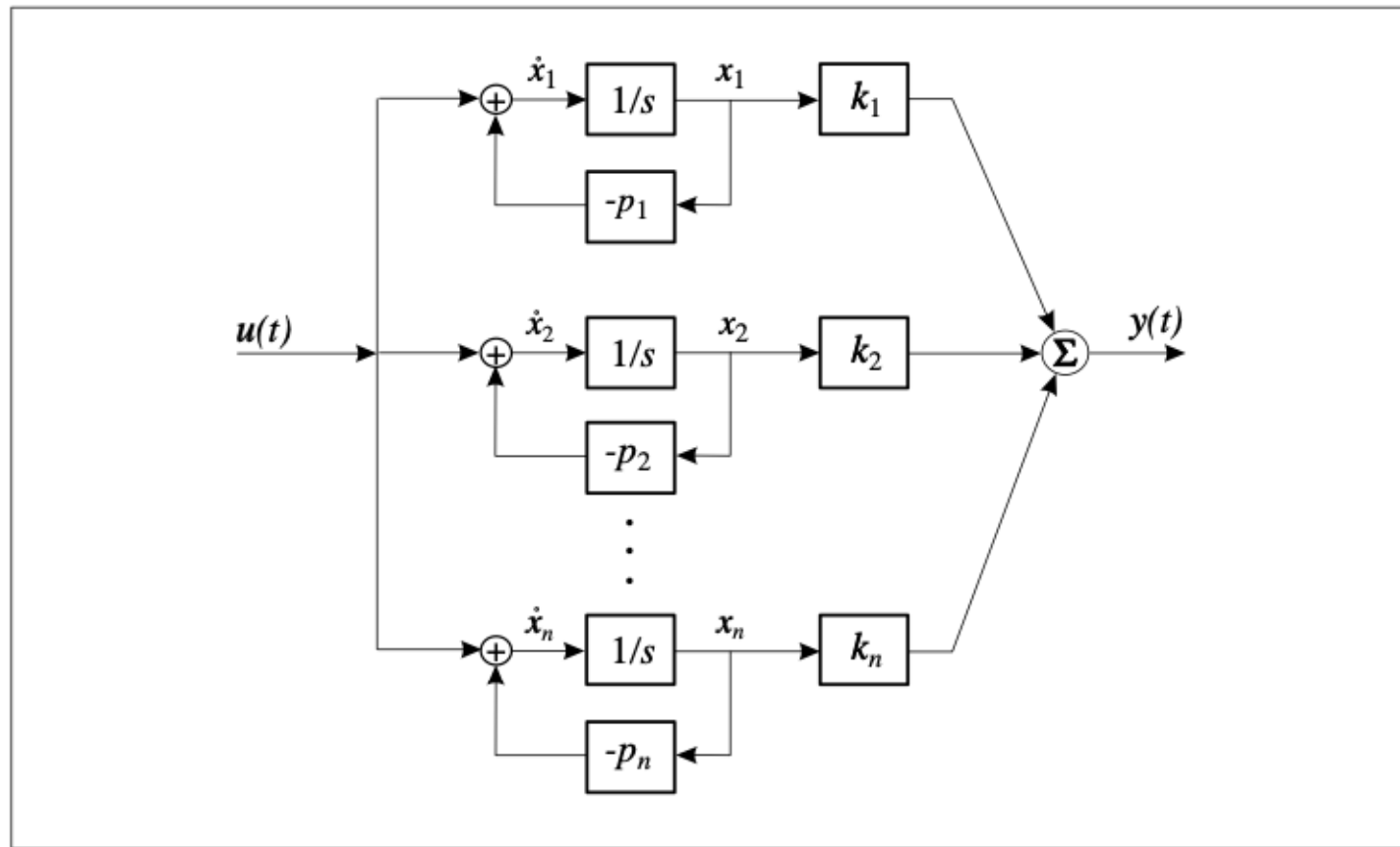
$$\begin{aligned}\frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{P_m(s)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)} \\ &= \frac{k_1}{s + p_1} + \frac{k_2}{s + p_2} + \cdots + \frac{k_n}{s + p_n}\end{aligned}$$

- Forma diagonală canonică este

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -p_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -p_2 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -p_n \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad \cdots \quad k_n] \mathbf{x}(t)$$

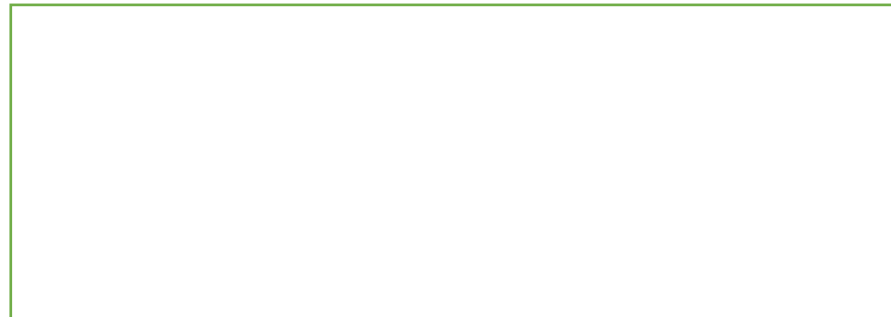
Schema bloc



Exemplu:

- Este dată $\frac{U(s)}{Y(s)} = \frac{s+3}{s^2+3s+2} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$

- Obținem



Convertirea modelului ISI->FDT

- Este dat sistemul dinamic descris prin următorul model matematic

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du,$$

$$x(0) = x_0$$

- Convertirea se face în baza relației:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = C \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} B + D$$

Calculul matriciei inverse de ordinul 2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

- 1. Se calculează $\det(A)$ după formula:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- Dacă $\det(A) > 0$, matricea este inversabilă
- 2. Se scrie transpusa matriciei A .

$${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Calculul matriciei inverse de ordinul 2

3. Se construiește matricea adjunctă a lui A

$$A^* = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ unde}$$

$$a = (-1)^{1+1} |a_{22}|$$

$$b = (-1)^{1+2} |a_{12}|$$

$$c = (-1)^{2+1} |a_{21}|$$

$$d = (-1)^{2+2} |a_{11}|$$

4. Se construiește inversa matriciei A

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*.$$

Calculul matriciei inverse de ordinul 3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- 1. Se calculează $\det(A)$ după formula:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

- Dacă $\det(A) > 0$, matricea este inversabilă
- 2. Se scrie transpusa matriciei A .

$${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Calculul matriciei inverse de ordinul 3

3. Se construiește matricea adjunctă a lui A

$$A^* = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, \text{ unde}$$
$$a = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \quad d = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \quad g = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{22} & a_{32} \end{vmatrix}$$
$$b = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} \quad e = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} \quad h = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} \\ a_{12} & a_{32} \end{vmatrix}$$
$$c = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} \quad f = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} \quad i = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

4. Se construiește inversa matriciei A

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*.$$

Exemplu

- De transformat fdt în modelul intrare-stare-ieșire

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0]x$$

$$sI = s \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}$$

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 1 & 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 1 & 2 & s+3 \end{bmatrix} = s^2(s+3) + 2s + 1 = s^3 + 3s^2 + 2s + 1$$

Exemplu

$$\det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 1 & 2 & s+3 \end{bmatrix} = s^2(s+3) + 2s + 1 = s^3 + 3s^2 + 2s + 1$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} = \frac{\begin{bmatrix} (s^2 + 3s + 2) & s + 3 & 1 \\ -1 & s(s + 3) & s \\ -s & -(2s + 1) & s^2 \end{bmatrix}}{s^3 + 3s^2 + 2s + 1}$$

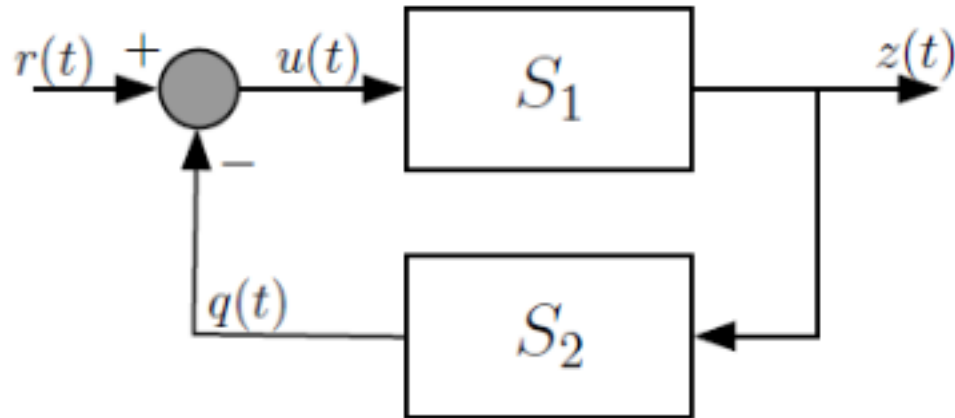
$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

$$G(s) = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s^2 + 3s + 2) & s + 3 & 1 \\ -1 & s(s + 3) & s \\ -s & -(2s + 1) & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{s^3 + 3s^2 + 2s + 1}$$

$$G(s) = \frac{10(s^2 + 3s + 2)}{s^3 + 3s^2 + 2s + 1}$$

Exemplu

Este dat sistemul:



$$S_1: \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$
$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

$$S_2: \quad \dot{v}(t) = -5v(t) + 2z(t)$$
$$q(t) = 0.5v(t)$$

De obținut funcții de transfer: $G1(s)=Z(s)/U(s)$; $G2(s)=Q(s)/Z(s)$;

$$H1(s) = \frac{Z(s)}{U(s)} \quad H2(s) = \frac{Q(s)}{Z(s)} \quad H(s) = \frac{Z(s)}{R(s)}$$

Exemplu

$$S_1: \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ z(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad D = 0.$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = C \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} B + D$$

$$sI = s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix} = s(s+2) + 1 = s^2 + 2s + 1$$

Controlabilitatea sistemului

- Este dat sistemul prezentat în spațiul stărilor:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases}$$

- **Defeniție:** Sistemul este **controlabil** dacă și numai dacăoricare ar fi două stări $x_0=x(t_0)$ și $x_1=x(t_1)$ și momentele de timp t_0, t_1 ($t_0 < t_1$), există o comandă $u(t)$, cu $t \in [t_0, t_1]$, care să permită trecerea sistemului din starea inițială x_0 în starea finală x_1 .
- Un sistem este **complet controlabil** dacă toate stările îi sunt controlabile.
- Un sistem este **total necontrolabil** dacă toate stările îi sunt necontrolabile.

Controlabilitatea sistemului

- Sistemul este controlabil dacă și numai dacă

$$\Gamma c = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

- Sistemul este:
 - *cu stare controlabilă* – dacă și numai dacă rangul matricei de controlabilitate este egal cu dimensiunea n : $\text{rang } \Gamma c = n$.
 - *cu stare parțial controlabilă* dacă $\text{rang } \Gamma c = r < n$;
 - *cu stare necontrolabilă* dacă $\text{rang } \Gamma c = 0$.

Exemplu

- De verificat controlabilitatea sistemului descris prin model intrare-stare-ieșire:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$