UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI

Mecanica Teoretică

Mecanica Analitică. Teoremele de bază

Introducere

- Principiul D’Alembert și metoda cinetostaticii
- Principiul deplasărilor virtuale
- Principiul D’Alembert – Lagrange. Ecuațiile generale ale dinamicii. Coordonate generalizate

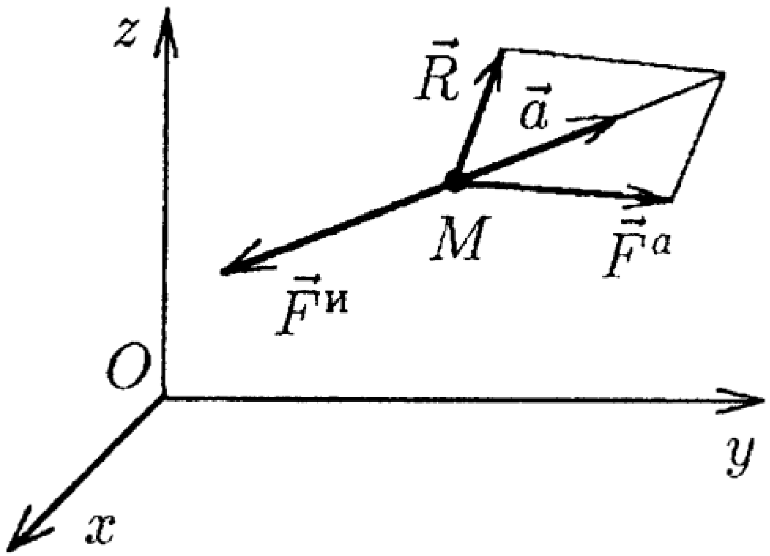
Principiul D’Alembert

- Anterior, am analizat metodele de rezolvare a problemelor de dinamică, utilizând legile lui Newton.
- În Mecanica teoretică sunt elaborate și alte metode de rezolvare a problemelor de dinamică, la baza cărăra stau anumite presupuneri inițiale, numite *principiile mecanicii*
- *Principiul D’Alembert* (legat de *metoda cinetostaticii*) – metodă de rezolvare a problemelor de dinamică, în care ecuațiile diferențiale ale mișcării sunt scrise în formă de ecuații de echilibru.

Principiul D'Alembert pentru un punct material

Fie un punct material de masă *m*, care realizează mișcare relativă în raport cu sistemul inerțial de coordonate *Oxyz* sub acțiunea forței active ***F**^a^* și a reacțiunii ***R***.

Forța de inerția este vectorul $\vec{F}^{и} = -m\vec{a},$



Astfel, principiul D'Alembert se formulează astfel:

Forțele active, reacțiunile și forțele de inerție ce acționează asupra unui punct material, formează o totalitate de forțe echilibrate

$$(\vec{F}^{a}, \vec{R}, \vec{F}^{и}) \sim 0.$$

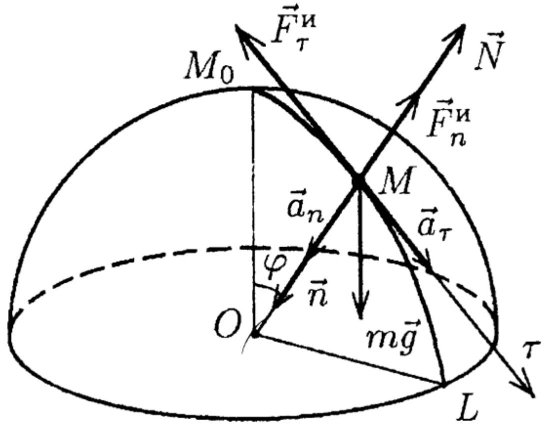
Ecuația de echilibru pentru acest sistem de forțe are forma

$$\vec{F}^{a} + \vec{R} + \vec{F}^{и} = 0.$$

Principiul D'Alembert pentru un punct material. Exemple

Exemplu. Din punctul superior al unei cupole sferice absolut netedă de rază *R* alunecă un punct material *M* de masă *m*, fără viteză inițială. **Determinați punctul la care corpul se va desprinde de cupolă.**

Rezolvare. Punctul se va mișca pe meridianul M_0L. Fie într-un moment oarecare de timp, raza *OM* formează cu verticala unghiul φ. Descompunem vectorul accelerației în compenentele tangețială și normală. Reprezentăm forța de inerție corespunzător acestor componente:



$$\vec{F}^{и} = \vec{F}_\tau^{и} + \vec{F}_n^{и}.$$

$$m\,dv/dt \qquad mv^2/R$$

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_\tau^{и} + \vec{F}_n^{и} = 0.$$

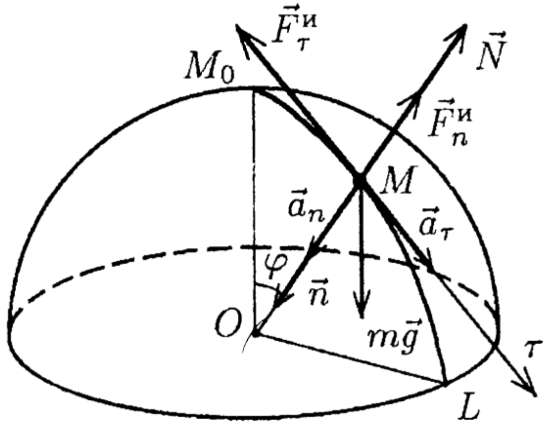
$$\sum F_\tau = 0: \quad mg\sin\varphi - m\frac{dv}{dt} = 0;$$

$$\sum F_n = 0: \quad mg\cos\varphi - N - \frac{mv^2}{R} = 0. \qquad N = mg\cos\varphi - \frac{mv^2}{R}.$$

Principiul D'Alembert pentru un punct material. Exemple

$$N = mg\cos\varphi - \frac{mv^2}{R}.$$

$$mg\sin\varphi - m\frac{dv}{dt} = 0;$$



Pentru determinarea forței de reacțiune *N* avem nevoie de viteza *v*.
Pentru determinarea vitezei, vom utiliza prima ecuație *sau* putem apela la teorema variației energiei cinetice:

$$T = mv^2/2, \quad T_0 = mv_0^2/2 = 0, \quad A = mgR(1 - \cos\varphi)$$

$$\frac{mv^2}{R} = 2mg(1 - \cos\varphi),$$

Rezultă:

$$N = mg(3\cos\varphi - 2).$$

În momentul desprinderii de cupolă, reacțiunea *N* este egală cu zero.

$$\varphi = \varphi_* = \arccos\frac{2}{3} = 48°10'.$$

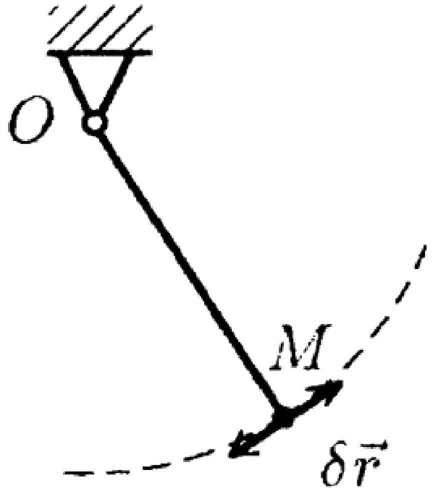
Principiul deplasărilor virtuale

- Un sistem mecanic se poate afla în stare de echilibru sub acțiunea mai multor forțe.
- Starea de echilibru în raport cu un sistem de referință *Oxyz* dacă viteza și accelerația punctelor sistemului mecanic în raport cu acest sistem sunt egale simultan cu zero $\vec{v}_k = 0,\ \vec{a}_k = 0\ (k = 1, 2, \ldots, N)$.
- Principiul deplasărilor virtuale reprezintă o regulă generală, care exprimă condiția necesară și suficientă pentru echilibrul unui sistem mecanic aleatoriu.

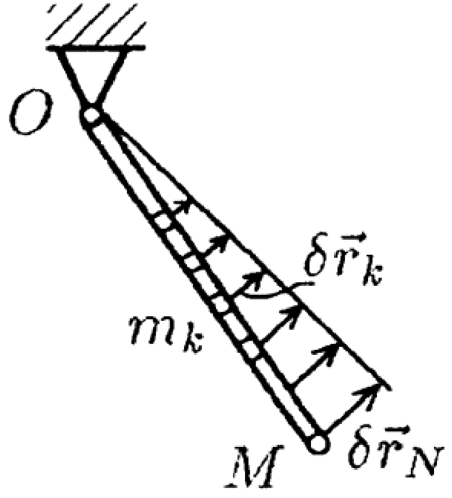
Deplasări virtuale

Vom analiza un sitem mecanic legat.
Legăturile se manifestă prin faptul că, pe lângă forțele active, asupra sistemului mecanic mai acționează și forțe de legătură – reacțiunile.
Totuși, legăturile mai pot fi formulate și în alt mod: punctele materiale ale sistemului legat nu pot realiza orice deplasări în spațiu. Fiecare punct poate realiza doar o anumită deplasare, în concordanță cu tipul legăturii aplicate, adică fără distrugerea legăturii.
Deplasări virtuale (sau deplasări posibile) ale sistemului material se numesc deplasările inifinit de mici ale punctelor materiale, permise într-un anumit moement de tip de către toate legăturile aplicate sistemului.

Exemplu.

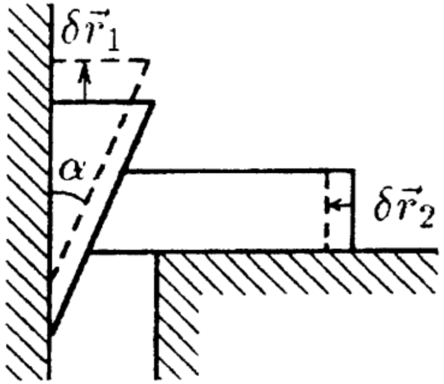


Deplasarea posibilă a punctului *M* *este vectorul inifinit de mic* ***dr,*** *perpendicular pe bară.*



Pentru bara materială *OM* *deplasarea posibilă este alcătuită din multitudinea de vectori* $\delta\vec{r}_k \ (k = 1, 2, \ldots, N)$

Deplasări virtuale. Exemple



Deplasarea virtuală a sistemului mecanic reprezentat în desen este alcătuită din vectorii infinit de mici $\delta\vec{r}_1,\ \delta\vec{r}_2,$ care sunt legați prin relația $\delta r_2 = \delta r_1 \operatorname{tg}\alpha$

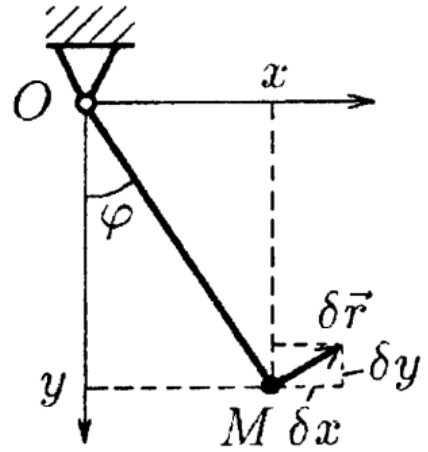
Deplasările virtuale nu sunt echivalente cu deplasările reale!!!

O deplasare infinit de mică a sistemului se descrie prin ecuațiile diferențiale $d\vec{r}_1 = \vec{v}_1\,dt,\ d\vec{r}_2 = \vec{v}_2\,dt, \ldots, d\vec{r}_N = \vec{v}_N\,dt$

Deplasarea virtuală se determină pentru un **timp fixat**. Acest tip de deplasarea este doar *imaginar*, și în realitate sistemul nu se deplasează!

Pentru a accentua acest principiu, în loc de diferențiala totală se utilizează notația $\delta:\ \delta\vec{r}_1,\ \delta\vec{r}_2, \ldots, \delta\vec{r}_N.$

Deplasări virtuale. Exemple



Pendulul matematic. Deplasarea virtuală este variația infinit de mică a vectorului $\delta\vec{r}$
Care poate fi reprezentat prin proiecții $\delta x,\ \delta y$

Dacă alegem în calitate de variabilă independentă δx atunci variația δy va fi determinată de legătură

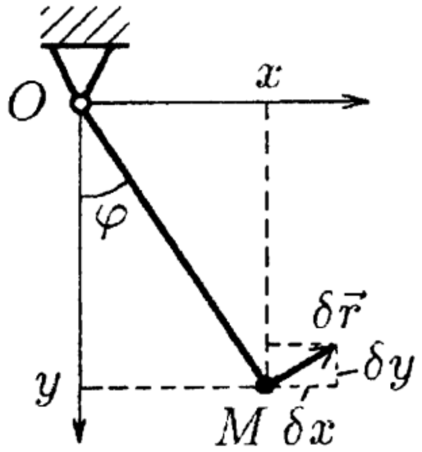
$$\delta y = -\delta x \operatorname{tg}\varphi = -x\,\delta x / y$$

Dependența dintre variația coordonatei, în cazul deplasărilor virtuale, poate fi determinată cu ajutorul **ecuației legăturii.**
De exemplu, legătura aplicată punctului material *M* constă în faptul că acesta este nevoit să se găsească permanent pe o circumferință de rază *OM = l.* Altfel spus, punctul *M este supus unei legături descrisă prin ecuația:* $x^2 + y^2 = \ell^2$

Dacă vom diferenția ambele părți ale acestei ecuații, se obține *condiția aplicată de legătură asupra variației coordonatelor:*

$$x\,\delta x + y\,\delta y = 0.$$

Deplasări virtuale. Exemple



$$x\,\delta x + y\,\delta y = 0.$$

Alegem o coordonată fixată, și exprimăm variația celeilalte.
Uneori, variația coordonatei poate fi exprimată prin variabile intermediare (parametri). De exemplu, pentru pendulul matematic, poate fi utilizat ca parametru unghiul de abatere,

$$x = \ell \sin\varphi; \quad y = \ell\cos\varphi. \qquad \delta x = \ell\cos\varphi\,\delta\varphi; \quad \delta y = -\ell\sin\varphi\,\delta\varphi.$$

Legături. Clasificare

Ecuația legăturii pentru pendului matematic *M* de lungime *l* $x^2 + y^2 = \ell^2$

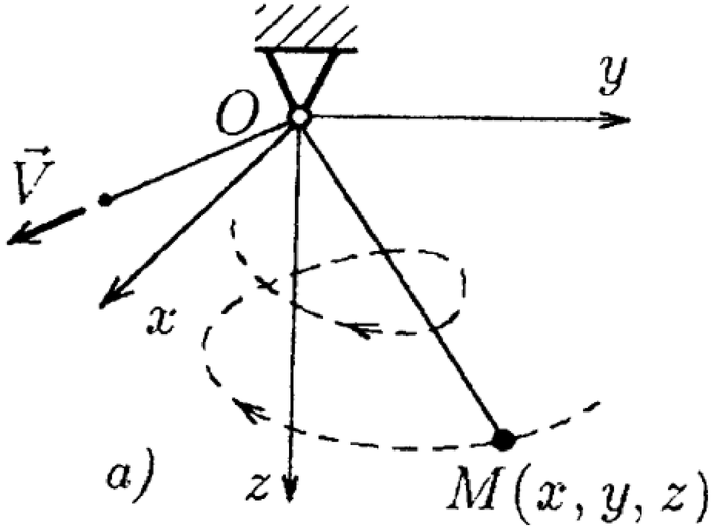
Dacă în loc de o bară rigidă vom considera pendului matematic cu fir $x^2 + y^2 \leqslant \ell^2$

Dacă pendulul are poasibilitatea de oscilație în spațiu, atunci $x^2 + y^2 + z^2 = \ell^2$ $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant \ell^2$

Fie că lungimea firului variază în timp conform legii $OM = \ell(t)$ **.** Atunci în ecuația legăturii vom mai avea un parametru – *timpul.*

*De exemplu, dacă firul este tras într-*un inel O *cu viteza V constantă, iar în momentul de timp t = 0 are lungimea* l_0*, atunci ecuația legăturii ia forma:*

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant (\ell_0 - Vt)^2.$$



a)

Legături. Clasificare

În caz general, în ecuația legăturii pot intra coordonatele tuturor punctelor materiale ale sistemului și timpul.

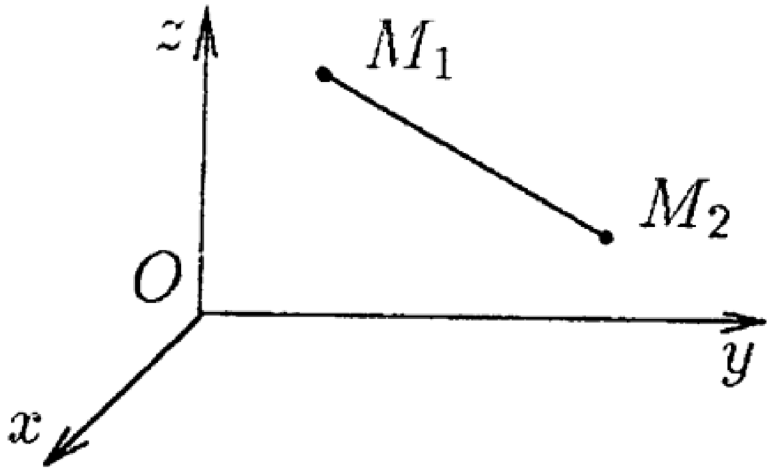
$$f_j(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \ldots; x_N, y_N, z_N, t) \geqslant 0.$$

Indicile j semnifică faptul că asupra sistemului mecanic poate fi aplicată nu doar una, ci mai multe legături $j \ (j = 1, 2, \ldots, s)$

În dependență de ecuația legăturii, acestea se clasifică în ***stabile și instablile, staționare și nestaționare****.*
Legătura se numește ***stabilă și bilaterală*** *dacă funcția ei este* ***egală cu zero!****.*

De exemplu două puncte materiale legate printr-o bară rigidă. Ecuația legăturii constă din lungimea *l = const* și se exprimă prin ecuația

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = \ell^2.$$



Dacă ecuația legăturii are forma unei inegalități, atunci numim legătura Nestaționară sau unilaterală

Legături ideale. Lucrul virtual

Lucrul virtual. Fie un moment de timp *t*. Fie $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N$ - razele vectoare ale punctelor sistemului mecanic în acest moment de timp, și $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_N$ - forțele care acționează asupra acestor puncte. Vom imprima sistemului o deplasare virtuală $\delta\vec{r}_1, \delta\vec{r}_2, \ldots, \delta\vec{r}_N$. Atunci forțele aplicate vor efectua lucrul elementar

$$\delta A = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \cdot \delta\vec{r}_k = \vec{F}_1 \cdot \delta\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot \delta\vec{r}_2 + \ldots + \vec{F}_N \cdot \delta\vec{r}_N .$$

Suma lucrului elementar, realizat de forțele aplicate sistemului la deplasarea virtuală a punctelor acestuia se numește ***Lucrul virtual****.*

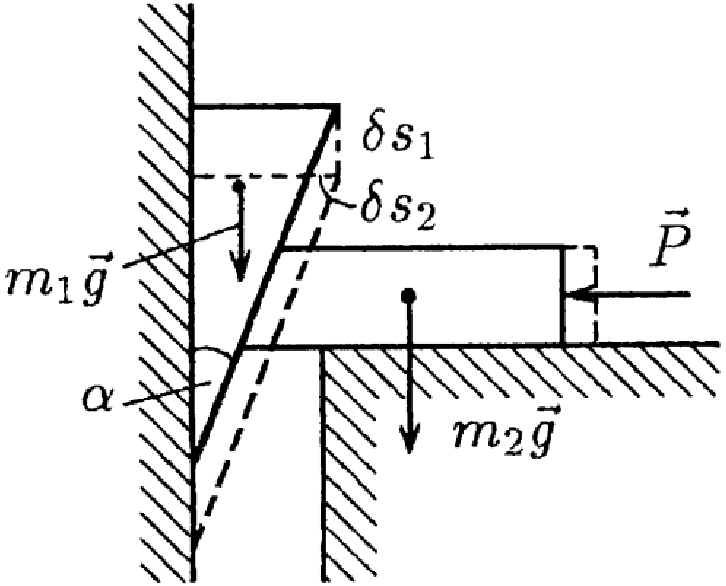
Lucrul virtual poate fi calculat și pentru forțele de reacțiune separat: $\delta A^R = \sum_{k=1}^{N} \vec{R}_k \cdot \delta\vec{r}_k .$

Legătura se numește ideală, dacă lucrul virtual al forțelor de reacțiune este zero. În caz contrar – neideală.

Principiul delpasărilor virtuale

Exemplu.

Determinați forța **P**, care va reține prismele absolut netede de masă m_1 *și* m_2 în echilibru.



$$\delta s_1,\ \delta s_2\ (\delta s_2 = \delta s_1 \operatorname{tg}\alpha)$$

$$\delta A^a = \delta A(m_1\vec{g}) + \delta A(m_2\vec{g}) + \delta A(\vec{P}) = m_1 g\,\delta s_1 - P\,\delta s_2.$$

$$(m_1 g - P\operatorname{tg}\alpha)\delta s_1 = 0.$$

Întrucât deplasarea virtuală este diferită de zero: $\delta s_1 \neq 0$

$$m_1 g - P\operatorname{tg}\alpha = 0.$$

$$P = m_1 g \operatorname{ctg}\alpha.$$

Principiul delpasărilor virtuale

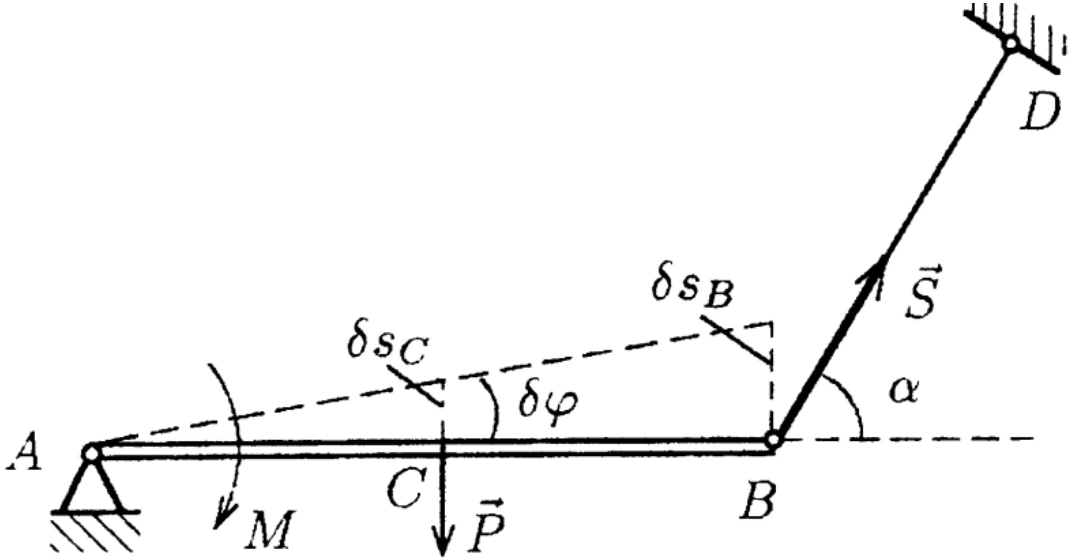
Exemplu.

Bara omogenă *AB* de lungime *l* și greutate *P* este acționată de cuplul de forțe cu momentul *M* . Determinați reacțiunea barei *BD* pentru care bara se află în echilibru.

$$\delta s_C = |\delta \vec{r}_C| = \frac{1}{2}\ell\,\delta\varphi; \quad \delta s_B = |\delta \vec{r}_B| = \ell\,\delta\varphi.$$

$$\delta A^a = -M\,\delta\varphi - \frac{1}{2}P\ell\,\delta\varphi + S\ell\,\delta\varphi\cos(90^\circ - \alpha) =$$

$$= \left(-M - \frac{1}{2}P\ell + S\ell\sin\alpha\right)\delta\varphi = 0.$$



$$S = \frac{2M + P\ell}{2\ell\sin\alpha}.$$

Principiul D'Alembert - Lagrange

Principiul D'Alembert, în combinație cu principiul deplasărilor virtuale au dus la apariția în mecanică a unui principiu nou: Principiul D'Alembert – Lagrange.

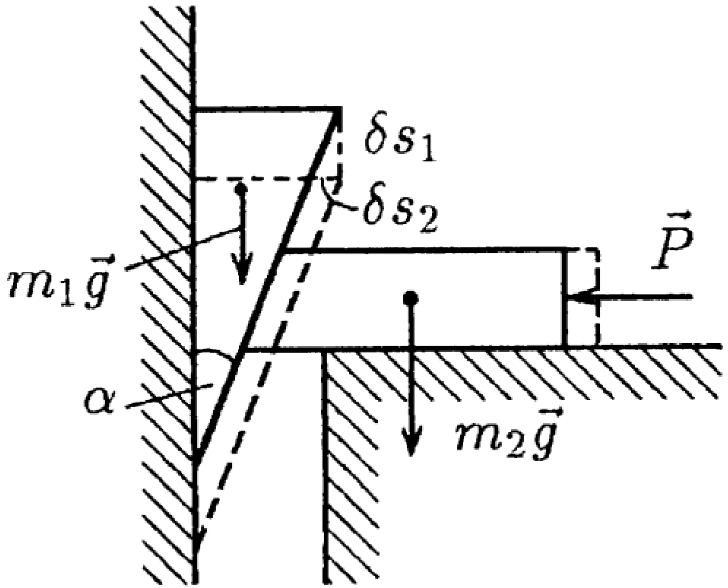
Pentru orice mișcare a sistemului mecanic, supus legăturilor ideale, lucrul virtual sumar al forțelor active și forțelor de inerție este egal cu zero!

Formularea matematică: $\delta A^a + \delta A^и = 0.$

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^a \cdot \delta \vec{r}_k + \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^и \cdot \delta \vec{r}_k = 0.$$

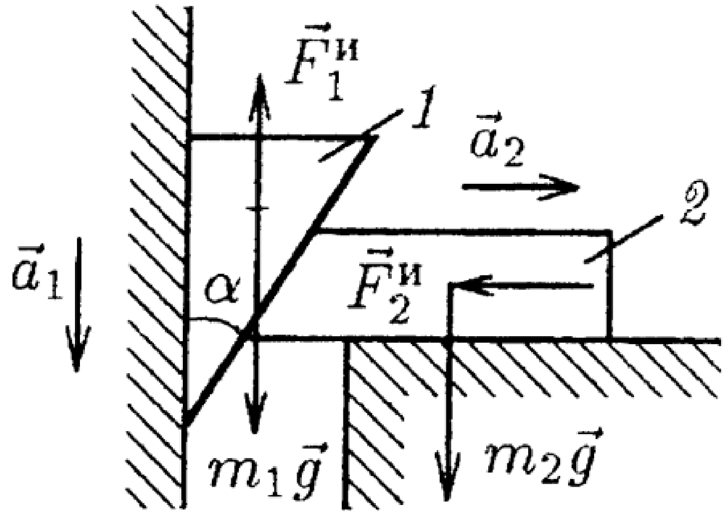
Principiul D'Alembert – Lagrange. Exemple

Exemplu. Aplicând principiul D'Alembert – Lagrange, determinați accelerația pismei 1, dacă forța P, care susține sistemul în stare de echilibru, este înlăturată.



Rezolvare.

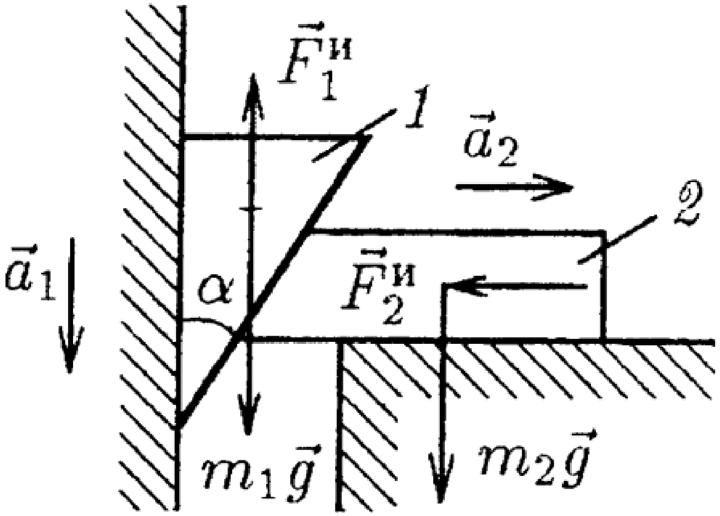
Vom indica pe desen accelerațiile, forțele active și forțele de inerție



$$\vec{F}_1^{и} = -m_1\vec{a}_1, \quad \vec{F}_2^{и} = -m_2\vec{a}_2$$

Principiul D'Alembert – Lagrange. Exemple

Modulul forțelor de inerție $F_1^{и} = m_1 a_1; \quad F_2^{и} = m_2 a_1 \operatorname{tg}\alpha.$



Vom aplica sistemului o deplasare virtuală posibilă – deplasarea prismei 1 în jos cu δs_1 și deplasarea prismei 2 înspre dreapta cu $\delta s_2 = \delta s_1 \operatorname{tg}\alpha.$

Aplicând principiul D'Alembert – Lagrange:

$$m_1 g\, \delta s_1 - F_1^{и} \delta s_1 - F_2^{и} \delta s_2 = 0.$$

Substituim forțele de inerție și obținem $m_1 g - m_1 a_1 - m_2 a_1 \operatorname{tg}^2\alpha = 0.$

Din această ecuație extragem accelerația prismei 1

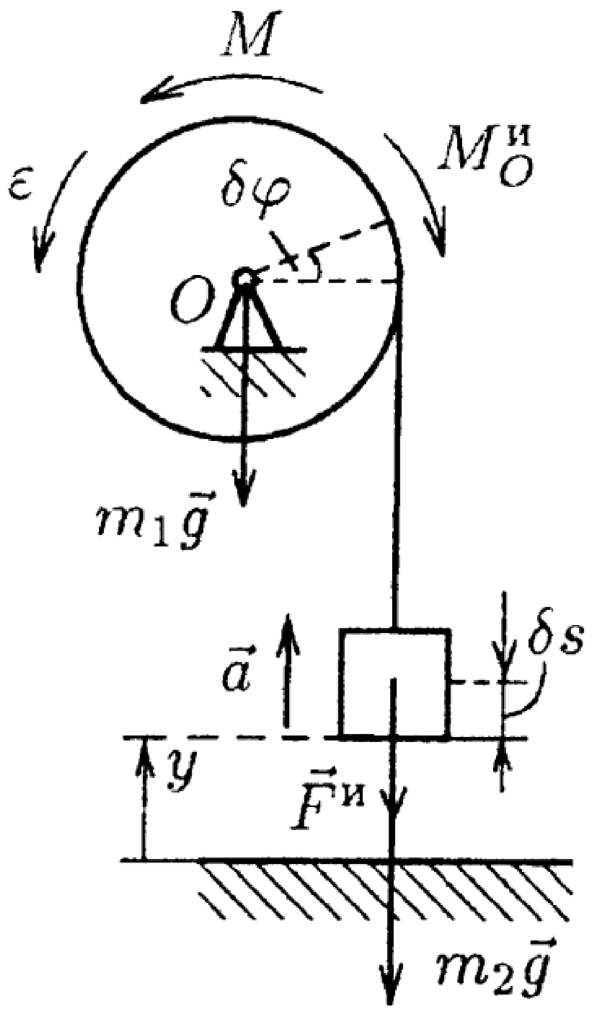
$$a_1 = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2 \operatorname{tg}^2\alpha},$$

Respectiv, accelerația prismei 2 $a_2 = a_1 \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{m_1 g \operatorname{tg}\alpha}{m_1 + m_2 \operatorname{tg}^2\alpha}.$

Principiul D'Alembert – Lagrange. Exemple

Exemplu. Greutatea de masă m_2 este ridicată în sus cu ajutorul unui fir înfășurat pe un tambur de rază R. Asupra tamburului este aplicat moementul *M. Determinați ecuația de mișcare a greutății, dacă în momentul inițial de timp aceasta se afla în repaus.* Momentul cuplului de forțe are forma $M = M_0 + \alpha t \ (\alpha = \text{const})$

$$M_0 = m_2 g R$$



Rezolvare.

Vom determina accelerația greutății prin aplicarea principiului D'Alembert – Lagrange asupra întregului sistem mecanic. Forțele active sunt: momentul cuplului și forțele de greutate m_1g, m_2g. La acest sistem vom adăuga forța de inerție aplicată greutății $F_1^{и} = m_1 a$. La ecuația momentelor vom adăuga momentul de inerție a tamburului

$$M_O^{и} = J_O \varepsilon = \frac{m_1 R^2}{2} \frac{a}{R} = \frac{1}{2} m_1 a R.$$

Principiul D'Alembert – Lagrange. Exemple

Rezolvare.

Forța $F_1^{и} = m_1 a$ este orientată în sens opus accelerației ***a***, iar momentul de inerție $M_O^{и}$ în sens opus accelerației tamburului $\varepsilon = a/R$.

Să imprimăm sistemului o deplasare virtuală $\delta\varphi$...

Lucrul virtual al forțelor active și de inerție:

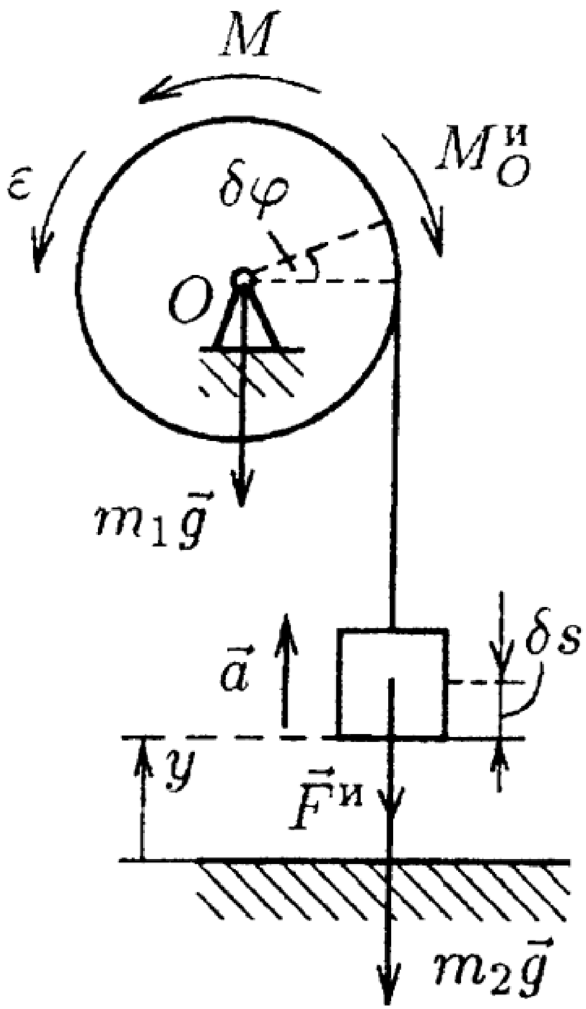
$$M\,\delta\varphi - M_O^{и}\,\delta\varphi - m_2 g\,\delta s - F_2^{и}\,\delta s = 0.$$

Substituind expresiile pentru M, $M_O^{и}$, $F_2^{и}$ și ținând cont că $\delta s = R\,\delta\varphi,\ M_0 = m_2 g R,$ se obține:

$$\alpha t - \frac{1}{2} m_1 R a - m_2 R a = 0.$$

De unde, accelerația greutății

$$\ddot{a} = \frac{2\alpha t}{R(m_1 + 2m_2)}.$$



Principiul D'Alembert – Lagrange. Exemple

Rezolvare.

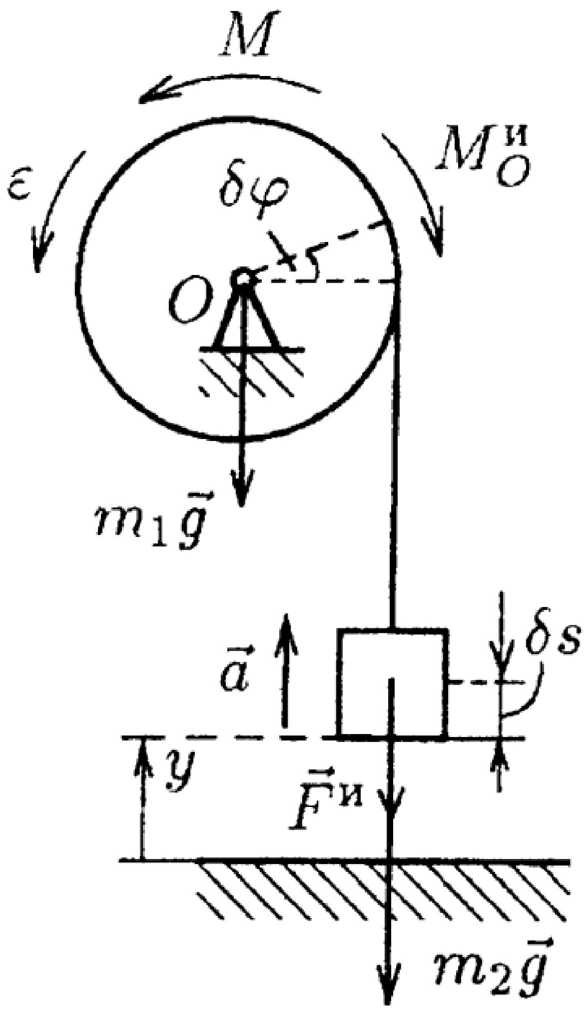
Fie *y* – coordonata greutății, măsurată în raport cu poziția inițială ($t = 0$). Atunci, pentru ecuația de mișcare a greutății se obține

$$\ddot{y} = \frac{2\alpha t}{R(m_1 + 2m_2)}.$$

Dacă integrăm cu condițiile inițiale $(t = 0,\ y(0) = \dot{y}(0) = 0)$

Se obține

$$y = \frac{\alpha t^3}{3R(m_1 + 2m_2)}.$$



Bibliografie

1. Butenin N. V. I. L. Lunţ, D. R. Merkin Curs de mecanică teoretică. Vol. 1, 2. Chişinău 1993.
2. Caraganciu V. M. Colpajiu, M. Ţopa Mecanica teoretică. Chişinău 1994
3. I. V. Meşcerskii. Culegere de probleme la MT, Chişinău, 1991.
4. Caraganciu V. MT, Compendiu şi probleme, 2008
5. С. М. Тарг Краткий курс теоретической механики. Наука, Москва, 1967
6. V. Szolga. Mecanica teoretică. Vol. 1. Statica, Divers-press, Bucureşti, 1994